投稿類別：數學類

篇名：幻方大解密

作者：

莊文瑜。南光中學。高一愛班
郭容華。南光中學。高一愛班
楊惠名。南光中學。高一愛班

指導老師：黃韻如老師

壹●前言

一、　　研究動機

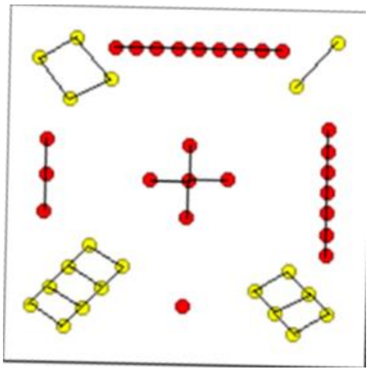
在一次偶然的機會下，我們在一本介紹數學遊戲的書中發現了幻方，他具有直、斜、橫三排的數字和皆相同的特性引起了我們的興趣，於是我們就開始試著找出它的解。在網路上搜尋資料的過程中，我們發現了各種不同型態的幻方，也得知每種幻方有很多組解，而且每一種解法都只能找出其中的一、二組解。所以我們就打算來研究有關幻方的解法以及不同型態幻方的特性。

二、　　研究目的

（一）.我們會試著找出幻方數字中特有的規律，然後應用它來找出一個新方法來解幻方。
（二）.研究特殊的幻方-星幻和多邊形幻方。・星幻-研究六角、七角星形幻方……等的數字排列規則。
（三）.多邊形幻方-由網路上得知多邊形幻方的解至多只有一組，而六邊形幻方已經有人解出，所以打算從其他多邊形著手研究，希望能找出它們的解。

三、　　論文大綱

第一部份要先對幻方有初步的認識，所以我們先簡介幻方的歷史由來，接著再舉例說明和示範一些幻方的填製方法，最後會放上我們這些日子找出的一些研究結果-幻方的數字規則和特殊幻方的特性，最後再總結這次的研究以及未來的發展方向。



圖一 資料來源：引註資料（一）

貳●正文

一、　　幻方的歷史

魔方陣的起緣是由一隻大禹治水時被發現的烏龜開始的，由它奇特的圖案可以發現它的組成像現在的幻方，所以後人把它叫做洛書。（如圖一）漢代的徐岳因

為洛書有 9 個數字而把它稱做九宮算。九宮算之後發展成縱橫均為 n 的縱橫圖。中國的是數學家楊輝對古代幻方有很多的研究，他創造了欑九圖和多個連續幻圓。另一個數學家程大位繼承揚輝的工作在算法統宗中又作出 14 個幻方，而將幻方推廣到正方體上的是張潮。早期的幻方都是由中國往外傳播，因為性質變幻莫測，在歐洲掀起了一股占星的風潮，被認為具有法力。（如圖二）

圖二 資料來源：引註資料（一）

二、　幻方的填製方法

幻方的解法有非常多種，並按每一邊的格子數分成奇階、4m 階、4m+2 階，不過每種解法多半都只能找出一、二組解，以下介紹幾種已經由別人找出的解法。

（一）　幻方的定義

1.正方形幻方

在一個 n*n 的正方形中，填入數字使其直、斜、橫三排的數字和皆相等。（如圖三）

2.星幻

星形格式的幻方，數字放置的位置為邊長的交點。而其中星形的每一條邊長的和會相同。（如圖四）

3.多邊形幻方

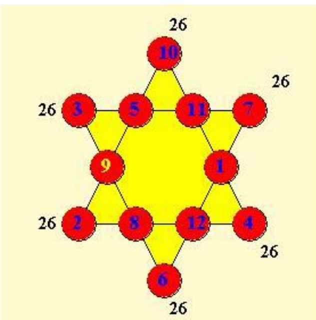
多邊形幻方-多邊形格式的幻方，有五邊形、六邊形…的幻方。每一種形狀的幻方又可以依照每一邊被分成的等分數區分為一階、二階（如圖五）…。

4.階：每邊的格子數。

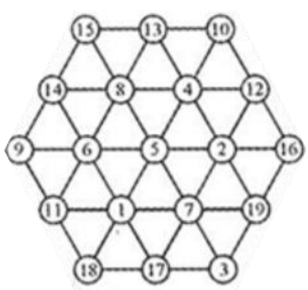
5.構造法：即幻方的解法。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

圖三 資料來源：自製繪圖



圖四 資料來源：引註資料（二）



圖五 資料來源：引註資料（三）

（二）幻方的魔數、二階幻方以及幻方的個數

1.幻方的魔數

魔方陣中各行各列的數字和皆相等，而這個相等的數字我們便稱為「魔數」，魔數在建構幻方的過程中非常重要。推導魔數有一個公式：**假設有一個 n 階的幻方，其魔數為 m，則 n（n+1）/2=m*n（李杭強，2002）**。例如：三階幻方的魔數為 15，四階幻方的魔數為 34，五階幻方的魔數為 65。

2.二階幻方（如圖六）

所謂的二階幻方其實是沒有解的，證明：由上述魔數公式可知，其魔數為 5，則 a+c=5 且 a+d=5 以此類推，a=5-c=5-d → c=d (不合) 可得二階幻方無解，因此二階幻方不存在。

a	b
c	d

圖六 資料來源：自製繪圖

3.幻方的個數

由排列組合計算， **可以發現由整數 n 所組成的 n 階方陣的數目共有 $(n^2)!$種，呈現階層方式的增加（彥碩的家 ，2010）**， 所以我們也預測幻方的數目應該是隨著階數的增加而大幅增加。除此之外，幻方的個數有一個特性—三階以上的幻方個數都是八的倍數。因為一個幻方不管我們把它順時針旋轉 270 度、180 度、90 度或是依照鉛直、水平對稱軸鏡射也可以依照左上→右下（如圖七）、右上→左下的對角線鏡射。

8	1	6
3	5	7
4	9	2

→

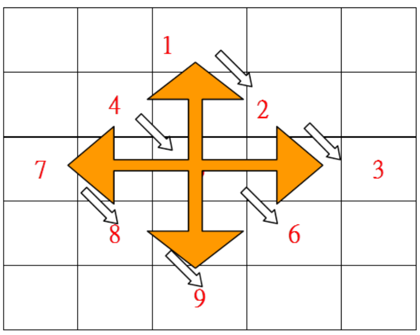
8	3	4
1	5	9
6	7	2

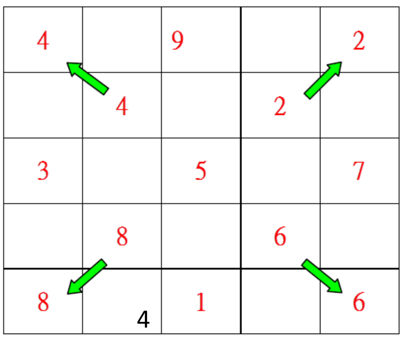
圖七 資料來源：自製繪圖

（三）奇階幻方的構造法

1.楊輝法

楊輝（約 1238 年－約 1298 年），字謙光，是中國南宋的數學家，在其著作在《續古摘奇演算法》中敘述三階幻方構造法。（談祥柏，2004）我們把它簡化成三個步驟：（1）九子斜排（2）上下對易，左右相更，四維挺出。（3）戴九履一，左三右七，二四為肩，六八為足。（如圖八）





4	9	2
3	5	7
8	1	6

圖八 資料來源：自製繪圖

2.階梯法

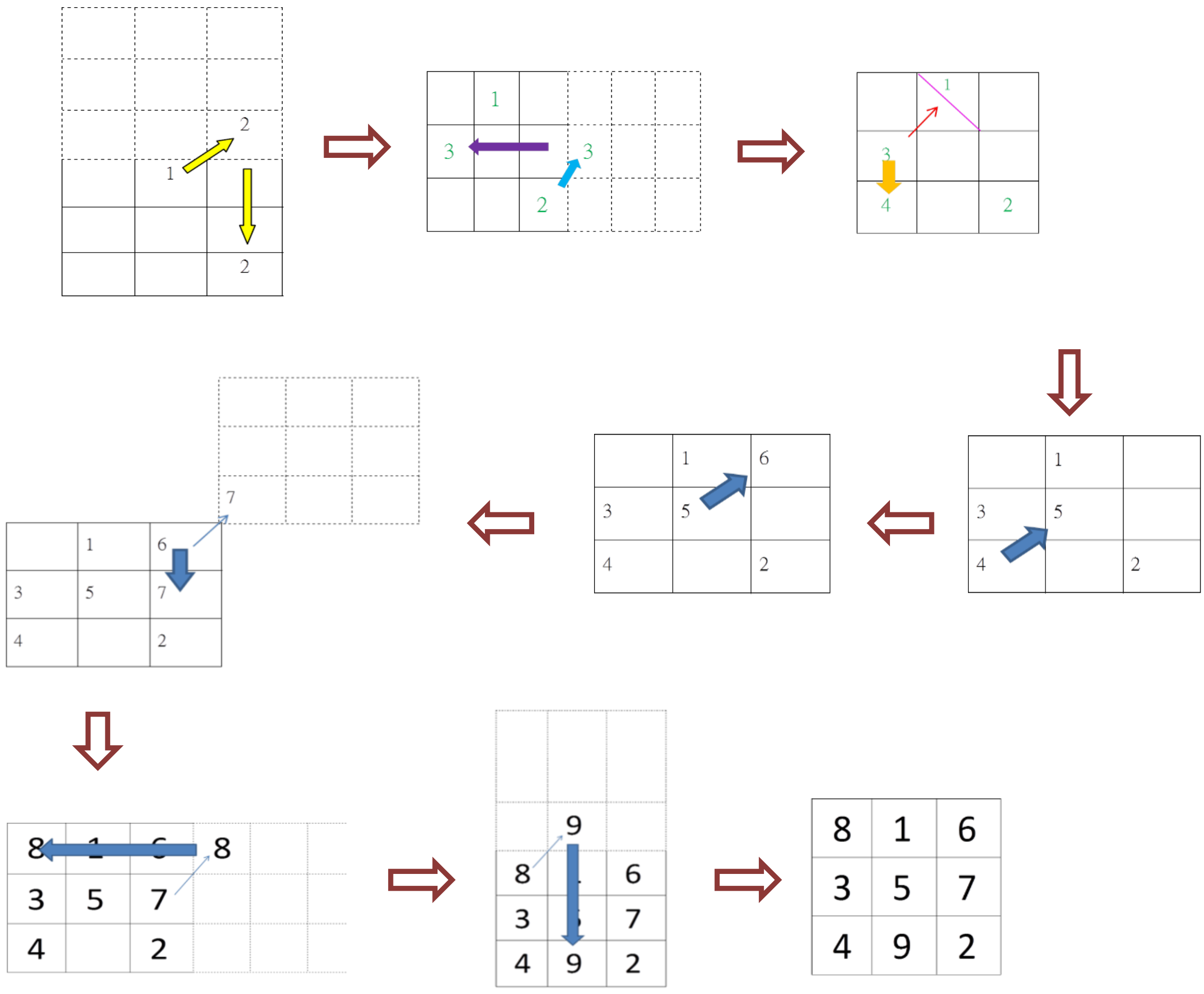
以此方法填製換方有以下規則：

（1）把 1 放置於第一行的中央。

（2）把數字依照順序往右上方填。

（3）當右上方的方格出界時，則從另一邊的方格進入。上方出界由下方入、左方出借則由右方入，以此類推。

（4）若右上方已有數字占住方格，一律填入其正下方的方格。（如圖九）



圖九 資料來源：自製繪圖

（四）4M 階幻方的構造法

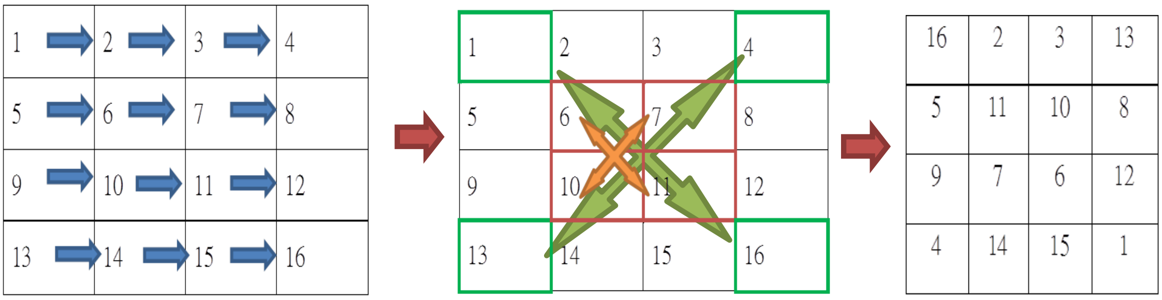
1.對調法

步驟如下：

（1）先將數字按順序排列。

（2）把斜的位置畫一條線，使其形成對角線。

（3）將中間有對角線通過的數字對調，對角的數字對調。（參照圖十）



圖十 資料來源：自製繪圖

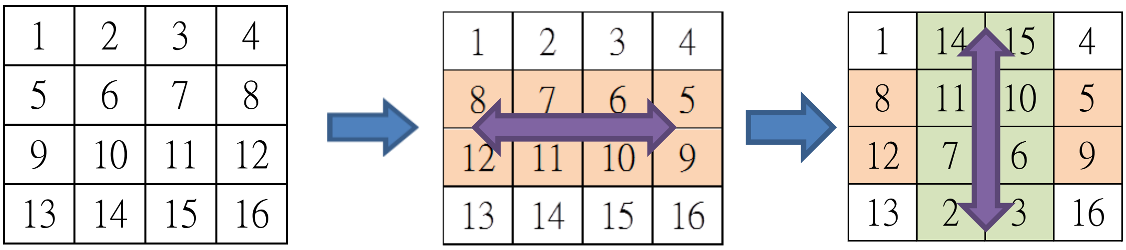
2.雙向翻轉法

步驟如下：

（1） 將數字由左而右、由上而下順序填入方陣。

（2） 將中央部分一半階數的列，所有數字左右翻轉。例如：4 階就找兩列、8 階就找四列。

（3） 將中央部分一半階數的行，所有數字上下翻轉。（參照圖十一）



圖十一資料來源：自製繪圖

（五）4M+2 階幻方解法

◎加邊法

步驟如下：

1. 以 6 階為例子，先排出 4 階的幻方。
2. 將圖中每一個數都加上 8M+2。
3. 在外圍加上一圈格子。使其形成六階幻方。
4. 把 1.2.3…8M+2 和 16M2+8M+3 、16M2+8M+4…(4M+2)2 這些數字排在外圈格子內(要使對角相對的兩個數以及頭尾相對的兩個數的和等於 16M(M+1)+5)。(如圖十二)此處 M=1 代入，所以相對兩數之和就要等於 37，例如：1+36=37、9+28=37。

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

11	25	24	14
22	16	17	19
18	20	21	15
23	13	12	26

	11	25	24	14	
	22	16	17	19	
	18	20	21	15	
	23	13	12	26	

1	9	34	33	32	2
6	11	25	24	14	31
10	22	16	17	19	27
30	18	20	21	15	7
29	23	13	12	26	8
35	28	3	4	5	36

圖十二 資料來源：自製繪圖

三、 研究結果

（一）幻方的規律

1.一行、一列或一對角線上任何兩個與中心數字等距離的數字和皆相同（不論直、斜、橫均可）。例如五階幻方中，與中央數字 13 距離相等的（18，8）、（24，2）、（17，9）、（12，24）…等的數字和皆為 26。

2.上述的數字其和與幻方最大、最小兩數的和相等。

3.每一個幻方最前面、中間與最後面那一列與中央等距的數字其和皆相等。

4.上述的數字其和呈等差。（如圖十三）

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

28+30=19+39=48+10=58

相差 8

45+5=36+14=34+16=50

相差 8

20+22=31+11=40+2=4

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

17+15=24+8=32

相差 6

11+9=18+2=20

相差 6

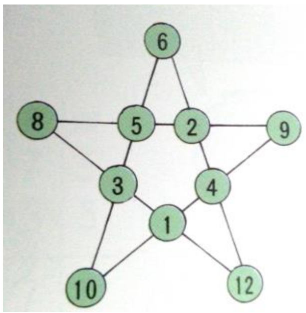
20+6=22+4=26

圖十三 資料來源：自製繪圖

（二）特殊形態的幻方

1. 在研究星幻和多邊形幻方中，雖然沒有比較明確的結果，但也有一些較初步的結果。星幻部分發現星幻的數字無法像幻方一樣可是連續數字，很多都是由不連續的數字組成，所以也試著找出規律。至於多邊形換方則是在尋找八邊形幻方的解的過程中，發現所做出來的圖形過於繁雜，所以現在正朝五邊形幻方的解來研究。
2. 星幻的規律

在星形幻方中，同一條線上相對的兩個數字和成等差，例如圖中的五角星形幻方，同一條邊上相對的兩個數字和依序為：10+6=16、8+9=17、12+6=18、10+9=19、8+12＝20，公差為 1。（如圖十四）



圖十四資料來源：引註資料（六）

（三）嘗試尋找幻方的解法

參考以上那些規律，我們嘗試去找出幻方的解法。一開始先利用第一、二個規律來找出奇階幻方的解法，在找尋的過程中，我們發現一個問題—五階方陣共有 2202441792 個，但若根據第一、二個規律加以排列組合，最多也只有幾千種排法，所以第一、二個規律在某些幻方中並不適用。但因為我們的目的並非要找出幻方的所有解，而是要找出幻方的部分解。所以以上規律依舊可以應用在找幻方的解中。

參●結論和未來發展

未來會持續朝這三方面繼續研究：

（一）、找出應用這些規律性來解出幻方的方法—從現有的規律中找出一套規則（直接敘述或者用遞迴關係式來表示），藉此訂出幻方的新方法。除此之外，上述找出的那些幻方規則，我們想要嘗試用數學歸納法來證明它。

（二）、深入去研究星幻和多邊形幻方的性質—除了現有的兩種型態，我們打算找其他階數的多邊形幻方和其他的星形研究其數字的排列及數字間大小的關聯性。

（三）、如果還有時間，幻方特有的性質讓我們打算將它結合其他領域的東西--

星座、化學結構（將星星和原子的位置填上數字）和矩陣（如圖十五），星座和化學結構的樣子和星形幻方很像且古代占星術和化學結構的排列都和數學有關，而矩陣則是樣子和正方形幻方很像，我們打算去找出幻方和這些東西的關聯性 。

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

圖十五 資料來源：引註資料（二）

肆●引註資料

（一)、小論文<幻方之謎>
（二)、zh.wikipedia.org/zh-tw/維基百科-幻方
（三）http://home.educities.edu.tw/listeve/彥碩的家
（四)、 http://oddest.nc.hcc.edu.tw/mqmain.htm 尤怪魔宮
（五、 李杭強〈趣味數學幻方〉，2002，香港天馬圖書有限公司
（六)、 李毓佩〈數的暢想曲〉，2001，國際村文書圖庫有限公司
（七)、 談祥柏〈有趣的數學魔方陣〉，2004，專業文化出版社