Über die von v. Ettingshausen entdeckten verkürzten Rekursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen.

Von Niels Nielsen in Kopenhagen.

I. Herleitung einer allgemeinen Rekursionsformel.

Es scheint ganz unbeachtet geblieben, daß Andreas v. Ettingshausen schon im Jahre 1827 die, ein halbes Jahrhundert später, von L. v. Seidel und M. A. Stern wiedergefundenen verkürzten Rekursionsformeln für die Bernoullischen Zahlen entdeckt hat.

Der von v. Ettingshausen gegebene Beweis ist ein ganz elementarer, und zwar unter Zuhilfenahme der Prinzipien der Differenzenrechnung durchgeführt. Es ist indessen möglich, in sehr einfacher Weise eine höchst merkwürdige und sehr weitgehende Verallgemeinerung der oben erwähnten Formeln und ihrer später gefundenen Analogien herzuleiten.

Zu diesem Zweck bezeichnen wir durch k eine positive ganze Zahl und setzen der Kürze halber

$$\left.\begin{aligned} \varphi_k(\alpha) &= \frac{1}{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1)} \\ \psi_k(\alpha) &= \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1) \end{aligned}\right\}, \tag{1}$$

während speziell

$$\varphi_0(\alpha) = \psi_0(\alpha) = 1 \tag{2}$$

angenommen werden soll. Mit diesen Definitionen haben wir nunmehr die höheren Differenzen der beiden Fakultäten $\varphi_k(\alpha)$ und $\psi_k(\alpha)$ zu bestimmen.

Wird $k \geqq 1$ vorausgesetzt, so ergibt sich unmittelbar für die Differenzen erster Ordnung

$$\Delta\varphi_k(\alpha) = \varphi_k(\alpha+1) - \varphi_k(\alpha) = -k\varphi_{k+1}(\alpha+1),$$
$$\Delta\psi_k(\alpha) = \psi_k(\alpha+1) - \psi_k(\alpha) = k\psi_{k-1}(\alpha);$$

durch Wiederholung dieser Operationen finden wir allgemein

$$\left.\begin{aligned} &\Delta^n\varphi_k(\alpha) = (-1)^n k(k+1)\ldots(k+n-1)\,\varphi_{k+n}(\alpha+n) \quad k \geqq 1 \\ &\Delta^n\psi_k(\alpha) = 0, \quad 0 \leqq k \leqq n-1 \\ &\Delta^n\psi_k(\alpha) = k(k-1)\ldots(k-n+1)\,\psi_{k-n}(\alpha), \quad k \geqq n, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

und es ist offenbar ohne Belang für die Gültigkeit der letzten dieser Formeln, daß für gewisse ganzzahlige Werte von α die letzten Glieder des Ausdrucks

$$\Delta^n \psi_k(\alpha) = \sum_{n=0}^{s=n} (-1)^s \binom{n}{s} \psi_k(\alpha + n - s), \quad k \geqq n$$

verschwinden.

Nach diesen Vorbemerkungen bilden wir aus der unendlichen Zahlenfolge

$$a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_n \ldots, \tag{4}$$

die bloß der Bedingung $a_0 \neq 0$ genügt, sonst aber ganz beliebig angenommen werden darf, die unendliche Folge ganzer Polynome

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x), \ldots f_n(x), \ldots, \tag{5}$$

indem für jedes n

$$f_n(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{a_s x^{n-s}}{(n-s)!} \tag{6}$$

gesetzt wird; $f_n(x)$ ist daher genau n^{ten} Grades in x, und für $n \geqq 1$ ist immer

$$f_n'(x) = f_{n-1}(x). \tag{7}$$

Weiter haben wir die beiden Polynome

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (m - q + \nu)!\, x^{n-\nu} f_{m+\nu+1}(x), \quad 0 \leqq q \leqq m \\ G(x) &= \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} (m + q + \nu)!\, x^{n-\nu} f_{m+\nu}(x), \quad 0 \leqq q \leqq n \end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

wo q eine ganze Zahl bezeichnet, als lineare Funktionen der Elemente a_k der Zahlenfolge (5) zu ordnen.

Es liegt übrigens auf der Hand, daß eine beliebige der beiden Funktionen $F(x)$ und $G(x)$ aus der anderen hergeleitet werden kann, falls q als eine negative ganze Zahl angenommen wird. Die folgenden Resultate zeigen aber deutlich, daß es am bequemsten ist, die beiden Definitionen in (8) zu benützen.

Bezeichnet nunmehr a_k ein beliebiges Element der Zahlenfolge (4), so kommt a_k im summatorischen Gliede von $F(x)$ in der Verbindung

$$(-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{(m - q + \nu)!}{(m - k + \nu + 1)!} a_k x^{m+n-k+1} \tag{9}$$

vor, wo jedoch für $k > m + 1$

$$\nu \geqq k - m - 1$$

angenommen werden muß, denn sonst enthält das betrachtete Glied nicht das Element a_k. In $G(x)$ finden wir in ähnlicher Weise im summatorischen Gliede

$$(-1)^\nu \binom{n}{\nu} \frac{(m+q+\nu)!}{(m+\nu-k)!} a_k x^{m+n-k}, \tag{10}$$

wo für $k > m$

$$\nu \geqq k - m$$

anzunehmen ist.

Da der Exponent der in (9) und (10) vorkommenden Potenzen von x von ν nicht abhängt, so entfließen wegen (3) die beiden folgenden Ausdrücke

$$\left.\begin{aligned} F(x) = \sum_{s=0}^{s=q} \frac{(n+q-s)!\,(m-q)!\,a_s x^{m+n-s+1}}{(q-s)!\,(m+n-s+1)!} + \\ + (-1)^n \sum_{s=0}^{s=m-q} (n+s)! \binom{m-q}{s} a_{n+q+s+1} x^{m-q-s} \end{aligned}\right\}, \tag{11}$$

$$G(x) = (-1)^n \sum_{s=0}^{s=m+q} (n+s)! \binom{m+q}{s} a_{n-q+s} x^{m+q-s}. \tag{12}$$

In $F(x)$ sind also die Koeffizienten

$$a_{q+1},\ a_{q+2},\ \ldots,\ a_{n+q} \tag{13}$$

weggefallen, während $G(x)$ für $q \leqq n-1$ die Koeffizienten

$$a_0\ a_1\ a_2 \ldots a_{n-q-1} \tag{14}$$

nicht enthalten kann; für $q = n$ enthält $G(x)$ aber sämtliche Koeffizienten a_k für $0 \leqq k \leqq m + n$.

Besonders interessant ist der Spezialfall, wo die Polynome $f_n(x)$ für jedes n der Funktionalgleichung

$$(-1)^n f_n(-x-1) = f_n(x) \tag{15}$$

Genüge leisten; es ist nämlich in diesem Falle wegen (6) und (15)

$$(-1)^n f_n(-1) = a_n. \tag{16}$$

Wird daher in (11) und (12) $x = -1$ gesetzt, so entfließt der Satz:

Befriedigen die Polynome (5) für jedes n die Funktionalgleichung (15), so gelten für die Elemente a_k der Zahlenfolge (4) die beiden verkürzten Rekursionsformeln

$$\sum_{s=0}^{=\omega}(-1)^s(m+n-q-s)!\left[(-1)^n\binom{n}{s}+(-1)^m\binom{m-q}{s}\right]a_{m+n-s+1}=$$

$$=\sum_{s=0}^{s=q}\frac{(-1)^s(n+q-s)!\,(m-q)!}{(q-s)!\,(m+n-s+1)!}a_s, \quad (17)$$

$$\sum_{s=0}^{s=\omega}(-1)^s(m+n+q-s)!\left[(-1)^n\binom{n}{s}-(-1)^m\binom{m+q}{s}\right]a_{m+n-s}=0, \quad (18)$$

wo die Summationen linker Hand so weit auszudehnen sind, bis die dort vorkommenden Binomialkoeffizienten beide verschwinden.

Dieser Satz ist in der Tat höchst merkwürdig; denn gilt für jedes n die Funktionalgleichung (15), so ist die Zahlenfolge (4) vollständig bestimmt, wenn bloß eine der beiden Folgen

$$a_1\ a_3\ a_5\ \ldots\ a_{2n+1}\ \ldots \quad (19)$$

$$a_0\ a_2\ a_4\ \ldots\ a_{2n}\ \ldots \quad (20)$$

gegeben ist, und zwar so, daß das erste Element a_1 bezw. a_0 nicht gleich Null sein darf.

Ist die Zahlenfolge (19) gegeben, so werden die Elemente in (20) durch die Relationen

$$\left.\begin{aligned} &a_0=2a_1,\\ &(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{2}a_{2n}-a_{2n+1}\right)=\sum_{s=0}^{s=n-1}\frac{(-1)^s a_{2s+1}B_{n-s}}{(2n-2s)!}\end{aligned}\right\}, \quad (21)$$

wo die B_n die Bernoullischen Zahlen bezeichnen, bestimmt. Umgekehrt erhalten wir aber, falls die Folge (20) gegeben ist,

$$(-1)^n a_{2n+1}=\sum_{s=0}^{s=n}\frac{(-1)^s a_{2s}T_{n-s+1}}{(2n-2s+1)!\,2^{2n-2s+1}}; \quad (22)$$

hier bezeichnen die T_n die Tangentenkoeffizienten.[1])

[1]) Man vergleiche meine Noten in Nieuw Archief vor Wiskunde (2) Bd. 10, p. 154--160, 1912 und in Berichte der kgl. sächsischen Gesellschaften zu Leipzig 1913, p. 5—6.

Die beiden Gleichungssysteme (21) und (22) sind äquivalent und ein beliebiges dieser Systeme stellt die notwendige und hinreichende Bedingung dar, die von den Elementen a_k befriedigt werden muß, falls die Polynome $f_n(x)$, für jedes n, der Funktionalgleichung (15) genügen.

Es ist übrigens einleuchtend, daß die beiden Bedingungen (15) und (16), wegen (7), gleichbedeutend sind, wenn sie für jedes n gültig sind.

Was endlich die Anwendungen unserer beiden allgemeinen Formelpaare (11) und (12), (17) und (18) betrifft, so verzichten wir auf die Niederschreibung der überaus vielen speziellen Formeln; wir beschränken uns darauf, die Substitutionen für die a_k und die komplexe Variable x anzugeben und die gehörigen Quellenzitate anzuführen.

II. Bernoullische Funktionen und Zahlen.

Als erste Anwendung der vorhergehenden allgemeinen Formeln wählen wir die Elemente der Zahlenfolge I, (19) als

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{2n+1} = 0, \tag{1}$$

und somit ist wegen I, (21)

$$a_0 = 1, \quad a_{2n} = \frac{(-1)^{n-1} B_n}{(2n)!}; \tag{2}$$

in diesem Falle sind die Elemente der Funktionenfolge I, (5) die Bernoullischen Funktionen

$$B_0(x), \; B_1(x), \; B_2(x), \ldots, B_n(x), \ldots \tag{3}$$

Wie aus (1) und (2) deutlich hervorgeht, nehmen die so erhaltenen Formeln verschiedene Formen an, je nachdem $m+n$ gerade oder ungerade vorausgesetzt wird.

Wir betrachten die folgenden Spezialfälle:

1. Ist in I, (17) $q > 0$, so entfließen verkürzte Rekursionsformeln, die Bernoullische Zahlen mit dem Stellenzeiger

$$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_\nu, B_{\nu+s+1}, B_{\nu+s+2} \ldots, B_{\nu+s+t} \tag{4}$$

enthalten. Ich vermute, daß diese Formeln diejenigen sind, die Haussner[1]) als von Saalschütz[2]) herrührend erwähnt.

2. Für $q = 0$ liefert I, (17) eine verkürzte Formel, die jedenfalls von Saalschütz[3]), beinahe gleichzeitig aber auch von

[1]) Göttinger Nachrichten 1893, p. 778.

[2]) Physikalisch-ökonom. Gesellschaft zu Königsberg i. Pr. 1892. Die Arbeit ist im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik nicht erwähnt.

[3]) Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 37, p. 374—378; 1892.

Hermite[1]), gefunden worden ist; diese Formel enthält die Zahlen

$$B_\nu,\ B_{\nu-1}, \ldots,\ B_s, \tag{5}$$

wo $s = \frac{1}{2}\nu$ oder $s = \frac{1}{2}(\nu - 1)$ zu setzen ist, je nachdem ν gerade oder ungerade ist.

3. Wird in I, (18) $q = 0$ angenommen, so entfließen die von A. v. Ettingshausen[2]) entdeckten Formeln, von welchen L. v. Seidel[3]) ein halbes Jahrhundert später einen Spezialfall wiedergefunden hat, während Stern[4]) die allgemeinen Formeln aufs neue entdeckte.

Diese Formeln sind von demselben Charakter wie die in 2. erwähnten.

4. Die der Annahme $q > 0$ entsprechenden Formeln I, (18) scheinen neu zu sein; sie sind etwas komplizierter als die vorhergehenden.

5. Setzen wir allgemein

$$f_n(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) B_{n+1}(x) - (n+2)\, B_{n+2}(x), \tag{6}$$

also

$$a_0 = \frac{1}{4} - B_1,\quad a_{2n} = \frac{(-1)^{n+1} B_{n+1}}{(2n+1)!},\quad a_{2n+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n B_{n+1}}{(2n+2)!}, \tag{7}$$

so entfließen wegen I, (17) und (18) ähnliche, doch nicht so einfache Formeln wie mit der Annahme 3.

Was endlich die Formeln I, (11) und (12) betrifft, so erwähnen wir unter Zuhilfenahme der Folgen (3) und (6) die folgenden Anwendungen:

6. $x = -\frac{1}{2}$; die Funktionswerte

$$B_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,\ B_0\left(-\frac{1}{2}\right) = 1,\ B_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n (2^{2n} - 2) B_n}{(2n)!\, 2^{2n}} \tag{8}$$

liefern weitere verkürzte Rekursionsformeln für die B_n.

7. $x = -\frac{1}{4}$ oder $x = -\frac{3}{4}$ wegen der Ausdrücke

---

[1]) Methesis (2) Bd. 5, Suppl. II, p. 1—7; 1895.

[2]) Vorlesungen über die höhere Mathematik. Bd. I, p. 284—285; Wien 1827. Das Lehrbuch ist auch bemerkenswert, weil es schon so früh die Euler-Maclaurinsche Summenformel mit Restglied angibt; s. p. 428.

[3]) Sitzungsberichte der kgl. bayerischen Akademie 1877, p. 157—187.

[4]) Göttinger Abhandlungen, Bd. 23; 1878.

$$\left.\begin{aligned} B_{2n}\left(-\frac{1}{4}\right) = \quad B_{2n}\left(-\frac{3}{4}\right) &= \frac{(-1)^n (2^{2n}-2) B_n}{(2n)!\, 2^{4n}} \\ B_{2n+1}\left(-\frac{1}{4}\right) = -B_{2n+1}\left(-\frac{3}{4}\right) &= \frac{(-1)^n E_n}{(2n)!\, 2^{4n+2}} \end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

wo die E_n die Eulerschen Zahlen bezeichnen, entfließen verkürzte Rekursionsformeln für die B_n und die E_n.

8. Setzt man in I, (11) $q = 0$, $x = a$, wo a eine positive ganze Zahl bezeichnet, so entfließt wegen

$$\nu!\left(B_{\nu+1}(a) - B_{\nu+1}(0)\right) = s_\nu(a) = \sum_{r=1}^{r=a} r^\nu \tag{10}$$

für $F(a)$ der Ausdruck

$$F(a) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} s_{m+\nu}(a) - \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} \frac{B_{m+\nu+1}(0)}{m+\nu+1}. \tag{11}$$

Wird daher $m + n = 2p$ bezw. $m + n = 2p - 1$ gesetzt, so finden wir für die Summe

$$\alpha_{m,n}(a) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} s_{m+\nu}(a) = \sum_{r=1}^{r=a-1} r^m (a-r)^n \tag{12}$$

die interessanten Formeln

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{m,n}(a) &= \frac{m!\, n!\, a^{2p-1}}{(2p+1)!} - \\ &\quad - (-1)^{n+p} \sum_{s=0}^{\leqq \frac{\omega-1}{2}} (-1)^s \left[\binom{m}{2s+1} + \binom{n}{2s+1}\right] \frac{B_{p-s}}{2p-2s} a^{2s+1} \\ \alpha_{m,n}(a) &= \frac{m!\, n!\, a^{2p}}{(2p)!} - \\ &\quad - (-1)^{n+p} \sum_{s=0}^{\leqq \frac{\omega}{2}} (-1)^s \left[\binom{m}{2s} - \binom{n}{2s}\right] \frac{B_{p-s}}{2p-2s} a^{2s} \end{aligned}\right\}, \tag{13}$$

wo ω die größte der Zahlen m und n bezeichnet.

Glaisher[1]) hat den Spezialfall $m = n$ der ersten der Formeln (13) hergeleitet.

---

[1]) Quarterly Journal of Mathematics. Bd. 31, p. 241—247; 1899.

9. Wir erwähnen noch, daß die Raabesche[1]) Formel

$$B_n\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{x^n}{n!}+\sum_{s=1}^{\leq \frac{n}{2}}\frac{(-1)^s(2^{2s}-2)B_s}{(2s)!\,2^{2s}}\cdot\frac{x^{n-2s}}{(n-2s)!} \tag{14}$$

unter Zuhilfenahme der Entwicklungen I, (11) und (12) verschiedene der vorhergehenden Formeln wiedergibt.

III. Eulersche Funktionen und Zahlen.

Als zweite Anwendung wählen wir die Elemente der Zahlenfolge I, (20) als

$$a_0=\frac{1}{2},\ a_{2n}=0, \tag{1}$$

und somit ist wegen I, (22)

$$a_{2n+1}=\frac{(-1)^n T_{n+1}}{(2n+1)!\,2^{2n+2}}; \tag{2}$$

in diesem Falle sind die Elemente der Funktionsfolge I, (5) die Eulerschen Funktionen

$$E_0(x),\ E_1(x),\ E_2(x),\ldots,\ E_n(x),\ldots \tag{3}$$

Übrigens ist dieser Fall dem vorhergehenden so ähnlich, daß wir uns hier etwas kürzer fassen können.[2])

1. Ist in I, (17) $q>0$, so vermute ich, daß diese Formeln von Saalschütz gefunden worden sind.

2. Für $q=0$ rührt die verkürzte Formel I, (17) jedenfalls von Saalschütz her.

3. Wird in I, (18) $q=0$ angenommen, so entfließen die von Stern gegebenen Formeln, von welchen jedoch L. v. Seidel früher einen Spezialfall gefunden hat.

4. Die der Annahme $q>0$ entsprechenden Formeln I, (18) scheinen neu zu sein; sie sind etwas komplizierter als die in 3. betrachteten.

5. Setzen wir allgemein

$$f_n(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)E_{n+1}(x)-(n+2)\,E_{n+2}(x) \tag{4}$$

also

$$a_{2n}=\frac{(-1)^n T_{n+1}}{(2n+1)!\,2^{2n+2}},\quad a_{2n+1}=\frac{(-1)^{n+1} T_{n+1}}{(2n)!\,2^{2n+2}}, \tag{5}$$

---

[1]) Journal für Mathematik, Bd. 42, p. 355; 1851.

[2]) Wir wiederholen nicht die Zitationen der Arbeiten von Glaisher, Saalschütz, Seidel und Stern.

so entfließen wegen I, (17) und (18) ähnliche, doch nicht so einfache Formeln wie mit der Annahme 3.

Was die Formeln I, (11) und (12) betrifft, so erwähnen wir unter Zuhilfenahme der Folgen (3) und (4) die Anwendung.

6. $x = -\frac{1}{2}$; die Funktionswerte

$$E_{2n+1}\left(-\frac{1}{2}\right) = 0,\ E_0\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2},\ E_{2n}\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^n E_n}{(2n)!\,2^{2n+1}} \quad (6)$$

liefern verkürzte Rekursionsformeln, welche sowohl die Tangentenkoeffizienten als die Eulerschen Zahlen enthalten; die aus I, (12) für $q = 0$ hergeleiteten, speziellen Formeln dieser Art rühren von Stern her.

7. Setzt man in I, (12) $q = 0$, $x = a$, wo a eine positive ganze Zahl bezeichnet, so entfließen wegen

$$\nu!\left(E_\nu(a) - (-1)^a E_\nu(0)\right) = \sigma_\nu(a) = \sum_{r=0}^{r=a-1} (-1)^r (a-r)^\nu \quad (7)$$

für $G(a)$ der Ausdruck

$$G(a) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} \sigma_{m+\nu}(a) -$$

$$- (-1)^a \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} (m+\nu)!\, E_{m+\nu}(0). \quad (8)$$

Wird daher $m + n = 2p$ bezw. $m + n = 2p - 1$ gesetzt, so finden wir für die Summe

$$\beta_{m,n}(a) = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} a^{n-\nu} \sigma_{m+\nu}(a) = \sum_{s=1}^{s=a-1} (-1)^{a-s} s^m (a-s)^n. \quad (9)$$

die Entwicklungen

$$\beta_{m,n}(a) = (-1)^{n+p+1} \sum_{s=0}^{\leqq \frac{\omega-1}{2}} (-1)^s \left(\binom{m}{2s+1} + (-1)^a \binom{n}{2s+1}\right) \frac{T_{p-s}}{2^{2p-2s}} a^{2s+1} \quad (10)$$

$$\beta_{m,n}(a) = (-1)^{n+p+1} \sum_{s=0}^{\leqq \frac{\omega}{2}} (-1)^s \left[\binom{m}{2s} - (-1)^a \binom{n}{2s}\right] \frac{T_{p-s}}{2^{2p-2s}} a^{2s}, \quad (11)$$

wo ω die größte der Zahlen m und n bezeichnet.

Glaisher hat ebenfalls den Spezialfall $m = n$ der Formel (10) hergeleitet.

8. Wir bemerken noch, daß die Entwicklung

$$E_n\left(x-\frac{1}{2}\right)=\frac{x^n}{n!\,2}+\sum_{s=1}^{\leq\frac{n}{2}}\frac{(-1)^s E_s}{(2s)!\,2^{2s+1}}\cdot\frac{x^{n-2s}}{(n-2s)!} \tag{12}$$

unter Zuhilfenahme der Formeln I, (11) und (12) für $x=-1$ verkürzte Reduktionsformeln für die Eulerschen Zahlen liefern, die aus I, (12) für $q=0$ hergeleiteten Formeln rühren von A. Radicke [1]) her.

IV. Weitere Methoden und Formeln.

Ohne auf Einzelheiten näher einzugehen bemerke ich, daß ich für das Polynom

$$f(x)=(x+\alpha)^n(x+1-\alpha)^p$$

die folgende Entwicklung nach Bernoullischen

$$\left.\begin{aligned} f(x)=&\frac{(-1)^n n!\,p!}{(n+p+1)!}(1-2\alpha)^{n+p+1}+\\ &+\sum_{s=0}^{s=p}\binom{p}{s}(n+p-s)!\,(1-2\alpha)^s B_{n+p-s+1}(x+\alpha)-\\ &-\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s\binom{n}{s}(n+p-s)!\,(1-2\alpha)^s B_{n+p-s+1}(x-\alpha)\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

und nach Eulerschen Funktionen

$$\left.\begin{aligned} f(x)=&\sum_{s=0}^{s=p}\binom{p}{s}(n+p-s)!\,(1-2\alpha)^s E_{n+p-s}(x+\alpha)+\\ &+\sum_{s=0}^{s=n}(-1)^s\binom{n}{s}(n+p-s)!\,(1-2\alpha)^s E_{n+p-s}(x-\alpha)\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

hergeleitet habe. [2])

Diese Formeln in Verbindung mit den daraus durch wiederholte Differentiation nach x liefern durch Spezialisierungen der beiden komplexen Veränderlichen x und α sämtliche vorhergehende verkürzte Reduktionsformeln, die aus $G(x)$ und aus $F(x)$ für $q=0$ gefunden worden sind.

---

[1]) Journal für Mathematik, Bd. 89, p. 257—261; 1880.

[2]) In der Abhandlung: Recherches une les nombres de Bernoulli et d'Euler, Mémoires de l'Académie Royale de Danemark 1913.

Für die Ultrakugelfunktion erster Art [1])

$$P^{\nu,n}(x) = \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} (-1)^s \binom{n-s}{s} \binom{\nu+n-s-1}{n-2s} (2x)^{n-2s}$$

gelten die Entwicklungen

$$\left.\begin{aligned} &(2\nu-2)P^{\nu,n}(x) = \\ &= \sum_{s=0}^{\nu=n} (-1)^s \binom{\nu+n-s-2}{n-s} \binom{2\nu+2n-s-2}{s+1} (n-s)!\, 2^{n-s} B_{n-s}(x) - \\ &- \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n-1}{2}} (-1)^s \binom{n-s}{s+1} \binom{\nu+n-s-2}{n-s} (n-2s-1)!\, 2^{n-2s-1} B_{n-2s-1}(x) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} &P^{\nu,n}(x) = \\ &= \sum_{s=0}^{s=n} (-1)^s \binom{\nu+n-s-1}{n-s} \binom{2\nu+2n-s-1}{s} (n-s)!\, 2^{n-s} E_{n-s}(x) + \\ &+ \sum_{s=0}^{\leqq \frac{n}{2}} (-1)^s \binom{n-s}{s} \binom{\nu+n-s-1}{n-s} (n-2s)!\, 2^{n-2s} E_{n-2s}(x) \end{aligned}\right\}. \quad (4)$$

Durch Spezialisierung der beiden komplexen Veränderlichen x und ν leitet man aus (3) und (4) verkürzte Rekursionsformeln für die B_n und die T_n her. Diese Formeln sind von derselben Natur wie die vorhergehenden, von ihnen aber doch ganz verschieden.

---

[1]) Man vergleiche meine Schrift: Théorie des fonctions métasphériques, p. 94—112; Paris 1911.

[2]) Vergl. meine Abhandlungen: Recherches sur les fonctions et les nombres de Bernoulli et d'Euler, die in Annales de l'Ecole Normale erscheint.