ZAMM · Z. angew. Math. Mech. 67 (1987) 1, 49–56

KOSLER, R.

Zur Konvergenz von Finite-Elemente-Näherungen elliptischer quasilinearer Differentialgleichungen bei geringer Regularität der Lösung

Betrachtet werden nicht notwendig stark elliptische quasilineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Dimensionen. Unter schwachen Regularitätsbedingungen für die Lösung wird die Konvergenz der Methode der finiten Elemente für die Energienorm und für die Maximumnorm nachgewiesen.

Not necessarily strongly elliptic quasilinear differential equations of second order in two dimensions are considered. Under weak assumptions on the regularity of the solution energy norm convergence and maximum norm convergence for the finite element method are shown.

Рассматриваются эллиптические квазилинейные дифференциальные уравнения второго порядка в двух размерности, которые и могут являть сильно эллиптическими. Под слабыми условиями регулярности для решения доказывается сходимость по энергетической норме и по равномерной норме для метода финитных элементов.

1. Einleitung

Betrachtet werden elliptische quasilineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung in zwei Dimensionen mit homogenen Dirichletschen Randbedingungen. Bei stark elliptischen Problemen kann man hinreichende Bedingungen für die Quasioptimalität des Galerkin-Verfahrens für die Energienorm $||\cdot||_{1,2}$ den Untersuchungen von CIARLET, SCHULTZ und VARGA in [5] entnehmen. Bei Verwendung von Finite-Elemente-Räumen lassen sich daraus für den Fehler e_h asymptotische Abschätzungen der Gestalt $||e_h||_{1,2} = O(h^\varepsilon)$ gewinnen, wobei für die Lösung u schwache Regularitätsbedingungen genügen, falls ε nahe bei Null liegt. Vermöge einer Abschätzung der Gestalt $||v_h||_\infty \leqq c|\ln h|^{1/2}\, ||v_h||_{1,2}$ für Finite-Elemente-Ansatzfunktionen v_h, wie erstmals von OGANESYAN bewiesen und von YSERENTANT in [10] verallgemeinert wurde, erhält man daraus die Maximumnormkonvergenz von der Ordnung $O(h^\varepsilon|\ln h|^{1/2})$.

Bei schwach elliptischen Problemen gelingt der Nachweis der Quasioptimalität für die Energienorm — und damit ein Vorgehen wie oben zur Abschätzung des Fehlers in der Maximumnorm — falls für die diskreten Lösungen u_h eine a priori-Abschätzung der Gestalt $||u_h||_{1,\infty} = O(1)$ vorliegt, wie erstmals aus [8] hervorgeht. Eine solche gleichmäßige Schranke für u_h ist auch bei weiterführenden Untersuchungen von Interesse, vgl. [6], [7], [9]. In allen Fällen wird dabei mindestens $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ zum Nachweis benötigt.

Hier soll nun eine Technik vorgestellt werden, die bereits bei Vorliegen einer gleichmäßigen Schranke für $||u_h||_{1,2}$ asymptotische Abschätzungen für $||e_h||_{1,2}$ und damit auch für $||e_h||_\infty$ ermöglicht. Dieses Vorgehen hat den Vorteil, daß eine a priori-Schranke für $||u_h||_{1,2}$ keine Regularitätsbedingungen für u erfordert, sondern durch eine Koerzitivitätsbedingung für den Differentialoperator gewonnen werden kann. Eine solche Bedingung ist aber bereits für Existenzuntersuchungen von Bedeutung. Eine gleichmäßige Abschätzung für $||u_h||_{1,\infty}$ kann unter der Voraussetzung $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ auch aus den hier erzielten Ergebnissen gefolgert werden. — Bei starker Regularität von u erhält man aus [6], [7], [9] bessere (sogar quasioptimale) Fehlerabschätzungen für die Maximumnorm.

2. Bezeichnungen

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ sei ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Für die Elemente des $\mathbb{R}^2$ schreiben wir $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, und für die des $\mathbb{R}^3$ verwenden wir die Schreibweise $\tilde{\xi} = (\xi_0, \xi) = (\xi_0, \xi_1, \xi_2)$. Die euklidische Norm in $\mathbb{R}^2$ sowie $\mathbb{R}^3$ soll mit $|\cdot|$ bezeichnet werden.

Für $1 \leqq p < \infty$ sei $W^{1,p}(\Omega)$ der Sobolev-Raum der Ordnung 1 mit der Norm

$$||u||_{1,p} = \Big(\sum_{i=0}^{2} ||D_i u||_p^p\Big)^{1/p}; \tag{2.1}$$

dabei ist $D_0 u = u$, $D_i u = \partial u/\partial x_i$ für $i = 1, 2$, und $||\cdot||_p$ bezeichnet die Norm in $L^p(\Omega)$. $W_0^{1,p}(\Omega)$ sei der Abschluß in $W^{1,p}(\Omega)$ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω. Durch

$$|u|_{1,p} = \Big(\sum_{i=1}^{2} ||D_i u||_p^p\Big)^{1/p} \tag{2.2}$$

wird eine Norm auf $W_0^{1,p}(\Omega)$ erklärt, die zu (2.1) äquivalent ist (s. etwa [1]; p. 159). Mit $Du := (D_1 u, D_2 u)$ und $\tilde{D}u := (u, Du)$ werden durch

$$||\tilde{D}u||_p = \Big(\int_\Omega |\tilde{D}u|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{1/p}, \qquad ||Du||_p = \Big(\int_\Omega |Du|^p \,\mathrm{d}x\Big)^{1/p} \tag{2.3), (2.4}$$

Normen auf $W^{1,p}(\Omega)$ bzw. $W_0^{1,p}(\Omega)$ erklärt, die zu (2.1) bzw. (2.2) äquivalent sind. Für $p = 2$ sind sie sogar identisch. Für den Grenzfall $p = \infty$ sind die Definitionen (2.1), ..., (2.4) in der üblichen Weise zu modifizieren. Sobolev-Räume höherer als erster Ordnung werden mit $W^{m,p}(\Omega)$, $m > 1$, bezeichnet.

3. Problemstellung

Für $0 \leqq i \leqq 2$ sei $a_i\colon \Omega \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, so daß für fast alle $x \in \Omega$, für alle $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^3$ und für alle $K \geqq 0$ mit einer positiven Funktion $\mu\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ und mit Konstanten $\nu > 0$, $\nu' \geqq 0$, $0 < \vartheta \leqq 1$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(A1) $a_i(\cdot, \tilde{\xi})\colon \Omega \to \mathbb{R}$ ist meßbar und $a_i(x, \cdot)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist stetig (Carathéodory-Bedingung).

(A2) $$|a_i(x, \tilde{\xi})| \leqq \mu(K) \begin{Bmatrix} (1 + |\xi|^{2-\vartheta}) & \text{falls} \quad i = 0 \\ (1 + |\xi|) & \text{falls} \quad i > 0 \end{Bmatrix} \quad \text{für} \quad |\xi_0| \leqq K \quad \text{(Wachstumsbedingung).}$$

(A3) $$\sum_{i=0}^{2} a_i(x, \tilde{\xi})\, \xi_i \geqq \nu |\xi|^2 - \nu' \quad \text{(Koerzitivitätsbedingung).}$$

(A4, 1) $B(x, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \geqq 0$ und $B(x, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = 0$ gdw. $\xi = \eta$ (Monotoniebedingung),

wobei

$$B(x, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) := \sum_{i=0}^{2} \left(a_i(x, \tilde{\xi}) - a_i(x, \tilde{\eta})\right)(\xi_i - \eta_i) \,. \tag{3.1}$$

Für $u, v \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ sei

$$(Tu, v) := \int_\Omega \sum_{i=0}^{2} a_i(x, \tilde{D}u)\, D_i v \, dx; \tag{3.2}$$

die Existenz des Integrals folgt aus (A1) und (A2).

Für ein festes $f \in L^2(\Omega)$ betrachten wir nun mit $X := W_0^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ das Problem

$$u \in X\,, \qquad (Tu, v) = (f, v) \quad \text{für alle} \quad v \in X; \tag{3.3}$$

dabei ist $(f, v) = \int_\Omega fv \, dx$.

Aus (A 4, 1) folgt die strenge Monotonie

$$(Tu - Tv, u - v) > 0 \quad \text{für alle} \quad u, v \in X \quad \text{mit} \quad u \neq v\,. \tag{3.4}$$

(3.3) kann daher nur höchstens eine Lösung besitzen. Ist $\nu' = 0$, gilt (A3) ebenso bei Summation über $i = 1, 2$ und ist

$$a_0(x, \tilde{\xi})\, \xi_0 \geqq 0 \quad \text{für fast alle} \quad x \in \Omega \quad \text{und für alle} \quad \tilde{\xi} \in \mathbb{R}^3\,,$$

so kann die Existenz einer Lösung aus [3] gefolgert werden. Im folgenden wollen wir die Lösbarkeit von (3.3) voraussetzen, und u soll stets die Lösung bezeichnen.

Bemerkung: Durch eine stärkere Wachstumsbedingung als (A2) läßt sich erreichen, daß in (3.3) $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ gewählt werden kann. Die Lösbarkeit kann dann aus dem Hauptsatz über monotone Operatoren gefolgert werden (s. etwa [12]; p. 87).

4. Weitere Koeffizientenbedingungen

Für die folgenden Untersuchungen werden zusätzliche Koeffizientenbedingungen benötigt:

Für fast alle $x \in \Omega$, für alle $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^3$ und für alle $K \geqq 0$ gelte mit einer positiven Funktion $\lambda\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ die folgende Verschärfung von (A4, 1):

(A4) $$B(x, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \geqq \lambda(K)\, |\xi - \eta|^2 \quad \text{für} \quad |\tilde{\xi}|, |\tilde{\eta}| \leqq K\,.$$

Weiterhin gelte für $x, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, K$ wie oben, mit ϑ wie in (A2) und mit einer positiven Funktion $\Lambda\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$ die Lipschitz-Bedingung

(A5) $$|a_i(x, \tilde{\xi}) - a_i(x, \tilde{\eta})| \leqq$$
$$\leqq \Lambda(K) \begin{cases} (1 + |\xi|^{2-\vartheta} + |\eta|^{2-\vartheta})\, |\xi_0 - \eta_0| + (1 + |\xi|^{1-\vartheta} + |\eta|^{1-\vartheta})\, |\xi - \eta|\,, & \text{falls} \quad i = 0 \\ (1 + |\xi| + |\eta|)\, |\xi_0 - \eta_0| + |\xi - \eta|\,, & \text{falls} \quad i > 0 \end{cases}$$
$$\text{für} \quad |\xi_0|, |\eta_0| \leqq K\,.$$

Wir wollen im folgenden voraussetzen, daß μ, Λ monoton wachsen und λ monoton fallend ist. Dies bedeutet offenbar keine Einschränkung.

Die Bedingung (A4) soll uns eine Verschärfung der Abschätzung (3.4) ermöglichen. Gilt sogar

$$B(x, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \geqq \lambda(K)\, |\xi - \eta|^2 \quad \text{für} \quad |\xi_0|, |\eta_0| \leqq K \tag{4.1}$$

und $x, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}, K$ wie oben, so ist offensichtlich

$$(Tv_1 - Tv_2, v_1 - v_2) \geqq \lambda(\|v_1\|_\infty + \|v_2\|_\infty)\, |v_1 - v_2|_{1,2}^2 \tag{4.2}$$

für alle $v_1, v_2 \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Der allgemeine Fall wird in Abschnitt 7 behandelt.

Aus (A5) erhält man

Lemma 1: *Es gibt ein* $\alpha > 0$, *so daß*

$$|(Tv_1 - Tv_2, w)| \leqq$$
$$\leqq \alpha \Lambda(\|v_1\|_\infty + \|v_2\|_\infty)\,(1 + \|v_1\|_{1,2}^{2-\vartheta} + \|v_2\|_{1,2}^{2-\vartheta})\,(\|v_1 - v_2\|_\infty + \|v_1 - v_2\|_{1,2})\,\|w\|_{1,2}$$

für alle $v_1, v_2, w \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Beweis: Für alle $v_1, v_2, w \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ gilt

$$|(Tv_1 - Tv_2, w)| \leqq \int_\Omega \sum_{i=0}^{2} |a_i(x, \tilde{D}v_1) - a_i(x, \tilde{D}v_2)|\,|D_i w|\,dx \leqq$$
$$\leqq \Lambda(\|v_1\|_\infty + \|v_2\|_\infty)\,\{\int_\Omega (1 + |Dv_1|^{2-\vartheta} + |Dv_2|^{2-\vartheta})\,|v_1 - v_2|\,|w|\,dx +$$
$$+ \int_\Omega (1 + |Dv_1|^{1-\vartheta} + |Dv_2|^{1-\vartheta})\,|D(v_1 - v_2)|\,|w|\,dx +$$
$$+ 2\int_\Omega (1 + |Dv_1| + |Dv_2|)\,|v_1 - v_2|\,|Dw|\,dx + 2\int_\Omega |D(v_1 - v_2)|\,|Dw|\,dx\}\,. \tag{4.3}$$

Die Integrale innerhalb der geschweiften Klammer sollen der Reihe nach mit $I_1, \ldots, I_4$ bezeichnet werden.

i) Es sei $p := 2/(2 - \vartheta) > 1$, und $p' < \infty$ sei definiert durch $1/p + 1/p' = 1$. Dann ist

$$I_1 \leqq \|v_1 - v_2\|_\infty\,\|1 + |Dv_1|^{2-\vartheta} + |Dv_2|^{2-\vartheta}\|_p\,\|w\|_{p'}\,.$$

Für $i = 1, 2$ ist $\|\,|Dv_i|^{2-\vartheta}\|_p = |v_i|_{1,2}^{2-\vartheta}$, und wegen $p' < \infty$ existiert die Einbettung $W^{1,2}(\Omega) \to L^{p'}(\Omega)$. Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$I_1 \leqq \alpha_1(1 + \|v_1\|_{1,2}^{2-\vartheta} + \|v_2\|_{1,2}^{2-\vartheta})\,\|v_1 - v_2\|_\infty\,\|w\|_{1,2}$$

mit einem $\alpha_1 > 0$.

ii) Es sei $q := 1/(1 - \vartheta) > 1$ und $q' < \infty$ mit $1/q + 1/q' = 1$. Dann ist

$$I_2 \leqq |v_1 - v_2|_{1,2}\,(\int_\Omega (1 + |Dv_1|^{1-\vartheta} + |Dv_2|^{1-\vartheta})^2\,|w|^2\,dx)^{1/2} \leqq$$
$$\leqq |v_1 - v_2|_{1,2}\,\|1 + |Dv_1|^{1-\vartheta} + |Dv_2|^{1-\vartheta}\|_{2q}\,\|w\|_{2q'}\,.$$

Nun ist $\|\,|Dv_i|^{1-\vartheta}\|_{2q} = |v_i|_{1,2}^{1-\vartheta}$ für $i = 1, 2$, und wie oben folgt

$$I_2 \leqq \alpha_2(1 + \|v_1\|_{1,2}^{1-\vartheta} + \|v_2\|_{1,2}^{1-\vartheta})\,\|v_1 - v_2\|_{1,2}\,\|w\|_{1,2}$$

mit einem $\alpha_2 > 0$.

iii) $I_3 \leqq \|v_1 - v_2\|_\infty\,\|1 + |Dv_1| + |Dv_2|\|_2\,\|Dw\|_2 \leqq \alpha_3(1 + \|v_1\|_{1,2} + \|v_2\|_{1,2})\,\|v_1 - v_2\|_\infty\,\|w\|_{1,2}$ mit einem $\alpha_3 > 0$.

iv) $I_4 \leqq \|D(v_1 - v_2)\|_2\,\|Dw\|_2 \leqq \|v_1 - v_2\|_{1,2}\,\|w\|_{1,2}\,.$

Aus i), ..., iv) folgt die Behauptung mit (4.3). □

Bemerkungen: Ersetzt man (A1) durch die stärkere Bedingung

(A1)′ Für $0 \leqq i, j \leqq 2$ existiert $a_{ij} := \partial a_i/\partial \xi_j$, und $a_i(\cdot, \tilde{\xi})$, $a_{ij}(\cdot, \tilde{\xi})\colon \Omega \to \mathbb{R}$ sind meßbar, $a_i(x, \cdot)$, $a_{ij}(x, \cdot)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sind stetig,

so ist die Elliptizitätsbedingung

$$\text{(A4)}' \quad \sum_{i,j=0}^{2} a_{ij}(x, \tilde{\xi})\,\eta_i\eta_j \geqq \lambda(K)\,|\eta|^2 \quad \text{für} \quad |\tilde{\xi}| \leqq K$$

hinreichend für (A4), und die Bedingung

$$\text{(A5)}' \quad |a_{ij}(x, \tilde{\xi})| \leqq \Lambda(K)\begin{cases} (1 + |\xi|^{2-\vartheta}) & \text{falls } i = j = 0 \\ \frac{1}{2}(1 + |\xi|^{1-\vartheta}) & \text{falls } i = 0\,, \quad j > 0 \\ (1 + |\xi|) & \text{falls } i > 0\,, \quad j = 0 \\ \frac{1}{2} & \text{falls } i > 0\,, \quad j > 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad |\xi_0| \leqq K\,,$$

ist hinreichend für (A5); dabei sollen (A1)′, (A4)′, (A5)′ für fast alle $x \in \Omega$, für alle $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^3$ und für alle $K \geqq 0$ erfüllt sein.

Aufgrund des Zusammenhangs von (A4) und (A4)′ bezeichnen wir die hier betrachteten Probleme als elliptisch. Vom stark elliptischen Fall wollen wir sprechen, falls $1/\lambda$ beschränkt bleibt. Bei glatten Koeffizienten a_i ist (3.3) die schwache Formulierung des Dirichlet-Problems zweiter Ordnung

$$a_0(x, \tilde{D}u) - \sum_{i=1}^{2} D_i\big(a_i(x, \tilde{D}u)\big) = f \quad \text{in } \Omega\,, \qquad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega\,.$$

5. Diskretisierung

Zur Approximation von (3.3) wählen wir für $0 < h \leqq h_0 < 1$ endlichdimensionale Unterräume X_h von X und betrachten die Galerkin-Gleichungen

$$u_h \in X_h\,, \qquad (Tu_h, v_h) = (f, v_h) \quad \text{für alle} \quad v_h \in X_h\,. \tag{5.1}$$

Satz 1: *Für alle h sind die diskreten Probleme (5.1) eindeutig lösbar, und für die Lösungen u_h gilt mit einem $R > 0$ die Abschätzung*

$$\|u_h\|_{1,2} \leqq R \quad \textit{gleichmäßig für alle } h\,. \tag{5.2}$$

Beweis: Es sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf X_h. Der durch (3.2) definierte Operator T erfüllt als Operator von X_h in den Dualraum X_h' die Voraussetzungen des Hauptsatzes über monotone Operatoren in [12], p. 87; dabei kann die Hemistetigkeit (sogar Stetigkeit) aus Lemma 1 und die Koerzitivität

$$(Tv, v)/\|v\| \to \infty \quad \text{für} \quad \|v\| \to \infty\,, \qquad v \in X_h\,,$$

aus (A3) gefolgert werden. Da je zwei Normen auf einem endlichdimensionalen Raum äquivalent sind, kann nach Belieben über die Norm $\|\cdot\|$ verfügt werden; es ist zweckmäßig, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty + \|\cdot\|_{1,2}$ bzw. $\|\cdot\| = |\cdot|_{1,2}$ zu wählen. Da X_h als endlichdimensionaler Raum reflexiv ist, folgt die Lösbarkeit von (5.1). Die Eindeutigkeit der Lösung u_h folgt aus der strengen Monotonie (3.4).

Aus (A3) folgt für alle $v \in X$ die Abschätzung

$$(Tv, v) - (f, v) \geqq \nu |v|_{1,2}^2 - \|f\|_2 \|v\|_2 - \nu' \operatorname{meas} \Omega\,.$$

Aufgrund der für ein $\beta > 0$ gültigen Beziehung

$$\|v\|_{1,2}^2 \leqq \beta |v|_{1,2}^2 \quad \text{für alle} \quad v \in W_0^{1,2}(\Omega) \tag{5.3}$$

muß somit

$$(Tv, v) - (f, v) > 0 \quad \text{falls} \quad \|v\|_{1,2} > R\,, \qquad v \in X\,, \tag{5.4}$$

für ein $R > 0$ erfüllt sein. Also ist $\|u_h\|_{1,2} \leqq R$ wegen $(Tu_h, u_h) - (f, u_h) = 0$. □

Im folgenden bezeichne u_h stets die Lösung von (5.1), und

$$e_h := u - u_h$$

sei der Diskretisierungsfehler. $C_0, c_0, C_1, c_1, \ldots$ sollen stets positive Konstanten bezeichnen, die von der speziellen Wahl von h unabhängig sind.

Für die weiteren Untersuchungen wollen wir die Räume X_h als Finite-Elemente-Räume voraussetzen. Die zugehörigen Zerlegungen $\mathcal{T}_h$ von Ω seien regulär in dem Sinne, daß jedes finite Element $\Delta \in \mathcal{T}_h$ einen Kreis mit Radius $c_0 h$ enthält und in einem Kreis mit Radius $c_1 h$ enthalten ist.

Für alle $v_h \in X_h$ gilt dann die Beziehung

$$\|v_h\|_\infty \leqq C_0 |\ln h|^{1/2} \|v_h\|_{1,2}\,, \tag{5.5}$$

s. YSERENTANT [10], [11].

6. Fehlerabschätzungen für einen Spezialfall

Wir wollen zunächst den Fall untersuchen, daß (4.1) erfüllt ist, so daß die Monotoniebeziehung (4.2) zur Gewinnung von Fehlerabschätzungen zur Verfügung steht.

Satz 2: *Es sei (4.1) erfüllt, und mit Konstanten $\lambda_0 > 0$, $r \geqq 0$ gelte*

$$1/\lambda(t) \leqq \lambda_0 (1 + t^r) \quad \textit{für alle} \quad t \geqq 0\,. \tag{6.1}$$

Ist dann

$$\inf_{w_h \in X_h} (\|u - w_h\|_\infty + \|u - w_h\|_{1,2}) = O(h^\varepsilon) \tag{6.2}$$

für ein $\varepsilon > 0$ erfüllt, so ist

$$\|e_h\|_{1,2} = O(h^\varepsilon) \quad \textit{und} \quad \|e_h\|_\infty = O(h^\varepsilon |\ln h|^{1/2})\,. \tag{6.3}$$

Beweis: Es sei $w_h \in X_h$ beliebig. Aus (4.2), (5.3) und Lemma 1 folgt dann

$$\lambda(\|u_h\|_\infty + \|w_h\|_\infty)\, \|u_h - w_h\|_{1,2}^2 \leqq \beta\lambda(\|u_h\|_\infty + \|w_h\|_\infty)\, |u_h - w_h|_{1,2}^2 \leqq$$

$$\leqq \beta(Tu_h - Tw_h, u_h - w_h) = \beta(Tu - Tw_h, u_h - w_h) \leqq$$

$$\leqq \alpha\beta\Lambda(\|u\|_\infty + \|w_h\|_\infty)\, (1 + \|u\|_{1,2}^{2-\vartheta} + \|w_h\|_{1,2}^{2-\vartheta})\, (\|u - w_h\|_\infty + \|u - w_h\|_{1,2})\, \|u_h - w_h\|_{1,2}\,,$$

so daß

$$\|u_h - w_h\|_{1,2} \leqq \alpha\beta\, \frac{\Lambda(\|u\|_\infty + \|w_h\|_\infty)}{\lambda(\|u_h\|_\infty + \|w_h\|_\infty)}\, (1 + \|u\|_{1,2}^{2-\vartheta} + \|w_h\|_{1,2}^{2-\vartheta})\, (\|u - w_h\|_\infty + \|u - w_h\|_{1,2})\,. \tag{6.4}$$

Gilt nun (6.2), so wird das Infimum angenommen, da X_h endlichdimensional ist, und wir können w_h so wählen, daß

$$\|u - w_h\|_\infty + \|u - w_h\|_{1,2} \leqq c_2 h^\varepsilon \tag{6.5}$$

und damit auch

$$||w_h||_\infty + ||w_h||_{1,2} \leqq c_3 \tag{6.6}$$

für hinreichend kleines h erfüllt ist. Mit (6.4) erhält man dann

$$||u_h - w_h||_{1,2} \leqq c_4 h^\varepsilon/\lambda(||u_h||_\infty + c_3)\,. \tag{6.7}$$

Aus Satz 1 und (5.5) folgt

$$||u_h||_\infty \leqq C_0|\ln h|^{1/2}\, R\,, \tag{6.8}$$

so daß aufgrund von (6.1) und (6.7)

$$||u_h - w_h||_{1,2} \leqq c_5 h^\varepsilon |\ln h|^{r/2}\,. \tag{6.9}$$

Mit (5.5) und (6.9) ergibt sich

$$||u_h||_\infty \leqq ||w_h||_\infty + ||u_h - w_h||_\infty \leqq c_3 + C_0|\ln h|^{1/2}\, ||u_h - w_h||_{1,2} \leqq c_6\,. \tag{6.10}$$

Mit (6.4), (6.5), (6.6) und (6.10) folgt nun $||u_h - w_h||_{1,2} \leqq c_7 h^\varepsilon$ und damit $||u_h - w_h||_\infty \leqq c_8 h^\varepsilon|\ln h|^{1/2}$ aufgrund von (5.5). Mit (6.5) ergibt sich daraus

$$||e_h||_{1,2} \leqq ||u - w_h||_{1,2} + ||u_h - w_h||_{1,2} = O(h^\varepsilon)$$

sowie

$$||e_h||_\infty \leqq ||u - w_h||_\infty + ||u_h - w_h||_\infty = O(h^\varepsilon|\ln h|^{1/2})\,. \ \square$$

Bemerkung: Der stark elliptische Fall liegt offenbar vor, falls (6.1) mit $r = 0$ erfüllt ist. Trivialerweise gilt dann auch (4.1).

7. Eine Abschätzung für $(Tv_1 - Tv_2, v_1 - v_2)$

Zur Gewinnung eines entsprechenden Ergebnisses, wie es Satz 2 für einen Spezialfall liefert, benötigen wir im allgemeinen Fall eine geeignete Abschätzung für $(Tv_1 - Tv_2, v_1 - v_2)$ nach unten. Dazu zeigen wir zunächst

Lemma 2: *Mit Konstanten $\mu_0 > 0$ und $q \geqq \vartheta$ gelte*

$$\mu(t) \leqq \mu_0(1 + t^q) \quad \textit{für alle} \quad t \geqq 0\,. \tag{7.1}$$

Dann gibt es ein $\gamma > 0$ und ein $\nu_0 > 0$, so daß für fast alle $x \in \Omega$, für alle $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^3$ und für alle $K \geqq 0$ die Beziehung

$$B(x, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \geqq \nu_0|\xi - \eta|^2 \tag{7.2}$$

für $|\tilde{\xi}| \leqq K$ und $|\eta|^\vartheta \geqq \gamma\mu(K)\,(1 + K^{2-\vartheta})\,(1 + |\eta_0|^q)$ erfüllt ist.

Beweis: Es sei $K \geqq 0$ gegeben und $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^3$ mit $|\tilde{\xi}| \leqq K$. Wir definieren für ein $\gamma \geqq 1/\mu(0)$

$$L' = L'(K) := \gamma\mu(K)\,(1 + K^{2-\vartheta})\,, \tag{7.3}$$

so daß $L' \geqq 1 + K^{2-\vartheta} \geqq \max(1, K)$. Somit gilt auch für

$$L = L(K) := (L'(K))^{1/\vartheta} \tag{7.4}$$

wegen $L \geqq L'$ die Beziehung

$$L \geqq \max(1, K)\,. \tag{7.5}$$

Mit

$$\delta = \delta(K) := 1/L'(K) \leqq 1 \tag{7.6}$$

definieren wir

$$\varphi(t) := L(1 + t^q)^{1/\vartheta} = \big((1 + t^q)/\delta\big)^{1/\vartheta} \quad \text{für alle} \quad t \geqq 0\,. \tag{7.7}$$

Dann ist $\varphi\colon [0, \infty) \to [L, \infty)$ bijektiv, und die Umkehrfunktion $\psi\colon [L, \infty) \to [0, \infty)$ ist gegeben durch

$$\psi(t) = (\delta t^\vartheta - 1)^{1/q} \quad \text{für alle} \quad t \geqq L\,. \tag{7.8}$$

Es gilt dann wegen (7.1)

$$\mu(\psi(t)) \leqq \mu_0\big(1 + (\psi(t))^q\big) = \delta\mu_0 t^\vartheta \quad \text{für alle} \quad t \geqq L\,. \tag{7.9}$$

Da $L \geqq 1$, $\delta \leqq 1$ und $q \geqq \vartheta$, ist $\psi(t) \leqq t^{\vartheta/q} \leqq t$ für alle $t \geqq L$, so daß wegen $\delta L \geqq \delta L' = 1$ die Beziehung

$$t + \psi(t) \leqq 2t \leqq 2\delta t^2 \quad \text{für alle} \quad t \geqq L \tag{7.10}$$

erfüllt ist.

Es sei nun $\tilde{\eta} \in \mathbb{R}^3$ mit $|\eta|^\vartheta \geqq L'(1 + |\eta_0|^q)$, so daß

$$|\eta| \geqq \varphi(|\eta_0|) \geqq L\,. \tag{7.11}$$

Wegen $L \geqq K$ folgt

$$|\eta| \geqq \tfrac{1}{2}K + \tfrac{1}{2}|\eta| \geqq \tfrac{1}{2}(|\xi| + |\eta|) \geqq \tfrac{1}{2}|\xi - \eta|\,. \tag{7.12}$$

Aus (A 2) erhält man

$$\Big(\sum_{i=0}^{2} |a_i(x, \tilde{\xi})|^2\Big)^{1/2} \leqq \mu(|\xi_0|)\,\big(1 + |\xi|^{2-\vartheta} + 2(1 + |\xi|)\big) \leqq$$

$$\leqq \mu(|\xi_0|)\,\big(1 + |\xi|^{2-\vartheta} + 2\cdot 2(1 + |\xi|^{2-\vartheta})\big) = 5\mu(|\xi_0|)\,(1 + |\xi|^{2-\vartheta})\,, \tag{7.13}$$

und mit (7.3), (7.6) folgt daraus

$$\Big(\sum_{i=0}^{2} |a_i(x, \tilde{\xi})|^2\Big)^{1/2} \leqq 5\mu(K)\,(1 + K^{2-\vartheta}) = 5(L'/\gamma) = 5/(\gamma\delta)\,. \tag{7.14}$$

Es gilt $\big(\sum_{i=0}^{2} |a_i(x, \tilde{\eta})|^2\big)^{1/2} \leqq 5\mu(|\eta_0|)(1 + |\eta|^{2-\vartheta})$ (vgl. (7.13)), und wegen (7.11) ist $|\eta_0| \leqq \psi(|\eta|)$, so daß aufgrund von (7.9)

$$\Big(\sum_{i=0}^{2} |a_i(x, \tilde{\eta})|^2\Big)^{1/2} \leqq 5\mu\big(\psi(|\eta|)\big)(1 + |\eta|^{2-\vartheta}) \leqq$$

$$\leqq 5\delta\mu_0|\eta|^{\vartheta}\,(1 + |\eta|^{2-\vartheta}) \leqq 10\delta\mu_0|\eta|^2\,, \tag{7.15}$$

wobei noch die Beziehung $|\eta| \geqq 1$ (s. (7.5), (7.11)) verwendet wurde.

Aus (A 3), (7.11), (7.14) und (7.15) folgt nun für fast alle $x \in \Omega$

$$B(x, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) = \sum_{i=0}^{2} a_i(x, \tilde{\xi})\,\xi_i + \sum_{i=0}^{2} a_i(x, \tilde{\eta})\,\eta_i - \sum_{i=0}^{2} a_i(x, \tilde{\xi})\,\eta_i - \sum_{i=0}^{2} a_i(x, \tilde{\eta})\,\xi_i \geqq$$

$$\geqq \nu(|\xi|^2 + |\eta|^2) - (|\eta| + |\eta_0|)\,\Big(\sum_{i=0}^{2} |a_i(x, \tilde{\xi})|^2\Big)^{1/2} - |\tilde{\xi}|\,\Big(\sum_{i=0}^{2} |a_i(x, \tilde{\eta})|^2\Big)^{1/2} - 2\nu' \geqq$$

$$\geqq \nu|\eta|^2 - 5\big(|\eta| + \psi(|\eta|)\big)/(\gamma\delta) - 10\delta K\mu_0|\eta|^2 - 2\nu'\,. \tag{7.16}$$

Wegen $\delta|\eta|^2 \geqq \delta L^2 \geqq \delta L \geqq \delta L' = 1$ folgt hieraus mit (7.10) die Beziehung

$$B(x, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \geqq (\nu - 10/\gamma - 10\delta K\mu_0 - 2\delta\nu')\,|\eta|^2\,. \tag{7.17}$$

Es ist $\delta \leqq \dfrac{1}{\gamma\mu(0)}$ und $\delta K = \dfrac{1}{\gamma\mu(K)}\cdot\dfrac{K}{1 + K^{2-\vartheta}} \leqq \dfrac{1}{\gamma\mu(0)}$, so daß aufgrund von (7.17)

$$B(x, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \geqq \tfrac{1}{2}\,\nu|\eta|^2 \tag{7.18}$$

falls γ hinreichend groß gewählt wird. Wegen (7.12) ist daher (7.2) mit $\nu_0 = \frac{1}{8}\,\nu$ erfüllt. □

Damit erhalten wir die folgende Abschätzung:

Lemma 3: *Es seien* (6.1) *und* (7.1) *mit* $r > 0$ *und* $q \geqq \vartheta$ *erfüllt. Dann gibt es ein* $\nu_1 > 0$, *so daß*

$$(Tv_1 - Tv_2, v_1 - v_2) \geqq \frac{\nu_1|v_1 - v_2|_{1,2}^2}{\big((1 + \|\tilde{D}v_1\|_\infty^{q+2-\vartheta})\,(1 + \|v_2\|_\infty^q)\big)^{r/\vartheta}} \tag{7.19}$$

für alle $v_1 \in W^{1,\infty}(\Omega)$ *und für alle* $v_2 \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Beweis: Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Lemma 2 gilt für fast alle $x \in \Omega$, für alle $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^3$ und für alle $K \geqq 0$ die Beziehung (7.2), falls $|\tilde{\xi}| \leqq K$ und $|\eta| \geqq L(1 + |\eta_0|^q)^{1/\vartheta}$. Ist dagegen $|\tilde{\xi}| \leqq K$ und $|\eta| < L(1 + |\eta_0|^q)^{1/\vartheta}$, so erhält man mit (A 4) wegen $L \geqq \max\,(1, K)$ und $(1 + |\eta_0|^q)^{1/\vartheta} \geqq \max\,(1, |\eta_0|)$ die Beziehung

$$B(x, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \geqq \lambda(|\tilde{\xi}| + |\tilde{\eta}|)\,|\xi - \eta|^2 \geqq \lambda(K + |\eta_0| + |\eta|)\,|\xi - \eta|^2 \geqq \lambda\big(3L(1 + |\eta_0|^q)^{1/\vartheta}\big)\,|\xi - \eta|^2\,. \tag{7.20}$$

Aus (6.1), (7.1), (7.3) und (7.4) folgt mit geeigneten Konstanten $\lambda_1, \lambda_2 > 0$

$$1/\lambda\big(3L(1 + |\eta_0|^q)^{1/\vartheta}\big) \leqq \lambda_0\{1 + 3^r\big(L(1 + |\eta_0|^q)^{1/\vartheta}\big)^r\} \leqq$$

$$\leqq (3^r + 1)\,\lambda_0\big(L(1 + |\eta_0|^q)^{1/\vartheta}\big)^r \leqq \lambda_1\big(\mu(K)\,(1 + K^{2-\vartheta})\,(1 + |\eta_0|^q)\big)^{r/\vartheta} \leqq$$

$$\leqq \lambda_2\big(\mu_0(1 + K^q)\,(1 + K^{2-\vartheta})\,(1 + |\eta_0|^q)\big)^{r/\vartheta} \leqq \lambda_2\big((1 + K^{q+2-\vartheta})\,(1 + |\eta_0|^q)\big)^{r/\vartheta}; \tag{7.21}$$

dabei können wir annehmen, daß mit ν_0 aus (7.2) die Beziehung $\nu_1 := 1/\lambda_2 \leqq \nu_0$ erfüllt ist. Aus (7.2), (7.20) und (7.21) folgt dann für fast alle $x \in \Omega$, für alle $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^3$ und für alle $K, M \geqq 0$ die Abschätzung

$$B(x, \tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \geqq \frac{\nu_1|\xi - \eta|^2}{\big((1 + K^{q+2-\vartheta})\,(1 + M^q)\big)^{r/\vartheta}}\,, \tag{7.22}$$

falls $|\tilde{\xi}| \leqq K$ und $|\eta_0| \leqq M$. Daraus folgt (7.19) wegen

$$(Tv_1 - Tv_2, v_1 - v_2) = \int_\Omega B(x, \tilde{D}v_1, \tilde{D}v_2)\,\mathrm{d}x\,. \ □$$

8. Fehlerabschätzungen für den Allgemeinfall

Wir wollen nun zusätzlich $X_h \subseteq W^{1,\infty}(\Omega)$ fordern und für $2 \leqq p < \infty$ die inversen Ungleichungen

$$\|v_h\|_{1,\infty} \leqq C_1 h^{-2/p} \|v_h\|_{1,p} \quad \text{für alle} \quad v_h \in X_h \tag{8.1}$$

voraussetzen. Da die hier betrachteten Räume X_h Finite -Elemente-Räume sind, bedeuten diese Zusatzbedingungen keine wesentlichen Einschränkungen (s. [4]). Es gilt dann

Satz 3: *Es seien* (6.1) *und* (7.1) *mit* $r > 0$ *und* $q \geqq \vartheta$ *erfüllt. Für ein* $p \in [2, \infty]$ *sei* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *und für* $h \to 0$ *existiere* $w_h \in X_h$ *mit*

$$\|w_h\|_{1,p} = O(1) \quad \text{und} \quad \|u - w_h\|_\infty + \|u - w_h\|_{1,2} = O(h^\varepsilon) \tag{8.2), (8.3}$$

für ein $\varepsilon > 0$. *Ist dann*

$$\varepsilon' := \varepsilon - 2r(q + 2 - \vartheta)/(p\vartheta) > 0\,, \tag{8.4}$$

so ist

$$\|e_h\|_{1,2} = O(h^{\varepsilon'}) \quad \textit{und} \quad \|e_h\|_\infty = O(h^{\varepsilon'} |\ln h|^{1/2})\,. \tag{8.5}$$

Beweis: Es sei $w_h \in X_h$ so gewählt, daß (8.2) und (8.3) erfüllt sind. Wie beim Nachweis von (6.4) zeigt man nun mit Hilfe von Lemma 3 die Abschätzung

$$\|u_h - w_h\|_{1,2} \leqq \frac{\alpha\beta}{\nu_1} \Lambda(\|u\|_\infty + \|w_h\|_\infty) \times$$
$$\times \left((1 + \|\tilde{D}w_h\|_\infty^{q+2-\vartheta})\,(1 + \|u_h\|_\infty^q)\right)^{r/\vartheta} (1 + \|u\|_{1,2}^{2-\vartheta} + \|w_h\|_{1,2}^{2-\vartheta})\,(\|u - w_h\|_\infty + \|u - w_h\|_{1,2})\,, \tag{8.6}$$

und mit (8.3) folgt daraus

$$\|u_h - w_h\|_{1,2} \leqq c_9\left((1 + \|\tilde{D}w_h\|_\infty^{q+2-\vartheta})\,(1 + \|u_h\|_\infty^q)\right)^{r/\vartheta} h^\varepsilon \tag{8.7}$$

für hinreichend kleines h. Es sei nun (8.4) erfüllt. Mit (8.1), (8.2) ergibt sich

$$\|u_h - w_h\|_{1,2} = O\left((h^{-2(q+2-\vartheta)/p}(1 + \|u_h\|_\infty^q))^{r/\vartheta} h^\varepsilon\right) = O\left(h^{\varepsilon'}(1 + \|u_h\|_\infty^q)^{r/\vartheta}\right)\,, \tag{8.8}$$

und mit (6.8) erhält man daraus

$$\|u_h - w_h\|_{1,2} = O(h^{\varepsilon'} |\ln h|^{qr/(2\vartheta)})\,. \tag{8.9}$$

Wegen $\|w_h\|_\infty = O(1)$ und (5.5) folgt die Beziehung

$$\|u_h\|_\infty \leqq \|w_h\|_\infty + \|u_h - w_h\|_\infty = O(1)\,, \tag{8.10}$$

so daß $\|u_h - w_h\|_{1,2} = O(h^{\varepsilon'})$ aufgrund von (8.8) und damit $\|u_h - w_h\|_\infty = O(h^{\varepsilon'} |\ln h|^{1/2})$ wegen (5.5). Mit der Dreiecksungleichung und (8.3) folgen die Abschätzungen (8.5). □

Die Bedingungen (6.1), (7.1), (8.2), (8.3) und $u \in W^{1,p}(\Omega)$ sind also hinreichend für die Konvergenz der Finite-Elemente-Näherungen u_h in den Räumen $W^{1,2}(\Omega)$ und $L^\infty(\Omega)$ gegen u, falls

$$\varepsilon p > 2r(q + 2 - \vartheta)/\vartheta \tag{8.11}$$

erfüllt ist. Für $p > 2$ ist $u \in C(\bar{\Omega})$; die Konvergenz in $L^\infty(\Omega)$ bedeutet dann Maximumnormkonvergenz.

Bei den üblicherweise verwendeten Finite-Elemente-Räumen lassen sich (8.2), (8.3) für alle $p < \infty$ und für alle $\varepsilon \leqq 1$ durch die Regularitätsbedingung $u \in W^{2,2}(\Omega)$ erreichen; (8.11) ist dann trivialerweise erfüllt. Im Zusammenhang mit Satz 3 sind daher besonders solche Räume von Interesse, die zwischen $W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ und $W^{2,2}(\Omega)$ liegen; s. dazu [2], [4].

Bemerkungen: Für $p = \infty$ liefert Satz 3 dieselben Fehlerabschätzungen wie Satz 2, und es wird keine inverse Ungleichung zum Nachweis benötigt.

Im Fall $p = \infty$ läßt sich auch die Bedingung (A5) abschwächen; es genügt, statt dessen

$$\sum_{i=0}^{2} |a_i(x, \tilde{\xi}) - a_i(x, \tilde{\eta})| \leqq \Lambda(K)\,|\tilde{\xi} - \tilde{\eta}| \quad \text{für} \quad |\tilde{\xi}|, |\tilde{\eta}| \leqq K \tag{8.12}$$

für fast alle $x \in \Omega$, für alle $\tilde{\xi}, \tilde{\eta} \in \mathbb{R}^3$ und für alle $K \geqq 0$ zu fordern. Anstelle von Lemma 1 steht dann die Abschätzung

$$|(Tv_1 - Tv_2, w)| \leqq \Lambda(\|\tilde{D}v_1\|_\infty + \|\tilde{D}v_2\|_\infty)\,\|v_1 - v_2\|_{1,2}\,\|w\|_{1,2} \tag{8.13}$$

für alle $v_1, v_2, w \in W^{1,\infty}(\Omega)$ zur Verfügung. Damit ist ein entsprechendes Vorgehen wie im Beweis von Satz 3 möglich.

Verwendet man noch anstelle von Lemma 3 die unmittelbar aus (A4) folgende Abschätzung

$$(Tv_1 - Tv_2, v_1 - v_2) \geqq \lambda(\|\tilde{D}v_1\|_\infty + \|\tilde{D}v_2\|_\infty)\,|v_1 - v_2|_{1,2}^2 \tag{8.14}$$

für alle $v_1, v_2 \in W^{1,\infty}(\Omega)$, so erhält man zusammen mit (8.13) für alle $w_h \in X_h$ anstelle von (8.6) die Beziehung

$$\|u_h - w_h\|_{1,2} \leqq \beta\,\frac{\Lambda(\|\tilde{D}u\|_\infty + \|\tilde{D}w_h\|_\infty)}{\lambda(\|\tilde{D}u_h\|_\infty + \|\tilde{D}w_h\|_\infty)}\,\|u - w_h\|_{1,2}\,. \tag{8.15}$$

Für Fehlerabschätzungen werden dann also a priori-Schranken für $\|u_h\|_{1,\infty}$ benötigt.

In [8] wird für einen Spezialfall

$$\|u_h\|_{1,\infty} = O(1) \tag{8.16}$$

unter der Voraussetzung $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ nachgewiesen. Abschätzungen dieser Gestalt sind auch bei weiterführenden Untersuchungen von Interesse, wie etwa in [6], [7], [9]. Bemerkenswert ist daher, daß (8.16) unmittelbar aus Satz 3 gefolgert werden kann. Für $u \in W^{2,2}(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)$ gelten nämlich bei Verwendung üblicher Finite-Elemente-Räume die Beziehungen (8.2), (8.3) mit $p = \infty$ und $\varepsilon = 1$, so daß also $\|e_h\|_{1,2} = O(h)$ aufgrund von (8.4), (8.5). Mit der inversen Beziehung (8.1) folgt daraus

$$\|u_h\|_{1,\infty} \leqq \|u_h - w_h\|_{1,\infty} + \|w_h\|_{1,\infty} \leqq C_1 h^{-1}(\|e_h\|_{1,2} + \|u - w_h\|_{1,2}) + \|w_h\|_{1,\infty} = O(1) .$$

Literatur

1 Adams, R. A., Sobolev Spaces, Academic Press, New York 1975.
2 Aziz, A. K.; Babuška, I., The Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, Academic Press, New York 1972.
3 Brand, G., Über die Existenz von schwachen Lösungen bei stark nichtlinearen elliptischen Problemen zweiter Ordnung, Dissertation, Universität Hannover 1983.
4 Ciarlet, P. G., The Finite Element Method for Elliptic Problems, North-Holland, Amsterdam 1978.
5 Ciarlet, P. G.; Schultz, M. H.; Varga, R. S., Numerical methods of high-order accuracy for nonlinear boundary value problems. V: Monotone operator theory, Numer. Math. **13** (1969), 51–77.
6 Frehse, J.; Rannacher, R., Optimal uniform convergence for the finite element approximation of a quasilinear elliptic boundary value problem, Proc. US-Germany Sympos., Formulations and Computational Algorithms in Finite Element Analysis, MIT, Massachusetts 1976, pp. 793–812.
7 Frehse, J.; Rannacher, R., Asymptotic L^∞-error estimates for linear finite element approximations of quasilinear boundary value problems, SIAM J. Numer. Anal. **15** (1978), 418–431.
8 Johnson, C.; Thomée, V., Error estimates for a finite element approximation of a minimal surface, Math. Comput. **29** (1975), 343–349.
9 Rannacher, R., Some asymptotic error estimates for finite element approximation of minimal surfaces, RAIRO, Sér. Rouge Anal. Numér. **11** (1977), 181–196.
10 Yserentant, H., Über die Maximumnormkonvergenz der Methode der finiten Elemente bei geringsten Regularitätsvoraussetzungen, ZAMM **65** (1985) 2, 91–100.
11 Yserentant, H., Eine einfache und robuste Maximumnormabschätzung für die Methode der finiten Elemente, ZAMM **63** (1983), T 394–T 395.
12 Zeidler, E., Vorlesungen über nichtlineare Funktionalanalysis. II: Monotone Operatoren, Teubner, Leipzig 1977.

Eingegangen am 29. März 1984, in revidierter Form am 15. Februar 1985

Anschrift: Dr. Robert Kosler, Institut für Angewandte Mathematik der Universität Hannover, Welfengarten 1, D-3000 Hannover 1, BRD