Rucksack Problem

Algorithmen und Datenstrukturen II

Sebastian Baumann, Korbinian Karl, Ehsan Moslehi

June 23, 2019

Hochschule für Angewandte Wissenschaften München

Table of contents

Beschreibung des Problems

Rucksack Problem

Mathematische Beschreibung

Gegeben:

- Ggegenstände $1, 2, 3, ..., n$
  - w_i : Wert vom Gegenstand i
  - $v_i \in \mathbb{N}$: Volumen vom Gegenstand i
- Rucksack mit dem Volumen $V \in \mathbb{N}$

Gesucht:

Eine Rucksackfüllung mit maximalen Gesamtwert, wobei das Volumen V nicht überschritten werden darf.

$$max\left\{ \sum_{i=1}^{n} w_i t_i \mid \sum_{i=1}^{n} v_i t_i \leq V, \forall i : t_i \in \{0, 1\} \right\}$$

Mathematische Beschreibung

Ganzzahliges Lineares Optimierungsproblem

Mathematische Beschreibung

Ganzzahliges Lineares Optimierungsproblem

NP-Vollständig

Lösungsansätze

Brute Force

1. Brute Force
2. Greedy
3. Dynamische Programmierung

Brute Force

Brute Force

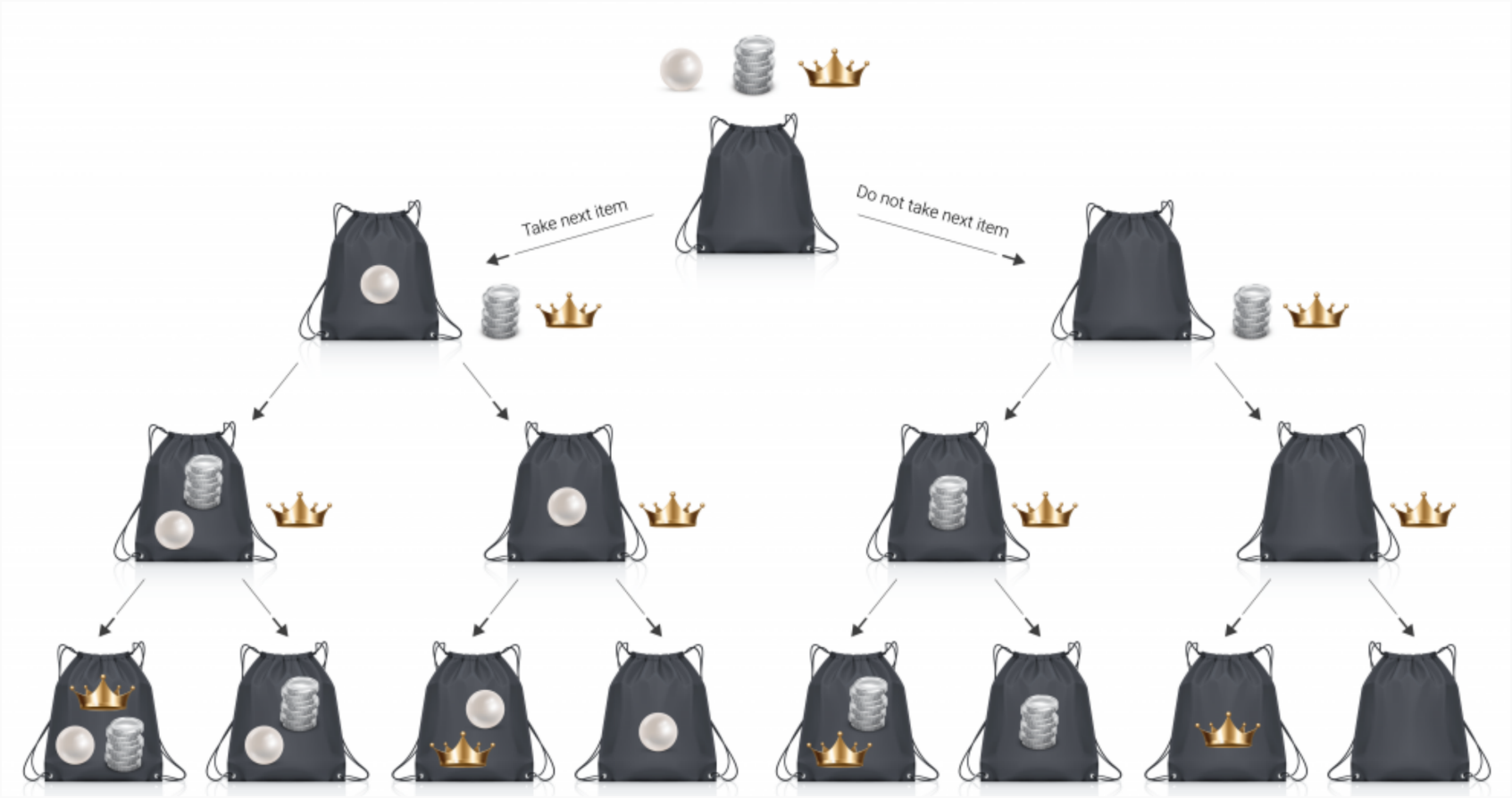

Figure 2: Probiere alle Teilmengen!

Brute Force

Optimale globale Lösung wird gefunden.

Brute Force

Optimale globale Lösung wird gefunden.

Exponentielle Laufzeit $O(2^n)$

Greedy Algorithmus

Greedy Strategie

Strategien:

1. **Absteigende Sortierung nach Wert**

Packe solange Gegenstände in den Rucksack, bis kein Gegenstand mehr rein passt!

Greedy Strategie

Strategien:

1. **Absteigende Sortierung nach Wert**
2. **Aufsteigende Sortierung nach Volumen**

Packe solange Gegenstände in den Rucksack, bis kein Gegenstand mehr rein passt!

Greedy Strategie

Strategien:

1. **Absteigende Sortierung nach Wert**
2. **Aufsteigende Sortierung nach Volumen**
3. **Absteigende Sortierung nach Wertdichte** $d_i = \frac{w_i}{v_i}$

Packe solange Gegenstände in den Rucksack, bis kein Gegenstand mehr rein passt!

Greedy Strategie

Optimale globale Lösung wird NICHT gefunden.
Optimale lokale Lösung wird gefunden.

Greedy Strategie

Optimale globale Lösung wird NICHT gefunden.
Optimale lokale Lösung wird gefunden.

Laufzeit $O(n.\log n)$

Dynamische Programmierung

Dynamische Programmierung

1. Teile das Problem in gleichartige Teilprobleme!

Dynamische Programmierung

1. Teile das Problem in gleichartige Teilprobleme!
2. Speichere die Resultate der Teilprobleme systematisch, um wiederholte Berechnungen zu vermeiden!

Dynamische Programmierung

1. Teile das Problem in gleichartige Teilprobleme!
2. Speichere die Resultate der Teilprobleme systematisch, um wiederholte Berechnungen zu vermeiden!
3. Setze die optimale Lösung aus den optimalen Lösungen der Teilprobleme zusammen!

Dynamische Programmierung

Idee:

1. Löse das Problem für eine Menge von Gegenständen mit einem Gegenstand und einem Rücksack mit Volumen eins. Speichere das Ergebnis in einer Tabelle.

Dynamische Programmierung

Idee:

1. Löse das Problem für eine Menge von Gegenständen mit einem Gegenstand und einem Rücksack mit Volumen eins. Speichere das Ergebnis in einer Tabelle.
2. Wiederhole das für verschiedene Rucksäcke mit volumen $2, \ldots, V$ und benutze dabei die vorherige Ergebnisse.

Dynamische Programmierung

Idee:

1. Löse das Problem für eine Menge von Gegenständen mit einem Gegenstand und einem Rücksack mit Volumen eins. Speichere das Ergebnis in einer Tabelle.
2. Wiederhole das für verschiedene Rucksäcke mit volumen $2, ..., V$ und benutze dabei die vorherige Ergebnisse.
3. Wiederhole die vorherigen Schritte für Mengen mit zwei, drei, ..., n Gegenständen.

Dynamische Programmierung

```
1     for i := 1; i <= numItems; i++ {
2       for j := 1; j <= capacity; j++ {
3         if is[i-1].volume <= j {
4           valueOne := float64(matrix[i-1][j])
5           valueTwo := float64(is[i-1].worth + matrix[i-1][j-
    is[i-1].volume])
6           matrix[i][j] = int(math.Max(valueOne, valueTwo))
7         } else {
8           matrix[i][j] = matrix[i-1][j]
9         }
10      }
11    }
12
```

Dynamische Programmierung

Beispiel:

Rucksack mit Volumen 5.

Gegenstände :

1. $v_1 = 3, w_1 = 5$
2. $v_2 = 2, w_2 = 3$
3. $v_3 = 1, w_3 = 4$

Dynamische Programmierung

Fülle die Tabelle!

I: \ V:	1	2	3	4	5
1 (3, 5)	0	0	5	5	5
2 (2, 3)	0	3	5	5	8
3 (1, 4)	4	4	7	9	9

Dynamische Programmierung

- Fange unten Rechts an.
- Vergleiche den Wert mit dem Wert in der Zelle drüber.
  1. Die Werte sind gleich $\Rightarrow$ Der Gegenstand ist nicht genommen.
  2. Die Werte sind nicht gleich $\Rightarrow$ Der Gegenstand genommen. So gehe eine Zeile hoch und um Volumen vom Gegenstand nach links.
- Wiederhole bis der Zeiger aus der Tabelle raus geht.

I: \ V:	1	2	3	4	5
1 (3, 5)	0	0	5	(5)	5
2 (2, 3)	0	3	5	5	8
3 (1, 4)	4	4	7	9	(9)

Dynamische Programmierung

Optimale globale Lösung wird gefunden.

Dynamische Programmierung

Optimale globale Lösung wird gefunden.

Exponentielle Laufzeit $O(n.V)$

Dynamische Programmierung

Optimale globale Lösung wird gefunden.

Exponentielle Laufzeit $O(n.V)$

Ist NP=P bewisen?

Fragen?