Математический анализ. 1 семестр.

Часть I
Введение. Логика. Понятие функции

1 Алгебра высказываний

Высказывание - суждение, которым можно приписать истину или ложь.

1.1 Логические операции

Отрицание	$\overline{(A)}$
Конъюнкция	$A \wedge B$
Дизъюнкция	$A \vee B$
Импликация	$A \Rightarrow B$(if A then B)
Эквиваленция	$A \Leftrightarrow B$ (A, тогда и только тогда, когда B)

1.2 Законы логических операций

Коммутативность

$$(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A) \tag{1}$$
$$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A) \tag{2}$$

Ассоциативность

$$((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C)) \tag{3}$$
$$((A \wedge B) \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge (B \wedge C)) \tag{4}$$

Дистрибутивность

$$(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \tag{5}$$
$$(A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)) \tag{6}$$

Законы поглощения

$$A \vee 1 \Leftrightarrow 1 \tag{7}$$
$$A \vee 0 \Leftrightarrow A \tag{8}$$
$$A \wedge 1 \Leftarrow A \tag{9}$$
$$A \wedge 0 \Leftarrow 0 \tag{10}$$
$$A \vee A \Leftrightarrow A \Leftrightarrow A \wedge A \tag{11}$$
$$A \vee \overline{A} \Leftrightarrow 1 \tag{12}$$
$$A \wedge \overline{A} \Leftarrow 0 \tag{13}$$
$$\overline{\overline{A}} \Leftrightarrow A \tag{14}$$

Силлогизм

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C) \tag{15}$$

Законы де Моргана ы

$$\overline{(A \vee B)} \Leftrightarrow (\overline{A} \wedge \overline{B}) \tag{16}$$
$$\overline{(A \wedge B)} \Leftrightarrow (\overline{A} \vee \overline{B}) \tag{17}$$
$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{A} \vee B) \tag{18}$$
$$\overline{(A \Rightarrow B)} \Leftrightarrow (A \wedge \overline{B}) \tag{19}$$

Закон контропозиции

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A}) \tag{20}$$

1.3 Предикаты. Кванторы.

Предикат - суждения, зависящие от переменной величины и становящиеся высказыванием при определенного значения. $P(x), P(x, y)$ - одноместный и двухместный предикат соответственно.
$\forall$ (любой, для любого)
$\exists$ (существует)

2 Понятие функции

Функция на Wikipedia
Пусть X, Y множества.
Правило, которое каждому элементу множества X ставит элемент из множества Y называется функцией, со значениями во множестве Y.
Однозначная функция ставит каждому $x \in X$ только один $y \in Y$.
Множество X - область определения функции $- D(f)$.
Множество Y - область значений этой функции.
График функции $f(x)$ - это множество упорядоченных пар:
$\{(x, f(x)) : x \in X \wedge f(x) \in Y\}$.

2.1 Образ и прообраз функции

Если $A \subset X$, то $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ - образ множества A, при $f : X \to Y$
Если $B \subset Y$, то $f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in B)\}$ - прообраз множества B, при $f : X \to Y$

2.2 Поведение функций

Инъекция $f : X \to Y$
f - инъекция, если
$\forall x_1, x_2 : x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2)$

Сюръекция $f : X \to Y$ - сюръекция, если
$\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$, например $f(x) = x^3$.

Биекция $f : X \to Y$ - биекция, если она и инъективна, и сюръективна. Например, $f(x) = ax + b$; $f(x) = tg(x)$ биекция на всю числовую ось $y, x \in [-\pi/2; \pi/2]$.
Если существует биекция одного множества на другое, то между этими множествами можно установить взаимно-однозначные соответствия: $1 \to 1$.

2.3 Суперпозиция

Пусть, $f(x) : X \to Y; g(x) : Y \to Z$, тогда $\forall x \in X : g(f(x)) \in Z : X- > Z$ суперпозиция $gf : X \to Z$.
Например, пусть $f(x) = x^2; g(x) = sin(x)$, тогда $gf(x) = sin(x^2); fg(x) = sin^2(x)$.

2.4 Математическая индукция

Пусть есть $P(n), n \in N$, если $P(1) = 1 \wedge \forall ninN : P(n) = 1 \rightarrow P(n+1) = 1$, то $\forall n \in N : P(n) = 1$, где $P(n)$ - предикат.

$P(1)$ - база индукции (проверяется)
$P(n)$ - предположение
$P(n) \rightarrow P(n+1)$ - шаг индукции (доказывается)

Пример Доказать: $p = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
1) Б.и.: $n = 1 : 1 = \frac{1*2}{2} \rightarrow 1 = 1$
2) Пусть $\frac{n(n+1)}{2}$ верно.
$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Что и т.д.

Эквивалентная формулировка мат. индукции Пусть $P(n), n \in N$ - предикат и $P(1) - 1 \wedge (\forall : P(k) = 1, k \leq n) \rightarrow P(n+1) = 1$, тогда $P(n) = 1, n \in N$.

2.5 Бином Ньютона

$(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_n^k a^{n-k} b^k$,
где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Часть II
Множества

3 Понятие множества

Множество является фундаментальным понятием в математике и является не определяемым. Множество есть совокупность объектов, которые составляют *единое целое*. Например, отрезок - множество точек от a до b: $[a, b] = \{x \in R : a \leq x \leq b\}$
$b \in B$, b есть элемент во множестве B

4 Операции над множествами

$$A \subset B, \text{если } \forall a : (a \in A) \rightarrow (a \in B) \tag{21}$$
$$X = Y \text{если } \forall x : (x \in X \rightarrow x \in Y) \wedge (x \in Y \rightarrow x \in X) \tag{22}$$
$$\text{Объединение } A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \tag{23}$$
$$\text{Пересечение } A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} \tag{24}$$
$$\text{Разность } X \setminus Y = \{x : x \in X \wedge x \notin Y\} \tag{25}$$

Универсальное множество Пустое множество $\varnothing$ не содержит элементов и является эквивалентом лжи в логике. U - универсальное множество (множество всех элементов в данной задаче), является эквивалентом истины.

4.1 Дополнение к множеству

$$\overline{x} = \{x \in U : (x \notin X)\} = U \setminus X \tag{26}$$

5 Законы для множеств

5.1 Поглощение

$$X \cap (X \cup Y) = X \tag{27}$$
$$X \cup (X \cap Y) = Y \tag{28}$$
$$X \cup X = X \tag{29}$$
$$X \cap X = X \tag{30}$$
$$\tag{31}$$

5.2 Преобразование разности

$$X \setminus Y = X \cap \overline{Y} \tag{32}$$

6 Декартово умножение

Упорядоченная пара (a, b) - упорядоченная пара, пара, в которой все элементы следуют в строго определенном порядке.

6.1 Определение умножения

$$X \times Y = \{(a, b) : x \in X \wedge y \in Y\} \tag{33}$$

7 Бинарные отношения

Пусть ρ - множество отношений, X, Y - произвольные множества, тогда произвольные подмножества декартового произведения $\rho \in X \times Y$ называются бинарными отношениями между $x \in X$ и $y \in Y$.

7.1 Свойства отношений

1. $\forall x \in X : (x, x) \in \rho$ - рефлексивность.
2. $\forall x, y \in X : (x, y) \in \rho \to (y, x) \in \rho$ - симметричность.
3. $\forall x, y \in X, x \neq y : (x, y) \in \rho \to (y, x) \notin \rho$ - асимметричность.
4. $\forall x, y, x \in X : (x, y) \in \rho \wedge (y, z) \in \rho) \to (x, z) \in \rho$

Классы отношений К первому классу отношений (отношения эквивалентности) относятся все отношения которые удовлетворяют 1, 2 и 4 свойствам (Быть одного пола, возраста). Ко второму классу (отношения порядка) относятся все, удовлетворяющие свойствам 1, 3 и 4.

8 Мощность множества. Эквивалентные множества.

Пусть A и B - конечные множества.

A	a_1	a_2	a_3
B	b_1	b_2	b_3

Определение эквивалентности A, B эквивалентные ($A \sim B$), если между элементами этих множеств можно установить взаимно однозначные соответствия $(1-1)$.

$A \sim B$ есть отношение эквивалентности на классе множеств.

1) Если $A \sim B$, то $B \sim A$.
2) Если $A \sim B \wedge B \sim C \to A \sim C$

Пример $A = N, B = \{2n | n \in N\} \to A \sim B$

Понятие мощности Мощность множества есть число элементов в этом множестве: $|A| = |B| = 3 \Leftrightarrow A \sim B$

9 Счетные множества

9.1 Определение

A - счетное множество, если $A \sim N$, где N - множество натуральных чисел.
$|N| = \omega_0 = \omega$ - обозначения мощности множества N

9.2 Свойства

Теорема 1 A - счетное множество $\Leftrightarrow A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

Доказательство $\Rightarrow f : N \to A; a_n = f(n)$
$\Leftarrow A = a_1, a_2, a_3, \ldots; f(n) = a_n : N \to A$

Теорема 2 Объединение счетного числа конечных множеств счетно. Пусть $A_n, n \in N$, тогда $| \cup_{n=1}^{\infty} A_n| = \omega$

Доказательство $A_1 = \{a_1^1, a_2^1, a_3^1, \ldots, a_n^1\}$
$A_2 = \{a_1^2, a_2^2, a_3^2, \ldots, a_n^2\}$
$\vdots A_3 = \{a_1^k, a_2^k, \ldots, a_n^k\}$, объединив все множества, элементы этого объединения можно будет перенумеровать, следовательно объединение счетно.

Теорема 3 Объединение двух счетных множеств счетно. $|A| = |B| = \omega$, тогда $C = A \cup B \to |C| = \omega$

Следствие Объединение любого конечного числа счетных множеств счетно.

Теорема 4 Объединение счетного числа счетных множеств счетно. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}, \forall n : |A_n| = \omega$, тогда $| \cup_{n=1}^{\infty} A_n| = \omega$

Следствие Декартово произведение двух счетных множеств счетно. Пусть $|A| = \omega; |B| = \omega$, тогда $|A \times B| = \omega$

Теорема 5 Пусть B - бесконечное множество, $|A| = \omega$, тогда $A \cup B \sim B$.

Доказательство Пусть $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n, \dots\} \subset B$ - счетное подмножество бесконечного множества B. $C' = \{c_1, c_3, c_5, \dot{\}}$, $C'' = \{c_2, c_4, c_6, \dots\}$. Тогда,
$(B \setminus C) \cup C \sim B$;
$(B \setminus C) \cup C' \sim B$, так как $C \sim C'$;
$(B \setminus C) \cup C' \sim ((B \setminus C) \cup C') \cup C'' \sim B \cup C'' \sim B \cup A$.

Теорема 6 Если B - бесконечное несчетное множество, тогда $B \backslash C \sim B$, где C - счетное конечное подмножество B.

Доказательство О.П. Пусть $|B \setminus C| = \omega$, тогда $B = (B \setminus C) \cup C$, по теореме 3 $|B| = \omega$, что противоречит тому, что B - бесконечное множество.

10 Разбиение на множества

Пусть $K = \{k_i\}_{i \in I}$ - семейство подмножеств (множество множеств) множества X. Тогда K - разбиение X, если:

- $\forall i : K_i \neq \oslash$
- $\cup_{i \in I} K_i = X$
- $\exists x \in K_i \cup K_j \to K_i = K_j$

Разбиение K задает отношение эквивалентности на I.

Теорема Пусть X - множество, ρ - отношение эквивалентности на X, тогда существует разбиение K, такое, что $\rho = K_i$.

11 Действительное число

Множества чисел $N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ - множество натуральных чисел.
$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ - множество целых чисел.
$Q = \{\frac{m}{n} : n \in N \vee m \in Z\}$ - множество рациональных чисел.
R - множество вещественных чисел.

11.1 Определение множества действительных чисел

- Аксиоматический. Для определения множества с помощью этого подхода необходимо доказать непротиворечивость аксиом с помощью конкретной модели.
- Конкретная модель: сечение Дедекинда; фундаментальные последовательности; бесконечная десятичная дробь.

Доказать, что $\sqrt{2}$ - не рациональное число. Пусть $\sqrt{2} \in Q \to \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ - не сокращаемая дробь. Возведем в квадрат обе части выражения: $2 = \frac{m}{n}^2 \to 2n^2 = m^2 \Rightarrow m$ - четное, пусть $m = 2k, \to 2n^2 = 4k^2 \to n^2 = 2k^2$ - противоречие, дробь сокращается.

11.2 Аксиоматическое определение

Множество вещественных чисел есть объект, который удовлетворяет следующим аксиомам.

11.2.1 I Аксиомы порядка

$\forall a, b \in R:$ определены следующие аксиомы.

1. $\forall a, b \in R:$ имеет место *ровно одно из отношений:* $a > b \vee a < b \vee a = b$.
2. $\forall a, b, c \in R: (a < b \wedge b < c) \Rightarrow a < c$.
3. Если $a < b$, то $\exists c \in R: a < c < b$.

11.2.2 II Аксиомы сложения

$\forall a, b \in R:$ определена сумма $(a + b) \in R$, которая удовлетворяет следующим аксиомам.

1. $a + b = b + a$.
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$.
3. $\exists 0 \in R: a + 0 = a$.
4. $\forall a \in R: \exists(-a): a + (-a) = 0$.
5. $\forall a, b, c \in R, a < b: (a + c) < (b + c)$.

11.2.3 III Аксиомы умножения

$\forall a, b \in R, ab \in R$ определены следующие аксиомы.

1. $ab = ba$.
2. $a(bc) = (ab)c$.
3. $\exists 1 \in R: \forall a \in R: a * 1 = a$.
4. $\forall a \in R, a \neq 0 \exists: \frac{1}{a} \in R: a\frac{1}{a} = 1$.
5. $\forall a, b, c \in R: (a + b)c = ac + bc$.
6. $\forall a, b, c \in R, (a < b) \wedge (c > 0): ac < b$.

11.2.4 VI Аксиома Архимеда

$\forall c > 0: \exists n \in N: n > c$

11.2.5 V Аксиома

Пусть X, Y - множества, $\forall x \in X, y \in Y: x < y$, тогда $\exists c \in R: x \leq c \leq y$.

11.3 Следствия из аксиом

Для множества Z действительны аксиомы I (кроме 3), II, III (кроме 4), IV.
Для множества Q действительны все аксиомы, кроме V.
Для множества R действительны все аксиомы.

Следствие 1 $a > b, c > d \Rightarrow a + c > b + c$.

Следствие 2 Если $a > 0$, то $-a < 0$ (Равно обратное)

Доказательство Пусть $-a > 0$, тогда $a + (-a) > 0$, но $a + (-a) = 0$, что противоречит неравенству.

Следствие 3 0 и 1 - единственны.

Доказательство Пусть есть 0_1 и 0_2, тогда $0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2$.

Следствие 4 $-a$ и $\frac{1}{a}$ - единственны.

Доказательство Пусть есть $(-a)_1$ и $(-a)_2$, тогда $a + (-a)_1 = a + (-a)_2 = 0$ - по аксиоме II 4. Пусть есть a_1 и a_2, тогда $a_1\frac{1}{a_1} = a_2\frac{1}{a_2} = 1$ - по аксиоме III 4.

Разность и частное $a - b = c$, где c такое, что $a = b + c$. $\frac{a}{b} = c$, где c такое, что $a = bc$.

Следствие 5 $a - b$ и $\frac{a}{b}$ - единственны

Следствие 6 $1 > 0$.

Следствие 7 $-a = (-1)a$.

Доказательство $1a + (-1)a = a(1 - 1) = a0 = 0$.

11.4 Аксиома Архимеда и ее следствия

Аксиома А. $\forall c > 0 : \exists n \in N : n > c$.

Теорема $\forall x \in R, h \in R, h > 0 : \exists k_0 \in Z : (k_0 - 1)h \leq x \leq k_0 h$

Доказательство Пусть есть множество $X = \{k \in Z : k > \frac{x}{h}\}$ и $k_0 = \min X$ - минимальный элемент этого множества. Тогда, если $k_0 > \frac{x}{h}$, то $k_0 - 1 \leq \frac{x}{h}$.

Следствие 1 $\forall \epsilon > 0 : \exists n_0 \in N : n_0 < \frac{1}{n_0} < \epsilon$.

Доказательство Зафиксируем $x = 1$. Если $k = \epsilon$, то $n_0 = k_0$.

Следствие 2 Если $x \geq 0 \wedge \forall n \in N : x < \frac{1}{n}$, то $x = 0$.

Доказательство Если $x < \frac{1}{n}$, так как n принадлежит множеству натуральных чисел, то $x = 0$ при любых n (минимальное значение дроби равно единице).

Следствие 3 $\forall a, b \in R, (a < b) : \exists r \in Q : a < r < b$.

Доказательство С3 $b - a > 0$, тогда $\exists n_0 \in N : \frac{1}{n_0} < b - a . \exists k_0 : a < k_0\frac{1}{n_0} \wedge (k_0 - 1)\frac{1}{n_0} \leq a$
$b > \frac{1}{n_0} + a \geq \frac{k_0}{n_0}$
$a < \frac{k_0}{n_0} < b$.

Следствие 4 $\forall a, b \in R \exists \gamma \in R \setminus Q : a < \gamma < b$. $R \setminus Q$ - множество иррациональных чисел.

11.5 Понятие стабилизации

Пусть m_n - последовательность целых чисел. Будем говорить, что m_n стабилизируется к некоторому числу $m \in Z$, если $\exists k \in N : \forall n', n'' > k : m_{n'} = m_{n''}$. Обозначение: $m_n \rightrightarrows m$. $0, 5, 5, 5$ - стабилизируется к 5.

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность вещественных чисел.
$a_1 = \alpha_0^1, \alpha_1^1 \alpha_2^1 \dots \alpha_k^1 \dots$
$a_2 = \alpha_0^2, \alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_k^2 \dots$
$\vdots$
$a_n = \alpha_0^n, \alpha_1^n \alpha_2^n \dots \alpha_k^n \dots$
$\vdots$
Последовательность стабилизируется к числу $a = \gamma_0, \gamma_1 \dots$, если $\forall k \in N a_k^n \rightrightarrows \gamma_k$

11.5.1 Лемма о стабилизации последовательности

Если последовательность неубывающая и ограничена сверху, то она стабилизируется к некоторому числу.

Пусть $a_n \in R$, $a_n \nearrow$ и ограничена сверху числом m, тогда $a_n \rightrightarrows a \leq m$.

Из леммы следует, что если последовательность не возрастает и ограничена снизу, то она тоже стабилизируется к некоторому числу. $a \geq m$.

11.6 Конкретная модель множества действительных чисел

11.6.1 Последовательности

Определение 1 Пусть X - множество, N - множество натуральных чисел. Отображение $f : N \to X$ называется последовательностью элементов множества X. $f(n) = x_n$, где $x_n \in X$. $\{X\}_{n=1}^{\infty}$ - множество всех элементов последовательности.

Пример $1, 1, 1, 1 \dots$ - бесконечная последовательность состоящая из одного элемента. $1, 0, 1, 0, 1 \dots$ - бесконечная последовательность состоящая из двух элементов.

Определение 2 Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset N$ называется периодической, если $\exists N_e, m_0$, что $\forall n \geq N_e : x_{n+km_0}$ где $k \in N$ - произвольное число.

Примеры $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \underbrace{\dots}_{m_0}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$

Множество значений элементов периодической последовательности конечно. Однако, последовательности состоящие из конечного множества элементов необязательно периодические, например, $0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1...$

11.6.2 Вещественное число

Десятичная дробь $a \in R = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots$, где $\alpha_0 \in Z, \alpha_k \in \{0, 1, \dots, 9\}$ - бесконечная десятичная дробь.

$\alpha_0, 000 \dots$ - целое число в виде десятичной дроби. $\frac{m}{n}$ - рациональное число можно представить в виде десятичной дроби.

Перевод рационального числа в десятичную дробь Пусть $x = 3, 333 \dots = 3,(3) \Rightarrow 10x = 33,(3) \Rightarrow 10x - x = 9x = 30 \Rightarrow x = \frac{30}{9} = \frac{10}{3}$. Исключение, пусть $x = 0,(9) \Rightarrow 10x = 9,(9) \Rightarrow 10x - x = 9x = 9 \Rightarrow x = 1$.

На заметку $\frac{m}{n} \in Q$ - является периодической дробью. Если $a = 0,010010001\dots$, то она является десятичной не периодической дробью - $a \in R \setminus Q$ - иррациональным числом.

11.6.3 Умножение и сложение вещественных чисел

Срезка числа $a^{(n)}$ - n-ая срезка числа a. $a^{(n)} = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n 000 \dots \in Q$
$a^{(n)} \rightrightarrows a$

Операции Рассмотрим такие $a = \alpha_0, \alpha_1\alpha_2 \dots > 0$ и $b = \beta_0, \beta_1\beta_2 \dots > 0$.

- $a^{(n)} + b^{(n)} \rightrightarrows a + b$
- $a^{(n)} - (b^{(n)} + 10^{-1}) \rightrightarrows a - b$
- $\frac{a^{(n)}}{b^{(n)} + 10^{-1}} \rightrightarrows \frac{a}{b}$

11.6.4 Виды последовательностей

$X = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \nearrow$ - *не убывает*, если $a_n \leq a_{n+1} \nearrow$; *возрастает*, если $a_n < a_{n+1}$; *не возрастает*, если $a_n \geq a_{n+1} \searrow$; *убывает*, если $a_n > a_{n+1} \searrow$.
 * Если $a > 0$, то $a^{(n)} \nearrow$

11.6.5 Ограничение сверху

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена сверху числом m, если $\forall n \in N : a_n \leq m$.
 * Если $a > 0$, то $a^{(n)}$ ограничена сверху числом a.

11.7 Вложенные отрезки

$I_m = [a_n, b_n]$ - последовательность отрезков, которая называется вложенной, если $\forall n \in N : I_{n+1} < I_n$.

11.7.1 Лемма Кантора о вложенных отрезках

Предел Числовая последовательность $a_n \to 0$, при $n- > \infty$ ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$), если $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n > N : |a_n| < \epsilon$.

Лемма Пусть I_n - последовательность вложенных отрезков, тогда $\cap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing$. При этом, если $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$, то $\cap_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\}$, где c некоторая точка.

Доказательство Рассмотрим последовательность левых концов $a_n \nearrow$, ограниченную сверху. Тогда, по лемме о стаб. последовательности: $a_n \rightrightarrows a$, где a - некоторое число $\Rightarrow \forall n, m \in N : a \geq a_n \wedge a \leq b_m$. Аналогично: последовательность $b_n \searrow$, ограниченная снизу $\Rightarrow \forall m, n \in N : b < b_m \wedge b \geq a_n$.
 Из этого следует, что $a_n \leq a \leq b \leq b_m$.
$[a; b] \subset I_n . \forall n \in N : [a; b] \cap_{n=1} \infty I_n$.

Замечание В формулировке теоремы отрезки нельзя заменить интервалами $(0, \frac{1}{n})$ - последовательность вложенных интервалов. Д: О.П. $x \in \cap_{n=1}^{\infty}(0, \frac{1}{n})$; $x > 0$ $\exists n_0 : \frac{1}{n_0} < x$ $x \notin (0, \frac{1}{n_0}) \Rightarrow x \in \cap(\dots)$.

Замечание 2 Во множестве Q лемма Кантора не имеет смысла.

Следствие Множество $[0,1]$ - не счетно.

Пусть $[0,1]$ - счетное множество $\Rightarrow [0;1] = \{x_1, x_2, \ldots, x_3 \ldots\}$.

Разделим этот отрезок на три равных отрезка. Очевидно, что x_1 - не попадает в один из этих отрезков: $x_1 \notin I_1, I_1 = [a_1, b_1] = b_1 - a_1 = \frac{1}{3}$.

Разделим I_1 на три равных отрезка, среди них есть такой I_2, что $x_2 \notin I_2, I_2 = b_2 - a_2 = \frac{1}{3}^2$.

Пусть $\forall k \leq N$ построен отрезок $I_k : x_k \notin I_k \wedge I_k = b_k - a_k = \frac{1}{3}^k \wedge I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_k$.

Разделим отрезок I_k на три равных, среди них есть такой
$I_{k+1} : x_{n+1} \notin I_{k+1} \wedge I_k \subset I_{k+1} \wedge I_{k+1} = b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{3}^{k+1}$. И так далее...

По лемме Кантора последовательность I_k имеет не пустое пересечение. Рассмотрим $P \cap_{k=1}^{\infty} I_k, x \in [0;1]$. Предположим $[0;1]$ занумерована, т.е. $x = x_{k_0}$, но $x_{k_0} \notin I_{k_0}$ (по построению) $\Rightarrow$ не может принадлежать пересечению P.

11.7.2 Мощность континуума

$|R| = |[a;b]| = |[0;1]|$ - мощность континуума - мощность всех вещественных чисел. Любой отрезок имеет мощность континуума.

Теорема Мощность объединения счетного числа множеств с мощностью континуума равно мощности континуума.

12 Границы числовых множеств

12.1 Верхние и нижние границы

Верхняя граница Множество $X \subset R$ ограничено сверху числом M: $\exists M \in R : \forall x \in X : x \leq M$.

Нижняя граница Множество $X \subset R$ ограничено снизу числом m: $\exists m \in R : \forall x \in X : x \geq m$.

Ограниченно множество $X \subset R$ - ограничено, если: $\exists m \in R, M \in R : \forall m \leq X \leq M$.

Доказательство $\triangleright X \neq \varnothing \exists m, M : \forall x \in X : m \leq x \leq M$.
$k = max\{|m|, |M|\}$
$m \leq X \leq M$, тогда $|x| \leq k$.
$\triangleleft m = -k; M = k$.

12.2 Точные границы

Точная верхняя граница Пусть X - множество ограниченное сверху, тогда $min\{M : \forall x \in X : x \leq M\} = supX$ - называется точной верхней границей.
1-ое определение: $M_x = supX$, если $\forall x \in X : x \leq M_x$ и $\forall M' \in R : (M' < M_x \Rightarrow \forall x_{m'} \in X(x > M'))$.
2-ое определение: $M_x = supX$, если $\forall x \in X : x \leq M_x$ и $\forall \epsilon > 0 : \exists x_\epsilon \in X(x_\epsilon > M_x - \epsilon)$.

Доказательство эквивалентности двух определений $\triangleright$ Пусть $M'_x = supX$, возьмем $\epsilon > 0$, $M' = M'_x - \epsilon < M'_x$
По первому определению $\exists x_{M'} \in X : x_{M'} > M' \Rightarrow$ выполняется второе свойство из второго определения, первые свойства одинаковы. $\triangleleft$.

Пример $sup(a,b) = b; x = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \to supx = 1$.

Теорема о существовании точных границ числовых множеств Любое ограниченное сверху множество имеет точную верхнюю границу во множестве R.
Пусть $X \subset R$ и ограничено сверху. Тогда $\exists M_x \in R : M_x = supx$.

Доказательство Пусть $Y = \{M : M-$ верхняя граница множества $X\} \neq \varnothing$
$\forall x \in X, y \in Y : x \leq y$, тогда (по пятой аксиоме о действ. числах) $\exists c = M_x \in R : \forall x \in X, y \in Y : x \leq c \leq y; y = M$.

Точная нижняя граница *1-ое определение*: $m_x = infX = max\{m : m$ - нижняя граница$\}$ если $\forall x \in X : m_x \leq x$ и $\forall m' \in R : (m' > m_x \Rightarrow \exists x_{m'} : x_{m'} < m')$.
2-ое определение: $m_x = infX$, если $\forall x \in X : m_x \leq x$ и $\forall \epsilon > 0 : \exists x_\epsilon : x_\epsilon < m_x + \epsilon$.

Пример $inf(a, b) = a; x = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} \rightarrow infx = 0$.

Замечание Во множестве рациональных чисел точные границы не определены.

13 Неравенства для абсолютных величин

Абсолютная величина $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$
$|x| < \epsilon \Leftrightarrow -\epsilon < x < \epsilon$.
$\forall x, y \in R : |x + y| \leq |x| + |y|$.

Следствие 1 $\forall x, y \in R : ||x| - |y|| \leq |x + y|$.

Доказательство $|x| = |(x + y) - y| \leq |x + y| + | - y|$
$|x| - |y| \leq |x + y| \Leftrightarrow |y| - |x| \leq |x + y|$.

Следствие 2 $\forall a_k \ inR : |\sum\limits_{k=1}^{n} a_k| \leq |\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$. Доказывается по индукции.

Часть III
Числовые последовательности

14 Предел

14.1 Определения предела

Предел Число a называют пределом последовательности X_n ($a = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$), если
$\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in N : \forall n \in N : (n > N_\epsilon \Rightarrow |X_n - a| < \epsilon)$.
$X_n \in (a - \epsilon; a + \epsilon) = O_\epsilon(a)$; ϵ - окрестность точки a.
Последовательность, имеющая конечный предел, называется сходящейся.

Определение’ $a = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$, если $\exists k > 0 : \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in R : \forall n \in N(n > N_\epsilon \Rightarrow |X_n - a| < k\epsilon)$

Определение" $a = \lim\limits_{n \to \infty} X_n$, если $\forall 0 < \epsilon < \epsilon_0 \exists N_\epsilon \in R : \forall n \in N (n > N_\epsilon \Rightarrow |X_n - a| < \epsilon)$.

14.2 Теорема об эквивалентности определений

Теорема Все определения предела эквиваленты между собой.

Доказательство TODO Дописать

15 Свойства сходящихся последовательностей

15.1 Ограниченность сходящейся последовательности

Теорема 1 Сходящаяся последовательность ограничена, т.е. $\exists k > 0 : \forall n \in N : |X_n| \leq k$.

Доказательство Пусть $a = \lim\limits_{n \to \infty} X_n$
$\epsilon = 1 \exists N_1 \in N : \forall n > N_1 |X_n - a| < 1$
$a - 1 < X_n < a + 1$
$|X_n| < max\{|a+1|, |a-1|\}; k = max\{|x_1|, |x_2| \dots |x_n|, |a+1|, |a-1|\}$.
$n \in N; |X_n| \leq k$.

Обратная теорема неверна. Пусть $X_n = (-1)^n$
$|X_n| \leq 1$ - ограниченная последовательность, но не имеет предела.

15.2 Единственность предела

Теорема 2 Предел сходящейся последовательности единственен.

Доказательство Пусть есть $a = \lim\limits_{n \to \infty} X_n, b = \lim\limits_{n \to \infty} X_n$ и, без ограничения общности, будем считать, что $a < b$.
Рассмотрим $\epsilon > 0$
$\exists N_\epsilon^a \forall n > N_\epsilon^a |X_n - a| < \epsilon$,
$\exists N_\epsilon^b \forall n > N_\epsilon^b |X_n - b| < \epsilon$.
Пусть $\epsilon = \frac{b-a}{2} > 0$. (Больше нуля по предположению, что $a < b$)
$|X_n - a| < \frac{b-a}{2} \Rightarrow X_n < a + \frac{b-a}{2}$,
$|X_n - b| < \frac{b-a}{2} \Rightarrow X_n > b - \frac{b-a}{2}$.
$\forall n > max\{N^a_{\frac{b-a}{2}}, N^b_{\frac{b-a}{2}}\}$
$X_n < \frac{a+b}{2}; X_n > \frac{a+b}{2}$ - противоречие.

15.3 Теорема о конечном числе элементов

Теорема 3 Конечное число элементов последовательности не влияет на сходимость или расходимость этой последовательности.

Свойство выполняется с некоторого номера: $\exists N_0 \in N : \forall n > N_0 : P(X_n)$.

15.4 Сохранение знака сходящейся последовательности

Теорема 4 Пусть $a = \lim\limits_{n \to \infty} X_n$ и $a \neq 0 \Rightarrow \exists N_0 : \forall n > N_0 : |X_n| > \frac{|a|}{2}$, более того, если $a > 0$, то $X_n > \frac{a}{2}$; если $a < 0$, то $X_n < \frac{a}{2}$.

Доказательство $\epsilon = \frac{|a|}{2} > 0$. $\exists N_0 \forall n > N_0 |X_n - a| < \frac{|a|}{2}$, т.е. $-\frac{|a|}{2} < X_n < \frac{|a|}{2}$.
1) $a > 0 : X_n > \frac{a}{2}, |X_n| > \frac{|a|}{2}$
2) $a < 0 : xn < \frac{a}{2} < 0, |X_n| > \frac{|a|}{2}$
$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = 0$
$X_n = \frac{1}{n}$
$Y_n = -\frac{1}{n}$
$C_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

15.5 Переход предела в неравенство

Теорема 5 Пусть $a = \lim\limits_{n\to\infty} X_n$ и $b = \lim\limits_{n\to\infty} Y_n$, $\exists N_0 : \forall n > N_0 : (X_n \le Y_n)$,
тогда $a \le b$

Доказательство Пусть $a > b$. Рассмотрим $\epsilon = \frac{a-b}{2}$
$\exists N_\epsilon^a : \forall n > N_\epsilon^a (X_n > \frac{a+b}{2})$,
$\exists N_\epsilon^b : \forall n > N_\epsilon^b (Y_n < \frac{a+b}{2})$.
$n > \max\{N_\epsilon^a, N_\epsilon^a, N_0\}$
$Y_n < \frac{a+b}{2} < X_n$, $X_n \le Y_n$ - противоречие.

15.6 Лемма о двух милиционерах

Теорема 6 Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \lim\limits_{n\to\infty} Y_n = a$ и $X_n \le Z_n \le Y_n$,
тогда $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = a$.

Доказательство Положим $\epsilon > 0$. $\exists N_\epsilon^X \forall n > N_\epsilon^X |X_n - a| < \epsilon \Rightarrow a\epsilon < X_n$.
$\exists N_\epsilon^Y \forall n > N_\epsilon^Y |Y_n - a| < \epsilon \Rightarrow Y_n < a + \epsilon$.
$N_\epsilon^Z = max\{N_\epsilon^X, N_\epsilon^Y\}$
$a - \epsilon < X_n \le Z_n \le Y_n < \epsilon + a$.
$\forall n > N_\epsilon^Z |Z_n - a| < \epsilon$, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} Z_n = a$.

15.7 Абсолютное значение предела

Теорема 7 Если $X_n \to_{n\to\infty} a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |X_n| = |a|$.

Доказательство Положим $\epsilon > 0$. $\exists N_\epsilon \forall n \in N ||X_n| - |a|| \le |X_n - a| < \epsilon$.

Замечание Обратная теорема верна при $a = 0$.
Пусть $a \ne 0$. $X_n = (-1)^n a = -a, a, -a, a \dots$ - последовательность не имеет предела.
$|X_n| = |a| \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |X_n| = |a|$.

16 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Б.м. последовательность Последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty$ называется бесконечно малой, если $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$, т.е. $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : \forall n \in N (n > N_\epsilon \Rightarrow |\alpha_n| < \epsilon)$.

Б.б. последовательность Последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется бесконечно большой, если $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = \infty$, т.е. $\forall E > 0 \exists N_E \forall n \in N (n > N_E \Rightarrow |A_n| > E)$.
$O_E(\infty) = (-\infty, -E) \cup (E, \infty)$.

$+\infty$ и $-\infty$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty : \forall E > 0 \exists N_E : \forall n \in N (n > N_E \Rightarrow a_n > E)$. $O_E(+\infty) = (E; +\infty)$.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty : \forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : \forall n \in N (n > N_\epsilon \Rightarrow a_n < -\epsilon)$.

16.1 Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями

Теорема 1 Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ и $\forall n \alpha_n \neq 0$, тогда $a_n = \frac{1}{\alpha_n}$ - бесконечно большая последовательность.
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, тогда $\alpha_n = \frac{1}{a_n}$ - бесконечно малая последовательность.

Замечание ко второй части теоремы. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, то, начиная с некоторого номера, все ее элементы не будут равны нулю.

Доказательство 1) Пусть α_n - б.м. последовательность.
Положим $E > 0$. $\epsilon = \frac{1}{E} > 0$ $\exists N_\epsilon : \forall n \in N : (n > N_\epsilon \Rightarrow |\alpha_n| < \epsilon)$. $|A_n| = \frac{1}{|\alpha_n|} > \frac{1}{\epsilon} = E$.
2) Пусть $A_n \neq 0$ - б.б. последовательность, $\alpha_n = \frac{1}{A_n}$ - б.м. послед.
Положим $\epsilon > 0$. $E = \frac{1}{\epsilon} > 0$ $\exists N_E \forall n \in N |A_n| > E$. $|\alpha_n| = \frac{1}{|A_n|} < \frac{1}{E}$.

16.2 Арифметические свойства б.м. последовательностей

Теорема 2 Пусть α_n и β_n - б.м. п., тогда $\gamma = \alpha_n + \beta_n$ - б.м. п. и $y = a\alpha_n$, где $a \in R$ - б.м. п.

Замечание Линейная комбинация б.м. последовательностей является б.м. последовательностью. $a\alpha_n + b\beta_n$ - б.м. п.

Доказательство $(+)$ Положим $\epsilon > 0$. $N^\alpha_{\frac{\epsilon}{2}} : \forall n > N^\alpha_{\frac{\epsilon}{2}} : |\alpha_n| < \frac{\epsilon}{2}$.
$\exists N^\beta_{\frac{\epsilon}{2}} : \forall (n > N^\beta_{\frac{\epsilon}{2}} : |\beta_n| < \frac{\epsilon}{2}$
Если $N = max\{N^\alpha_{\frac{\epsilon}{2}}, N^\beta_{\frac{\epsilon}{2}}\}$, то неравенство (в определениях выше) выполняется одновременно.
$|\gamma_n| = |\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \epsilon$.
(*) Положим $\epsilon > 0, a \neq 0, \frac{\epsilon}{|a|} > 0$. $\exists N_{\frac{\epsilon}{|a|}} : \forall n > N_{\frac{\epsilon}{|a|}} : |\alpha_n| < \frac{\epsilon}{|a|} \Rightarrow |a\alpha_n| < \epsilon$.

16.3

Теорема 3 Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = sup$. $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ - б.м. п. Тогда $\alpha_n a_n$ - б.м. п.

Доказательство $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$; - ограничена, т.е. $\exists a > 0 : \forall n \in N |a_n| \leq a$. $0 \leq |a_n\alpha_n| \leq a|\alpha_n|$. По лемме о двух милиционерах $|a_n\alpha_n|$ - б.м. п.

16.4 Связь между б.м. п. и сходящимися последовательностями

Теорема 4 Для того, чтобы последовательность $a_n = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходилась в $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, необходимо и достаточно, чтобы $\exists\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ - б.м. п. $a_n = a + \alpha_n$.

Доказательство $\triangleright \alpha_n = a_n - a$, надо показать, что α_n - б.м. п.
Положим $\epsilon > 0$ $\exists N_\epsilon \forall n \in N(n > N_\epsilon \Rightarrow |\alpha_n| = |a_n - a| < \epsilon)$.
$\triangleleft a_n = a + \alpha_n$ - сходится. $|a_n - a| = \alpha_n < \epsilon$.

16.5 Арифметические свойства пределов

Теорема 5 Пусть есть такие последовательности: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}$. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$.
Тогда

$$\lim_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b \tag{34}$$
$$\lim_{n\to\infty} ka_n = kn \tag{35}$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab \tag{36}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \tag{37}$$

Комментарий к последнему свойству: Если $b \neq 0$, то, по закону о сохранении знака, начиная с некоторого номера, все элементы b_n неравны нулю.

Доказательство 1) $a_n = a + \alpha_n$ - α_n - б.м. п.; $b_n = b + \beta_n$ - β_n - б.м. п., но тогда $a_n + b_n = (a + b) + (\alpha_n + \beta_n)$, где в первой группе выражение является числом, а во второй - б.м. последовательностью.

3) $a_n b_n = (a + \alpha_n)(b + \beta_n) = ab + (a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n\beta_n)$, - выражение, где первое слагаемое число, а второе - б.м. последовательность.

4) $\exists N \forall n > N : |b_n| = \frac{|b|}{2}$ - по закону о сохр. знака.
$|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| = |\frac{a_n b - a b_n}{b_n b}| < \frac{2}{b^2}|a_n b - a b_n|$
$0 \leq |\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| < \frac{2}{b^2}|a_n b - a b_n|$. Правая часть неравенства стремиться к нулю ($a_n b \to ab, ab_n \to ab$) и левая часть так же стремится к нулю.

17 Подпоследовательности

$x_1, x_2, \dots x_n, \dots = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Зададим возрастающую последовательность номеров: $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < n_{k+1}$
Тогда $\{x_{nk}\}_{nk=1}^{\infty} = x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nk}, \dots$ - подпоследовательность.

Определение Последовательность x_{nk} называется подпоследовательностью $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

17.1 Теорема Больцано — Вейерштрасса

Теорема 1 Из любой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Доказательство Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограничена и все ее числа заключены в отрезок ab. Разделим отрезок ab пополам. δ_1 самый правый отрезок их двух, которой содержит бесконечное число элементов последовательности. $|\delta_1| = \frac{b-a}{2}$

Разделим отрезок δ_1 пополам. δ_2 - самый правый из этих отрезков, содержащий бесконечное число элементов. Будем так продолжать до бесконечности.

На каком-то k-ом шаге найдется такое $n_k > n_{k-1}$, причем $x_{nk} \in \delta_k$ содержит бесконечное число элементов. $|\delta_k| = \frac{b-a}{2^l} \to 0, k \to \infty$.

$\exists a' : \cap_{k=1}^{\infty} \delta_k = \{a'\}$. Пусть $\delta_k = [a_k, b_k], a_k \nearrow, b_k \searrow$, кроме того: $a_k \leq x_{nk} \leq b_k$.

$\exists\epsilon > 0 : \forall N_\epsilon : \forall n > N : (b_k - a_k) < \epsilon$. $a_k \le a' \le b_k, a' = \sup\{a_k\} = \inf\{b_k\}$

$\forall n > N_\epsilon : 0 < b_k - a' \le b_k - a_k < \epsilon$,
$0 < a' - a_l \le b_k - a_k < \epsilon$.

По лемме о двух милиционерах: из того, что $a_k \to a'$ и $b_k \to a'$, следует $\{x_{nk}\}_{k=1}^{\infty} \to a'$.

Теорема 2 Если последовательность неограниченная, то из нее можно выделить последовательность сходящуюся к бесконечности. Если последовательность ограничена снизу, то $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{nk} = -\infty$. Если последовательность ограничена сверху, то $\exists \lim\limits_{k\to\infty} x_{nk} = +\infty$

Доказательство Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не ограниченная последовательность, тогда $\forall m > 0 \exists N_m : |x_n| > M$.

Зафиксируем $\epsilon_1 = 1$. $\exists n_1 : |x_{n1} > 1$
$\epsilon_2 = 2$. $\exists n_2 > n_1 : |x_{n2}| > 2$
$\vdots$
$\epsilon_k = k$. $\exists n_k > n_{k-1} : |x_{nk}| > k$.
$\vdots$.

От сюда следует, что x_{nk} - подпоследовательность x_n, такая, что $|x_{nk}| > k$ и $|x_{nk}| \to \infty$, при $x \to \infty$.

17.2 Частичные пределы

Вернемся к теореме Б-В(1). $a' = \lim\limits_{k\to\infty} x_{nk}$, где a' - частичный предел последовательности x_n.

Если $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограничена, то $A' = \{a'\}$ - множество частичных пределов x_n ограничено.

Наибольший из частичных пределов - верхний предел, обозначается как: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. Наименьший из частичных пределов - нижний предел, обозначается как: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$. Очевидно, что верхний предел меньше чем нижний предел, но, если последовательность сходится, то эти пределы равны!

Лемма 1 Число a' - частичный предел последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ тогда и только тогда, когда $O_\epsilon(a')$ содержит бесконечно много элементов последовательности: $|\{n : a' - \epsilon < x_n < a' + \epsilon\}| = \omega$.

Доказательство $\triangleright \exists \{x_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ - подпоследовательность $x_n : x_{nk} \to a'$.

$\triangleleft \epsilon_1 = 1 : x_n \in (a' - 1, a' + 1)$
$\epsilon_2 = \frac{1}{2} : n_2 > n1, x_{n2} \in (a' - \frac{1}{2}, a' + \frac{1}{2}) \Rightarrow n_k > n_k - 1 \Rightarrow x_{nk} > a' - \frac{1}{k}$ и $x_{nk} < a' + \frac{1}{k}$. По лемме о двух милиционерах, так как $1 \pm \frac{1}{k} \to a'$, то и $x_{nk} \to a'$.

Следствие Число b' не является частичным пределом тогда и только тогда, когда $\exists\epsilon_0 > 0 : |\{n : x_n \in O_{\epsilon_0}(b')\} < \omega$

Теорема 3 Ограниченная последовательность всегда имеет верхний и нижний предел.

Доказательство Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - ограничена (Множество частичных пределов $A' \ne \varnothing$ - ограничено $\Rightarrow M = \mathrm{su}$
и $m = \inf A'$.)

Покажем от противного, что $M \in A'$, то есть M является частичным прелом x_n.

Пусть $M \notin A' \forall\epsilon > 0 |O_\epsilon(M) \cap A'| = \omega$.
$a' \in O_\epsilon(M \cap A')$
$\epsilon_1 = min\{a' - M + \epsilon, M - a'\}$
$O_{\epsilon_1}(a') \subset O_\epsilon(M), O_{\epsilon_1}(a')$ содержит бесконечное число элементов $\Rightarrow M \in A'$. Что и т.д.

18 Критерий Коши сходимости числовой последовательности

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется фундаментальной последовательностью (последовательностью Коши), если $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon : \forall n, m \in N (m > N_\epsilon \wedge n > N_\epsilon \Rightarrow |x_n - x_m| < \epsilon)$

Эквивалентное определение $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon, \forall n \in N, p \in N : (n, m > N_\epsilon \Rightarrow p(x_n, x_m) < \epsilon)$

18.1 Лемма об ограниченности

Фундаментальная последовательность ограничена.

Доказательство Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность Коши. рассмотрим число $\epsilon = 1$. $\exists N_\epsilon : \forall n, p \in N (N > N_\epsilon \Rightarrow$ $x_n) < 1$. Зафиксируем число $n_1 > N_\epsilon$. Тогда $x_{n_1} - 1 < x_{n+p} < 1 + x_{n_1}$.

Пусть $m = max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_1}|, |x_{n_1+1}|\}$, тогда $\forall n \in N (|x_n| <= m)$. Это значит, что последовательность ограничена.

18.2 Теорема (критерий сходимости)

Для того чтобы $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ была последовательностью Коши.

Доказательство $\rhd a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, возьмем $\epsilon > 0$. $\exists N_\epsilon : \forall n \in N (n > N_\epsilon \Rightarrow |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2})$, рассмотрим $m, n > N_\epsilon$, $|x_m - x_n| = |(x_m - a) + (a - x_n)| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \epsilon$ - по неравенству треугольника.

$\lhd$ Рассмотрим $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность Коши, ограниченная (по лемме). Так как она ограничена, по теореме Больцано — Вейерштрасса существует $\{x_{nk}\}_{nk=1}^{\infty}$ которая сходится к числу a. Покажем, что вся последовательность сходится к a. $\forall \epsilon > 0 : \exists K_\epsilon : \forall n_k (n_k > K_\epsilon \Rightarrow |X_{nk} - a| < \frac{\epsilon}{2})$. В силу фундаментальности последовательности, $\forall \epsilon > 0 : \exists N_\epsilon : n, m > \epsilon : |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}$. А это и означает, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к a.

$|x_n - a| = |x_n - x_{nk} + x_{nk} - a| \leq |x_n - x_{nk}| + |x_{nk} - a|$. $x_{nk} = max\{N_\epsilon, K_\epsilon\} \Rightarrow |x_n - a| < \epsilon$

18.3 Отрицание фундаментальности

$\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не является последовательностью Коши. Это значит: $\exists \epsilon_0 > 0 : \forall N_{\epsilon_0} \exists n > N_{\epsilon_0}, p \in N : |x_{n+p} - x_n| >= \epsilon_0$

Пример $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, покажем, что она не является последовательностью Коши.
$x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{1}{2}, x_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ - с каждым слагаемым слагаемое уменьшается.

Рассмотрим $x_{n+p} - x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} - (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} \geq \frac{1}{n+p} + \dots + \frac{1}{n+p} = \frac{1}{np}$.

19 Топология множества R

19.1 Окрестность точки

Пусть $\epsilon > 0$. $O_\epsilon(a) = (a - \epsilon; a + \epsilon)$ - ϵ-окрестность точки а.
$O_\epsilon^\vee(a) = O_\epsilon(a) \setminus \{a\}$ - выколотая ϵ-окрестность точки а.

Для $R > 0 : O_R(\infty) = (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$. $O_R(+\infty) = (R, +\infty)$. $O_R(-\infty) = (-\infty, -R)$

19.2 Предельная точка

Опр. 1 Точка a является предельной точкой множества A, если любая выколотая окрестность пересекается с A : $\forall \epsilon > 0 \exists x_\epsilon \in A \setminus \{a\} : |x_\epsilon - a| < \epsilon$, т.е. $x \in A \cap O_\epsilon^\vee(a)$

Опр. 2 Точка a является предельной точкой множества A, если в любой ϵ-окрестности этой точки лежит бесконечно много элементов из множества A : $\forall \epsilon > 0 |A \cap O_\epsilon(a)| \geq \omega$.

Опр. 3 Точка a является предельной точкой множества A, если
$\exists \{a_n\}_{n=1}^\infty \subset A \setminus \{a\} : \forall n \neq m (a_n \neq a_m \wedge \lim\limits_{n \to \infty} a_n = a)$

A' - множество всех предельных точек.

19.3 Теорема об эквивалентности определений

Теорема Опр. 1, Опр. 2, Опр. 3 эквивалентны между собой.

Доказательство 1) Опр. 3 $\Rightarrow$ Опр. 2 $\Rightarrow$ Опр. 1 - очевидно.

2) Докажем, что Опр. 1 $\Rightarrow$ Опр. 2.
Пусть $\epsilon_1 = 1$. $\exists x_1 \in A \setminus \{a\} : |x_1 - a| < 1$.
Пусть $\epsilon_2 = \min\{\frac{1}{2}; |x_1 - a|\} > 0$. $\exists x_2 \in A \setminus \{a\} : |x_2 - a| < \epsilon_2$. При этом $x_2 \neq x_1$!
Пусть $\epsilon_3 = \min\{\frac{1}{3}; |x_2 - a|\} > 0$. $\exists x_3 \in A \setminus \{a\} : |x_3 - a| < \epsilon_3$. При этом $x_3 \neq x_2 \neq x_1$!
Пусть $\epsilon_n = \min\{\frac{1}{n}; |x_{n-1} - a|\} > 0$. $\exists x_n \in A \setminus \{a\} : |x_n - a| < \epsilon_n$. При этом $x_n \neq x_{n-1}$!

Из построения следует: $|x_n - a| < \epsilon_n \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Т.е. мы доказали, что Опр. 1 $\Rightarrow$ Опр. 3 $\Rightarrow$ Опр. 2, тогда верно, что Опр. 1 $\Rightarrow$ Опр. 2. Что и т.д.

19.4 Теорема Больцано - Вейерштрасса для бесконечных множеств

Теорема Любое ограниченное бесконечное множество имеет предельную точку.

Доказательство Пусть A - бесконечное ограниченное множество. Рассмотрим $x_1 \in A$; $x_2 \in A \setminus \{x_1\}$ - беск.; $x_3 \in A \setminus \{x_1, x_2\}$ - беск.

Результат построения: множество $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A$ - ограничено, причем $x_n \neq x_m$ (элементы множество попарно различны). $\Rightarrow \exists \{x_{nk}\}_{nk=1}^\infty$ - п/п $x_n : x_{n_k} \to a' a \in A'$, т.к. любая окрестность точки a содержит все элементы п/п с некоторого k, следовательно содержит бесконечное число элементов множества A.

19.5 Внутренняя точка множества

Опр. 1 Точка $x \in A$ называется *внутренней точкой* множества A, если она лежит в этом множестве с некоторой своей окрестностью : $\exists O_\epsilon(x) \subset A$.

Опр. 2 A^o - множество всех внутренних точке (внутренность множества) множества A : $A^o = int(A)$.

Примеры # Рассмотрим $(a, b), b > a$. $x \in (a, b), \epsilon = \min\{b - x, x - a\} > 0$.
$O_\epsilon(x) = (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (a, b)$
$a \leq x - \epsilon \leq b \Rightarrow x \in int(a, b) = (a, b)$.

$\# \; int[a, b] = (a, b)$

$\# \; int(Q) = \varnothing$

Если $|A| \leq \omega$, то $int(A) = \varnothing$.

19.6 Изолированная точка

Изолированной точкой называется такая точка $x : x \neq X'$, т.е. $\exists O\epsilon(x_0) : X \cap O_\epsilon x_0 = \{x_0\}$.

19.7 Открытые множества

Опр. 1 Множество U называют *открытым* множеством, если все его точки являются внутренними точками.

Примеры # $(a, b), R, \varnothing$ - открытые.
$[a, b]$ - не открытое.

Свойства открытых множеств Семейство всех открытых множеств удовлетворяет следующим свойствам:

1. R и $\varnothing$ - открытые множества.
2. Объедение любого числа открытых множеств открыто: если $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, U_α - открыто, тогда $\cup_{\alpha\in A} U_\alpha$ - открыто.
3. Пересечение любого числа открытых множеств открыто: если $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}, U_k$ - открыто, тогда $\cap_{k=1}^{n} U_k$ - открыто.

Доказательство 1) Докажем, что $\varnothing$ - открытое множество.
U - открытое $\Leftrightarrow \forall x(x \in U \Rightarrow \exists O_\epsilon(x) \subset U)$. Возьмем $\varnothing = U$, тогда $\forall x(x \in \varnothing(= false) \Rightarrow \dots) = true \Rightarrow \varnothing$ - открытое множество.
2) Пусть $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ - открытое множество.
Если $x \in \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$ $\exists \alpha_x : x \in U_{\alpha_x}$ - открытое, то $\exists O_\epsilon(x) \subset U_{\alpha_x} \Rightarrow O_\epsilon(x) \subset \cup_{\alpha\in A} U_\alpha$.
3) Достаточно доказать для двух множеств и распространить по индукции.
Пусть U_1, U_2 - открытые множества, если $x \in U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$.
$\exists O_{\epsilon_1}(x) \subset U_1$ и $\exists O_{\epsilon_2}(x) \subset U_2$;
положим $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\} > 0$, тогда $O_\epsilon(x) \subset U_1 \cap U_2$. Что и т.д.

19.8 Замкнутые множества

Множество $f \subset R$ называется замкнутым, если его дополнение $(R \setminus f)$ открыто.

Свойства замкнутых множеств

1. $\varnothing$, R замкнуты.
2. Если f_α замкнуто, то $\cap_{\alpha\in A} f_\alpha$ - замкнуто.
3. Если $f_1, \dots, f_n$ - замкнутые множества, то $\cup_{k=1} n f_k$ - замкнуто.

Доказательство

1. $R \setminus (\cup_{\alpha\in A^r} A_\alpha) = \cup_{\alpha\in A^r} R \setminus A_\alpha$. Аналогично с $\cap$ пересечением.
2. $R \setminus (\cap_{\alpha\in A^r}) = \cup_{\alpha\in A^r}(R \setminus f_\alpha)$. Если дополнение ко множеству открыто, то множество замкнуто.
3. $R \setminus (f_1 \cup f_2) = (R \setminus f_1) \cap (R \setminus f_2)$. Так как множества в пересечении открытые, то объединение $f_1 \cup f_2$ замкнуто.

Примеры # $\{a\}$ - замкнуто. (Любое конечное множество всегда является замкнутым!)
$\varnothing; [a,b] = R \setminus ((-\infty; a) \cup (b, +\infty))$ - замкнутые множества.
(a,b) - не является замкнутым множеством.
Пример, когда 3 свойство не верно для бесконечных объединений: $\forall k \in N \exists f_k = [0, 1 - \frac{1}{k+1}]$. Так как эта последовательность стремиться к единице, но не достигает ее, объедение всех множеств по k равно $[0,1)$ - такого вида множества не являются замкнутыми, и не являются открытыми0

19.9 Теорема о замкнутости множества

Теорема Множество замкнуто тогда и только тогда, когда содержит все свои предельные точки.

Доказательство $\triangleright f$ - замкнуто. Доказать, что f содержит все предельные точки.

Положим $x_n \in f : x_n \to x_0 \in f'$, где f' - множество предельных точек f. О.П. пусть $x_0 \notin f \Rightarrow x_0 \in R \setminus f$, но $R\setminus$ - открыто $\Rightarrow \exists O_{\epsilon_0}(x_0) \subset R \setminus f$. Фиксируем $\epsilon > 0$. $\exists N_{\epsilon_0} \forall n > N_{\epsilon_0} x_n \in O_{\epsilon_0}(x_0) \subset R \setminus f \Rightarrow x_n \in R \setminus f$ - противоречие.

$\triangleleft f$ содержит все предельные точки. Доказать, что f - замкнуто.

Пусть $f' \notin \varnothing$, т.е. множество предельных точек не постое. Рассмотрим $U = R \setminus f, x_0 \in U$. О.П. Положим $x_0 \notin U' \Rightarrow \forall \epsilon > 0 O_\epsilon(x_0) \nsubseteq U \Rightarrow O_\epsilon(x_0) \cap f \neq \varnothing$.

$\epsilon_n = \frac{1}{n}$ $O_{\frac{1}{n}}(x_0) \cap f \ni x_n$, т.е. $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow x_n \to x_0, x_n \in f \Rightarrow x_n \in f' \Rightarrow x_0 \in f$ - противоречие.

Теорема $(A')' \subset A$.

Доказательство Пусть $x_0 \in (A')'$. Фиксируем $\epsilon > 0$. $O_\epsilon(x_0)$ содержит бесконечно много элементов A'.

Пусть $y \in A' \cap O_\epsilon(x_0)$. Фиксируем $\epsilon_1 = min\{|x_0 - y|; \epsilon - |x_0 - y|\} > 0$. $O_{\epsilon_1}(y) \subset O_\epsilon(x_0)$, т.е. $O_{\epsilon_1}(y)$ содержит бесконечно много элементов из множества $A \Rightarrow x_0 \in A'$.

Примеры # $A = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^\infty$, $A' = \{0\}$, $(A')' = \varnothing$.
$Q' = R$, $(Q')' = R' = R$.

Важное наблюдение: $((A')')' \subset (A')' \subset A' \subset A$.

20 Замыкание множеств

Замыканием множества A называют такое $\overline{A} = A \cup A'$.

Примеры # $A = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^\infty$, $\overline{A} = \{\frac{1}{n}\}_{n=1}^\infty \cup \{0\}$.
$\overline{(a,b)} = [a,b]$.
$\overline{N} = N$.
$\overline{Q} = R$.

20.1 Свойства оператора замыкания

1. $\overline{A}$ - замкнутое множество.
2. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.
3. $A \subset B \Rightarrow \overline{A} = \overline{B}$.
4. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
5. $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.

Доказательство свойств

1. $A \cup A'$ содержит все свои предельные точки, а значит замкнуто.
2. $\overline{\overline{A}} = (A \cup A') \cup (A \cup A')' = A \cup A' = \overline{A}$.
3. $A \subset B \Rightarrow A' \subset B' \Rightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
4. $x \in \overline{A \cup B} \Rightarrow (x \in (A \cup B) \vee x \in (A \cup B)') \Rightarrow ((x \in A \vee x \in B) \vee (x \in A' \vee x \in B')) \Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$.
5. $x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in (A \cap B)' \Rightarrow x \in (A \cap B) \vee (x \in A' \wedge x \in B) \Rightarrow ((x \in A) \vee (x \in A')) \wedge ((x \in B) \vee x \in B') \Rightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$.

Следствие 1 Если f замкнуто и $A \subset f$, то $\overline{A} \subset f$.

Следствие 2 $\overline{A} = \cap\{f : f -$ - замкнуто и $A \subset f\}$

Примеры # $A = Q \cap [0,1]$, $B = [0,1] \setminus A$. $\overline{A} = [0,1]$, $\overline{B} = [0,1]$. $\overline{A} = \overline{B} \Rightarrow A \cap B = \varnothing$.
$A = (a,b)$, $B = (b,c)$. $A \cap B = \varnothing$, $\overline{A \cap B} = \varnothing$. $\overline{A} = [a,b], \overline{B} = [b,c]$. $\overline{A} \cap \overline{B} = \{b\}$.

21 Непрерывность функции на отрезке

Пусть $f(x)$ - функция, определенная на множестве X - $x \in X$, а $x_0 \in X'$ - предельная точка. $f(x)$ называют *непрерывной* в точке x_0, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е. функция имеет предел в этой точке.

В изолированных точках ($x_0 \neq X'$) функция непрерывна по определению.

Функция $f(x)$ - непрерывна слева, если $\exists \lim\limits_{x+0 \to x_0} f(x) = f(x_0)$, непрерывна справа, если $\exists \lim\limits_{x-0 \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

21.1 Первая теорема Вейерштрасса

Функция, которая непрерывна на отрезке, все время ограничена на данном отрезке.

Доказательство Требуется доказать, что $\exists k > 0 \forall x \in [a,b] : |f(x)| \leq k$.

От противного, пусть $\exists k > 0 \exists x_k \in [a,b] : |f(x)| > k$.

Положим $k = n \in N$. $x_n \in [a,b] : |f(x_n)| > n$.

Если $a \leq x_n < b$, то $\exists x_{n_k} \to \alpha \in [a,b]$.

$f(x)$ - непрерывна в точке α, т.е. $\exists \lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = f(\alpha) \in R$.

$|f(x_{n_k})| > n_k$, где $n_k \to \infty \Rightarrow f(x_{n_k}) \to \infty$.

Контр-пример Теорема не верна на интервале (a,b). Функция $f(x) = \frac{1}{x-a}$ непрерывна на интервале, но не ограничена.

21.2 Вторая теорема Вейерштрасса

Функция непрерывная на отрезке достигает своего наибольшего и наименьшего значения на этом отрезке.

Доказательство По первой теореме Вейерштрасса функция $f(x), x \in [a,b]$ имеет точную верхнюю и нижнюю границы. Пусть $M = \sup f(x)$, а $m = \inf f(x)$. Требуется доказать, что $\exists x_m : f(x_m) = M$ и $\exists x_M : f(x_M) = m$.

Зафиксируем последовательность $\epsilon_n = \frac{1}{n}$.

По определению $\sup f(x) : f(x_n) > M - \frac{1}{n} \Rightarrow$ можно выделить подпоследовательность $x_{n_k} \to x_M \in [a,b]$.

$M - \frac{1}{n} < f(x_{n_k}) \leq M$. Левая часть и правая часть сходиться к M, следовательно, по лемме о двух милиционерах, $f(x_{n_k}) \to M$. С другой стороны, в силу непрерывности, $f(x_{n_k}) \to f(x_M)$. В силу единственности предела $f(x_M) = M$.

Аналогично доказывается второй случай.

Контр-пример Теорема не верна на интервале (a,b). Функция $f(x) = x$, у которой $\sup f(x) = b$, но не достигается на интервале (a,b), и $\inf f(x) = a$ - аналогично не достигается на интервале (a,b).

21.3 Третья теорема Вейерштрасса

Пусть $f(x)$ является непрерывной функцией на отрезке $[a,b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков, тогда $\exists c \in [a,b] : f(c) = 0$.

Доказательство Без ограничения общности будем считать, что $f(a) < 0$, а $f(b) > 0$.

Разделим отрезок $[a,b]$ пополам. Если $f(\frac{a+b}{2}) = 0$, то теорема доказана. Иначе значит, что функция принимает значения разных знаков на концах одного из отрезков $[a,d]$ и $[d,b]$, где d - середина $[a,b]$.

Поделим этот отрезок пополам. На каком-то $k-$ шаге будет получен отрезок $[a_k, b_k]$, на котором $f(a_k) < 0$, $f(b_k)$. Если $f(\frac{a_k+b_k}{2}) = 0$, то теорема доказана.

Если процесс не заканчивается на k, то результатом построения будет последовательность вложенных отрезков $[a_n, b_n]$, причем $|[a_n, b_n]| = \frac{b-a}{2^n} \to 0 \Rightarrow \exists c \in [a,b] : \cap_{n=0}^{\infty}[a_n, b_n] = \{0\}$, где $a_n \to c$, $b_n \to c \Rightarrow f(a_n) \to c$, $f(b_n) \to c$.

Но $f(a_n) < 0 \Rightarrow f(c) \leq 0$, а $f(b_n) > 0 \Rightarrow f(c) \geq c$, из этого следует, что $f(c) = 0$. Что и требовалось доказать.

21.4 Следствия из теорем

21.4.1 Теорема о промежуточных значениях

Формулировка? Доказательство?

Контр-пример Функция $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ принимает значения разных знаков, но не в одной точке не равна нулю.

21.4.2 Образ отрезка

$f^{-1}([a,b]) = [m, M]$ - образ отрезка.

Доказательство Рассмотрим $\beta \in (m, M)$, и функцию $g(x) = f(x) - \beta$.

1. В точке x_m $g(x_m) < 0$
2. В точке x_M $g(x_M) > 0$

из этого следует, что $\exists c \in (x_m, x_M) \in [a,b] : g(c) = 0 \Rightarrow f(c) = \beta$, причем отрезок $[a,b]$ может быть и наоборот.

22 Непрерывность обратной функции

22.1 Обратная функция

Пусть есть функция $f(x), x \in X \subset R$, $f(x) = Y$. $f(X) = Y$ - образ функции.
$\forall y \in Y \exists! x \in X : f(x) = y$. $y \mapsto x$ - правило по которому каждому y из области значений функции ставиться x из области определения называется обратной функцией: $f^{-1}(x)$

Если $f(x)$ строго монотонная $\Rightarrow f(x)$ - биекция и $\exists f^{-1}(y)$.

22.2 Непрерывность

Функция $f(x)$ не убывает и непрерывна на промежутке $[a, b]$ или (a, b). В этом случае $[f(a), f(b)]$ - множество значений функции. $(A, B) = (f(a), f(b))$, т.е. $x \to a$ справа, и $x \to b$ слева. $f(a) = \lim\limits_{x-0 \to a} f(x)$ и $f(b) = \lim\limits_{x+0 \to b} f(x)$.

Пусть $f(x)$ без ограничения общности не убывает и непрерывна на (a, b). Если $(A, B) = (f(a), f(b)$, то функция $f^{-1}(y) \in (A, B)$ и непрерывна.

Доказательство Рассмотрим $y_0 \in (A, B)$ и $x_0 = f^{-1}(y_0) \in (a, b)$. Зафиксируем $\epsilon > 0$ м $x_0 \pm \epsilon \in (a, b)$.
$y_0 \in (f(x_0 - \epsilon); f(x_0 + \epsilon)) \subset (A, B)$.
Положим $\delta_\epsilon = \min\{y_0 - f(x_0 - \epsilon), f(x_0 + \epsilon) - y_0\}$.
$x_0 \in (f^{-1}(y_0 - \delta_\epsilon), f^{-1}(y_0 + \delta_\epsilon)) \subset (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.

23 Непрерывность элементарных функций

23.1 Показательная функция

Функция вида a^x, где a - некоторая константа, называется *показательной*. Функция a^n, где $n \in N$, определяется как произведение n-раз a само на себя.

Пусть $r = \frac{p}{q} > 0$, причем $r \in Q$, тогда $a^r = (a^{\frac{1}{q}})^p$. Если $r = 0$, то $a^0 = 1$. Если $a < 0$, то $a^r = \frac{1}{a^{-r}}$.

Свойства

1. $r_1 < r_2 \land a > 1 \Rightarrow a^{r_1} < a^{r_2}$, $a < 0 \Rightarrow a^{r_1} > a^{r_2}$
2. $(a^{r_1})^{r_2} = a^{r_1 r_2}$
3. $a^{r_1} a^{r_2} = a^{r_1 + r_2}$
4. $\frac{a^{r_1}}{a^{r_2}} = a^{r_1 - r_2}$

Лемма 1

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \tag{38}$$

Лемма 2 $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall h \in Q(|h| < \delta_\epsilon \Rightarrow |a^h - 1| < \epsilon)$, т.е.

$$\lim_{h \to 0} a^h = 1 \tag{39}$$

Доказательство Зафиксируем $\epsilon > 0$, без ограничения общности будем считать. что $a > 0$.

$$\exists n_1 \in N : |a^{\frac{1}{n_1}} - 1| < \epsilon$$
$$\exists n_2 \in N : |a^{\frac{1}{n_2}} - 1| < \epsilon$$

Пусть $\delta_\epsilon = \min\{\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}\}$, тогда, если взять $|h| < \delta_\epsilon$, то будет выполняться следующее неравенство:

$$1 - \epsilon < a^{\frac{1}{n_2}} < a^n < a^{\frac{1}{n_1}} < 1 + \epsilon$$

Что и т.д.

Лемма 3 Пусть $\{r_n\}_{n=0}^{\infty} \to x \in R$, $r_n \in Q$, тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} r_n$, который не зависит от выбора последовательности r_n.

Доказательство По условию $r_n \to x$, т.е. выполняется критерий Коши.

Зафиксируем $\epsilon > 0$. $\exists \delta_\epsilon \forall h \in Q(|h| < \delta_\epsilon \Rightarrow |a^h - 1| < k\epsilon)$, где k - некоторая константа. Критерий Коши для нашей последовательности: $\exists N_\epsilon \forall n, m \in N(n, m > N \Rightarrow |r_n < r_m| < \epsilon)$.

Рассмотрим модуль разности: $|a^{r_n} - a^{r_m}| = |a^{r_m}| a^{r_n - r_m} - 1| < Ak\epsilon$, где $a^{r_m} \leq A$ - некоторое число (ограничивающее последовательность), а k некоторая константа. Если взять $k = \frac{1}{A}$, то $Ak\epsilon = \epsilon$, из чего следует, что для a^{r_m} выполняется критерий Коши, а значит она сходиться.

23.1.1 Вещественный аргумент

$a^x \rightleftharpoons \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$, где r_n - последовательность рациональных чисел и $r_n \to x$.

Для показательной функции от вещественного аргумента сохраняются все свойства, определенные для функции от натурального аргумента.

23.1.2 Непрерывность

Функция a^x непрерывна на всей числовой оси.

Доказательство Будем рассматривать разность функций $|a^x - a^y| = a^| a^{x-y} - 1|$. Фиксируем $\epsilon > 0$.

$\exists \delta_\epsilon \forall h \in R(|h| < \delta_\epsilon \Rightarrow |a^h - 1| < k\epsilon)$, где k-некоторая константа. Фиксируем δ_ϵ, из определения предела следует два неравенства:

$$0 < h_1 < \delta_\epsilon$$
$$\delta_\epsilon < h_1 < 0$$

, где $h_1, h_2 \in R$. Без ограничения общности будем считать, что $a > 1$, тогда если $h \in R : |h| < \min\{h_1, h_2\}$, то $h_2 < h < h_1$. Т.е., по аналогии с доказательством второй леммы, будет выполняться следующее неравенство:

$$1 - k\epsilon < a^{h_2} < a^h < a^{h_1} < 1 + k\epsilon$$

, из него следует, что $|a^h - 1| < k\epsilon$.

Зафиксируем $y : k = \frac{1}{a^y}$, и $x : |x - y| < \delta_\epsilon$, тогда $a^y|a^{x-y}| < \epsilon$.

23.2 Непрерывность логарифмической функции

Если $a > 0$ и $a \neq 1$, то $\log_a x$ - логарифмическая функция, обратная показательной. Является непрерывной, по теорема о непрерывности обратных функций.

Свойства

1. $\log ab = \log a + \log b$
2. $p \log a = \log a^p$

23.3 Непрерывность степенной функции

Степенная функция x^k, где $k \in R, x > 0$.
$x^k = e^{k \ln x} \Rightarrow x^k$ - непрерывная функция.

23.4 Непрерывность тригонометрических функций

Функции: $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ - непрерывны на всей своей области определения.

Обратные функции: $\arcsin, \arccos, \operatorname{arcctg}, \operatorname{arctg}$ - непрерывны по теореме о непрерывности обратных функций.

$\sinh = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \cosh = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

23.5 Элементарная функция

Функцию, которая может быть получена применением конечного числа операций: $+, -, *, /, \circ$ к простейшим функциям (показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические), называют *элементарной функцией*

Теорема Все элементарные функции непрерывны на всей своей области определения.

24 Замечательные пределы

$$\lim_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e \tag{40}$$

Доказательство Рассмотрим последовательность $x_n = -\frac{1}{n}$. $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} = \lim\limits_{n \to \infty} (\frac{n-1}{n})^{-n} = \lim\limits_{n \to \infty} (\frac{n}{n-1})^n = \lim\limits_{n \to \infty} (\frac{1}{n-1}$ $1)^{n-1}(\frac{1}{n-1} + 1) = e$. Пусть $x_n \to +0$, то $p_n = [\frac{1}{x_n}] \to +\infty$.

Положим $\epsilon > 0$, тогда $\exists N \forall n > N$ $|(1 + \frac{1}{n})n - e| < \epsilon$. Фиксируем $n_0 > N$, тогда $\exists M : n > M [\frac{1}{x_n}] > n_0$.

$|(1 + \frac{1}{p_n})^{p_n} - e| \le \epsilon \Rightarrow (1 + \frac{1}{[\frac{1}{x_n}] + 1})^{[\frac{1}{x_n}]} \le (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \le (1 + \frac{1}{[\frac{1}{x_n}]})^{[\frac{1}{x_n}] + 1} \Rightarrow (1 + \frac{1}{[\frac{1}{x_n}]})^{[\frac{1}{x_n}]} \to e$.

Возьмем $x_n \to -0$, тогда $\lim\limits_{n \to \infty} (1 + x_n)^{\frac{1}{x_n}} \to e$ доказывается аналогично.

Так как каждая из подпоследовательностей сходиться к e, то вся последовательность сходиться к e.

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 + 2)^\alpha - 1}{x} \tag{41}$$

25 Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших пределов

Ограничение функции по сравнению с другой функцией Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$, заданы в некоторой $O_\epsilon^v(x)$. Говорят, что функция $f(x)$ ограничена по сравнению с $g(x)$ и пишут $f(x) = O(g(x))$, где $x \to x_0$, если $\exists k : \exists O_\delta(x_0) : \forall x \in O_\delta^v(x_0)$ $(|f(x)| \le k|g(x)|$.

Примеры

1. $f(x) = \sin \frac{1}{x}, g(x) = 1$. Очевидно, что $|f(x)| \leq |g(x)|$, т.е. $f(x) : O(g(x))$, при $x \to 0$.

Функции одного порядка Говорят, что $f(x) \asymp g(x)$ одного порядка, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$. Обратно неверно.

Определение $f(x) = o(g(x))$, при $x \to x_0$, если $\exists \alpha(x)$- б.м. в точке x_0 по сравнению с $g(x) : f(x) = \alpha(x) g(x)$.

Пример

1. $x^2 = o(x)$, при $x \to 0$.
2. $1 - \cos x = o(x)$.
3. $1 - \cos x = o(x^2)$.

Если $g(x) \neq 0, x \in O^{\vee}(x_0)$, то $f(x) = o(g(x)) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Доказательство $\triangleright$ $f = \alpha g$
$\frac{f}{g} = \alpha \to 0$
$\triangleleft$ $\alpha = \frac{f}{g} \to 0$
$f = \alpha g$.

Эквивалентность функций Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными (при $x \to x_0$), если $f(x) = h(x) * g(x)$, где $h(x) \to 1$.

Утверждение 1 Если $g(x) \neq 0, x \in O^{\vee}(f(x))$, то $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim x \to x_0 \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Утверждение 2 $f(x) \sim g(x)$ (при $x \to x_0$) $\Leftrightarrow f(x) - g(x) = o(g(x)) = o(f(x))$.

Доказательство $\triangleright$ $f \sim g, f = hg$, где $h(x) \to 1, x \to x_0$. Рассмотрим разность $f(x) - g(x) = (h-1)g = o(g(x))$.
$\triangleleft$ $f - g = \alpha g$ $f = (\alpha + 1) g \sim g$.

25.1 Таблица эквивалентности

$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim e^x - 1 \sim \frac{(a^x - 1)}{\ln a} \sim (1 + x) \sim \ln a \log_a (1 + x) \sim polynom(x) \tag{42}$$

25.2 Теорема

При вычислении пределов произведения (частного), входящие в выражение в качестве сомножителя можно заменять на эквивалентные.

Пусть $f \sim f_1, g \sim g_1$, при $x \to x_0$, тогда $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f}{g} \lim x \to x_0 \frac{f_1}{g} = \lim x \to x_0 \frac{f}{g_1} = \lim x \to x_0 \frac{f_1}{g_1}$.

Доказательство Будем считать, что функции $f(x), g(x)$ отличны от нуля.

Рассмотрим $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) g_1(x)}{g_1(x) g(x)}$, где $\frac{g_1(x)}{g(x)} \to 1$.

Замечание Если функция входит в качестве суммы или разности заменять на эквивалентные нельзя.

26 Классификация точек разрыва

Пусть есть функция $f(x), x \in O_r(x)$, если $\exists \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x-0)$ и $\exists \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x+0)$, то $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \Leftrightarrow \exists f(x-0) = f(x+0) = f(x_0)$.

26.1 Точки разрыва I рода

Точка x_0 называется точкой разрыва первого рода (устранимый разрыв), если хотя бы один из односторонних пределов функции в этой точке не равен значению функции в этой точке: $f(x-0) \neq f(x_0) \vee f(x+0) \neq f(x_0)$. Например, функция $f(x) = |sign(x)|$.

Если односторонние пределы не равны, то такой разрыв называют *скачком*.

Утверждение Монотонная функция имеет точки разрыва только первого рода (скачок), что следует из теоремы о пределе монотонный функции.

26.2 Точка разрыва II рода

Точка x_0 называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один из пределов этой функции не существует. Например, функция $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ терпит разрыв второго рода в точке $x_0 = 0$. Функция $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in R \setminus Q \end{cases}$ не имеет пределов (любая ее точка является точкой разрыва второго рода)

27 Равномерная непрерывность функции

Пусть есть функция $f(x), x \in X$.

Определение Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X, если $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_\epsilon > 0 : \forall x', x'' \in X(|x' - x''| < \delta_\epsilon \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \epsilon)$.

Утверждение Если $f(x)$ равномерно непрерывная на множестве X, то $f(x)$ непрерывная на множестве X. Обратное не верно.

Пример Докажем, что функция $f(x) = \sin(x), x \in (0, 1)$ непрерывна, но не является равномерно непрерывной.

Доказательство Построим отрицание для формулировки равномерно непрерывной функции:

$$\exists \epsilon_0 \forall \delta \exists x'_\delta, x''_\delta : (|x'_\delta - x''_\delta| < \delta \wedge |(f(x'_\delta) - f(x''_\delta)| \geq \epsilon_0)$$

Пусть $\sin(\frac{1}{x'_n}) = 1$, и $\sin(\frac{1}{x''_n}) = -1$. Тогда $x'_n = \frac{1}{def + 2\pi n} \Rightarrow x'_n \to 0$, а $x''_n = -\frac{1}{def + 2\pi n} \Rightarrow x''_n \to 0$.

Зафиксируем $\epsilon_0 = 2$ и возьмем произвольное $\delta > 0$. Так как разность стремиться последовательностей x'_n и x''_n стремиться к нулю, то $\exists(|x'_n - x''_n| < \delta)$ в этому случае $(f(x'_n) - f(x''_n)) \geq 2$. Что и т.д.

27.1 Лемма

Функция $f(x)$ равномерно непрерывна на $X \Leftrightarrow \forall x'_n, x''_n \in X : (|x'_n - x''_n| \to 0 \Rightarrow |f(x'_n) - f(x''_n)| \to 0)$.

Доказательство $\triangleright$ Доказательство условия *очевидно.*

$\triangleleft$ Доказательство достаточности от противного. Пусть $f(x)$ не является равномерно непрерывной, то есть:

$$\exists \epsilon_0 \forall \delta = \frac{1}{n} \exists x'_n, x''_n : (|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n} \wedge |(f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \epsilon_0)$$

$\frac{1}{n'} - \frac{1}{n''} \to 0$, тогда как $f(x'_n) - f(x''_n) \nrightarrow 0$ - противоречие

27.2 Свойства функций равномерно непрерывных на интервале

27.2.1 Теорема о непрерывности на конечном интервале

Теорема Пусть функция $f(x)$ равномерно непрерывна на конечном интервале (a, b), тогда функция имеет предел справа в точке a и предел слева в точке b.

Доказательство Для доказательство будем использовать критерий Коши. Пусть есть последовательность $x_n \to a$ и $x_n > a$, положим две подпоследовательности $x'_n = x_n$ и $x''_n = x_n + m$, где m-фиксировано.

Зафиксируем произвольное $\epsilon > 0$. Так как $f(x)$ равномерно непрерывна, то возьмем $\delta_\epsilon : \forall x', x'' \in X(|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \epsilon$.

Рассмотрим $x' - ax' < \delta_\epsilon$, $x'' - a < x'' < \delta_\epsilon$, $(x' - x'') < \delta$, тогда $(f(x') - f(x'') < \epsilon)$, что удовлетворяет критерию Коши, значит функция имеет предел в точке a.

27.2.2 Теорема Кантора о функциях непрерывных на отрезке

Теорема Функция непрерывная на отрезке равномерно непрерывна на этом отрезке.

Доказательство От противного. Пусть $f(x)$ не является равномерно непрерывной на отрезке, то есть $\exists x'_n, x''_n : |x'_n - x''_n| \to 0 \Rightarrow |f(x'_n) - f(x''_n)) \geq \epsilon_0$.

Положим x'_n - последовательность элементов отрезка $[a, b] \Rightarrow \exists x'_{n_k} \to x_0 \in [a, b]$ и $\exists x''_{n_k} \to x_0 \in [a, b]$. Тогда, если $y_n = x'_{n_1}, x''_{n_1}, x'_{n_2}, x''_{n_2}, \dots \to x_0$, то $f(y_n)$ не имеет предела, потому то разность между соседними элементами $y_n \geq \epsilon_0$, с другой стороны $f(x)$ непрерывна по условию, поэтому $f(x) \to x_0$ - противоречие.

Следствие Для того, чтобы непрерывная на конечном интервале функция была равномерно непрерывной, необходимо и достаточно, чтобы ее можно было продлить по непрерывности на концах интервала.

Часть IV
Дифферинцируемость

28 Производная

Производная является функцией. Пусть $f(x), x \in O_r(x_0)$, тогда $\Delta(f) = f(x) - f(x_0)$ - приращение функции в точке x_0, $\Delta(x) = x - x_0$ - приращение аргумента в точке x_0. Если $\exists$ конечный $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\Delta(f)}{\Delta(x)}$, то функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0.

Утверждение Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то $f(x)$ непрерывна в этой точке. Обратное не верно: $\# f(x) = |x|$ - непрерывна в точке 0, но не имеет в ней производную. $\#$ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in Q \\ 0, & x \in R \setminus Q \end{cases}$ (если $x \neq 0$, то функция терпит разрыв 2-ого рода в любой точке, за исключением нуля). Покажем, что в точке 0 функция дифференцируема: $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x}$, где $|f(x)| \leq x^2$, поэтому $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{x^2}{|x|} = x \Rightarrow f'(x) = 0$.

29 Дифферинцируемость функций в точке

Определение Функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0, если $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, можно представить в виде: $A(x-x_0) + o(x-x_0)$, где $o(x-x_0) = \alpha(x)(x-x_0)$ - бесконечно малое ($\alpha(x) \to 0$, при $x \to x_0$). Дифференцируемая функция обязательно будет непрерывной.

Линейная часть приращения ($A(x-x_0)$) называется дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается через $df(x)$.

Теорема $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 того и только тогда, когда $\exists f'(x_0)$, при этом $A = f'(x_0)$.

Доказательство $\triangleright$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{A(x-x_0)}{x-x_0} + \frac{\alpha(x)(x-x_0)}{x-x_0}$$
$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = A + \alpha(x)$$

Левая часть стремиться к $f'(x_0)$, которая существует и равна A при $x \to x_0$.

$\triangleleft$ Дано $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$

$\alpha(x) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)| * (x-x_0)$, где $\alpha(x) \to 0$

$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\alpha(x_0)$, где $f'(x_0) = A$.

Дифференциал функции

$$df = f'(x_0)(x-x_0)$$

, где $(x-x_0) = dx$, то есть:

$$df = f'(x_0)dx \tag{43}$$

29.1 Таблица производных

$$(x^n) = nx^{n-1} \tag{44}$$

Рассмотрим $f(x) = x^n$, где $n \in N$.

$f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x-x_0} = \lim \frac{x-x_0)(x^{n-1}+x^{n-2}x_0+\ldots x_0^{n-1})}{x-x_0} = n * x_0^{n-1}$

$$(\sin(x)) = \cos(x) \tag{45}$$

Рассмотрим $f(x) = \sin(x)$, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{sin(x)-sin(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos x + x_0 2}{x-x_0} = \cos x_0$

$$(\cos(x))' = -\sin(x) \tag{46}$$

Рассмотрим $f(x) = \cos(x)$, производная рассматривается аналогично $\sin(x)$.

$$(a^x)' = a^x \ln a \tag{47}$$
$$(e^x)' = e^x \tag{48}$$

Рассмотрим $f(x) = a^x$, $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{a^{x_0}(a^{x-x_0}-1)}{x-x_0} = a^{x_0} \ln a$

30 Арифметические свойства производных

Теорема Пусть функции $u(x), v(x), x \in O_r(x_0)$ и имеют производные в этой точке: $u'(x_0), v'(x_0)$, тогда

$$(u(x_0) + v(x_0)) = u'(x_0) + v'(x_0) \tag{49}$$
$$(u(x_0)v(x_0))' = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0) \tag{50}$$
$$(\frac{u(x_0)}{v(x_0)})' = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{u^(x)} \quad u(x_0) \neq 0 \tag{51}$$
$$(C)' = 0 \tag{52}$$

Доказательство Первое равенство следует из арифметических свойств пределов.

Второе равенство. $(u(x_0)v(x_0))' = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{u(x)-u(x_0)}{x-x-0} v(x) + \lim\limits_{x \to x_0} \frac{v(x)-v(x_0)}{x-x_0} u(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$.

Разность производных. $(\frac{1}{v(x_0)})' = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \quad = \frac{-v'(x_0)}{v^2 x_0}$.

$(\frac{u(x_0)}{v(x_0)})' = (u(x_0)\frac{1}{v(x_0)})' = u'(x_0)\frac{1}{v(x_0)} - \frac{v'(x_0)u(x_0)}{v^(x_0)} = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{u^(x)}$.

Следствие $(ku)' = ku'$, так как $k' = 0$

31 Производные некоторых функций

31.1 Производная сложной функции

Теорема Пусть функция $f(x), x \in O_r(x_0)$, функция $F(y), y \in O_r(y)$, $y_0 = f(x_0)$, тогда $g(x) = f(F(x_))$ дифференцируема в точке x_0 и $G'(x_0) = f'(x_0)F(y_0)$.

Доказательство $G'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{G(x)-G(x_0)}{x-x_0}$, домножим и разделим это выражение на $f(x) - f(x_0)$, $\frac{(G(x)-G(x_0))(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)(f(x)-f(x_0))} = \frac{(f(F(x))-f(F(x_0)))(f(x)-f(x_0))}{(x-x_0)(f(x)-f(x_0))} = f'(x_0)F'(x_0)$.

31.2 Производная обратной функции

Теорема Пусть функция $f(x), x \in O_r(x_0)$, $f'(x_0) \neq 0$, тогда $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, где $y_0 = f(x_0)$.

31.3 Производная от показательно-степенной функции

$(f^{g(x)}(x))' = (e^{g \ln f})' = e^{g \ln f}(g \ln f)' = f^g(g' \ln f) + g\frac{f'}{f}$.

32 Теоремы о среднем

Пусть есть функция $f(x), x \in [a,b]$ и $f'(x), x \in (a,b)$.

Локальный максимум Пусть функция $f(x), x \in O_r(x_0)$. Точка x_0 называется локальным максимумом функции, если $\exists O_\delta(x_0) \forall x \in O_\delta^\vee(x_0) f(x) \le f(x_0)$.

32.1 Теорема Ферма

Пусть функция $f(x), x \in O(x_0)$ и в точке x_0 имеет производную и x_0 - точка локального экстремума функции $f(x)$. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Доказательство Без ограничения общности, пусть x_0 - точка локального *максимума* функции $f(x)$.

Рассмотрим производную слева и производную справа этой функции:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \ge 0$$
$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \le 0$$

Очевидно, что дроби в обеих строках стремятся к нулю (так как их знаменатели равны нулю), поэтому пределы равны нулю. Числитель у первой меньше нуля (так как стремление к x_0 - локальному максимуму слева), а у второй больше нуля, так как идет стремление к локальному максимом справа. Числитель же всегда меньше либо равен нулю.

В итоге:

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0) = 0 \tag{53}$$

Замечание 1 Обратная теорема ферма не имеет смысла. К примеру, пусть $f(x) = x^3$, положим $x_0 = 0$, тогда $f'(x) = 3x^2 = 0$, однако точка x_0 не является точкой локального экстремума этой функции.

Замечание 2 Наличие в локальном экстремуме производной не обязательно. Например, функция $f(x) = |x|$, имеет минимальное значение в точке $x_0 = 0$, однако не имеет производной в ней.

32.2 Теорема Ролля

Пусть для функции $f(x)$ выполняются следующие условия:

1. Функция определена и непрерывна на $[a,b]$
2. Функция дифференцируема на (a,b)
3. $f(a) = f(b)$

Тогда $\exists c \in [a,b] : f'(c) = 0$,

В геометрическом смысле, теорема утверждает, что если ординаты обоих концов гладкой кривой равны, то на кривой найдется точка, в которой касательная к кривой параллельна оси абсцисс.

Доказательство Так как $f(x)$ непрерывна, то $\exists x_m, x_M \in [a,b] : f(x_m) - mimimum, f(x_M) - maximum$. Очевидно, что $f(x_m) \geq f(x_M)$.

Если $f(x_m) = f(x_M)$, то значит $f(x)$ константа, тогда производная этой функции обращается в ноль в любой точеке из $[a,b]$.

Если $f(x_m) < f(x_M)$. Пусть $x_m \in (a,b)$ или $x_M \in (a,b)$, тогда точка, которая лежит в интервале (a,b) является точкой экстремума, т.е., по теореме Ферма, $f(x_m) = 0$ или $f(x_M) = 0$.

Замечание 1 Нельзя отказаться от непрерывности на отрезке.

Замечание 2 Нельзя отказаться от дифференцируемости на отрезке.

32.3 Теорема Лагранжа (формула конечных приращений)

Пусть для функции $f(x)$ выполняются следующие условия:

1. Функция определена и непрерывна на $[a,b]$
2. Функция дифференцируема на (a,b)

Тогда $\exists c \in (a,b) : f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

В геометрическом смысле это означает, что на отрезке $[a,b]$ найдется точка c в которой касательная параллельна хорде, проходящей через точки, соответствующие концам отрезка.

Доказательство Рассмотрим функцию $g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$, удовлетворяющую первому и второму условию. $g(a) = 0 = g(b) \Rightarrow$ удовлетворяет 3-ему условию теоремы Ролля. Тогда, $\exists c \in (a,b) g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Формула конечных приращений Лагранжа

$$\exists \xi \in (a,b) : f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \tag{54}$$

32.4 Теорема Коши

Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ выполняются следующие условия:

1. $x \in [a,b]$
2. Обе функции дифференцируемы на (a,b)
3. $g(x)$ не обращается в ноль на (a,b).
4. $g'(x) \neq 0$ и $f'(x) \neq 0$

Тогда $\exists c \in (a,b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$. А если выполняется 4-ое условие, то $g'(c)(f(b)-f(a)) = f'(c)(g(b)-g(a)$.

Доказательство Рассмотрим функцию $f(x) = (f(b)-f(a))g(x) - (g(b)-g(a)f(x))$, где $f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a)$, а $f(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$, так как $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b) : f(c) = 0$.

$f'(c) = (f(b)-f(a))g'(c) - (g(b)-g(a))f'(c) = 0$. Что и т.д.

Следствие 1 Пусть $f(x)$ определена и дифференцируема на (a,b), и $\forall x \in [a,b] f'(x) \geq 0$, тогда функция $f(x)$ возрастает.

Доказательство Пусть $\forall x_1, x_2 \in (a,b) : (x_1 < x_2)(f(x_1) \leq f(x_2)$ (т.е. функция возрастает). Рассмотрим $f(x), x \in [x_1, x_2]$. Согласно форме о конечных приращениях Лагранжа $\exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, где $f'(\xi) \geq 0$ и $(x_2 - x_1) > 0$, следовательно $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Следствие 2 Пусть $f(x)$ определена и дифференцируема на множестве X (промежутке, интервале, полуинтервале) и $\exists k > 0 : \forall x \in X |f'(x)| \leq k$. Тогда $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X.

Доказательство Зафиксируем $\epsilon > 0$. Без ограничения общности, пусть $x' > x''$, тогда, по теореме Лагранжа, $\exists \xi \in (x'', x') : |x' - x''| < \delta\epsilon$.

Рассмотрим модуль разности функции в этих точках: $|f(x') - f(x'')| = |f'(\xi(x' - x''))| < k\delta_\epsilon = \epsilon$ и пусть $\delta_\epsilon = \frac{\epsilon}{k}$.

Следствие 3 Производная имеет точки разрыва только второго рода.

Рассмотрим нечетную функцию $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. В точке $x_0 \neq 0$ производная функции существует. Проверим точку $x_0 = 0$ по определению производной: $f'(0) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x - \sin\frac{1}{x} = 0$ (б.м. вычесть ограниченную величину). $f'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - x^2(\cos\frac{1}{x})\frac{1}{x^2} = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, где $\cos\frac{1}{x}$ не имеет предела, следовательно вся сумма не имеет предела, а значит производной не существует. В точке $x_0 = 0$ разрыв второго рода.

33 Производная высшего порядка

Рассмотрим функцию $f(x), x \in (a,b)$ и $\forall x \in (a,b) \exists f'(x)$.

$f''(x) = (f'(x))' \ldots f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ Будем считать, что $f^{(0)}(x) = f(x)$. Для того, чтобы существовала n-ая производная, обязательно надо, что бы существовали все производные в плоть до $n-1$-ой. Если существует n-ая производная в точке, то $n-1$-ая производная определена в окрестности этой точки, а $n-2$-ая производная непрерывна в этой окрестности.

Рассмотрим $f(x) = x^k$, ее n-ая производная $f^{(n)} = (k(k-1)x^{k-2})' \ldots$ <- Дома дописать, если $k \in N$ и $k \in R$.

Функцию которая имеет n-ую производную на (a,b) называют n-раз дифференцируемой на (a,b). Функцию которая имеет производную любого порядка на (a,b) называют *бесконечно дифференцируемой* на (a,b).

33.1 Формула Лейбница для производной

Пусть функции $u(x), v(x)$ n раз дифференцируемы на (a,b). Тогда имеет место равенство:

$$(u(x)v(x))^{(n)} = u^{(n)}v^{(0)} + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2}u^{(n-2)}v'' + \cdots + nu'v^{(n-2)} + u^{(0)}v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v(k) \tag{55}$$

Доказательство аналогично доказательству формулы бинома Ньютона (по мат. индукции).

34 Дифференциал высшего порядка

Дифференциал первого порядка:

$$df = f'dx(dx = t - x \ df(x, \delta x) = f(x)(\delta x))$$

Зафиксируем δx. δf - функция от переменного x, которая определена на (a,b), тогда дифференциал второго порядка определяется следующим образом:

$$d(df) = d^2 f = d(d(f)) = d(f'dx) = dx(f''dx) = f''dx^2 \tag{56}$$

Дифференциал n-ого порядка определяется так:

$$d^n f = d(d^(n-1)f) = f^{(n)}dx^n \tag{57}$$

34.1 Формула Лейбница для дифференциалов

Предположение из теоремы 1 (формула Лейбница для производной)

$$d^n(uv) = (\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{n-k} v^k)dx^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} dx^{n-k} v^k dx^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k} u d^k v \tag{58}$$

34.2 Инвариантность дифференциала первого порядка

$f(x), x \in (a,b)$, где x-независимая переменная. $x(t), t \in (\alpha, \beta)$, где t. Тогда $f(x(t))$, где есть зависимая переменная.

Инвариантность формы первого дифференциала - df одинаков при x зависимом и независимом.

Доказательство Пусть x независимая переменная, тогда $df = f'dx$ Пусть x - зависимая переменная, тогда $df = f'(x)x'(t)dt = f'dx$, так как $x'(t)dt = dx$.

34.3 Инвариантность дифференциала n-ого порядка

В первом случае x независимый: $d^2 f = f'' dx^2$. Во втором случае x зависимый: $x = x(t)$,
$d^2 f = d(df) = d(f'dx) = df'dx + f'd(dx) = f''dx^2 + f'd^2x$ Второй дифференциал не инвариантен относительной замены переменной.

Рассмотрим дифференциал третьего порядка: $d^3 f = d(d^2 f) = df(f'dx^2 + f'd^2x) = df''dx^2 + f''d(dx^2) + df'd^2x + f'd(d^2x) = f'''dx^3 + 2f''d^2xdx + f''dxd^2xdx + f'd^3x$. Тогда получается, старшие дифференциалы *не инвариантны* относительно замены переменной!

35 Формула Тейлора

35.1 Special for многочлен

Пусть $Q(x) = Q_n(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_n x^n$ - многочлен степени n. Пусть $x = x - a + a$, тогда $Q_n(x) = q_0 + q_1(x-a) + q_2(x-a)^2 + \dots + q_n(x-a)^n$. Раскрыв скобки, можно получить многочлен следующего вида:

$$Q_n(x) = \beta_0 + \beta_1(x-a) + \beta_2(x-a)^2 + \dots + \beta_n(x-a)^n$$

Тогда,

$$\begin{aligned} Q'(x) &= \beta_1 + 2\beta_2(x-a) + \dots n\beta_n(x-a)^{n-1} \\ Q''(x) &= 2\beta_2 + 6\beta_3(x-a) + \dots + n(n-a)\beta_n(x-a)^{n-2} \\ &\vdots \\ Q^k(x) &= k!\beta + \dots + n(n-1)(n-k+1)(x-a)^{n-k}\beta_n \end{aligned}$$

Если подставить в k-ую производную $x = a$, то $\beta_0 = Q(a)$, $\beta_1 = Q'(a)$, $\beta_2 = \frac{Q''(a)}{2}$, $\beta_k = \frac{Q^{(k)}(a)}{k!}$ - коэффициенты β найдены через производные.

Получаем искомую формулу:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{Q^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \tag{59}$$

35.2 Special for функция

Будем рассматривать функцию $f(x)$, которая n-раз дифференцируема в $O(a)$. Сопоставим $f(x)$ многочлен Q_{n-1}

$$(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \tag{60}$$

- многочлен Тейлора функции f.

Для всех $0 \leq k \leq n-1$ имеет место равенство:

$$Q_{n-1}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \tag{61}$$

Многочлен удовлетворяющий такому уравнению, обязательно будет иметь вид 59

В окрестности точки a значения производной функции приблизительно равны со значениями многочлена Тейлора для этой функции.

Формула Тейлора:

$$f(x) = Q_{n-1})x + R_n(x) \tag{62}$$

Где $R_n(x)$ является остаточным членом формулы Тейлора, который может быть записан в форме Лагранжа:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n \tag{63}$$

Без ограничения общности $\xi \in (a, x)$. Так же $\xi = a + \theta(x-a)$, где $0 < \xi < 1$, тогда остаточный член может быть записан в таком виде (форма Лагранжа?):

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))(x-a)^n}{n!} \tag{64}$$

Форма Коши:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^n(1-\theta)^{n-1}}{n!} \tag{65}$$

35.3 Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа, Коши

Пусть $f(x)$ $n-1$ раз дифференцируема на отрезке $[a, x]$, имеет n-ую производную на интервале (a, x). Тогда остаточный член в формуле Тейлора может быть записан в форме Лагранжа или в форме Коши.

Доказательство Рассмотрим функцию $f(x) = Q_{n-1}(x) + R_n(x)$. Хотим найти свободный член в виде $R_n = (x-a)^p H$, тогда $f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)^1 + \cdots + \frac{f^{(k)}}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n-1)(a)}}{(n-1)!}(x-a)^(n-1) + (x-a)^p H$

Зафиксируем x, и $u = a$. Будем рассматривать функцию $\phi(x) = f(u) + \frac{f'(a)}{1!}(x-u)^1 + \cdots + \frac{f^{(k)}(u)}{k!}(x-u)^k + \cdots + \frac{f^{(n-1)(u)}}{(n-1)!}(x-u)^(n-1) + (x-u)^p H$

Зафиксируем: $\phi(a) = f(x)$ и $\phi(x) = f(x)$, т.е. концах промежутка (a, x) функция ϕ и f принимают одинаковые значения. Значит, по теореме Лагранжа, $\exists \xi = \theta(x-a) \in (0, x) : \phi'(\xi) = 0$ Найдем производную

$\phi'(x) = f'(u) + f''(u)(x-u) - f'(u) + \frac{f'''(u)}{2!}(x-u)^2 - f''(u)(x-u) + \dots + \frac{f^{(n)}(u)}{(n-1)!}(x-u)^{n-1} - \frac{f^{(n-1)}(u)}{n-2}(x-u)^{n-2} - p(x-u)^{p-1}H(x) =$. Тогда, $\phi'(\xi) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(x-\xi)^{n-1} - p(x-\xi)^{p-1}H(x) = 0$. Получаем формулу для $H(x)$:

$$H(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^n}{p(n-1)!(x-\xi)^{p-1}}$$

Для $R(x)$:

$$R_n(x) = (x-\xi)^p H(x) \tag{66}$$

35.4 Формула Тейлора с остаточным членов в Форме Пеана

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы и $f^{(n)}(x)$ непрерывна в точке a. Тогда $f(x) = Q_n(x) + o((x-a)^n)$.

Доказательство Перепишем функцию с остаточным членом в форме Лагранжа $f(x) = Q_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n$ Заметим, что $\alpha(x) = f^{(n)}(\xi) - f^{(n)}(a)$ стремиться к нулю. Тогда получается, что $Q_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-a)^n = Q_{n-1}(x) + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{\alpha(x)}{n!}(x-a)^n = Q_n(x) + o((x-a)^n)$.

35.5 Формула Маклорена

Формула Тейлора при $a = 0$ называется *формулой Маклорена*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n) \tag{67}$$

Лемма Пусть функция $f(x)$ дифференцируема и является четной, тогда $f'(x)$ - нечетная. Аналогично , производная нечетной функции, есть четная функция.

Доказательство Рассмотрим $f(x) = f(-x) \Rightarrow f'(x) = -f'(-x)$, что означает $f'(x)$ нечетная функция.

Примеры # $f(x) = e^x$. Разложение для этой функции по формуле Маклорена: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$.

$f(x) = sin(x)$ - нечетная функция. Значит четные производные у нее есть четные функции, а нечетные производные есть функции нечетные. $sin''(0) = sin''''(0) = \dots = 0$, т.е. в формуле Тейлора не будет слагаемых с четными производными. $f'(0) = 1; f'''(0) = -1 \dots$. Тогда, $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2k+2})$.

<- Дома: f(x) = cos(c)

36 Расширение неопределенности. Правило Лопиталя.

Пусть есть две функции $f(x)$ и $g(x)$, $x \in O_r(a)$. $f(x) = \alpha_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$, $g(x) = \beta_q(x-a)^q + o((x-a)^q)$, где $p, q \geq 1$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} 0, & p > q \\ \frac{\alpha_p}{\beta_q}, & p = q \\ \infty, & p < q \end{cases}$$

36.1 Правило Лопиталя для неопределенности вида $\frac{0}{0}$

Пусть

1. $f(x), g(x)$ определены и дифференцируемы в $O(a) \subset \{a\}$, где $a \in R$, или $a = \pm\infty$, или $a = \infty$.
2. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$
3. $g(x) \neq 0$ и $g'(x) \neq 0$ в $O(a) \subset \{a\}$

Тогда, если $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\exists \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство (1 способ) Пусть $a \in R$, $f(a) = g(a) = 0$, тогда $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim\limits_{x \to a} \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}$, где $f(x), g(x)$ удовлетворяет теореме Коши на (a, x), т.е. $\exists \xi_x \in (a, x) : \xi_x \to a$, при $x \to a$.

Пусть $a = \infty$, $u = \frac{1}{x}$, $F(u) = f(\frac{1}{x})$, $G(u) = g(\frac{1}{x})$, тогда $F(u), G(u)$ удовлетворяет всем условиям теоремы в $O^{\vee}(0)$