

# 数字图像处理课程作业实验六

## 维纳滤波器及图像恢复

姓名：王适未  
班级：自动化钱 61  
学号：2160405015  
提交日期：2019 年 4 月 2 日

### 摘要

本次作业主要围绕实现对于高斯噪声以及椒盐噪声的图像进行恢复以及维纳滤波器的推导与应用两方面展开，本文通过 MATLAB 实现了对图像的加噪及去噪，推导出并实现了维纳滤波器的滤波算法。本文利用上述算法并结合之前所涉及的滤波器对图像进行恢复并比较，对比得出各自算法的优缺点。

# 作业实验任务

## 一、高斯噪声图像恢复

**1. 任务要求：**在测试图像上产生高斯噪声 lena 图（需能指定均值和方差）；并用多种滤波器恢复图像，分析各自优缺点：

高斯噪声是指它的概率密度函数服从高斯分布（即正态分布）的一类噪声。常见的高斯噪声包括起伏噪声、宇宙噪声、热噪声和散粒噪声等等。所谓高斯噪声是指它的概率密度函数服从高斯分布（即正态分布）的一类噪声。如果一个噪声，它的幅度分布服从高斯分布，而它的功率谱密度又是均匀分布的，则称它为高斯白噪声。高斯白噪声的二阶矩不相关，一阶矩为常数，是指先后信号在时间上的相关性。高斯白噪声包括热噪声和散粒噪声。在通信信道测试和建模中，高斯噪声被用作加性白噪声以产生加性白高斯噪声。

这里使用 MATLAB 相关的库函数对图像加噪声。

### 2. 实验结果：

本文分别使用中值滤波器、空域高斯滤波器、频域巴特沃斯低通滤波器以及频域高斯低通滤波器对不同高斯噪声的 lena 图像进行测试，得到下图的测试结果。



从运行结果可以得出在同等高斯噪声下中值滤波器对图像噪声的去除明显好于其他滤波器，因此建议选用中值滤波器对图像进行恢复。

## 二、椒盐噪声图像恢复

**1. 任务要求：**在测试图像 lena 图加入椒盐噪声（椒和盐噪声密度均是 0.1）；用学过的滤波器恢复图像；在使用反谐波分析 Q 大于 0 和小于 0 的作用；

椒盐噪声也称为脉冲噪声，是图像中经常见到的一种噪声，它是一种随机出现的白点或者黑点，可能是亮的区域有黑色像素或是在暗的区域有白色像素（或是两者皆有）。盐和胡椒噪声的成因可能是影像讯号受到突如其来的强烈干扰而产生、类比数位转换器或位元传输错误等。例如失效的感应器导致像素值为最小值，饱和的感应器导致像素值为最大值。

### 逆谐波均值滤波器

逆谐波均值滤波器表达式如下

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^{Q+1}}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q}$$

其中 $Q$ 称为滤波器的阶数。逆谐波均值滤波器能够减少或消除椒盐噪声对图像产生的影响。当 $Q$ 值大于0时，该滤波器消除胡椒噪声；当 $Q$ 值小于0时，该滤波器消除盐粒噪声。因此，该滤波器不能够同时消除胡椒噪声和盐粒噪声。特殊的，当 $Q = 0$ 时，逆谐波均值滤波器简化为算数均值滤波器，当 $Q = -1$ 时，则简化为谐波均值滤波器。

具体原理为：首先对原公式进行变形

$$\hat{f}(x, y) = \frac{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q g(s, t)}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q} = \sum_{(s,t) \in S_{xy}} \frac{g(s, t)^Q}{\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q} g(s, t)$$

上式可以看作求 $(x, y)$ 邻域内所有 $(s, t)$ 点的加权平均值，权重的分母 $\sum_{(s,t) \in S_{xy}} g(s, t)^Q$ 是一个常数，因此我们只需要考虑分子 $g(s, t)^Q$ 的大小。

1. 当 $Q > 0$ 时， $g(s, t)^Q$ 对 $g(s, t)$ 有增强作用，由于“胡椒”噪声值较小（0），对加权平均结果影响较小，所以滤波后噪声点处 $(x, y)$ 取值和周围其他值更接近，有利于消除“胡椒”噪声。

2. 当 $Q < 0$ 时， $g(s, t)^Q$ 对 $g(s, t)$ 有削弱作用，由于“盐”噪声值较大（255），取倒数后较小，对加权平均结果影响较小，所以滤波后噪声点处 $(x, y)$ 取值和周围其他值更接近，有利于消除“盐”噪声。

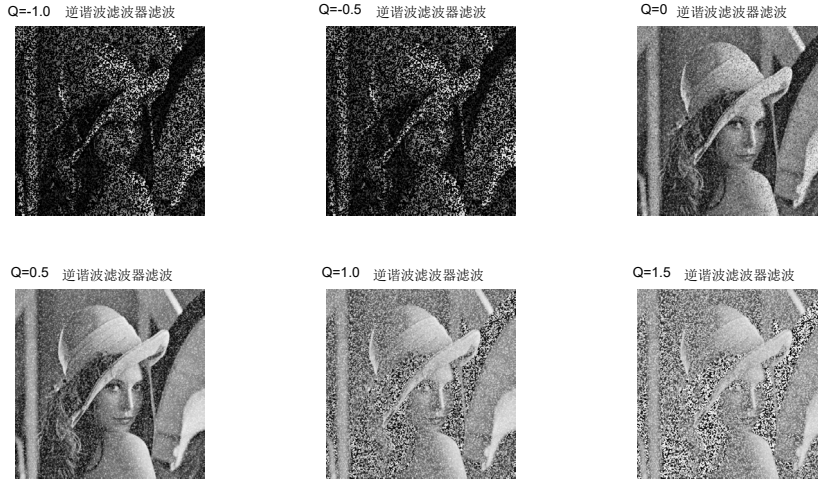
## 2. 实验结果：

本文分别使用中值滤波器、空域高斯滤波器、频域巴特沃斯低通滤波器以及频域高斯低通滤波器对不同椒盐噪声的 lena 图像进行测试，得到下图的测试结果。



从运行结果可以得出在同等椒盐噪声下中值滤波器对图像噪声的去除明显好于其他滤波器，因此初步建议选用中值滤波器对图像进行恢复。

接着，本文分别使用不同 $Q$ 值的逆谐波均值滤波器对不同椒盐噪声的 lena 图像进行测试，得到下图的测试结果。



从运行结果可以得出在同等椒盐噪声下，当 $Q$ 值大于0时，该滤波器消除胡椒噪声；当 $Q$ 值小于0时，该滤波器消除盐粒噪声。且该滤波器不能够同时消除胡椒噪声和盐粒噪声。特殊的，当 $Q=0$ 时，逆谐波均值滤波器简化为算数均值滤波器。

因此逆谐波均值滤波器能够对胡椒噪声或者盐粒噪声进行有针对性的去除。

### 三、推导维纳滤波器

1. 任务要求：推导维纳滤波器并实现下边要求：

- 实现模糊滤波器如方程 Eq. (5.6-11).
- 模糊 lena 图像：45 度方向， $T=1$ ；
- 再模糊的 lena 图像中增加高斯噪声，均值=0，方差=10 pixels 以产生模糊图像；
- 分别利用方程 Eq. (5.8-6)和(5.9-4)，恢复图像；并分析算法的优缺点.

#### (1) 维纳滤波器的推导

图像的退化模型为

$$g(x, y) = h(x, y) * f(x, y) + \eta(x, y)$$

其中， $f(x, y)$ 为原始图像， $h(x, y)$ 为退化函数， $\eta(x, y)$ 为噪声函数， $g(x, y)$ 为退化的图像。并假设 $f$ 与 $\eta$ 不相关， $\eta$ 为0均值的平稳随机过程。

根据已退化图像  $g(x, y)$  利用线性估计器估计原始图像

$$\hat{f}(x, y) = w(x, y) * g(x, y)$$

其中， $\hat{f}(x, y)$ 为恢复的图像， $w(x, y)$ 为恢复滤波器。

最小化均方误差为

$$e^2(x, y) = E[f(x, y) - \hat{f}(x, y)]^2$$

最小化均方误差可以由正交原则求解，即：最优求解的误差与观测的信号值不相关

$$E[e(n_1, n_2)g^*(m_1, m_2)] = 0$$

进一步分解得

$$\begin{aligned} E[f(n_1, n_2)g^*(m_1, m_2)] &= E[\hat{f}(n_1, n_2)g^*(m_1, m_2)] = E[w(n_1, n_2) * g(n_1, n_2)g^*(m_1, m_2)] \\ &= \sum_{k_1} \sum_{k_2} w(k_1, k_2)E[g(n_1 - k_1, n_2 - k_2)g^*(m_1, m_2)] \end{aligned}$$

记

$$R_{fg}(n_1, n_2) = E[f(k_1, k_2)g^*(k_1 - n_1, k_2 - n_2)] \quad (1)$$

$$R_g(n_1, n_2) = E[g(k_1, k_2)g^*(k_1 - n_1, k_2 - n_2)] \quad (2)$$

$$\begin{aligned} R_{fg}(n_1 - m_1, n_2 - m_2) &= \sum_{k_1} \sum_{k_2} w(k_1, k_2) R_g(n_1 - k_1 - m_1, n_2 - k_2 - m_2) \\ &= w(n_1 - m_1, n_2 - m_2) * R_g(n_1 - m_1, n_2 - m_2) \end{aligned} \quad (3)$$

换元得

$$R_{fg}(n_1, n_2) = w(n_1, n_2) * R_g(n_1, n_2)$$

等式两端同时取傅里叶变换得

$$W(\omega_1, \omega_2) = \frac{P_{fg}(\omega_1, \omega_2)}{P_g(\omega_1, \omega_2)} \quad (4)$$

为非因果维纳滤波器，其中

$$P_{fg}(\omega_1, \omega_2) = \sum_{n_1} \sum_{n_2} R_{fg}(n_1, n_2) e^{-j(n_1 \omega_1 + n_2 \omega_2)}$$

是两个平稳随机过程的协功率谱

首先对(1)式进行化简得

$$\begin{aligned} R_{fg}(n_1, n_2) &= E[f(k_1 + n_1, k_2 + n_2)g^*(k_1, k_2)] \\ &= E[f(k_1 + n_1, k_2 + n_2)(h^*(k_1, k_2, y) * f^*(k_1, k_2) + \eta^*(k_1, k_2))] \\ &= E \left[ f(k_1 + n_1, k_2 + n_2) \left( \sum_{l_1} \sum_{l_2} h^*(l_1, l_2) f^*(k_1 - l_1, k_2 - l_2) + \eta^*(k_1, k_2) \right) \right] \\ &= \sum_{l_1} \sum_{l_2} h^*(l_1, l_2) E[f(k_1 + n_1, k_2 + n_2)(f^*(k_1 - l_1, k_2 - l_2) + \eta^*(k_1, k_2))] \\ &= \sum_{l_1} \sum_{l_2} h^*(l_1, l_2) R_f(n_1 + l_1, n_2 + l_2) = h^*(-n_1, -n_2) * R_f(n_1, n_2) \end{aligned}$$

两端同时取傅里叶变换得

$$P_{fg}(\omega_1, \omega_2) = H^*(\omega_1, \omega_2) P_f(\omega_1, \omega_2) \quad (5)$$

对(2)式进行化简得

$$\begin{aligned} R_g(n_1, n_2) &= E[g(k_1 + n_1, k_2 + n_2)g^*(k_1, k_2)] \\ &= E \left[ \left( \sum_{m_1} \sum_{m_2} h(m_1, m_2) f(k_1 + n_1 - m_1, k_2 + n_2 - m_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \eta(k_1 + n_1, k_2 + n_2) \right) \left( \sum_{l_1} \sum_{l_2} h^*(l_1, l_2) f^*(k_1 - l_1, k_2 - l_2) + \eta^*(k_1, k_2) \right) \right] \\ &= \sum_{m_1} \sum_{m_2} \sum_{l_1} \sum_{l_2} h(m_1, m_2) h^*(l_1, l_2) f(k_1 + n_1 - m_1, k_2 + n_2 - m_2) f^*(k_1 - l_1, k_2 - l_2) \\ &\quad + \sum_{m_1} \sum_{m_2} h(m_1, m_2) f(k_1 + n_1 - m_1, k_2 + n_2 - m_2) \eta^*(k_1, k_2) \\ &\quad + \sum_{l_1} \sum_{l_2} h^*(l_1, l_2) f^*(k_1 - l_1, k_2 - l_2) \eta(k_1 + n_1, k_2 + n_2) + R_\eta(n_1, n_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{m_1} \sum_{m_2} \sum_{l_1} \sum_{l_2} h(m_1, m_2) h^*(l_1, l_2) R_f(n_1 - m_1 + l_1, n_2 - m_2 + l_2) + R_\eta(n_1, n_2) \\
&= \sum_{l_1} \sum_{l_2} h^*(l_1, l_2) h(n_1 + l_1, n_2 + l_2) * R_f(n_1 + l_1, n_2 + l_2) + R_\eta(n_1, n_2) \\
&= h^*(-n_1, -n_2) * h(n_1, n_2) * R_f(n_1, n_2) + R_\eta(n_1, n_2)
\end{aligned}$$

两端同时取傅里叶变换

$$P_g(\omega_1, \omega_2) = |H(\omega_1, \omega_2)|^2 P_f(\omega_1, \omega_2) + P_\eta(\omega_1, \omega_2) \quad (6)$$

将(5)(6)带入(4)得

$$\begin{aligned}
W(\omega_1, \omega_2) &= \frac{H^*(\omega_1, \omega_2) P_f(\omega_1, \omega_2)}{|H(\omega_1, \omega_2)|^2 P_f(\omega_1, \omega_2) + P_\eta(\omega_1, \omega_2)} \\
&= \frac{H^*(\omega_1, \omega_2) |F(\omega_1, \omega_2)|^2}{|H(\omega_1, \omega_2)|^2 |F(\omega_1, \omega_2)|^2 + |N(\omega_1, \omega_2)|^2}
\end{aligned}$$

故表达式由下式给出

$$\begin{aligned}
\hat{F}(u, v) &= W(u, v) G(u, v) = \frac{H^*(u, v) S_f(u, v)}{|H(u, v)|^2 S_f(u, v) + S_\eta(u, v)} G(u, v) \\
&= \frac{1}{H(u, v)} \frac{S_h(u, v)}{S_h(u, v) + S_\eta(u, v) / S_f(u, v)} G(u, v)
\end{aligned}$$

## (2) 模糊滤波器

根据教材中给出的计算运动模糊时所需的退化函数

$$H(u, v) = \frac{T}{\pi(ua + vb)} \sin[\pi(ua + vb)] e^{-j\pi(ua + vb)}$$

## (3) 约束最小二乘方滤波

对于约束最小二乘方滤波，期望是找一个最小准则函数  $C$ ，定义如下：

$$C = \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} [\nabla^2 f(x, y)]^2$$

$$\|g - H\hat{f}\|^2 = \|\eta\|^2$$

$$\|w\|^2 = w^T w, \hat{f}$$

约束最小二乘方滤波的计算公式如下

$$\hat{F}(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \frac{1}{\lambda} |C|^2} G(u, v) = \frac{H^*(u, v)}{|H(u, v)|^2 + \gamma |P(u, v)|^2} G(u, v)$$

其中， $\gamma$ 是一个参数，必须对它进行调整以满足条件， $P(u, v)$ 是函数

$$P(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

## 2. 实验结果：推导维纳滤波器如上

(a) 实现模糊滤波器如方程 Eq. (5.6-11).

(b) 模糊 lena 图像：45 度方向， $T=1$ ；

(c) 再模糊的 lena 图像中增加高斯噪声，均值=0，方差=10 pixels 以产生模糊图像；

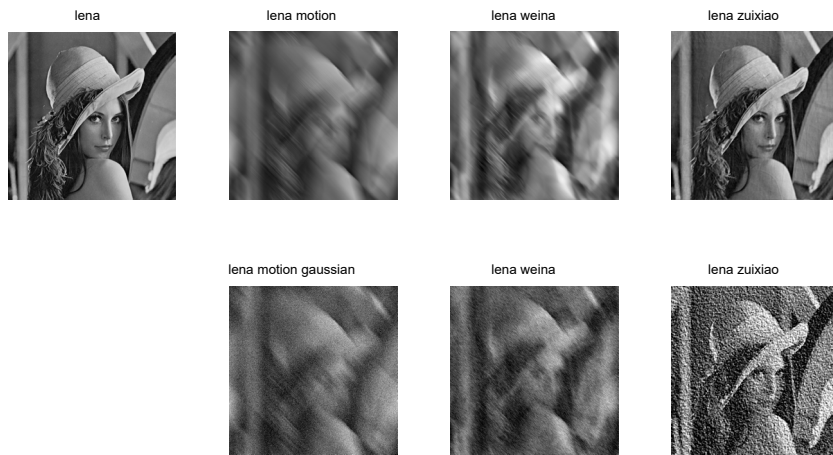


图 11 lena 原图像，模糊 lena 图像，增加高斯噪声的模糊 lena 图像以及恢复图像  
其中 K 值为 0.03，Gamma 值为 0.001  
(d) 分别利用方程 Eq. (5.8-6)和(5.9-4)，恢复图像；并分析算法的优缺点。  
通过对比图 11 可知，约束最小二乘方滤波得到的图像较维纳滤波器得到的图像更为清晰。而维纳滤波器得到的图像中并不能消除残留的拖影，相比之下约束最小二乘方滤波的得到的图像对拖影的去除较好。

## 附录

代码详见文件

## 参考文献

[1] 冈萨雷斯，数字图像处理（第三版），电子工业出版社