Résonances dans l'Approximation de Born-Openheimer II - Largeur des résonances

ARTICLE *in* COMMUNICATIONS IN MATHEMATICAL PHYSICS · JANUARY 1991

Impact Factor: 2.09 · DOI: 10.1007/BF02104119 · Source: OAI

1 AUTHOR:

André Martinez
University of Bologna

Commun. Math. Phys. 135, 517–530 (1991)

Communications in
Mathematical
Physics

Resonances dans l'Approximation de Born–Oppenheimer II – Largeur des Resonances

André Martinez

Université de Paris-Nord, Département de Mathématiques, Avenue J. B. Clément, F-93430 Villetaneuse, France

Received February 19, 1990; in revised form July 3, 1990

Abstract. This paper is devoted to the Schrödinger operator $P = -h^2\Delta_x - \Delta_y + V(x,y)$ on $R_x^n \times R_y^p$ in the Born–Oppenheimer limit $h \to 0$. We study the case where resonances appear due to a well of the second electronic level, so that there can exist transition points only in the complex domain. We then prove that the widths of these resonances are exponentially small as h tends to zero.

0. Introduction

On s'intéresse à nouveau ici à la situation déjà envisagée dans [Ma2], et dans laquelle apparaissent des résonances pour l'opérateur

$$P = -h^2\Delta_x - \Delta_y + V(x,y) = -h^2\Delta_x + Q(x),$$

$L^2(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^p)$. Très brièvement, les résonances qui nous intéressent proviennent d'une localisation des noyaux due à l'existence d'un puits de potentiel pour le deuxième niveau électronique $\lambda_2(x)$ (i.e. la deuxième valeur propre de $Q(x)$). Le premier niveau électronique $\lambda_1(x)$ est supposé rester en-dessous de ce puits, et vérifier une hypothèse de viriel.

Sous une condition d'analyticité en x du potentiel V, on peut alors définir les résonances de P d'une manière analogue à celle de [Ag–Co] comme étant les valeurs propres d'un dilaté complexe (en x) P_θ de P. On a montré dans [Ma2] l'existence de résonances pour P près du niveau du fond du puits de $\lambda_2(x)$, ainsi que l'existence pour ces résonances de développements asymptotiques réels en puissances de $h^{1/2}$ lorsque h tend vers zéro. En particulier, la largeur de ces résonances est $O(h^\infty)$.

On se propose ici d'améliorer ce dernier résultat, en établissant que ces résonances ont en fait une partie imaginaire $O(e^{-c/h})$ avec $c > 0$. Il s'agit là d'un résultat bien connu des physiciens, mais dont à notre connaissance aucune preuve rigoureuse n'avait été donnée.

La difficulté provient du fait que, les niveaux électroniques $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ ne se rencontrant pas dans le réel, leur interaction met nécessairement en jeu des valeurs complexes de x, éventuellement très éloignées du réel. Bien entendu, il paraît raisonnable de penser que ce sont précisément les valeurs complexes de x vérifiant $\lambda_1(x)=\lambda_2(x)$ qui vont donner-via une intégrale d'action-le meilleur taux de décroissance pour la largeur des résonances (voir à ce propos [La–Li] Sect. 52). Néanmoins, leur éloignement du réel les rend, au moins sur le plan mathématique, assez difficiles d'accès (pour $n \geqq 2$). Aussi on n'a pas cherché dans cet article à obtenir le taux de décroissance optimal, mais plutôt à trouver un taux relativement facilement calculable à partir du potentiel et de $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$.

Sans doute, une démonstration alternative aurait été de montrer que les constructions formelles de [Ma2] peuvent en fait se faire dans la catégorie analytique, et conduisent donc à des erreurs exponentiellement petites. Néanmoins, le taux de décroissance ainsi obtenu aurait certainement été difficilement reliable à des quantités simples attachées à V, λ_1, et λ_2.

Bien que ce soit des inégalités de type Agmon qui jouent ici un rôle primordial, on n'échappe cependant pas au calcul pseudo-différentiel analytique: il nous permet, à partir de la décroissance exponentielle des fonctions propres de P_θ sur le réel, d'obtenir aussi une telle décroissance dans le complexe (localement en x). Ceci donne en particulier une décroissance exponentielle pour les états résonnants de P (i.e. les solutions de $Pu=\rho u$ où ρ est la résonance), et permet de conclure.

Dans [Ma2], on a appliqué la méthode des projections de Feshbach pour étudier l'opérateur dilaté P_θ. Cette méthode permet de se ramener à l'étude d'une matrice 2×2 d'opérateurs (non auto-adjointe) sur $L^2(\mathbb{R}^n_x)$, notée F^θ_λ, et dont le terme principal est le dilaté de la matrice diagonale $\mathrm{diag}(-h^2\Delta+\lambda_1, -h^2\Delta+\lambda_2)$. La stratégie adoptée ici est alors, dans un premier temps, d'obtenir des estimations à poids exponentiel de type Agmon sur F^θ_λ, ceci étant rendu possible notamment par le fait que le dilaté complexe de $-h^2\Delta+\lambda_1$ possède une partie imaginaire elliptique (de l'ordre de $|\theta|$). Ces estimations conduisent ensuite à une décroissance exponentielle des fonctions propres de F^θ_λ, qui induit à son tour une telle décroissance pour les fonctions propres normalisées de P_θ, du type $e^{-x^2/h}$ et limitée ici à $|x|\ll|\theta|$ (en prenant comme origine le puits de λ_2). Comme il est dit plus haut, cette décroissance peut se prolonger un peu dans le complexe par un calcul pseudo-différentiel, et donne donc aussi (du fait que la dilatation laisse fixe l'origine) un comportement au plus gaussien près de 0 pour les états résonnants de P. En fait, la technique utilisée pour obtenir ce prolongement (et qui consiste essentiellement en une formule de représentation Fourier-intégrale à phase complexe) permet aussi de minorer la norme L^2 de ces états résonnants pour x proche de 0 et $y\in\mathbb{R}^p$. On obtient ainsi un résultat de concentration facilement exploitable.

Au paragraphe 1, on rappelle les résultats de [Ma2], et on énonce le théorème. La paragraphe 2 est consacré aux inégalités de type Agmon, qui donnent la décroissance exponentielles des fonctions propres de P_θ en dehors du puits. Cette décroissance est ensuite étendue au domaine complexe dans le paragraphe 3. La preuve du théorème est ensuite facilement terminée au paragraphe 4.

1. Hypothèses et résultats

On s'intéresse à l'opérateur de Schrödinger

$$P=-h^2\Delta_x-\Delta_y+V(x,y)=-h^2\Delta_x+Q(x)$$

sur $L^2(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^p_y)$, lorsque $h \to 0$, dans la situation déjà décrite dans [Ma2] et que l'on rappelle ici: pour $m \in C^0(\mathbb{R}^p; [1, +\infty])$ et $\delta > 0$, on note $\mathbf{A}(\delta, m)$ l'espace des fonctions holomorphes et bornées dans $D_\delta = \{x \in \mathbb{C}^n \mid |\operatorname{Im} x| < 2\delta \langle \operatorname{Re} x \rangle\}$ et à valeurs dans $mL^\infty = \{mf \mid f \in L^\infty(\mathbb{R}^p)\}$. (Ici, on a noté $\langle \operatorname{Re} x \rangle = (1 + |\operatorname{Re} x|^2)^{1/2}$).

On suppose que V est réel sur $\mathbb{R}^{n+1}$ et que:

(H1) *Il existe* $m \in C^0(\mathbb{R}^p; [1; +\infty[)$, $\delta_0 > 0$, $V_1 \in \mathbf{A}(\delta_0, 1)$, $V_2 \in \mathbf{A}(\delta_0, m)$ *et* $C > 0$ *tels que* $V = V_1 + V_2$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}^n$:

$$V_2(x, y) m(y)^{-1} \geqq \frac{1}{C} \quad \textit{et} \quad |\nabla_y V_2| m(y)^{-1} \leqq C \quad (\text{p.p. } \textit{sur } R^p).$$

On déduit de (H1) que les opérateurs P et $Q(x)$ de domaines respectifs:

$$\mathbf{D}_P = \{u \in H^2(\mathbb{R}^{n+p}) \mid m(y) u \in L^2(\mathbb{R}^{n+p})\},$$
$$\mathbf{D}_Q = \{v \in H^2(\mathbb{R}^p) \mid m(y) v \in L^2(\mathbb{R}^p)\}$$

sont auto-adjoints sur $L^2(\mathbb{R}^{n+p})$ (resp. $L^2(\mathbb{R}^p)$).

(H2) $$\forall x \in R^n, \ \# \sigma_{\text{pp}}(Q(x)) \geqq 2.$$

En notant $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ les deux premières valeurs propres de $Q(x)$, on suppose aussi:

(H3) $$\sup_{R^n} \lambda_1(x) < 0, \quad \lambda_2 \geqq 0, \quad \lim_{|x| \to \infty} \lambda_2(x) > 0, \quad \lambda_2^{-1}(0) = \{0\},$$
$$\inf_{R^n} \operatorname{dist}(\lambda_2(x), \sigma(Q(x)) \setminus \{\lambda_2(x)\}) > 0.$$

Grâce à (H3), et au fait que, grâce à (H1), $Q(.)$ est analytique, on voit que λ_1 et λ_2 dépendent analytiquement de x. On suppose, en outre que le puits de λ_2 est non dégénéré et que λ_1 vérifie une condition de Viriel:

(H4) $$\lambda_2''(0) > 0, \quad \sup_{R^n} (2\lambda_1(x) + x \cdot \nabla \lambda_1(x)) < 0.$$

En notant U_θ l'opérateur de dilatation en x:

$$U_\theta \varphi(x, y) = e^{n\theta/2} \varphi(x e^\theta, y).$$

On a montré dans [Ma2] que $P_\theta = U_\theta P U_\theta^{-1}$ se prolonge à θ complexe ($|\operatorname{Im} \theta| < \delta_0$), et que, pour $\operatorname{Im} \theta > 0$, les valeurs propre de P_θ (i.e. les résonances de P) dans $[0, C_0 h] + [-\varepsilon, 0]$ ($C_0 > 0$ arbitraire, $\varepsilon > 0$ assez petit) admettent des développements asymptotiques lorsque $h \to 0$ du type:

$$\rho_j(h) \sim e_j h + \sum_{k \geqq 1} \alpha_{j,k} h^{1+k/2}$$

avec $\alpha_{j,k} \in \mathbb{R}$ (cf. [Ma2] Théorème 1.1).

En particulier, $\operatorname{Im} \rho_j(h) = \mathbf{O}(h^\infty)$. On se propose de montrer ici que l'on a en fait $\operatorname{Im} \rho_j(h) = \mathbf{O}(e^{-c/h})$ avec $c > 0$. La constante $c > 0$ intervenant ici (mais qui n'est certainement pas optimale) s'estime à partir de V de la manière suivante:

Comme dans [Ma2], notons $u_j(x, y)$ une fonction propre normalisée de $Q(x)$ associée à la valeur propre $\lambda_j(x)$ ($j = 1, 2$), ainsi que $u_j^\theta = u_j(x e^\theta, y)$, $\lambda_j^\theta(x) = \lambda_j(x e^\theta)$, et Π_θ le projecteur sur $L^2(\mathbb{R}^{n+p})$ défini par:

$$\Pi_\theta u = \langle u, u_1^{\bar{\theta}} \rangle_Y u_1^\theta + \langle u, u_2^{\bar{\theta}} \rangle_Y u_2^\theta$$

où $\langle .,. \rangle_Y$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}_y^p)$.

On pose aussi $\hat{\Pi}_\theta = 1 - \Pi_\theta$.

On suppose dès lors que $\theta \in i]0, \delta_0[$ vérifie:

(H5) $\exists C_1 > 0$ *et* $0 < \mu_1 < \delta_2$, *tels que pour tout* $u \in C_0^\infty(R^{n+p})$:

$$\operatorname{Re}\langle Q(xe^\theta)\hat{\Pi}_\theta u, \hat{\Pi}_\theta u\rangle \geqq \delta_2 \|\hat{\Pi}_\theta u\|^2,$$

et

$$\operatorname{Re} e^{-2\theta}\langle \nabla_x \hat{\Pi}_\theta u, \nabla_x \hat{\Pi}_{\bar{\theta}} \hat{\Pi}_\theta u\rangle \geqq \frac{1}{C_1}\|\nabla_x \hat{\Pi}_\theta u\|^2 - \mu_1 \|\hat{\Pi}_\theta u\|^2.$$

(H6) $\exists C_2 > 0$ *et* $\delta_3 > 0$ *tel que pour tout* $x \in R^n$:

$$\operatorname{Im} e^{2\theta}\lambda_1(xe^\theta) \leqq -\frac{|\theta|}{C_2}, \quad \operatorname{Re} e^{\pm 2\theta}\lambda_1(xe^{\pm\theta}) < -\delta_3.$$

(H7) $\delta_4|x|^2 \leqq \operatorname{Re} e^{2\theta}\lambda_2^\theta(x) \leqq 2\delta_4|x|^2$ *pour* $|x| \leqq |\theta|$, *avec* $\delta_4 > 0$, *et*

$$\delta_1 = \operatorname*{Inf}_{R^n} \operatorname{dist}((\lambda_2^{\pm\theta}(x), \sigma(Q(xe_2^{\pm\theta}))\backslash\{\lambda_2^{\pm\theta}(x)\}) > 0.$$

Remarque. D'aprés [Ma2], (H5) à (H7) sont vérifiées pour θ assez petit. Posons $M_0 = \operatorname{Sup}\{m(y)^{-1}|V(x,y)|; y \in \mathbb{R}^p, x \in \mathbb{C}^n, |\operatorname{Im} x| \leqq (3/2)\delta_0\langle \operatorname{Re} x\rangle\}$. Par des inégalités de Cauchy, on aura en particulier que pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $\operatorname{Sup}\{m(y)^{-1}\langle x\rangle^{|\alpha|}|\partial^\alpha V(x,y)|; y \in \mathbb{R}^p, x \in \mathbb{C}^n, |\operatorname{Im} x| \leqq \delta_0\langle \operatorname{Re} x\rangle\}$ est majoré par une constante ne dépendant que de M_0, α et δ_0.

Notre résultat est alors:

Théorème 1.1. *Sous les hypothèses* (H1) *à* (H4), *et pour tout* $\theta \in i]0, \delta_0[$ *vérifiant* (H5) *à* (H7), *il existe une constante* $K_0 > 0$ *ne dépendant que de n*, M_0, μ_1, C_1, C_2, *et* δ_j $(0 \leqq j \leqq 4)$, *telle que les résonances* $\rho_1(h), \ldots, \rho_{N0}(h)$ *de P dans* $[0, C_0 h] + i[-\varepsilon, 0]$ *vérifient*: $\exists K_1 > 0$,

$$|\operatorname{Im} \rho_j(h)| \leqq K_1 e^{-|\theta|^2/K_0 h}$$

uniformément pour $h > 0$ *assez petit.*

Remarque 1.2. En fait, C_1, μ_1 et δ_2 peuvent être choisis explicitement à partir de M_0, δ_0 et δ_1. Le choix de θ vérifiant (H5) à (H7) peut alors être pris en fonction uniquement de M_0, C_2, δ_0, δ_1, δ_3 et δ_4 (cf. [Ma2], preuve du Lemme 2.1).

Remarque 1.3. Bien que l'on ne précise pas dans l'énoncé du théorème de quelle manière K_0 dépend de n, M_0, μ_1, C_1, C_2 et δ_j, il est possible de tirer, de la preuve que l'on en donne, un choix explicite pour K_0.

2. Estimations d'Agmon

Pour θ vérifiant (H5) et (H7), on a montré dans [Ma2] que l'étude de P_θ se ramène à celle de la famille d'opérateurs de Feshbach:

$$F_\lambda^\theta = (\langle G_\theta(\cdot u_j^\theta), u_k^{\bar{\theta}}\rangle_Y)_{1 \leqq j,k \leqq 2} \quad \text{sur} \quad L^2(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n),$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ ($|\lambda|$ assez petit), $G_\theta = G_\theta(\lambda) = P_\theta - P_\theta(P'_\theta - \lambda)^{-1}\hat{\Pi}_\theta P_\theta$ (où P'_θ désigne la restriction de $\hat{\Pi}_\theta P_\theta$ à $\{u \in L^2 | \hat{\Pi}_\theta u = u\}$) et $\langle .,. \rangle_Y$ est le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^p_y)$).

Plus précisément, on a alors:

$$\lambda \in \sigma(P_\theta) \Leftrightarrow \lambda \in \sigma(F^\theta_\lambda). \tag{2.1}$$

Soit alors ρ une résonance de P dans $[O, C_0 h] + i[-\varepsilon, 0]$, et w_θ une fonction propre normalisée de P_θ associée à ρ. Grâce à (2.1), on peut alors associer à w_θ une fonction $\alpha^\theta_1 \oplus \alpha^\theta_2 \in L^2(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n)$ normalisée, telle que:

$$(F^\theta_\rho - \rho)(\alpha^\theta_1 \oplus \alpha^\theta_2) = 0 \tag{2.2}$$

Si l'on pose alors

$$\tilde{w}_\theta = \sum_{j=1}^{2} (1 - (P'_\theta - \rho)^{-1} \hat{\Pi}_\theta P_\theta)(\alpha^\theta_j u^\theta_j), \tag{2.3}$$

il est facile de montrer à partir des résultats de [Ma2] Sect .3 (et notamment du fait que

$X_\theta(\rho) = (P'_\theta - \rho)^{-1} \hat{\Pi}_\theta$ est $\mathbf{O}(h^{-1})$ de $H^s(\mathbb{R}^n, L^2(\mathbb{R}^p)$ dans $H^{s+1}(\mathbb{R}^n, L^2(\mathbb{R}^p))$

pour tout s) que l'on a:

$$\| \tilde{w}_\theta \|_{L^2(\mathbb{R}^{n+p})} = 1 + \mathbf{O}(h)$$

comme de plus $P_\theta \tilde{w}_\theta = \rho \tilde{w}_\theta$, on peut en fait prendre:

$$w_\theta = c(h) \tilde{w}_\theta, \tag{2.4}$$
$$\text{oú } c(h) = 1 + \mathbf{O}(h) \quad \text{est une constante}$$

On se propose maintenant d'établir une estimation d'Agmon sur α^θ_1 et α^θ_2, ce qui permettra ensuite (via (2.3) et (2.4)) d'en déduire une estimation analogue pour w_θ.

Dans toute la suite, on se donne une fonction ϕ réelle et lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$.

Lemma 2.1. *$\forall s \in \mathbb{R}$, $\exists C > 0$ ne dépendant que de M_0, δ_0, δ_1, δ_2, s et n tel que:*

$$\| e^{\phi(x)/h} [\hat{\Pi}_\theta, \Delta_x] e^{-\phi(x)/h} \|_{L(H^s(\mathbb{R}^n, D_Q), H^{s-1}(\mathbb{R}^n, D_Q))} \leqq C(1 + h^{-1} \| \nabla \phi \|_{L^\infty})$$

uniformément pour $h > 0$ assez petit.

Preuve. $[\hat{\Pi}_\theta, \Delta_x]$ est une somme de termes du type $\langle (\cdot \alpha), \beta \rangle_Y \gamma$ ou $\langle \partial_{x_k}(\cdot \alpha), \beta \rangle_Y \gamma$, avec α, β, γ dans $\{u^\theta_j, u^{\bar{\theta}}_j, \partial_{x_k} u^\theta_j, \partial_{x_k} u^{\bar{\theta}}_j \ (1 \leqq k \leqq n, 1 \leqq j \leqq 2)\}$.

Or il résulte du Lemme 2.1 de [Ma2] et de sa preuve que ces fonctions sont bornées dans $L^2(\mathbb{R}^n_y)$ uniformément en x, et admettent des bornes ne dépendant que de M_0, δ_0, δ_1, δ_2. #

Posons comme précédemment $X_\theta = (P'_\theta - \rho)^{-1} \hat{\Pi}_\theta$

Lemme 2.2. *$\forall s \in \mathbb{R}$, il existe $C > 0$ ne dépendant que de n, s, M_0, δ_0, δ_1, δ_2, C_1, et μ_1 tel que:*

$$\| e^{\phi(x)/h} X_\theta e^{-\phi(x)/h} \|_{L(H^s(\mathbb{R}^n; L^2(\mathbb{R}^p))} \leqq C$$

uniformément pour $h > 0$ assez petit et $\| \nabla \phi \|_{L^\infty} \leqq \dfrac{1}{C}$.

Preuve. Du fait que $[\hat{\Pi}_\theta, e^{\pm\phi(x)/h}] = O$, on a:

$$
\begin{aligned}
I &\overset{\text{def}}{=} \langle e^{\phi/h}\hat{\Pi}_\theta(P_\theta-\rho)\hat{\Pi}_\theta e^{-\phi/h}u, \hat{\Pi}_\theta u\rangle \\
&= -h^2e^{-2\theta}\langle e^{\phi/h}\Delta_x e^{-\phi/h}\hat{\Pi}_\theta u, \hat{\Pi}_{\bar\theta}\hat{\Pi}_\theta u\rangle + \langle (Q(xe^\theta)-\rho)\hat{\Pi}_\theta u, \hat{\Pi}_\theta u\rangle \\
&= h^2e^{-2\theta}\langle \nabla_x e^{-\phi/h}\hat{\Pi}_\theta u, \nabla_x e^{\phi/h}\hat{\Pi}_{\bar\theta}\hat{\Pi}_\theta u\rangle + \langle (Q(xe^\theta)-\rho)\hat{\Pi}_\theta u, \hat{\Pi}_\theta u\rangle \\
&= h^2e^{-2\theta}\langle \nabla_x\hat{\Pi}_\theta u, \nabla_x\hat{\Pi}_{\bar\theta}\hat{\Pi}_\theta u\rangle - e^{-2\theta}\langle \hat{\Pi}_\theta(\nabla\phi)^2\hat{\Pi}_\theta u, \hat{\Pi}_\theta u\rangle \\
&\quad - he^{-2\theta}\langle \nabla\phi\cdot\hat{\Pi}_\theta u, \nabla_x(\hat{\Pi}_{\bar\theta}\hat{\Pi}_\theta u\rangle + he^{-2\theta}\langle\nabla\phi\cdot\nabla_x\hat{\Pi}_\theta u, \hat{\Pi}_{\bar\theta}\hat{\Pi}_\theta u\rangle \\
&\quad + \langle (Q(xe^\theta)-\rho)\hat{\Pi}_\theta u, \hat{\Pi}_\theta u\rangle,
\end{aligned}
$$

et donc, grâce à (H5):

$$\mathrm{Re}(I) \geqq \frac{1}{C_1}h^2\|\nabla_x\hat{\Pi}_\theta u\|^2 + (\delta_2-\mu_1-\rho)\|\hat{\Pi}_\theta u\|^2 + I'$$

où

$$|I'| \leqq C\|\nabla\phi\|_{L^\infty}(\|\hat{\Pi}_\theta u\|^2 + h^2\|\nabla_x\hat{\Pi}_\theta u\|^2) \quad \text{avec} \quad C>0$$

ne dépendant que de M_0 et δ_1, δ_2, δ_0.

D'où le résultat pour $s=0$, puis pour s quelconque en reprenant la preuve de [Ma2] Lemma 3.2. #

On en déduit aussi en utilisant l'ellipticité du laplacien que

$$\|e^{\phi/h}X_\theta e^{-\phi/h}\|_{L(H^s,H^{s+2})} < \frac{C'}{h^2} \quad \text{avec} \quad C' = C'(s, M_0, \delta_0, \delta_1, \delta_2, C_1, \mu_1) > 0.$$

Reprenant les notations de [Ma2], on note maintenant

$$\mathscr{F}_0^\theta = (-h^2e^{-2\theta}\Delta_x + \lambda_1(xe^\theta)) \oplus (-h^2e^{-2\theta}\Delta_x + \lambda_2(xe^\theta))$$

et $R^\theta = F_\rho^\theta - \mathscr{F}_0^\theta$.
On a alors:

Proposition 2.3. *$\forall s\in\mathbb{R}$, il existe $C>0$ ne dépendant que de n, s, M_0, δ_0, δ_1, δ_2, C_1 et μ_1 tel que*:

$$e^{\phi(x)/h}R^\theta e^{-\phi(x)/h} = R_1 + R_2$$

avec

$$\|R_1\|_{L(H^s\oplus H^s)} \leqq C(h^2 + h\|\nabla\phi\|_{L^\infty})$$

et $R_2 = \begin{pmatrix} 0 & R_{12} \\ R_{21} & 0 \end{pmatrix}$ *avec*

$$\|R_{12}\|_{L(H^s,H^{s-1})} + \|R_{21}\|_{L(H^s,H^{s-1})} \leqq Ch^2$$

uniformément pour $h>0$ assez petit et $\|\nabla\phi\|_{L^\infty} \leqq \frac{1}{C}$.

Preuve. D'après les Lemmes 2.1 et 2.2, et la forme explicite de R^θ (cf. [Ma2] Sect. 3), il ne reste plus qu'à étudier les opérateurs $A_{j,k} = e^{\phi/h}\langle P_\theta e^{-\phi/h}(\cdot u_j^\theta), u_k^{\bar\theta}\rangle_Y$ avec

$j, k \in \{1,2\}$, $k \neq j$. On a:

$$\begin{aligned} A_{12} &= -h^2 e^{-2\theta} e^{\phi/h} \langle \Delta_x e^{-\phi/h}(\cdot u_1^\theta), u_2^{\bar\theta} \rangle_Y \\ &= -h^2 e^{-2\theta} \langle \Delta_x u_1^\theta, u_2^{\bar\theta} \rangle_Y - 2h^2 e^{-2\theta} \langle \nabla_x u_1^\theta, u_2^{\bar\theta} \rangle_Y e^{\phi/h} \nabla_x e^{-\phi/h} \\ &= -h^2 e^{-2\theta} (\langle \Delta_x u_1^\theta, u_2^{\bar\theta} \rangle_Y - 2\frac{\nabla\phi}{h} \langle \nabla_x u_1^\theta, u_2^{\bar\theta} \rangle_Y) - 2h^2 e^{-2\theta} \langle \nabla_x u_1^\theta, u_2^{\bar\theta} \rangle \nabla_x \end{aligned}$$

et de même pour A_{21}, d'où comme précedemment le résultat voulu. #

On s'intéresse maintenant à $e^{\phi/h}\mathscr{F}_0^\theta e^{-\phi/h}$, et on note $P_j^\theta = -h^2 e^{-2\theta}\Delta_x + \lambda_j(xe^\theta)$ $(j = 1$ ou $2)$.

Lemme 2.4. $\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$

$$\operatorname{Re} e^{2\theta} \langle e^{\phi/h} P_2^\theta e^{-\phi/h} u, u \rangle_{L^2} = h^2 \|\nabla_x u\|^2 + \int [\operatorname{Re} e^{2\theta}\lambda_2^\theta - (\nabla\phi)^2] |u|^2 \, dx\, dy.$$

Preuve. On écrit:

$$\begin{aligned} & e^{2\theta} \langle e^{\phi/h} P_2^\theta e^{-\phi/h} u, u \rangle \\ &= h^2 \langle \nabla_x e^{-\phi/h} u, \nabla_x e^{\phi/h} u \rangle + e^{2\theta} \langle \lambda_2^\theta u, u \rangle \\ &= h^2 \|\nabla_x u\|^2 - \langle (\nabla\phi)^2 u, u \rangle + 2ih \int (\nabla\phi) \operatorname{Im}(\bar u \nabla u) \, dx\, dy + e^{2\theta} \langle \lambda_2^\theta u, u \rangle. \quad \# \end{aligned}$$

Lemme 2.5. *Il existe $C > 0$ ne dépendant que de n, M_0, δ_0, C_2, δ_3 tel que pour tout $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, on a:*

$$|\langle e^{\phi/h} P_1^\theta e^{-\phi/h} u, u \rangle| \geqq \frac{1}{C} |\theta| (\|h\nabla_x u\|^2 + \|u\|^2) - 2\|\nabla\phi\|_{L^\infty} \|u\| \cdot \|h\nabla_x u\|.$$

Preuve. Posons $v = h\nabla_x u$, $\alpha = \alpha(x) = [(\nabla\phi)^2 - \operatorname{Re}(e^{2\theta}\lambda_1(xe^\theta))]^{1/2}$ et

$$\beta = \beta(x) = |\theta|^{-1/2} (-\operatorname{Im} e^{2\theta} \lambda_1(xe^\theta))^{1/2}.$$

En particulier, on a grâce à (H6):

$$\alpha(x) \geqq [(\nabla\phi)^2 + \delta_3]^{1/2}$$

et $\beta(x) \geqq C_2^{-1/2}$.

On a aussi $\alpha(x) \leqq M$ où M est une constante ne dépendant que de M_0 et δ_0.

D'autre part, on peut écrire:

$$e^{2\theta} \langle e^{\phi/h} P_1^\theta e^{-\phi/h} u, u \rangle = \|v\|^2 - \|\alpha u\|^2 - i|\theta| \cdot \|\beta u\|^2 + 2i \operatorname{Im} \langle \nabla\phi \cdot v, u \rangle$$

d'où

$$\begin{aligned} |\langle e^{\phi/h} P_1^\theta e^{-\phi/h} u, u \rangle| \geqq & (\|v\|^4 + \|\alpha u\|^4 + |\theta|^2 \|\beta u\|^4 - 2\|v\|^2 \|\alpha u\|^2)^{1/2} \\ & - 2|\langle \nabla\phi \cdot v, u \rangle| \end{aligned}$$

le résultat s'en déduit, du fait que le carré du premier terme se minore par:

$$\|v\|^4 + \left(1 + \frac{1}{M\sqrt{C_2}} |\theta|^2\right) \|\alpha u\|^4 - 2\|v\|^2 \|\alpha u\|^2 \geqq \frac{|\theta|^2}{4M\sqrt{C_2}} \|v\|^4 + \frac{|\theta|^2}{2M\sqrt{C_2}} \|\alpha u\|^4.$$

#

Pour $u_1, u_2, v_1, v_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, on note:

$$[[u_1 \oplus u_2, v_1 \oplus v_2]] = |\langle u_1, v_1 \rangle_{L^2}| + |\langle u_2, v_2 \rangle_{L^2}|.$$

En combinant les résultats de la Proposition 2.3 et des Lemmes 2.4 et 2.5, on a finalement montré:

Proposition 2.6. *Il existe une constante $C_3 > 0$ ne dépendant que de n, M_0, δ_0, δ_1, δ_2, δ_3, C_1, C_2, et μ_1 telle que, pour tout $u_1, u_2 \in C_0^\infty(R^n)$ on a:*

$$\begin{aligned}
&[[e^{\phi/h} F_\rho^\theta e^{-\phi/h}(u_1 \oplus u_2), u_1 \oplus u_2]] \\
&\geqq \tfrac{1}{2} h^2 \|\nabla_x u_2\|^2 + \left(\frac{1}{C_3}|\theta| - \|\nabla \phi\|_{L^\infty}\right)(h^2 \|\nabla_x u_1\|^2 + \|u_1\|^2) \\
&\quad + \int [\operatorname{Re} e^{2\theta} \lambda_2^\theta - (\nabla \phi)^2 - C_3 h^2 - C_3 h \|\nabla \phi\|_{L^\infty}] |u_2|^2 \, dx \, dy
\end{aligned}$$

uniformément pour $\|\nabla \phi\|_{L^\infty} \leqq \dfrac{1}{C_3}$ et $h > 0$ assez petit.

En particulier, pour $\|\nabla \phi\|_{L^\infty} \leqq \dfrac{|\theta|}{2C_3}$, on obtient une inégalité que l'on peut exploiter de la même manière que dans [He–Sj] Sect. 1 et 2. Pour cela, notons d_θ la distance d'Agmon associée à la métrique dégénérée $\operatorname{Re} e^{2\theta} \lambda_2^\theta(x) \, dx^2$, et considérons $\phi_\theta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que:

$$\phi_\theta(x) = \tfrac{1}{2} d_\theta(x, 0) \quad \text{si} \quad \operatorname{Re} e^{2\theta} \lambda_2^\theta(x) \leqq \frac{|\theta|^2}{4C_3^2},$$

$$\phi_\theta(x) \quad \text{est constante dans} \quad \left\{\operatorname{Re} e^{2\theta} \lambda_2^\theta(x) \geqq \frac{|\theta|^2}{2C_3^2}\right\}, \quad \text{et} \quad \|\nabla \phi\|_{L^\infty} \leqq \frac{|\theta|}{2C_3} \tag{2.5}$$

partout.
(Ceci est possible grâce à (H7)). Alors, la Proposition (2.6) appliquée avec $\phi = (1-\varepsilon)\phi_\theta$ et $u_1 \oplus u_2 = e^{\phi(x)/h}(\alpha_1^\theta \oplus \alpha_2^\theta)$ donne comme dans [He–Sj] Sect. 2:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \|e^{\phi_\theta(x)/h}(\alpha_1^\theta \oplus \alpha_2^\theta)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = \mathbf{O}_\varepsilon(e^{\varepsilon/h})$$

d'où l'on déduit, à l'aide de (2.3), (2.4) et des Lemmes 2.1 et 2.2:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \|e^{\phi_\theta(x)/h} w_\theta\|_{H^1(\mathbb{R}^n, L^2(\mathbb{R}^p))} = \mathbf{O}_\varepsilon(e^{\varepsilon/h}). \tag{2.6}$$

C'est cette estimation qui va nous permettre, dans la section suivante, d'obtenir une décroissance exponentielle de w_θ sur $e^{-\theta}\mathbb{R}^n$ (près de 0), et donc une décroissance exponentielle de la fonction résonnante de P: $U_{-\theta} w_\theta$.

Remarquons aussi, pour terminer cette section, que ϕ_θ est analytique près de 0 (cf. par exemple [He–Sj] Sect. 3). Dans la suite, on notera encore ϕ_θ un prolongement holomorphe de ϕ_θ près de 0.

3. Estimations dans le complexe

Si Ω est un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$, et φ est une fonction continue et réelle sur Ω, on notera – par analogie avec les espace H_φ de Sjöstrand (cf. [Sj]) – $H_\varphi(\Omega, L^2(\mathbb{R}^p))$

l'espace des fonctions $w(x,h)$ qui sont holomorphes en x dans un voisinage de $\bar{\Omega}$ (pour tout $h>0$ assez petit), à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^p)$, et vérifiant:

$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists C_\varepsilon>0 \quad \text{tel que} \quad \|w(x,h)\|_{L^2(\mathbb{R}^p)} \leqq C_\varepsilon e^{(\varphi(x)+\varepsilon)/h}$$
$$\text{pour tout} \quad h>0 \quad \text{assez petit et pour tout} \quad x\in\Omega. \tag{3.1}$$

Le résultat principal de cette section est alors:

Proposition 3.1. *Il existe une constante $C_4>0$ ne dépendant que de n, M_0, C_2, C_3, δ_4, telle que:*

$$w_\theta \in H_{-\mathrm{Re}\,\phi_\theta}(\Omega_\theta, L^2(\mathbb{R}^p))$$

avec

$$\Omega_\theta = \left\{ x\in\mathbb{C}^n \,\middle|\, |x| < \frac{|\theta|}{C_4} \right\}.$$

Pour démontrer cette proposition, on part de la formule bien connue suivante (cf. par exemple [Sj] ou [Le]):

$$\forall u \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n),$$

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{i(x-x')\xi - |\xi|(x-x')^2/2} a(x-x',\xi) u(x')\, dx'\, d\xi, \tag{3.2}$$

avec

$$a(x,\xi) = 1 + \frac{i}{2}\frac{x\cdot\xi}{|\xi|}.$$

$$\text{Notons} \quad \varphi(x,x',\tau) = (x-x')\tau + \frac{i}{2}(x-x')^2 \quad \text{pour} \quad x,x'\in\mathbb{R}^n, \quad \tau\in S^{n-1}.$$

En appliquant la formule (3.2) avec $u(x) = \chi(x)\langle \tilde{w}_\theta, \psi\rangle_Y$ où $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi=1$ près de 0, $\tilde{w}_\theta = e^{\phi_\theta(x)/h} w_\theta$, et $\psi\in L^2(\mathbb{R}^p)$ quelconque, on obtient donc pour x assez voisin de 0:

$$\langle \tilde{w}_\theta(x,\cdot), \psi\rangle_Y = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} e^{i|\xi|\varphi(x,x',\xi/|\xi|)} a(x-x',\xi) \tilde{w}_\theta(x',y)\bar{\psi}(y)\chi(x')\, dx'\, d\xi\, dy. \tag{3.3}$$

Commençons par montrer:

Lemme 3.2. *$\exists C>0$ ne dépendant que de $n, M_0, C_2, C_3, \delta_4$ tel que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $C_\varepsilon>0$ vérifiant: $\forall\psi\in L^2(\mathbb{R}^p)$, $\|\psi\|_{L^2}=1$ on peut trouver un symbole:*

$$b\left(x,x',\tau,\frac{1}{h|\xi|},|\xi|\right) \sim \sum_{j=0}^{\infty} b_j\left(x,x',\tau,\frac{1}{h|\xi|},|\xi|\right)|\xi|^{-j}$$

dépendant analytiquement de $x,x',\tau,\dfrac{1}{h|\xi|}$ *dans* $\Omega\times\Omega_{\mathbb{R}}\times S^{n-1}\times\left]0,\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ $\Big($*où* $\Omega = \left\{u\in\mathbb{C}^n, |x| < \dfrac{|\theta|}{C}\right\}$ *et* $\Omega_{\mathbb{R}} = \Omega\cap\mathbb{R}^n\Big)$, *à valeurs dans* $\mathscr{D}_Q$, *et vérifiant:*

(i) $\|b_j\|_{L^2(\mathbb{R}^p)} \leqq C_\varepsilon^{j+1} j!\, |\theta|^{-j}$ pour tout $j\geqq 0$.

(ii) $|\xi|^{-2}h^{-2}e^{-i|\xi|\varphi(x,x',\tau)-\phi_\theta(x')/h}({}^tP_\theta(x',y,hD_{x'},D_y)-\rho)(e^{i|\xi|\varphi+\phi_\theta(x')/h}b) = a(x-x',\tau)\bar{\psi}(y)+r$ (*où ${}^tP_\theta$ désigne le transposé de P_θ*), *avec* $\|r\|_{L^2(\mathbb{R}^p)} \leqq e^{-\varepsilon'|\theta||\xi|}$ $(\varepsilon'=\varepsilon'(\varepsilon)>0$ *indépendant* *de* ψ) *uniformément pour h assez petit, et* $\left(x', x', \tau, \frac{1}{h|\xi|}\right)$ *dans* $\Omega \times \Omega_{\mathbb{R}} \times S^{n-1} \times \left]0, \frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Preuve. On adapte celle du cas scalaire (cf. par exemple [Ro]). On écrit:

$$\begin{aligned}
&|\xi|^{-2}h^{-2}e^{-i|\xi|\varphi-\phi_\theta/h}\,{}^tP_\theta e^{i|\xi|\varphi+\phi_\theta/h}\\
&= -|\xi|^{-2}e^{-2\theta}e^{-i|\xi|\varphi-\phi_\theta/h}\Delta_{x'}e^{i|\xi|\varphi+\phi_\theta/h}+|\xi|^{-2}h^{-2}Q(x'e^{\theta})\\
&= -|\xi|^{-2}e^{-2\theta}\Delta_{x'}-i|\xi|^{-1}e^{-2\theta}(\Delta_{x'}\varphi-i\Delta_{x'}\phi_\theta/h|\xi|)\\
&\quad -2i|\xi|^{-1}e^{-2\theta}(\nabla_{x'}\varphi-i\nabla_{x'}\phi_\theta/h|\xi|)\nabla_{x'}\\
&\quad +e^{-2\theta}(\nabla_{x'}\varphi-i\nabla_{x'}\phi_\theta/h|\xi|)^2+h^{-2}|\xi|^{-2}Q(x'e^{\theta}).
\end{aligned}\tag{3.4}$$

Considérant $|\xi|$ comme un grand paramètre, et $x, \tau, \frac{1}{h|\xi|}$ comme des paramètres supplémentaires, le terme principal de cet opérateur est donné par:

$$\sigma_0 = e^{-2\theta}(\nabla_{x'}\varphi - i\nabla_{x'}\phi_\theta/h|\xi|)^2 + h^{-2}|\xi|^{-2}Q(x'e^{\theta})$$

et donc, du fait que $\nabla_{x'}\varphi = -\tau + i(x'-x)$, on obtient pour $x\in\Omega$, $x'\in\Omega_{\mathbb{R}}$ et $\frac{1}{h|\xi|} \leqq \frac{1}{\varepsilon}$:

$$e^{2\theta}\sigma_0 = 1 + h^{-2}|\xi|^{-2}(e^{2\theta}Q(x'e^{\theta}) - (\nabla_{x'}\phi_\theta)^2) - 2ih^{-1}|\xi|^{-1}\nabla_{x'}\varphi\cdot\nabla_{x'}\phi_\theta + s$$

avec $s = (x'-x)^2 - 2i\tau(x'-x)$, et donc $\|s\|_{L(L^2(\mathbb{R}^p))} \leqq \frac{6|\theta|}{C}\left(\text{en imposant } \frac{2|\theta|}{C} \leqq 1\right)$.

Pour montrer que σ_0 est uniformément inversible, notons pour $u\in L^2(\mathbb{R}^p)$ $\Pi_1^\theta u = \langle u, u_1^{-\theta}\rangle_Y u_1^\theta$, $\hat{\Pi}_1^\theta = 1 - \Pi_1^\theta$, et commençons par examiner:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}\langle e^{2\theta}\sigma_0 u, \hat{\Pi}_1^\theta u\rangle_Y = \|\hat{\Pi}_1^\theta u\|^2 &+ h^{-2}|\xi|^{-2}\,\mathrm{Re}\langle (e^{2\theta}Q(x'e^{\theta}) - \nabla_{x'}\phi_\theta)\hat{\Pi}_1^\theta u, \hat{\Pi}_1^\theta u\rangle\\
&+ \langle s_1\hat{\Pi}_1^\theta u, \hat{\Pi}_1^\theta u\rangle
\end{aligned}$$

avec $s_1 = \mathrm{Re}(s - 2ih^{-1}|\xi|^{-1}\nabla_{x'}\varphi\nabla_{x'}\phi_\theta)$ et donc, grâce à (H7) $\left(\text{et si } \frac{2\delta_4}{C^2} \leqq \frac{1}{4C_3^2};\ \text{cf. (2.5)}\right)$:

$$\|s_1\|_{L(L^2)} \leqq \frac{3|\theta|}{C} + \frac{4\delta_4}{h|\xi|}|x'-x|\cdot|x'| \leqq \frac{3|\theta|}{C} + \frac{\delta_4}{4}h^{-2}|\xi|^{-2}|x'|^2 + \delta_4(16)^2\frac{|\theta|^2}{C^2}.$$

Grâce à (H5), il est facile de voir que l'on a aussi:

$$\mathrm{Re}\langle (e^{2\theta}Q(x'e^{\theta}) - \nabla_{x'}\phi_\theta)\hat{\Pi}_1^\theta u, \hat{\Pi}_1^\theta u\rangle \geqq \tfrac{1}{2}\delta_4|x'|^2\|\hat{\Pi}_1^\theta u\|^2$$

et donc, pour $x\in\Omega$:

$$|\langle e^{2\theta}\sigma_0 u, \hat{\Pi}_1^\theta u\rangle_Y| \geqq \left(1 - \frac{3|\theta|}{C} - \delta_4\left(\frac{16|\theta|}{C}\right)^2\right)\|\hat{\Pi}_1^\theta u|^2. \tag{3.5}$$

Examinons maintenant:

$$\mathrm{Im}\,\langle e^{2\theta}\sigma_0 u, \Pi_1^\theta u\rangle_Y = \frac{1}{h^2\xi^2}\mathrm{Im}\, e^{2\theta}\lambda_1^\theta(x')\|\Pi_1^\theta u\|^2$$

$$+ 2h^{-1}|\xi|^{-1}(\operatorname{Im} x - \tau)(\nabla_{x'}\phi_\theta)\Pi_1^\theta u\|^2 + \langle s\Pi_1^\theta u, \Pi_1^\theta u\rangle_Y$$
$$\leqq \left(-\frac{|\theta|}{C_2 h^2|\xi|^2} + \frac{|\theta|}{C_3 h|\xi|}\left(1 + \frac{|\theta|}{C}\right) + \frac{3|\theta|}{C}\right)\|\Pi_1^\theta u\|^2.$$

D'où, pour $\frac{1}{h|\xi|} \geqq \frac{2C_2}{C_3}$, et C assez grand devant C_2, C_3:

$$\operatorname{Im}\langle e^{2\theta}\sigma_0 u, \Pi_1^\theta u\rangle_Y \leqq -\frac{C_2|\theta|}{C_3^2}\|\Pi_1^\theta u\|^2. \tag{3.6}$$

D'autre part, pour $\frac{1}{h|\xi|} \leqq \frac{2C_2}{C_3}$, on a:

$$\operatorname{Re}\langle e^{2\theta}\sigma_0 u, \Pi_1^\theta u\rangle_Y \geqq \|\Pi_1^\theta u\|^2 - \left(\frac{2C_2}{C_3}\right)^2\left(M_0 + \frac{|\theta|^2}{4C_3^2}\right)\|\Pi_1^\theta u\|^2$$
$$-\left(\frac{2C_2}{C_3}\cdot\frac{|\theta|^2}{C_3 C} + \frac{3|\theta|}{C}\right)\|\Pi_1^\theta u\|^2.$$

Quitte à augmenter C_3 pour que $\left(\frac{2C_2}{C_3}\right)^2\left(M_0 + \frac{|\theta|^2}{4C_3^2}\right) \leqq \frac{1}{3}$, on en déduit en prenant C assez grand devant C_2, C_3 (et avec (3.6)):

$$|\langle e^{2\theta}\sigma_0 u, \Pi_1^\theta u\rangle_Y| \geqq \frac{|\theta|}{C}\|\Pi_1^\theta u\|^2 \tag{3.7}$$

uniformément pour $x\in\Omega, x'\in\Omega_{\mathbb{R}}, \frac{1}{h|\xi|}\in\left]0, \frac{1}{\varepsilon}\right], h > 0$ assez petit, d'où finalement, avec (3.5), et quitte à augmenter encore un peu C:

$$|\langle \sigma_0 u, u\rangle_Y| \geqq \frac{|\theta|}{C}\|u\|_Y^2.$$

On a donc le résultat essentiel:

$$\boxed{\|\sigma_0^{-1}\|_{L(L^2(\mathbb{R}^p))} \leqq \frac{C}{|\theta|}} \tag{3.8}$$

uniformément pour $x\in\Omega, x'\in\Omega_{\mathbb{R}}, \frac{1}{h|\xi|}\in\left]0, \frac{1}{\varepsilon}\right], h$ assez petit.

Remarquant aussi que $\frac{1}{h^2|\xi|^2}\rho = \mathbf{O}\left(\frac{1}{h|\xi|^2}\right)$ est d'ordre -1, il est alors classique de construire terme à terme le symbole analytique b (en commençant par $b_0 = \sigma_0^{-1}(a\bar{\psi})$).

Le fait que les b_j vérifient les estimations (i) se voit par récurrence sur j, et en utilisant la fomule de Leibniz pour estimer $\|\partial_{x'}^\alpha b_j\|_Y, \alpha\in\mathbb{N}^n$ par $C_\varepsilon^{|\alpha|+j+1}(j+|\alpha|)!|\theta|^{-|\alpha|-j}$.
(On utilise aussi le fait que σ_0 est analytique en x', et vérifie: $\|(\partial_{x'}^\alpha\sigma_0)\sigma_0^{-1}\|_{L(L^2)} \leqq C_\varepsilon^{|\alpha|+1}\alpha!$).

On ressomme ensuite ce symbole formel en posant:

$$b = \sum_{j \leqq |\xi|/C'} b_j |\xi|^{-j}$$

avec $C' > 0$ assez grand, ce qui donne aussi l'estimation sur $\|r\|_{L^2(\mathbb{R}^p)}$ (cf. [Sj] Sect. 1).

Pour terminer la preuve de la Proposition 3.1, on écrit (3.3) sous la forme:

$$\langle \tilde{w}_\theta(x,\cdot), \psi \rangle_Y = \int_{|\xi| \leqq \varepsilon/h} + \int_{|\xi| \geqq \varepsilon/h} = I_1 + I_2.$$

Pour estimer I_2, on utilise le Lemme 3.2 qui donne, du fait que $(P_\theta - \rho)w_\theta = 0$:

$$I_2 = (2\pi)^{-n} \int_{|\xi| \geqq \varepsilon/h} e^{i|\xi|\varphi} \frac{1}{h^2|\xi|^2} r\left(x, x', \frac{\xi}{|\xi|}, \frac{1}{h|\xi|}, |\xi|, y\right) \tilde{w}_\theta(x', y)\chi(x') dx' \, d\xi \, dy$$

$$+ (2\pi)^{-n} \int_{|\xi| \geqq \varepsilon/h} e^{i|\xi|\varphi + \phi_\theta(x')/h} \frac{1}{h^2|\xi|^2} b[P_\theta, \chi] w_\theta dx' \, d\xi \, dy \tag{3.9}$$

et donc, en utilisant (2.6) ainsi que l'estimation sur $\|r\|_Y$ et le fait que $\operatorname{Im} \varphi \geqq \frac{1}{C}$ avec $C > 0$ sur le support de $[P, \chi]$, on obtient:

$$|I_2| \leqq e^{-\varepsilon_0/h}$$

avec $\varepsilon_0 > 0$, uniformément pour $x \in \Omega, h > 0$ assez petit, et $\psi \in L^2(\mathbb{R}^p)$, $\|\psi\|_Y = 1$.

D'autre part, sur $|\xi| \leqq \frac{\varepsilon}{h}$ on a pour $x \in \Omega$:

$$-\operatorname{Im} \varphi\left(x, x', \frac{\xi}{|\xi|}\right) \cdot |\xi| = -\xi \cdot \operatorname{Im} x + \tfrac{1}{2}[(\operatorname{Im} x)^2 - (\operatorname{Re} x - x')^2] |\xi| \leqq C' \varepsilon |\operatorname{Im} x|/h$$

avec $C' = 1 + \frac{|\theta|}{2C}$, et donc, en utilisant à nouveau l'estimation (2.6):

$$|I_1| \leqq C'' e^{C'\varepsilon/h}$$

uniformément pour $x \in \Omega, h > 0$ assez petit, $\|\psi\|_Y = 1$

Prenant ensuite le Sup sur tous les $\psi \in L^2(\mathbb{R}^p), \|\psi\| = 1$, on obtient donc finalement pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\|\tilde{w}_\theta(x, \cdot)\|_Y \leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon/h} \tag{3.10}$$

uniformément pour $h > 0$ assez petit et $x \in \Omega$.

Ceci est bien l'estimation demandée, et le fait que $\tilde{w}_\theta$ (donc aussi w_θ) est holomorphe dans Ω à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^p)$ se voit de même, en remarquant que les intégrales I_1 et I_2 (mise sous la forme (3.9)) sont absolument convergentes, et que les intégrandes sont holomorphes en x.

4. Fin de preuve du théorème

D'après l'estimation (2.6), et avec $W = \left\{x \in \mathbb{R}^n, |x| \leqq \frac{|\theta|}{2C_4}\right\}$. On a:

$$\|w_\theta\|_{L^2(W \times \mathbb{R}^p)} \geqq 1 - K_1 e^{-\varepsilon_1/h} \tag{4.1}$$

pour $h>0$ assez petit, avec $K_1>0$ et $\varepsilon_1=\frac{1}{2}\operatorname*{Inf}_{\mathbb{R}^n\backslash W}\operatorname{Re}\phi_\theta(x)>0$.

D'autre part, si l'on pose:

$$w=U_{-\theta}w_\theta=w_\theta(xe^{-\theta},y)$$

on a alors $(P-\rho)w=0$ partout, et d'après la Proposition 3.1, w est holomorphe en x dans Ω_θ à valeurs dans $L^2(\mathbb{R}^p)$.

On peut donc écrire, en utilisant le caractère formellement auto-adjoint de P et la formule de Green:

$$\operatorname{Im}\rho\,\|w\|^2_{L^2(W\times\mathbb{R}^p)}=\operatorname{Im}\langle Pw,w\rangle_{W\times\mathbb{R}^p}=-h^2\int_{\partial W\times\mathbb{R}^p}\bar{w}\frac{\partial w}{\partial\nu}ds \tag{4.2}$$

où ν désigne la normale unitaire extérieure de ∂W, et ds sa mesure de surface.

A l'aide de la Proposition 3.1 (avec ε assez petit), on en déduit:

$$|\operatorname{Im}\rho|\leqq\|w\|^{-2}_{W\times\mathbb{R}^p}K_2e^{-\varepsilon_1/h} \tag{4.3}$$

où $K_2>0$.

Il reste donc à estimer $\|w\|^{-1}_{W\times\mathbb{R}^p}$. Pour cela, on écrit (avec $\psi\in L^2(\mathbb{R}^p)$, $\|\psi\|=1$, et $\varepsilon>0$ arbitraire):

$$\begin{aligned}&\langle w_\theta(x),\psi\rangle_Y\\&=(2\pi)^{-n}\int_{|\xi|\leqq\varepsilon/h}e^{i(x-x')\xi-|\xi|(x-x')^2/2}a(x-x',\xi)\langle w_\theta(x'),\psi\rangle_Y\chi(x')dx'\,d\xi+r_\varepsilon(x,h),\end{aligned} \tag{4.4}$$

où, pour la même raison que dans la preuve de la Proposition 3.1, on a:

$$\operatorname*{Sup}_{x\in\Omega_\theta}|r_\varepsilon(x,h)|\leqq e^{-\varepsilon'/h}$$

avec $\varepsilon'>0$, et uniformément par rapport à ψ et $h>0$ assez petit.

Maintenant, dans l'intégrale qui apparait dans le membre de droite de (4.4), on fait le changement de contour en x' suivant:

$$\Gamma: x'\to\chi_\theta(x')e^{-\theta}x'+(1-\chi_\theta(x'))x'$$

où $\chi_\theta\in C_0^\infty\left(|x'|<\frac{|\theta|}{C_4}\right)$, $\chi_\theta(x')=1$ pour $|x'|\leqq\frac{|\theta|}{2C_4}$.

(On suppose aussi que la fonction χ apparaissant dans (4.4) est telle que $\operatorname{Supp}\chi_\theta\subset\{\chi=1\}$).

D'après la Proposition 3.1, la région de troncature de χ_θ est alors incluse dans la zone de décroissance exponentielle de w_θ, et on obtient à l'aide de ce nouveau contour:

$$\begin{aligned}\langle w_\theta(x),\psi\rangle_Y=(2\pi)^{-n}e^{-n\theta}&\int_{\substack{|\xi|\leqq\varepsilon/h\\|x'|\leqq|\theta|/2C_4}}e^{i(x-e^{-\theta}x')\xi-|\xi|(x-x'e^{-\theta})^2/2}a(x-x'e^{-\theta})\\&\cdot\langle w(x'),\psi\rangle_Y dx'\,d\xi+r'_\varepsilon(x,h)\end{aligned} \tag{4.5}$$

avec $|r'_\varepsilon|\leqq e^{-\varepsilon''/h}(\varepsilon''>0)$ uniformément par rapport à $x\in\Omega_\theta, h>0$ assez petit, $\|\psi\|_Y=1$.

En prenant le Sup sur ψ dans (4.5), on obtient donc pour $x\in\Omega_\theta$, et pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\| w_\theta(x) \|_Y \leqq C_\varepsilon e^{\varepsilon/h} \| w \|_{W \times \mathbb{R}^p} + e^{-\varepsilon''(\varepsilon)/h}$$

avec $C_\varepsilon > 0$ et $\varepsilon''(\varepsilon) > 0$.

A l'aide de (4.1), on en déduit:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0 \text{ tel que } \| w \|_{W \times \mathbb{R}^p} \geqq \frac{1}{C_\varepsilon} e^{-\varepsilon/h}.$$

Cette dernière estimation ainsi que (4.3) permettent finalement de conclure, en remarquant aussi que:

$$\operatorname*{Inf}_{\partial W} \operatorname{Re} \phi_\theta(x) \geqq \frac{1}{C} |\theta|^2$$

où C ne dépend que de C_4 et δ_4.

References

[Ag–Co] Aguilar, J., Combes, J. M.: A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger hamiltonians. Commun. Math. Phys. **22**, 269–279 (1971)

[CDS] Combes, J. M., Duclos, P., Seiler, R.: The Born–Oppenheimer approximation. Rigorous Atomic and Molecular Physics. Velo, G., Wightman, A. (ed.), pp. 185–212. New York: Plenum Press 1981

[He–Sj] Helffer, B., Sjöstrand, J.: Multiple wells in the semiclassical limit I. Commun. P.D.E. **9**(4), 337–408 (1984)

[La–Li] Landau, L., Lifchitz, E.: Mécanique quantique. Théorie non relativiste. Moscou (ed.) Mir, 1966

[Le] Lebeau, G.: Fonctions harmoniques et spectre singulier. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 4ème série, **13**, 269–291 (1980)

[Ma1] Martinez, A.: Développements asymptotiques et effet tunnel dans l'approximation de Born–Oppenheimer. Ann. Inst. H. Poincaré (Physique Théorique). Vol. **49**, no. 3, 239–257 (1989)

[Ma2] Martinez, A.: Résonances dans l'approximation de Born–Oppenheimer I, à paraître dans J. Diff. Eq. et preprint Univ. Orsay (1989)

[Ro] Rouleux, M.: Diffraction analytique sur une variété à singularité conique. Commun. P.D.E. **11**(9), 947–988 (1986)

[Sj] Sjöstrand, J.: Singularités analytiques microlocales. Astérisque **95** (1982)

Communicated by B. Simon