

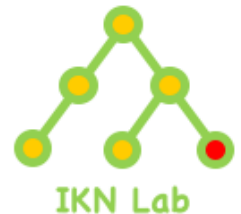
最大クリーク発見問題の 省メモリアルゴリズム

A Space-Efficient Algorithm for the Maximum Clique Problem

○小畠教寛⁽¹⁾, 喜田拓也⁽²⁾

⁽¹⁾北海道大学 大学院情報科学院

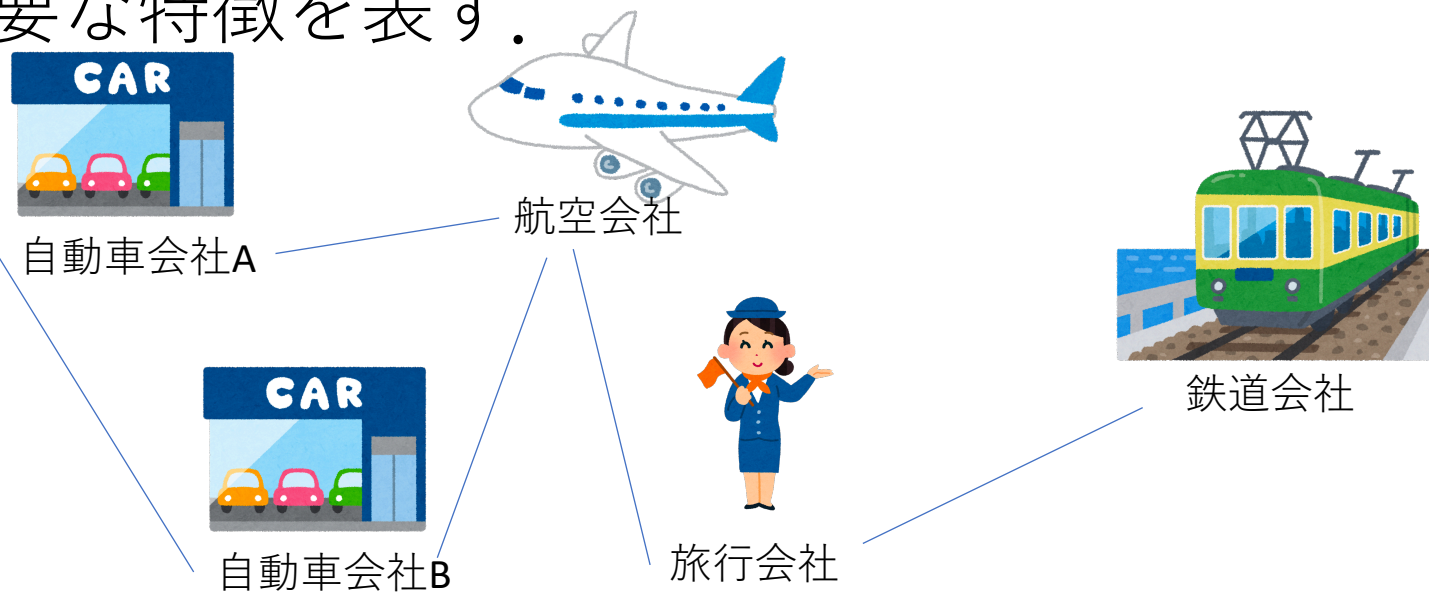
⁽²⁾北海学園大学, 工学部



このスライドや原稿は, [githubのobatakyoukan/paper](#)に挙げています.

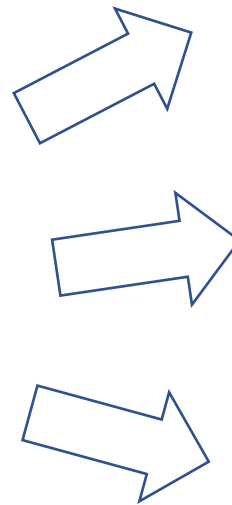
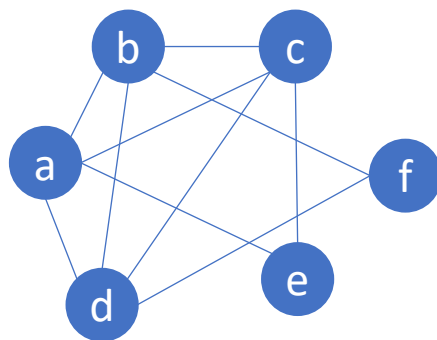
研究背景

最大クリーク問題(Maximum Clique Problem)は、幅広くの応用分野に利用でき、例えば、株式市場におけるマーケットグラフの最大クリークは、似た振る舞いをする最大のグループという重要な特徴を表す。



クリーク

無向グラフ $G = (V, E)$ が与えられたとき，任意の2頂点が隣接している頂点集合 V の部分集合 Q のことを **クリーク (Clique)** という．



a

サイズ1のクリーク

b

サイズ2のクリーク

f

c

サイズ3のクリーク

a

e

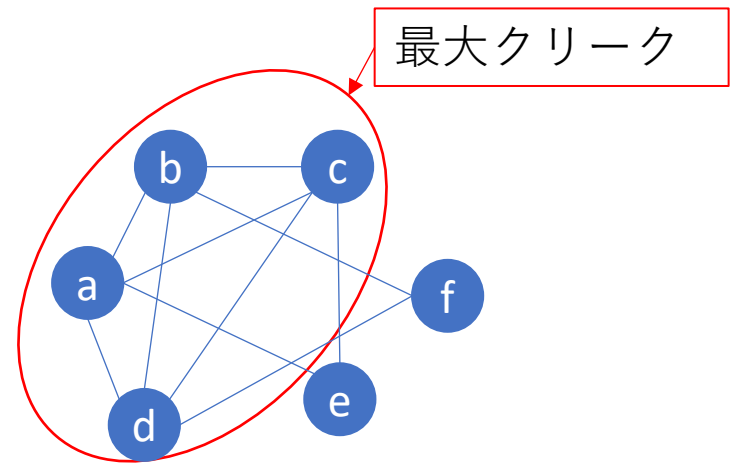
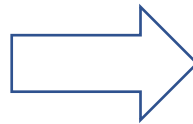
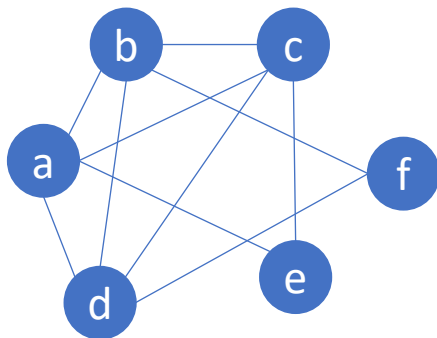
最大クリーク問題

- 入力

無向グラフ $G = (V, E)$

- 出力

任意の2頂点が隣接している V の部分集合の中で、サイズが最大のものを Q_{max} を **最大クリーク** という。



既存研究とその問題点

最大クリーク発見に関する高速なアルゴリズムは、多く研究されている。その1つとして、2010年にTomitaらによってMCSアルゴリズムが提案されている[1]。

しかし、MCSは、大きなクリークサイズ ω をもつ入力グラフに対しては、その使用領域量 $O(n\omega + m)$ は無視できないものになる。

ここに、グラフのサイズを n 、辺の数を m とする。

[1] Etsuji Tomita, Yoichi Sutani, Takanori Higashi, Shinya Takahashi, and Mitsuo Wakatsuki. A simple and faster branch-and-bound algorithm for finding a maximum clique. In WALCOM 2010. LNCS 5942. Springer, 2010.

研究目的

本研究では、MCS アルゴリズムを、その枝刈り等の効果をできるだけ損わずに、そのメモリ量削減の改良を行うことを目指す。

主結果

- メモリ使用量を改良した**MCS-SEアルゴリズム**を提案した.
- 隣接リスト表現のとき, MCSの空間計算量 $O(n\omega + m)$ に対して, **MCS-SEの空間計算量 $O(n + m)$** が, 抑えられていることを示した.
ここに, グラフのサイズを n , 辺の数を m , 最大クリークのサイズを ω とする.
- 実験では, 最大クリークが大きいいくつかのグラフに対して, **メモリ使用量が実際に抑えられていることを確認した.**

MCS

- MCS [Tomita et al.,2010]は、 **分枝限定法(B&B)**によって、最大クリークを発見するアルゴリズムである.
- 以下の工夫を用いることで、探索を効率的に行っている.
 - 彩色によるクリークの上界の概算.
 - 近似解によるクリークの下界の概算.

[Tomita et al. ,2010] Etsuji Tomita,Yoichi Sutani,Takanori Higashi,Shinya Takahashi,and Mitsuo Wakatsuki. A simple and faster branch-and-bound algorithm for finding a maximum clique. In WALCOM 2010. LNCS 5942. Springer, 2010.

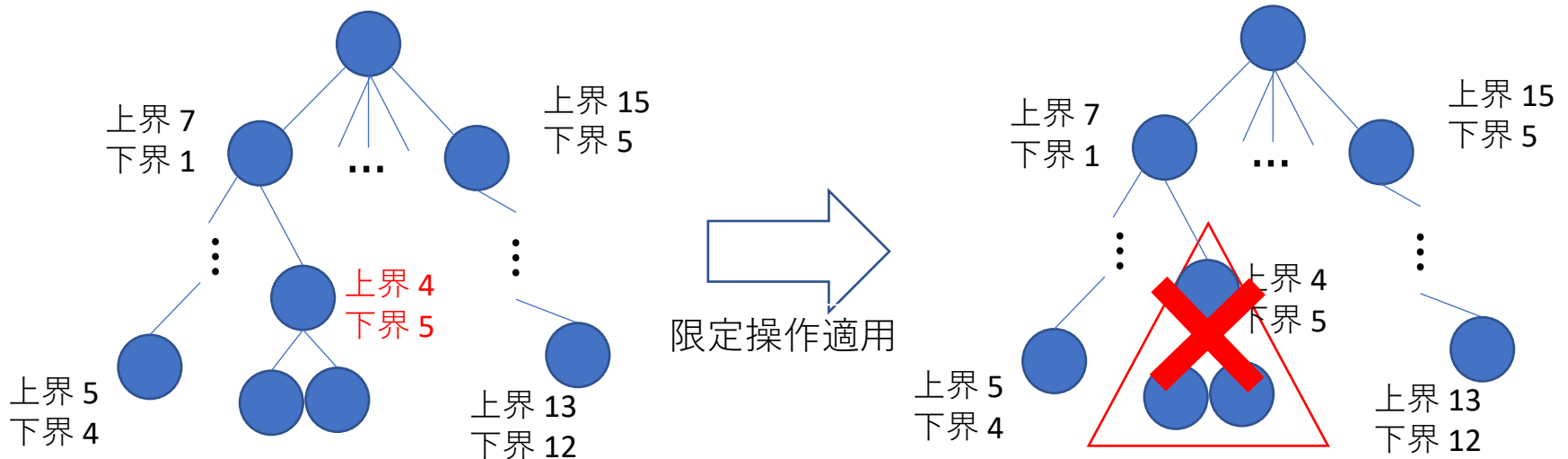
分枝限定法(B&B)

- 分枝操作(branching)

部分問題に分割する手続き. これを再帰的に行う.

- 限定操作(bounding)

部分問題の上界と下界を概算して, 最適解の候補でないものの分枝操作を打ち切る(pruning).



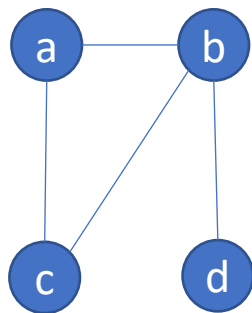
限定操作適用

分枝操作: MCSの分枝操作手順

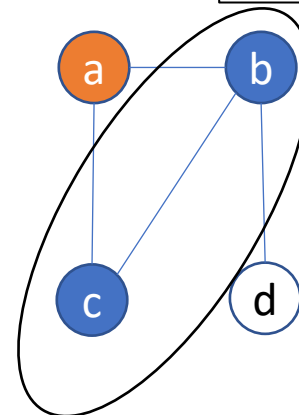
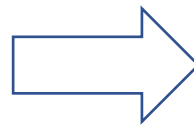
探索時に保持しているクリークを Q とし、 Q の頂点すべてに隣接している頂点集合を候補点集合とする。

分枝操作は、深さ優先探索によって、以下の操作を繰り返す。

- 候補点集合の中から、1つ頂点選び、 Q に追加する。
- Q が、現在までに見つかった中で最大のサイズるとき、暫定解 Q_{max} とする。
- 候補点集合を更新する。



aを Q に追加

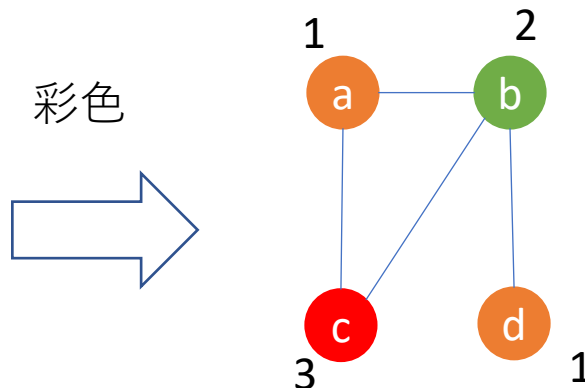
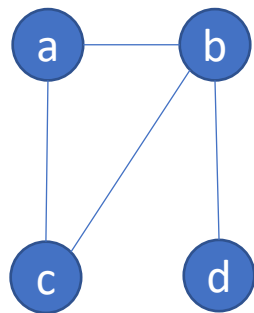


これを候補点集合として探索を繰り返す

限定操作1: 彩色による上界の概算

彩色(coloring)とは、隣接する頂点に異なる正整数を振ること.

彩色に使われた最大の整数が k のとき、サイズ k を超えるクリークは存在しない.

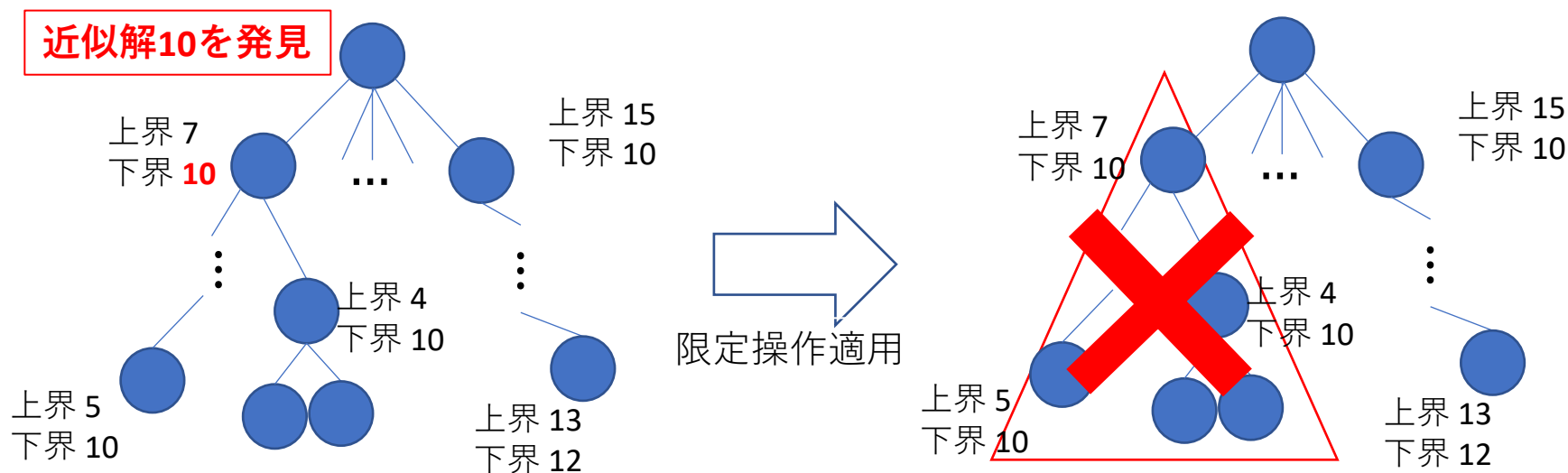


3を超えるクリークは、存在しない.

限定操作2: 近似解による探索の効率化

今回の問題では、下界は暫定解となる．何もしなければ、暫定解の初期値は0となる．

最初に近似アルゴリズムで求めた近似解を暫定解とすることで、より効果的な探索を行える．

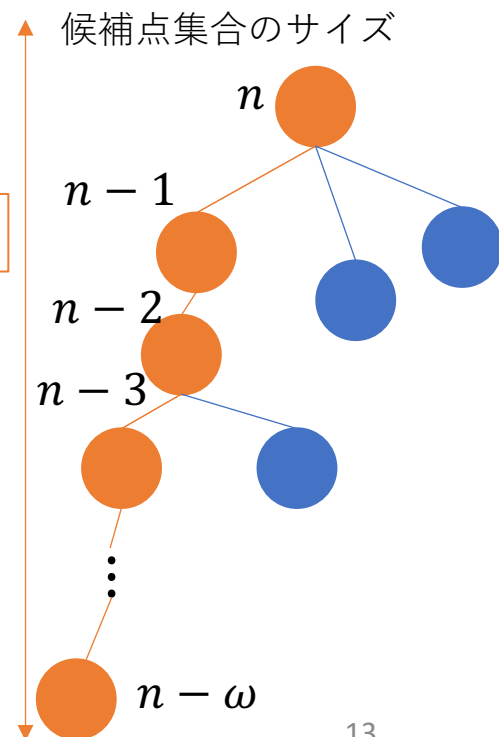


理論解析従来MCSの空間計算量

探索時に、各ノードは頂点集合とその彩色情報を保持する。

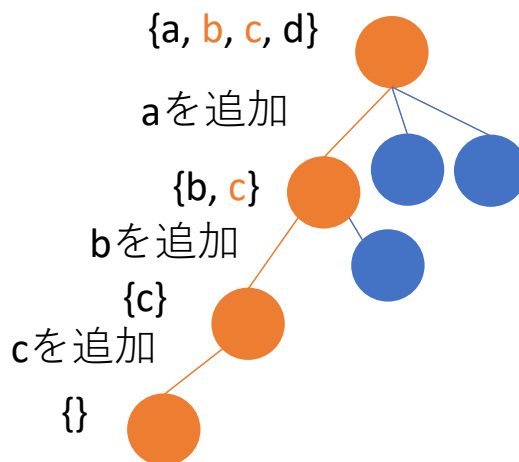
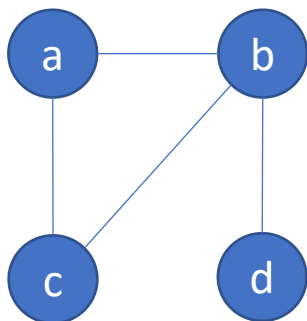
最大メモリを使用するのは、
探索の根から葉までのパスを考えればよい。
各ノードの空間計算量は、 $O(n)$ である。
探索の最大の深さは、
最大クリークのサイズ ω となる。

従って、隣接リストのときの空間計算量は、
 $O(n + m) + O(n\omega) = O(n\omega + m)$ となる。



提案1: 改善アイデア

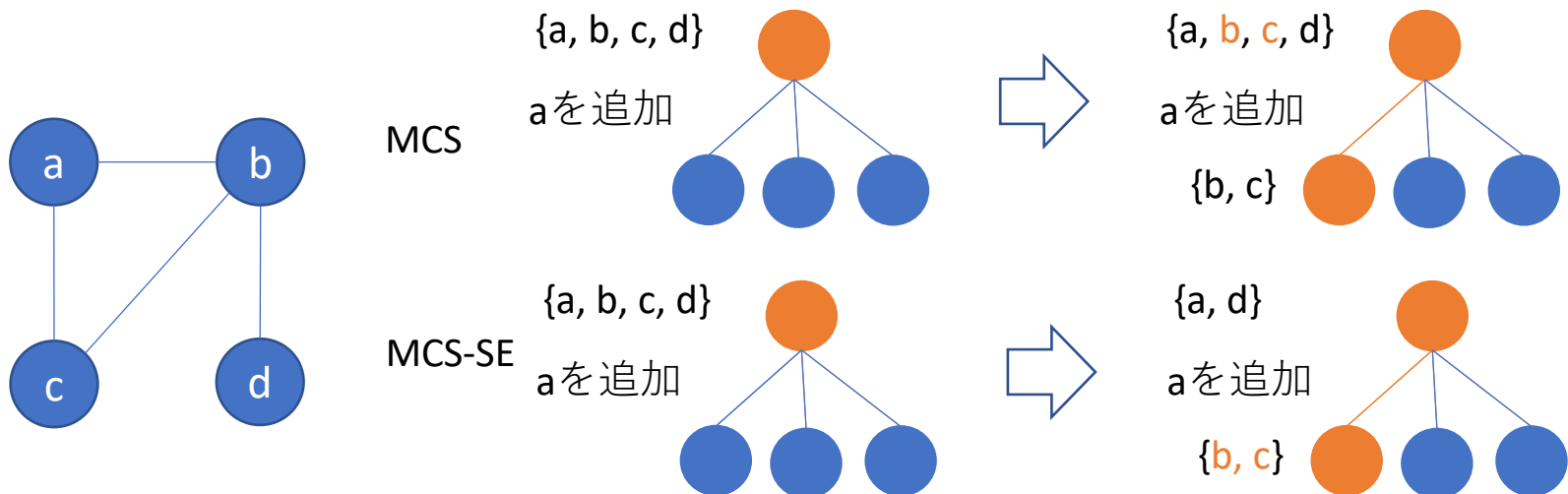
探索木の根から現在の繰り返しまでのパス上で、候補点集合が集合の包含関係の下降列にという性質を利用する.



提案2: 差分表現

子に進むとき，親から子が持つ要素を削除することで，重複する情報を持たないようにする．

親は，彩色情報を保持せず，バックトラック時に，彩色情報を動的に復元する．



理論解析: 提案手法の空間計算量

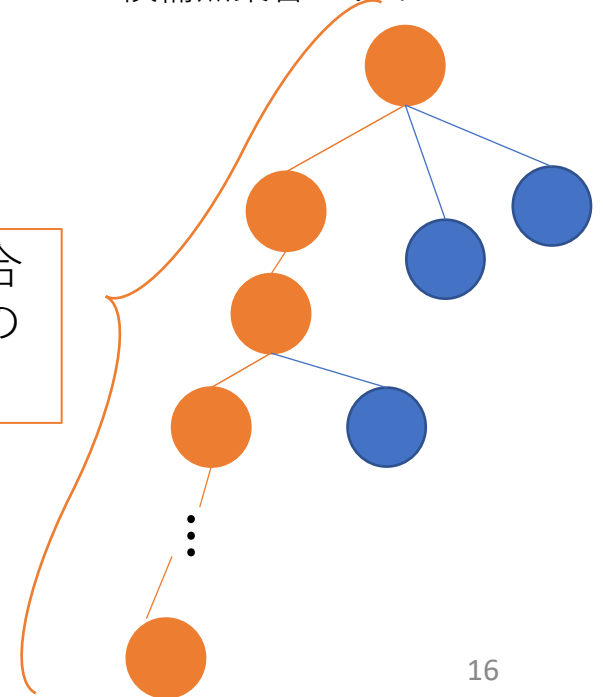
頂点集合が、重複する頂点の情報を保持しない。

提案手法MCS-SEの隣接リストでの空間計算量は、

$O(n + m) + O(n) = O(n + m)$ となる。

候補点集合
のサイズの
合計 n

候補点集合のサイズ



実験

- アルゴリズム: MCSとMCS-SEを隣接リストで実装し、近似解アルゴリズムでは、2005年にKatayamaらが提案したKLSアルゴリズムを使用した[2].
- 実験データ: (1) DIMACS ベンチマークセットのグラフ¹と、(2) ランダムに生成したグラフ、(3) DIMACSのグラフを合体させたグラフの3種類の計35個のグラフを用意した.
- 環境: PC(CPU Intel Core i5-7360U, 2.30GHz, 8 GB memory, MacOSX.10.14.6) 上で、全てのプログラムは、gcc 8.3.0 -O3 -lm でコンパイルを行った.

[2] Kengo Katayama, Akihiro Hamamoto, and Hiroyuki Narihisa. An effective local search for the maximum clique problem. *Information Processing Letters*, Vol. 95, No. 5, pp. 503–511, 2005.

¹http://iridia.ulb.ac.be/~fmascia/maximum_clique/DIMACS-benchmark

実験結果(最大メモリ使用量)

最大クリークの大きな一部のグラフに対して、最大メモリ使用量の減少を確認できた。

最大クリークと近似解が一致しているとき、探索が深くない可能性があるため、最大メモリ使用量の差が小さくなる傾向がある。

入力グラフ				メモリ使用量(KB)	
グラフの名前	グラフサイズ	解	近似解	MCS	提案手法
MANN-a45	1035	345	344	1628	936
hamming10-2	1024	512	512	928	928
3000-2000	3000	2050	2050	1352	1076
union	1235	347	345	2272	1440
union2	2259	522	355	5536	4584

実験結果(実行時間)

実行時間は、すべてのデータで悪化した。

最大メモリ使用量に関係なく、実行時間は、増加した。

入力グラフ				実行時間(秒)	
グラフの名前	グラフサイズ	解	近似解	MCS	提案手法
MANN-a45	1035	345	344	242.98	347.05
hamming10-2	1024	512	512	26.80	27.21
3000-2000	3000	2050	2050	4786.92	5114.48
union	1235	347	345	519.86	759.34
union2	2259	522	355	402.88	463.39

まとめ

- 最大クリーク発見する省メモリなアルゴリズムを提案した.
- 実験において、MCS-SEはMCSに比べて、実行時間は増加したが、最大メモリ使用量は最大クリークの大きいグラフに対して減少することが確認できた.
- 今後の課題
 - MCSとMCS-SEを切り替えることで、メモリ消費量を抑えつつ、十分に高速化を実現すること.
 - 他のアルゴリズムに提案手法を組み込むことで、メモリ消費量を改善すること.
 - 並列化を取り入れるなどして、実行速度を改善する.

ご静聴ありがとうございました.