# ALCUNE PROPRIETÀ ED APPLICAZIONI FINANZIARIE DELLA MEDIA ANTIARMONICA (*) (**)

MARIA CALIRI GRECO

*Istituto di Matematica per la Ricerca Operativa, Università di Palermo.*

Versione definitiva pervenuta il 30-10-80.

In questa Nota si ottengono alcune proprietà della media antiarmonica di ordine 2 utilizzando note leggi del pendolo composto e viene messo in evidenza che essa non è sempre una media interna.

Si considera poi la media antiarmonica di ordine $K$ ponderata con pesi di segno qualunque e ne viene infine illustrato l'uso e il significato in alcuni problemi di matematica finanziaria.

1. B. De Finetti in un suo lavoro del 1931 [1] ha studiato le proprietà di alcune medie, fornendo anche esempi di problemi pratici in cui esse si presentano. Noi vogliamo fermare l'attenzione sulla media antiarmonica di ordine 2 di $n$ misure $x_i$:

$$X = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i} \tag{1}$$

che De Finetti introduce come lunghezza ridotta di un pendolo composto. Le $x_i$ della (1) rappresentano in tal caso la distanza di ogni punto materiale $p_i$ del pendolo dal centro di sospensione. Sulle proprietà della media antiarmonica si può dire:

1) essa è omogenea (il suo valore risulta moltiplicato per $c$ se tutte le misure vengono moltiplicate per $c$);

2) è maggiore della media aritmetica;

3) non è associativa (non si può sostituire ad un sottoinsieme delle misure la loro media, nel senso che in generale tale sostituzione modifica il risultato);

4) non è traslativa (se tutte le misure vengono aumentate di una stessa quantità $c$ il suo valore non viene aumentato di $c$);

5) non è monotona (può decrescere al crescere di una delle misure).

---

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo GNAFA del C.N.R.

(**) Ringrazio il prof. E. Volpe di Prignano per i suggerimenti e le osservazioni critiche ad una precedente stesura di questo lavoro.

È nostro scopo dedurre dalle leggi fisiche del pendolo composto qualche proprietà per la media antiarmonica.

*a*) La lunghezza ridotta è maggiore della distanza del baricentro del pendolo dal centro di sospensione, riottenendo che *la media antiarmonica è maggiore della media aritmetica.*

*b*) La legge di reversibilità del pendolo composto afferma che un pendolo composto sospeso ad un punto (centro di oscillazione) che dista $X$ dal centro di sospensione oscilla con lo stesso periodo. Ciò significa che ogni punto materiale disterà dal nuovo centro di sospensione $X-x_i$. In termini di media tale risultato si enuncia nel seguente modo: *la media antiarmonica $X$ di $n$ misure $x_i$ non varia se ciascuna viene aumentata di $X-x_i$*. Si intuisce facilmente che se le $x_i$ sono concordi le $X-x_i$ non lo sono ed in conseguenza la media $X$ può risultare ad esse esterna. Inoltre il fatto che le $n$ misure $x_i$ abbiano la stessa media antiarmonica delle $n$ misure $X-x_i$ verifica l'affermazione che la media antiarmonica non è monotona. Se $d$ è la media aritmetica delle $n$ misure $x_i$ le leggi del pendolo:

*i*) un pendolo composto oscillerà con lo stesso periodo se sospeso da un punto che dista $2d$ dal suo centro di sospensione;

*ii*) un pendolo composto non varierà il suo periodo di oscillazione se sospeso da un punto che dista $2d-X$ dal suo centro di sospensione
consentono di formulare le seguenti altre proprietà:

*c*) *la media antiarmonica $X$ di $n$ misure $x_i$ non varia se ogni misura viene aumentata di $2(d - x_i)$*;

*d*) *la media antiarmonica $X$ di $n$ misure $x_i$ non varia se ogni misura viene aumentata di $X - 2d$.*

Si perviene ad una generalizzazione delle proprietà enunciate osservando che esse continuano a valere anche se riferite ad un numero parziale $p$ delle $n$ misure $x_i$. Così per esempio la *b*) diventa: *la media antiarmonica $X$ di $n$ misure $x_i$ non varia se a ciascuna di $p$ di esse viene sommata la quantità $X - 2x_i$.*

Anche le altre due proprietà varranno ancora se con $d$ si indicherà la media aritmetica delle $p$ misure variate.

2. Più in generale si definisce media antiarmonica di ordine $k$ di $n$ misure $x_i$ ponderata con pesi $C_i$ la quantità

$$X^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} C_i x_i^{k+1}}{\sum_{i=1}^{n} C_i x_i^{k}} \tag{2}$$

Per questa le proprietà precedentemente esposte non valgono più in quella forma, ma per ogni $k$ occorre precisare la quantità da sommare alle $x_i$ per l'invarianza della (2). A titolo di esempio osserviamo che la (1) riferita al caso di due sole misure $x_1$ ed $x_2$ può scriversi $x_1(x_1 - X) = x_2(X - x_2)$.

Tale relazione esprime che le suddette misure sono le ascisse di due punti che si trovano sulla parabola di equazione $y = x(x - X)$ e che hanno ordinata opposta. Ma su tale parabola vi sono quattro coppie di tali punti, simmetricamente disposti rispetto al vertice: $(x_1, x_2)$, $(X - x_1, X - x_2)$, $(X_1, X - x_2)$, $(X - x_1, x_2)$

e quindi quattro coppie di misure aventi stessa media antiarmonica, riottenendo la *b*) e la sua generalizzazione. Risulta evidente allora che si perverrà a risultati diversi considerando la (2). Per essa infatti, sempre nel caso di due sole misure, si ha $c_1x_1^k(x_1 - X^{(k)}) = c_2x_2^k(X^{(k)} - x_2)$. $x_1$ ed $x_2$ rappresentano allora ascisse di due punti che si trovano rispettivamente sulle curve $y = c_ix^k(x - X)$ $\forall i = 1, 2$ ed aventi ordinata opposta. Ma tali curve pur se intersecano, come la parabola di cui sopra, l'asse delle ascisse nell'origine e in $x = X^{(k)}$ hanno per $x < 0$ e $c_i > 0$ un ramo positivo se $k$ è dispari o negativo per $k$ pari. Ciò significa che (ad eccezione del minimo) vi sono almeno quattro di tali coppie di punti, disposte in ugual numero attorno al minimo, (quattro per $k$ pari, otto per $k$ dispari). Ne consegue che la *b*) varrà con riferimento a valori che sono soluzioni dell'equazione $c_ix^k(x - X^{(k)}) + c_{3-i}x_{3-i}(x_{3-i} - X^{(k)}) = 0$ $\forall i = 1, 2$.

3. Vogliamo ora considerare alcune applicazioni finanziarie della (2). È noto che se $n$ grandezze crescono in progressione geometrica a tasso costante, la loro somma crescerà a tasso crescente dato dalla (2). Infatti si considerino $n$ valori $x_i$ crescenti in progressione geometrica di ragione $r_i$. Le somme $\Sigma x_i$, $\Sigma x_ir_i$, $\Sigma x_ir_i^2$, $\ldots$, $\Sigma x_ir_i^n$ risultano anch'esse crescenti, non più in progressione geometrica ma, rispettivamente, secondo i tassi di incremento $\Sigma x_ir_i/\Sigma x_i$, $\Sigma x_ir_i^2/\Sigma x_ir_i$, $\ldots$, $\Sigma x_ir_i^n/\Sigma x_ir_i^{n-1}$.

Un esempio è il caso di più popolazioni riportato in (2). È facile tradurre ciò in termini finanziari, mediante i seguenti esempi:

*a*) Si consideri un'impresa che per attuare un'attività industriale o commerciale, ecc. ha una gestione finanziaria articolata su più conti, regolati in regime composto, alcuni a debito altri a credito. È evidente che l'impresa considera nel suo complesso la situazione finanziaria in quanto se i singoli conti sono concatenati da nessi causali non è utile la considerazione di essi singolarmente presi. Prescindendo allora da movimenti successivi, detti $C_i$ i capitali iniziali ed $r_i$ i fattori annui di capitalizzazione e pensando alla gestione finanziaria come un unico investimento-finanziamento, il fattore di montante di proseguimento dall'anno $k$ all'anno $k + 1$ della corrispondente legge globale è

$$r^{(k)} = \frac{\sum C_ir_i^{k+1}}{\sum C_ir_i^k} \tag{3}$$

ossia la (2). La legge finanziaria (3) dell'aggregato individua un regime composto a tasso annuo variabile.

Si supponga invece che l'impresa abbia un'attività che prevede depositi e finanziamenti ripartiti nel tempo, che nella gestione aziendale non possono essere compensati. Detta situazione sia schematizzabile mediante le somme $C_1$, $C_2$, $\ldots$, $C_n$ esigibili ai tempi 1, 2, $\ldots$, $n$. Per quanto precede il generico fattore di montante di proseguimento della corrispondente legge globale è

$$r^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} C_ir_i^{k+1-i}}{\sum_{i=1}^{k} C_ir_i^{k-i}} = \frac{\sum_{i=1}^{k} C_iv_i^ir_i^{k+1}}{\sum_{i=1}^{k} C_iv_i^ir_i^k} \;* \tag{4}$$

(*) $v_i = r_i^{-1}$.

ossia la media antiarmonica di ordine $k$ dei fattori annuali di capitalizzazione $r_i$ ponderata con pesi $C_i v_i^i$. La situazione finanziaria finale è quindi esprimibile in funzione dei fattori (4)

$$M_n = \sum_{i=1}^{n} C_i r_i^{n-1} = \sum_{i=1}^{n} C_i \prod_{p=1}^{n-1} r^{(p)},$$

avendo posto

$$\prod_{p=n}^{n-1} r^{(p)} = 1.$$

*b*) Il tasso $i^{(k)}$ deducibile dalla (4) può anche essere interpretato in termini di Tasso Interno di Rendimento Annuo (T.I.R.A.) di un investimento. È noto il metodo TRM (così denominato dalle iniziali dei suoi Autori (3) e (4) con il quale per ogni progetto misto si calcola il montante a due tassi, a seconda del segno del saldo. Si suppone in pratica che ogni esborso o remunerazione del progetto venga versata e prelevata da un c/c a tasso non reciproco sul quale si opera con il metodo dei saldi. Il montante finale uguagliato a zero, $M(x, y) = 0$, fornisce le funzioni $y = y(x)$ o $x = x(y)$. Il progetto si accetta solo se, essendo $x^*$ ed $y^*$ i tassi di mercato, rispettivamente di provvista e di impiego, è $y(x^*) > x^*$ o $x(y^*) > y^*$.

Il metodo è stato variamente criticato. In particolare E. Volpe (5) nota la contraddizione nella quale cadono gli Autori i quali, dopo aver calcolato il montante a tassi distinti, operano la scelta ricorrendo ad un unico tasso di mercato. Volpe quindi introduce un nuovo criterio di scelta. Egli pone « una sorta ideale di c/c » tra l'azienda che deve operare la scelta ed il progetto il cui « saldo finale misura il costo o il rendimento » del progetto. Pertanto, considerato che una situazione debitoria del c/c dopo l'ultimo versamento realizzerebbe un utile per l'impresa, il progetto viene accettato solo se $M(x^*, y^*) < 0$ ossia se $y(x^*) < y^*$ oppure $x(y^*) > x^*$.

Qui si farà l'ipotesi che ogni somma venga versata in un c/c a tasso non reciproco e che il montante venga calcolato con il metodo dei capitali (ossia a due tassi a seconda che le somme siano in dare o in avere). Tale ipotesi sul tipo di c/c ha il solo scopo di creare un parallelo con il metodo TRM, giustificata dal fatto che in pratica gli esborsi di un progetto sono somme prese a prestito ad un tasso diverso da quello al quale sono investite le remunerazioni. Il montante complessivo al generico anno $k$ è

$$M_k(x, y) = \sum_{i=1}^{k} C_i r_i^{k-1} \quad \text{con} \quad r_i = \begin{cases} 1 + x & \forall\, C_i < 0 \\ 1 + y & \forall\, C_i \geq 0 \end{cases}$$

e quindi il fattore di montante della legge globale è

$$r^{(k)} = \frac{\sum_{i=1}^{k} C_i v_i^i r_i^{k+1}}{\sum_{i=1}^{k} C_i v_i^i r_i^k}$$

ossia la (4), ma in forma meno generale in quanto i fattori $r_i$ possono assumere solo due valori. Ciò permette di affermare che se $y < x$ è anche $r^{(k)} < 1 + y <$

$< 1 + x$. Il tasso $i^{(k)} = r^{(k)} - 1$ è dunque il T.I.R.A. per l'anno $(k, k + 1)$. Si può infine considerare il tasso indice di reddito incorporato del progetto ottenendo

$$\bar{r} = \left[ \frac{\sum_{i=1}^{n} C_i r_i^{n-i}}{\sum_{i=1}^{n} C_i v_i^i} \right]^{1/n} = \left[ \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\sum_{i=1}^{n} C_i v_i^i r_i^{k+1}}{\sum_{i=1}^{n} C_i v_i^i r_i^k} \right]^{1/n}$$

media geometrica dei montanti annuali di proseguimento $r^{(k)}$ riferiti al complesso delle $n$ somme che descrivono il progetto.


BIBLIOGRAFIA

[1] B. DE FINETTI, *Sul concetto di media*, G.I.I.A., n. 3 (1931), pagg. 369-396.

[2] M. DE VERGOTTINI, *Medie variabilità rapporti*. Boringhieri.

[3] D. TEICHROEW, A. ROBICHEK, M. MONTALBANO, *Mathematical analysis of rates of return under certainty*, Management Science, vol. 11, 1965.

[4] D. TEICHROEW, A. ROBICHEK, M. MONTALBANO, *An analysis of criteria for investment and financing decisions under certainty*, Management Science, vol. 12, 1965.

[5] E. VOLPE DI PRIGNANO-C. SICA, *Problemi di valutazione nelle operazioni finanziarie sostitutive e nei progetti misti*, Atti del Convegno Internazionale su « Programmazione Matematica e sue Applicazioni Economiche », Venezia, 1978.


## SUMMARY


In this paper, an interpretation in terms of the reduced compound pendulum length for the second order antiharmonic mean, as proposed by De Finetti, is given. By pendulum laws some properties mean are obtained. Finally this paper explains the meaning and the use for the antiharmonic weighted mean of order $k$, with reference to some financial mathematics problems.