Réassurance de la provision d’égalisation des régimes de prévoyance collective

Mémoire d’actuariat

2013

Towers Watson
Jonathan Chignac (Paris)

Synthèse

Aujourd’hui, bien que la réassurance soit une activité encore méconnue du grand public, de plus en plus de sociétés (hors organismes assureurs) s’y intéressent. Le principal aspect sur lequel ces sociétés ont une relative visibilité de la réassurance est celui de leurs contrats de prévoyance collective. Alors que jusqu’à présent ce sont les organismes assureurs qui traitent directement avec les réassureurs pour mettre en place leur couverture de réassurance de manière totalement indépendante de leurs clients, ces sociétés souhaitent de plus en plus traiter avec les réassureurs. Elles cherchent à avoir, en plus d’un droit de regard, un droit de décision sur le(s) programme(s) de réassurance appliqués à leurs régimes et à pouvoir bénéficier de la réassurance, qui, à l’heure actuelle, n’est pas redistribuée au titre de la participation aux bénéfices par exemple.

Ce mémoire constitue donc une approche réalisée pour une société commerciale qui souhaitait évaluer l’apport d’un programme de réassurance mis en place pour protéger la provision d’égalisation de son régime de prévoyance collective, car celle-ci présente des avantages fiscaux pour l’organisme assureur et est un outil de négociation des tarifs et/ou des garanties pour la société étudiée.

Nous avons pour cela simulé l’évolution du régime de prévoyance collective à partir de la population des salariés sur un horizon de 25 ans par simulation stochastique sur les risques décès, incapacité et invalidité. Cela nous a permis d’étudier l’impact de différents types de programmes de réassurance sur la comptabilité du régime, mais aussi de voir évoluer leurs coûts afin d’identifier un éventuel régime optimal.

Les traités testés ont été des programmes de réassurance non proportionnelle en Excédent de sinistre par tête (XS) et en Excédent de perte (Stop Loss). Les simulations ont mis en évidence que la réassurance Stop Loss n’est pas appropriée à la protection de la provision d’égalisation car la volatilité de la part de la provision consommée chaque année est beaucoup trop importante et conduit à un tarif de réassurance commercialement non viable. En revanche, les programmes en Excédent de sinistre par tête permettent de mieux gérer la sinistralité du portefeuille et, une fois la population la plus à risque identifiée, d’obtenir une protection efficace de la provision d’égalisation.

Mots clés : provision d’égalisation, réassurance non proportionnelle, tarification, provisionnement, burning cost, méthode de Galton

Abstract

Today, although the reinsurance market is an unknown activity for most of people, more and more companies (except insurers) are interested in. Each company has a certain visibility of the reinsurance thanks to its benefit plan. While far the insurers deal directly with the reinsurers to set reinsurance covers independently from their clients, but these companies are interested increasingly in dealing with the reinsurers. They seek to have, in addition of a right of inspection, a right to make decision about the reinsurance programs applied on their benefit plans and to retire profits from the reinsurance which is not currently redistributed through the profit sharing for example.

So, this report is an approach realized for a commercial company which would evaluate the contribution of a reinsurance program set to protect the equalization provision of its benefit plan because this provision has tax advantages for the insurer and is a way to negotiate the price and/or the cover for the studied company.

We simulated the evolution of the benefit plan based on the population of employees projected on 25 years with stochastic simulations of the death, the incapacity and the invalidity risks. This allows us to study the impact of different reinsurance programs on the compatibility of the plan, but also to see the evolution of their costs in order to identify a potential optimal program.

The tested treaties were non-proportional reinsurance programs as Excess of loss (XS) and Stop Loss. The simulation pointed out the Stop Loss reinsurance is not appropriated for the protection of the equalization provision because of the too important volatility in the consumption of the provision each year what conducts to an excessive pricing. However, the Excess of loss programs improve the management of the claims of the portfolio and, as soon as the main risky population is identified, it leads to an efficient protection of the equalization provision.

Key words: equalization provision, non-proportional reinsurance, pricing, reserving, burning cost, Galton’s method

Remerciements

Je remercie Madame Rosa MAGALHAES pour m'avoir accompagné tout au long de mon apprentissage au sein du cabinet Towers Watson, pour m'avoir permis de participer à de nombreux projets intéressants, pour m'avoir fait partager ses connaissances en matière de prévoyance et pour ses conseils avisés qui ont aidés à la réalisation de ce mémoire.

J'associe à ces remerciements Monsieur Sylvain ROUSSEAU, Monsieur Joël ROYERS, Monsieur David DUBOIS et Madame Faïza LEFEVRE pour leur contribution à la réalisation de ce projet ainsi que toutes les personnes qui ont concouru à la rédaction de ces pages.

Je tiens, de plus, à remercier Madame MAUME-DESCHAMPS pour ses conseils et son précieux suivi tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Enfin, je remercie tout particulièrement ma Mère et ma Grand-Mère qui m'ont toujours soutenu et encouragé ainsi que mes amis et mes proches sans qui rien de tout cela n'aurait été possible.

Table des matières

Introduction

La notion de risque est très importante en protection sociale car elle couvre une variété importante de risques aux caractéristiques très différentes. On distinguera notamment la prévoyance lourde regroupant les risques décès, incapacité et invalidité qui sont des risques sévères mais rares et les frais médicaux qui sont caractérisés par des coûts moindres mais une fréquence plus élevée que les premiers. Les contrats de prévoyance collective revêtent un aspect important dans la protection des salariés d'une compagnie et sont souvent assimilés à une forme de rémunération complémentaire.

Dans ce mémoire nous nous concentrons tout particulièrement sur l'ensemble des risques de la prévoyance dite lourde.

La prévoyance collective est caractérisée par une volonté de mutualisation des risques au sein même de la population de salariés assurés par une compagnie. On va chercher à équilibrer le taux de cotisation et les prestations versées qui, dans le cas des rentes, peuvent être servies sur de nombreuses années, afin d'assurer la viabilité du régime mis en place.

Afin que l'organisme assureur puisse faire face à ses engagements il doit constituer des provisions règlementaires auxquelles il peut ajouter, afin de parer à d'éventuels pics de sinistralité, une provision dite d'égalisation. Cette dernière présente de nombreux avantages. D'un point de vue fiscal elle n'est pas soumise à l'impôt sur les sociétés pour l'organisme assureur et du point de vue de la compagnie assurée elle est souvent un moyen de renégocier les prix et/ou les garanties du régime lorsqu'elle est élevée. Elle constitue donc un atout à protéger pour les deux parties.

Dans cette optique, ce mémoire s'intéresse à étudier l'impact de la mise en place de programmes de réassurance dont le but serait de protéger spécifiquement la provision d'égalisation et non pas le résultat annuel du régime de prévoyance collective dans sa globalité.

Ce mémoire se divise en 6 parties :

- La première partie vise à replacer le contexte de la prévoyance collective d'un point de vue règlementaire et d'un point de vue commercial par l'analyse de certains résultats de l'enquête de marché prévoyance-santé Towers Watson 2013,
- La seconde partie expose les règles comptables qui régissent les comptes de résultats annuels des régimes de prévoyance collective avec une participation aux bénéfices,
- La troisième partie pose toutes les bases règlementaires et actuarielles en matière de tarification et de provisionnement des risques de prévoyance lourde,
- La quatrième partie introduit la réassurance proportionnelle et non proportionnelle ainsi que les méthodes de tarification utilisées,
- La cinquième partie présente les données du portefeuille étudié ainsi que les raisons qui ont mené au mandat d'études dont fait l'objet le présent mémoire,
- La sixième partie donne le cœur de fonctionnement de la simulation réalisée, qui est basée sur les notions des cinq parties précédentes, et présente l'impact de la réassurance sur la protection de la provision d'égalisation.

1 Les régimes de prévoyance collective

La prévoyance collective permet d'assurer la sécurité financière du salarié ou de ses ayants-droit indépendamment de l'état de santé individuel de l’assuré. On observe deux niveaux dans la couverture de prévoyance. Le premier intervenant est la Sécurité Sociale mais celle-ci ne prévoit qu'une couverture partielle des risques. Aussi les lois et les textes conventionnels (accords nationaux interprofessionnels, accords de branches, conventions collectives,...) imposent aux employeurs de compléter les garanties de base de la Sécurité Sociale par des régimes collectifs de protection sociale. Au cours de mon alternance, j’ai participé à la réalisation de l’enquête prévoyance-santé Towers Watson 2013. J’ai notamment développé un outil qui permet de positionner les niveaux de garanties des régimes de prévoyance et de santé des entreprises afin de pouvoir évaluer au mieux comment les optimiser. Cette partie reprend les principaux résultats, en prévoyance, de cette enquête.

1.1 La prévoyance, késako ?

La prévoyance est définie par la Loi Evin (loi n°89-1009 du 31 décembre 1989). La prévoyance concerne "*les opérations ayant pour objet la prévention et la couverture du risque décès, des risques portant atteinte à l'intégrité physique de la personne ou liés à la maternité ou des risques d'incapacité de travail ou d'invalidité ou du risque de chômage*". Ainsi, les garanties en prévoyance permettent de faciliter l'accès aux soins médicaux, de couvrir le maintien, en partie ou en totalité, du salaire en cas d'arrêt de travail mais aussi de garantir un capital ou des rentes aux ayants droit d'un assuré en cas de décès de ce dernier.

La prévoyance lourde [9] concerne spécifiquement les risques décès, incapacité et invalidité.

1.2 Le système de base obligatoire

La prévoyance fait partie de l'organisation générale de la protection sociale [19]. Le système de Sécurité Sociale a été créé par les ordonnances du 4 et du 19 octobre 1945. Le droit à la Sécurité Sociale est inscrit dans les préambules des constitutions de 1946 et 1958. La Sécurité Sociale recouvre l'ensemble des régimes légaux obligatoires qui couvrent les français sur la grande majorité des risques en vie : maladie, maternité, invalidité, incapacité, décès, accident du travail...

Les prestations versées par la Sécurité Sociale sont de deux types :

- **les prestations en nature :** qui représentent le remboursement d'une partie des dépenses de soins,
- **les prestations en espèces :** qui servent à compenser, en partie, des pertes de revenu.

Dans tous les cas, ces prestations sont relativement faibles.

1.3 Les régimes complémentaires

Les régimes complémentaires [9] peuvent être négociés au niveau d'une entreprise, d'un groupe économique ou d'un secteur professionnel. Ces régimes complémentaires peuvent revêtir un caractère obligatoire ou être librement négociés au sein des entreprises. Leurs prestations s'ajoutent à celles du régime de base de la Sécurité Sociale.

1.4 Les intervenants au contrat en prévoyance collective

Le contrat de prévoyance collective est défini par l'article L.141-1 du code des assurances comme étant un "*contrat souscrit par une personne morale ou un chef d'entreprise en vue de l'adhésion d'un* *ensemble de personnes répondant à des conditions définies au contrat, pour la couverture des risques dépendant de la durée de vie humaine, des risques portant atteinte à l'intégrité physique de la personne ou liés à la maternité, des risques d'incapacité de travail ou d'invalidité ou du risque chômage. Les adhérents doivent avoir un lien de même nature avec le souscripteur".* Dès lors, plusieurs parties interviennent dans la vie du contrat.

1.5 Une relation triangulaire

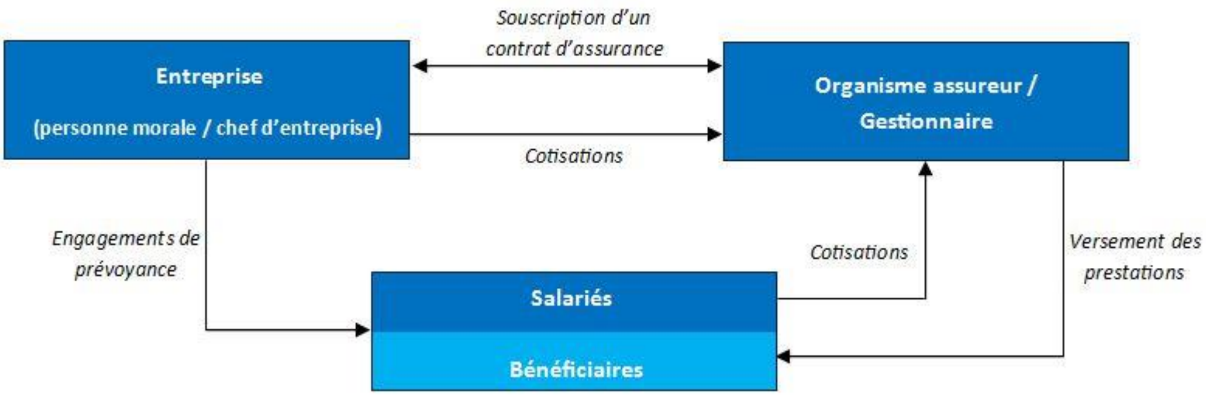


Figure 1. Relation tripartite d'un contrat de prévoyance collective

Un régime de prévoyance s'inscrit dans une relation avec trois intervenants [9] :

- l'entreprise en tant que personne morale (ou par l'intermédiaire de son dirigeant) s'engage auprès de ses salariés et souscrit, à ce titre, un contrat d'assurance,
- l'organisme assureur couvre le risque, en contrepartie de l'encaissement des cotisations,
- les salariés sont les bénéficiaires. Ils peuvent être amenés à payer une partie de la cotisation auprès de l'organisme assureur. En ce qui concerne le risque décès, les bénéficiaires peuvent être le conjoint, les enfants du salarié, ou toute autre personne étant citée par défaut dans le contrat. Le salarié peut aussi effectuer une désignation particulière du ou des bénéficiaires dans laquelle il devra préciser le lien de parenté qui les lie.

1.6 Les prestataires d'assurances

Trois catégories de professionnels sont actives sur le marché de la prévoyance collective : les sociétés d'assurances régies par le code des assurances, les mutuelles régies par le code de la mutualité et les institutions de prévoyance régies par le code de la Sécurité Sociale. Chacun de ces organismes est contrôlé par l'ACPR (Autorité de Contrôle Prudentiel et de Résolution). Ils sont soumis à des règles spécifiques liées à leur statut et à des obligations règlementaires strictes en matière de provisionnement et de solvabilité. La répartition des contrats de prévoyance collective auprès de ces types d'organismes se présente comme suit :

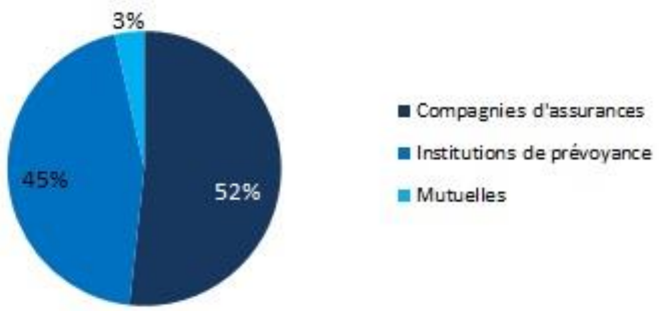


Figure 2. Types d'organismes d'assurances
(*source : enquête prévoyance-santé Towers Watson 2013*)

1.6.1 Les sociétés d'assurances régies par le code des assurances

Les prestataires d'assurances régis par le code des assurances peuvent se présenter sous différentes formes juridiques : sociétés anonymes, sociétés d'assurances mutuelles ou sociétés mutuelles d'assurances. Ce sont les seuls acteurs à but lucratif du marché de la prévoyance [9].

Ces sociétés sont soumises au contrôle du ministère des finances et doivent respecter des règles strictes en matière de solvabilité (Solvabilité II).

1.6.2 Les institutions de prévoyance

Les institutions de prévoyance [18] sont régies par le code de la Sécurité Sociale. Ce sont des organismes à but non lucratif gérés de façon paritaire, c'est-à-dire, administrés en parts égales par des représentants des salariés et des représentants des employeurs.

1.6.3 Les mutuelles

Les mutuelles sont régies par le code de la mutualité. Elles y sont définies par l'article L.111-1 comme étant des *"groupements à but non lucratif qui, essentiellement au moyen des cotisations de leurs membres, se proposent de mener, dans l'intérêt de ceux-ci ou de leur famille, une action de Prévoyance, de solidarité et d'entraide [...]".*

1.7 Le gestionnaire du contrat

Il peut y avoir un gestionnaire entre la société qui a souscrit son contrat et l'organisme prestataire d'assurances. Dès lors, le gestionnaire s'occupe de la gestion des cotisations et du paiement des sinistres et est le seul interlocuteur de l'entreprise, exception faite s'il y a déjà un courtier en place. On observe la répartition suivante dans la gestion des contrats de prévoyance collective :

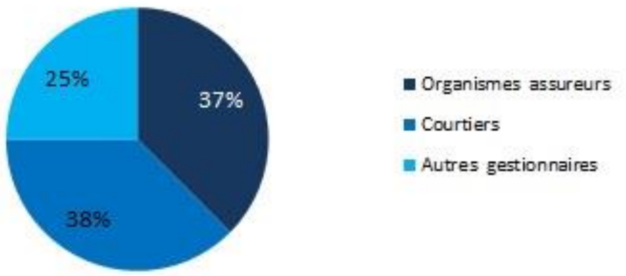


Figure 3. Types de gestionnaires des contrats de prévoyance collective
(*source : enquête prévoyance-santé Towers Watson 2013*)

Les gestionnaires peuvent être soit :

- l'organisme assureur (en l'absence de délégataire de gestion),
- le courtier,
- un gestionnaire spécialisé dont la gestion constitue le cœur de métier.

1.8 L'assuré

L'assuré est le salarié, il est le porteur de risques. Les garanties de prévoyance doivent être appliquées à l'ensemble des salariés de l'entreprise, ou à une ou plusieurs catégories d'entre eux, définies à partir de critères dits objectifs, généraux et impersonnels (voir partie « Le décret du 9 Janvier 2012 »), sans aucune forme de discrimination sur le revenu, l'âge ou l'état de santé du salarié.

Il est à noter que la mutualisation des risques entre tous les salariés permet de diminuer le coût de la couverture des risques.

1.9 Les modes de mise en place

Il existe 3 moyens de mise en place d'un régime de prévoyance collective qui respectent le formalisme hiérarchique suivant :

- l'accord collectif au niveau de l'entreprise ou de la branche (conventions collectives)
- le référendum
- la décision unilatérale

En cas de modification du contrat, il faut mettre en place le nouveau régime via un formalisme au moins équivalent au mode de mise en place de l'ancien.

Dans tous les cas (mise en place ou modification d'un régime de prévoyance collective), l'employeur doit préalablement en informer/consulter le comité d'entreprise et remettre à ses salariés la liste exhaustive et précise des garanties au travers des notices d'information qui précisent les conditions particulières et les conditions générales.

1.9.1 La convention collective

La convention est conclue entre les organisations patronales et syndicales de salariés. Il y figure l'ensemble des relations entre les employeurs et les employés. Ainsi, elle décrit l'ensemble des conditions d'emploi et l'ensemble des garanties sociales.

La convention collective peut être négociée soit au niveau national (convention collective nationale), soit au niveau régional.

Elle peut traiter de la mise en place d'un régime de prévoyance conventionnel qui est alors considéré comme étant le régime de prévoyance minimum que doivent souscrire les entreprises relevant de ladite convention collective. Si un régime est précisé dans la convention, il décrira soit les garanties minimales, soit les taux de cotisation (avec le partage de la cotisation employeur et salarié), soit les deux. De plus, un organisme assureur peut être désigné ou recommandé.

La mise en place de la convention collective nationale suit plusieurs étapes :

- **1ère étape :** signature de la convention entre les organisations patronales et syndicales de salariés,

- **2ème étape :** application de la convention collective aux seules entreprises qui sont adhérentes aux organisations patronales signataires,
- **3ème étape :** extension de la convention collective nationale par arrêté ministériel d'extension,
- **4ème étape :** application de la convention collective nationale à l'ensemble des entreprises de la branche. Il y a alors obligation pour les entreprises relevant de la convention collective nationale de mettre en place le régime de prévoyance conventionnel.

Dès lors, deux cas de figure se présentent :

- **L'entreprise n'a pas de couverture prévoyance :** elle a alors obligation de souscrire au régime conventionnel et, si un ou plusieurs assureurs sont désignés dans la convention, elle doit souscrire son contrat auprès de ces assureurs.
- **L'entreprise possède déjà une couverture prévoyance :** si les garanties de son contrat actuel sont supérieures aux garanties conventionnelles, l'entreprise peut conserver son contrat chez son assureur actuel. Par contre, si les garanties sont inférieures aux garanties conventionnelles, elle doit mettre à niveau son contrat. Au-delà d'un certain délai, elle devra souscrire chez l'assureur désigné. Si la convention collective nationale comporte une clause de désignation avec souscription obligatoire, l'entreprise aura l'obligation de souscrire son contrat auprès de l'assureur désigné.

Néanmoins, la décision n° 2013−672 DC du 13 juin 2013 du Conseil Constitutionnel vient remettre en cause la légitimité des clauses de désignation puisqu'elle déclare que les dispositions de l'article L.912-1 du code de la Sécurité Sociale qui permettent de lier une entreprise à un assureur désigné par la branche et d'imposer aux entreprises déjà liées à un organisme assureur la migration vers un assureur nouvellement désigné portent une atteinte disproportionnée à la liberté contractuelle et la liberté d'entreprendre au regard de l'objectif de mutualisation des risques. Ainsi, les clauses de désignation ont été déclarées inconstitutionnelles.

Il est à noter que certaines sociétés peuvent ne pas relever d'une convention collective (en raison de leur activité) et choisir de faire une application arbitraire de la convention collective de leur choix.

1.9.2 L'accord collectif

L'accord collectif est conclu entre l'employeur et les délégués syndicaux ou dans certains cas les délégués du personnel ou les représentants du comité d'entreprise. L'accord collectif se conclut au niveau de l'entreprise.

1.9.3 Le référendum

Le référendum est caractérisé par le vote des salariés. Le processus de mise en place suit les étapes suivantes :

- **1ère étape :** le projet est proposé par l'employeur et mis à disposition des salariés,
- **2ème étape :** vote de l'ensemble des salariés afin d'adopter ou non le projet. Le projet est adopté à la majorité simple (des inscrits),
- **3ème étape :** application du projet à l'ensemble des salariés.

1.9.4 Décision unilatérale

Dans le cadre d'une décision unilatérale de la part de l'employeur d'instaurer un régime de prévoyance, les salariés étant déjà présents avant la mise en place du régime par décision unilatérale de l'employeur ne sont pas obligés d'y souscrire s'il y a une part salariale dans la cotisation. En revanche, tous les nouveaux employés sont obligés d'y adhérer.

1.10 Les types de garanties en prévoyance lourde

Classiquement les garanties de prévoyance couvrent les risques décès, incapacité, invalidité, dépendance et frais de santé. La prévoyance dite lourde ne concerne que le décès, l'incapacité et l'invalidité.

1.10.1 Le décès

La couverture du risque décès a pour objectif de garantir aux ayants droit de l'assuré décédé une somme d'argent sous forme de capital ou de rente(s) destinée à compenser la perte de revenu que l'assuré rapportait au foyer. Ce type de couverture est une opération d'assurance vie correspondant à la Branche 20 [9].

1.10.1.1 Les garanties de la Sécurité Sociale

Dans le régime général de base de la Sécurité Sociale [19], le capital décès correspond au versement :

- d'une indemnité sous forme de capital correspondant à 3 mois du salaire de l'assuré décédé dans la limite de 3 PMSS (Plafond Mensuel de le Sécurité Sociale 2013 : 3 * 3 086€ = 9 258€),
- de rente(s) de conjoint et/ou d'orphelin dans le cas d'un décès suite à un accident de travail ou une maladie professionnelle, sous conditions.

L'assuré n'est couvert que s'il était en activité, ce qui signifie qu'il doit soit exercer une activité professionnelle, soit percevoir des indemnités au titre de l'incapacité ou de l'invalidité.

En cas de décès pendant la période de retraite, le capital décès prend la forme d'une pension de réversion.

1.10.1.2 Les garanties décès complémentaires

Le régime complémentaire d'entreprise permet de garantir des prestations au-delà des limites et des montants fixés par le régime de base de la Sécurité Sociale. Il peut prendre plusieurs formes pouvant être combinées.

La garantie décès peut faire l'objet d'un versement d'un capital dont la base de calcul est à la fois le montant du salaire annuel brut (SAB) de l'assuré et sa situation de famille (célibataire, marié(e), enfant(s) à charge,...).

Les membres de la famille de l'assuré sont les bénéficiaires désignés dans les contrats de prévoyance collective. La clause des contrats spécifie par défaut le conjoint non séparé judiciairement, le partenaire pacsé ou le concubin, les enfants, les ascendants ou les héritiers de l'assuré. Il est néanmoins possible de désigner un bénéficiaire différent pour tout ou partie du capital par notification écrite.

Les garanties classiques pour un(e) assuré(e) célibataire sans enfant à charge sont les suivantes :

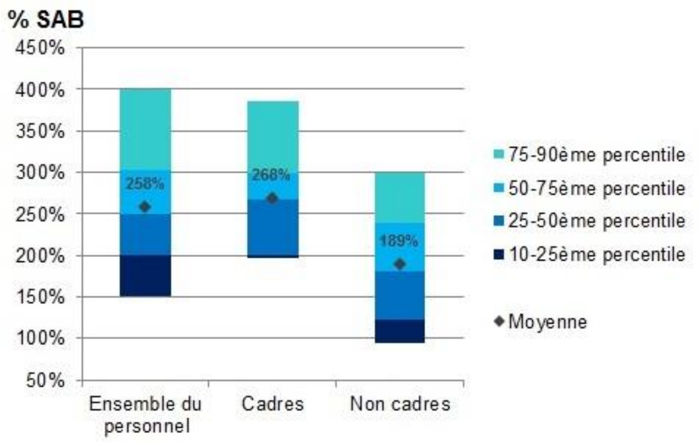


Figure 4. Capital décès d'un assuré célibataire sans enfant à charge
(*source : enquête prévoyance-santé Towers Watson 2013*)

Dans le cas où l'assuré est marié sans enfant à charge, on observe une augmentation de 25,3% en moyenne du capital garanti sur les différents collèges :

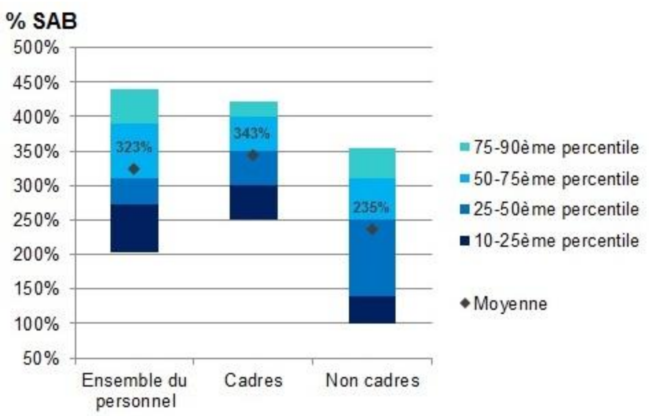


Figure 5. Capital décès d'un assuré marié sans enfant à charge
(*source : enquête prévoyance-santé Towers Watson 2013*)

Le capital est majoré pour chaque enfant à charge, dans la limite d'un montant fixé contractuellement, de la façon suivante :

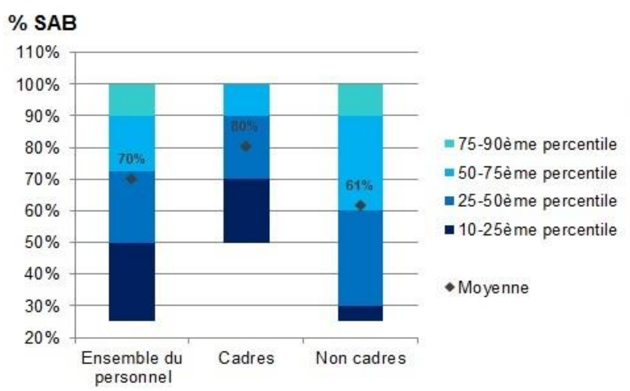


Figure 6. Majoration du capital décès par enfant à charge
(*source : enquête prévoyance-santé Towers Watson 2013*)

La garantie décès peut aussi prévoir une rente de conjoint permettant au conjoint de percevoir un revenu de façon temporaire ou viagère. Celle-ci peut être exprimée en pourcentage du SAB ou en pourcentage des points de retraite AGIRC/ARRCO. Les niveaux de cette rente, lorsqu'elle est exprimée en pourcentage du SAB, s'échelonnent de la manière suivante :

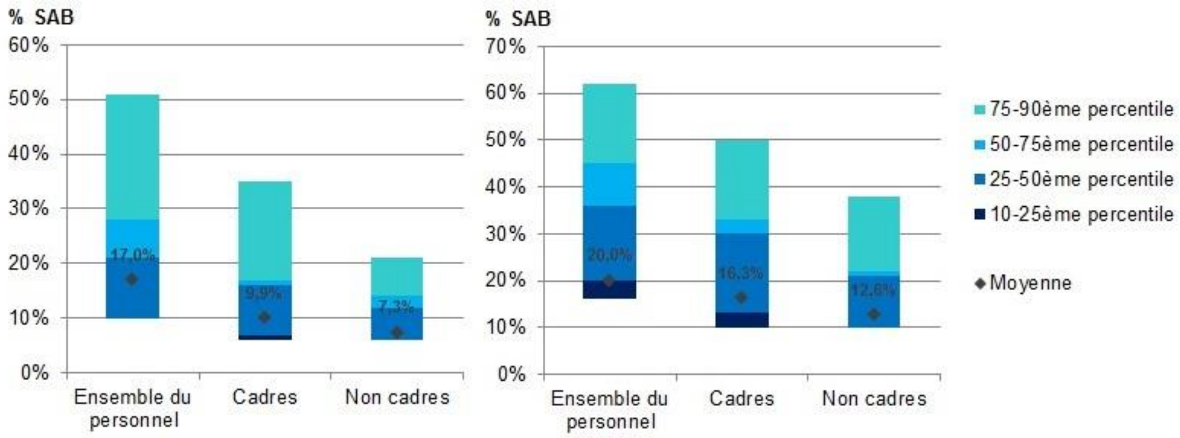


Figure 7. Rente de conjoint temporaire (à gauche) et viagère (à droite)
(*source : enquête prévoyance-santé Towers Watson 2013*)

Les rentes de conjoint viagères sont supérieures aux rentes de conjoint temporaires avec une majoration globale, quel que soit le collège assuré, d'environ 10% du SAB.

Il peut aussi y avoir une rente éducation qui a pour but d'accompagner les enfants à charge durant l'intégralité de leur scolarité. L'âge maximum au-delà duquel ce type de rente n'est plus versé est de 26 ans sous réserve de la poursuite d'études. Cette garantie, dépendant de l'âge des enfants, se présente selon les niveaux suivants :

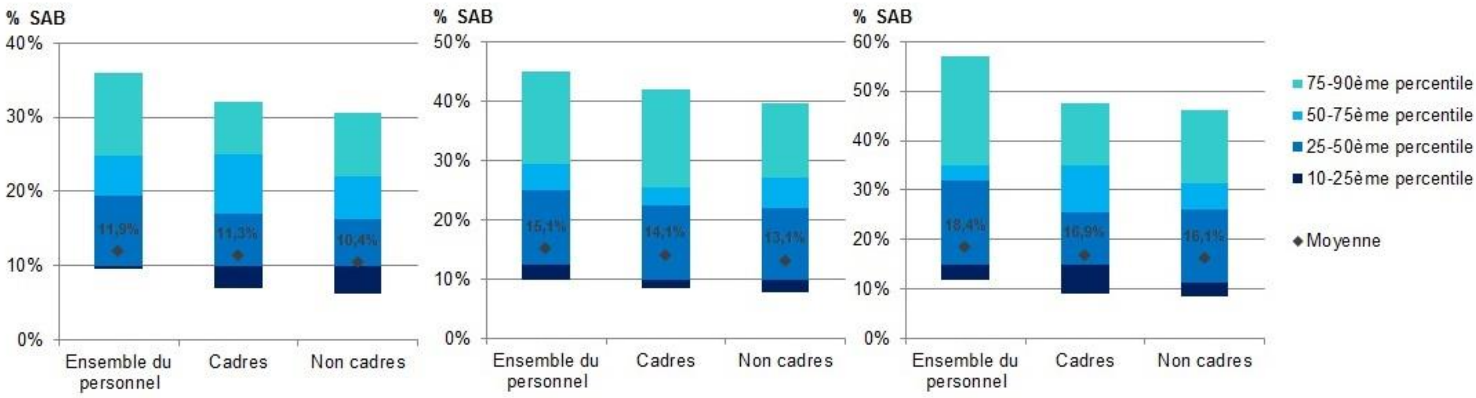


Figure 8. Rente éducation jusqu'au 12ème anniversaire (à gauche), du 12ème au 18ème anniversaire (au milieu), du 18ème au 26ème anniversaire (à droite)
(*source : enquête prévoyance-santé Towers Watson 2013*)

Les rentes augmentent avec l'âge de l'enfant puisqu'il est logiquement considéré que les frais nécessaires à la poursuite des études augmentent avec leur niveau.

1.10.2 L'incapacité

L'incapacité est une incapacité physique d'exercer une activité professionnelle. Elle doit être diagnostiquée et validée par un médecin et faire l'objet d'un arrêt de travail. Cet état d'incapacité dure au maximum 3 ans. Durant ces 3 ans, le salarié aura soit repris le travail, soit aura été reconnu invalide par la Sécurité Sociale. Au-delà de ces 3 ans, le statut passe automatiquement de l'incapacité à l'invalidité.

1.10.2.1 Les garanties incapacité de la Sécurité Sociale

En cas d'arrêt de travail non professionnel, la Sécurité Sociale [19] verse après un délai de carence de 3 jours une indemnité journalière égale à 50% du salaire journalier de la tranche A du salaire. Le salaire journalier de base correspond à 1/90ème des 3 dernières payes échues et limitées au plafond annuel de la Sécurité Sociale. La limite fixée ici à la tranche A entraîne une perte de revenu pouvant se révéler être très importante.

En cas d'accidents du travail ou de maladies professionnelles il n'y a pas de délai de carence. Jusqu'au 28ème jour suivant l'arrêt de travail, l'indemnité journalière correspond à 60% du salaire journalier de base. A partir du 29ème jour, l'indemnité journalière est rehaussée à 80% du salaire journalier de base et si la durée d'arrêt de travail dépasse 3 mois l'indemnité journalière peut être revalorisée en cas d'augmentation générale des salaires.

1.10.2.2 Les garanties incapacité complémentaires

L'accord de mensualisation du 19 Juillet 1978 et l'accord national interprofessionnel du 11 Janvier 2008 améliorent la couverture des prestations de la Sécurité Sociale en matière d'arrêt de travail et obligent l'employeur à maintenir le salaire de ses employés justifiant d'au moins un an d'ancienneté.

Il y a un délai de carence de 7 jours, excepté pour les accidents du travail et les maladies professionnelles et sous réserve que la convention collective applicable ne prévoit pas que l'employeur doive compléter les indemnités journalières avant le 8ème jour.

Ainsi, à partir d'un an d'ancienneté, l'employeur doit maintenir le salaire de ses employés à 90% pendant les 30 premiers jours et à 66,66% pendant les 30 jours suivants [9]. Ces durées pendant lesquelles sont versées les indemnités sont augmentées de 10 jours par tranche de 5 ans d'ancienneté dans la limite de 90 jours.

Ancienneté	Maintien à 90%	Maintien à 66,66%
< 1 an	-	-
1 à 5 ans	30 jours	30 jours
6 à 10 ans	40 jours	40 jours
…	…	…
> 31 ans	90 jours	90 jours

Le maintien de salaire conventionnel légal est fixé par la convention collective nationale à laquelle l'entreprise est rattachée. Elle est généralement plus avantageuse que le minimum légal et précise la condition d'ancienneté, le montant et la durée de l'indemnisation. Les niveaux d'indemnisation en cas d'incapacité pour les contrats complémentaires se présentent de la manière suivante :

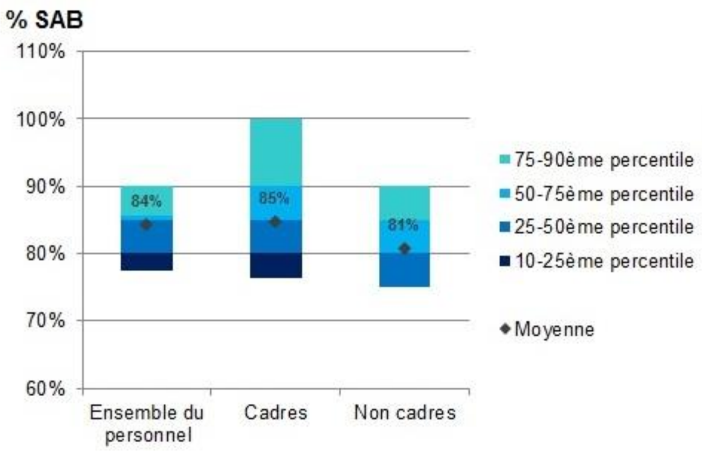


Figure 9. Indemnisation en cas d'incapacité
(*source : enquête prévoyance-santé Towers Watson 2013*)

Même si les régimes cadres présentent une meilleure couverture, les garanties sont toutes très proches les unes des autres et sont principalement comprises entre 80 et 90% du SAB. Certains contrats (plutôt anciens) octroient également une majoration de cette indemnité par enfant à charge. Mais au total, l'indemnité complémentaire est toujours limitée à 100% du salaire annuel net.

Le cumul du régime de base de la Sécurité Sociale et de la couverture assurée par l'entreprise forme le salaire de remplacement du salarié.

1.10.3 L'invalidité

L'invalidité correspond à une incapacité prolongée dont le statut est accordé dès que l'incapacité qui a été diagnostiquée s'est stabilisée. L'invalidité est segmentée en trois niveaux distincts ouvrant droits à des rentes dont les prestations augmentent avec le niveau d'invalidité. Les différentes catégories sont les suivantes :

- **1ère catégorie :** le salarié est capable d'exercer une activité rémunérée,
- **2ème catégorie :** le salarié est dans l'incapacité d'exercer une activité professionnelle,
- **3ème catégorie :** ce niveau correspond à l'invalidité absolue et définitive (IAD). L'invalide est incapable d'exercer une activité professionnelle et a besoin d'une tierce personne pour l'assister dans les actes ordinaires de la vie quotidienne.

1.10.3.1 Les garanties invalidité de la Sécurité Sociale

Selon la catégorie d'invalidité reconnue pour le salarié, la Sécurité Sociale [19] lui verse une rente d'invalidité. Pour une invalidité de 1ère catégorie la rente équivaut à 30% de la tranche A et pour des invalidités de 2ème et de 3ème catégorie la rente équivaut à 50% de la tranche A avec une majoration par tierce personne pour la 3ème catégorie.

Dans le cas d'un accident de travail ou d'une maladie professionnelle le montant de la rente est fonction du taux d'invalidité fixé selon la gravité de l'accident ou de la maladie. Si le taux d'incapacité permanente est inférieur à 10 %, un capital est versé à l'assuré. En revanche, si le taux d'incapacité permanente est supérieur ou égal à 10 %, l'indemnité est distribuée sous forme de rente viagère.

1.10.3.2 Les garanties invalidité complémentaires

La rente d'invalidité est exprimée en pourcentage du salaire brut annuel et vient compléter la prestation servie par la Sécurité Sociale [9]. Son montant peut aller, au maximum, jusqu'à 100% du salaire brut annuel (dans la limite de 100% du salaire net annuel) et elle est revalorisée et servie trimestriellement jusqu'à l'âge de la retraite. Les niveaux de la rente d'invalidité complémentaire selon la catégorie 1, 2 ou 3 sont échelonnés selon les graphes suivants :

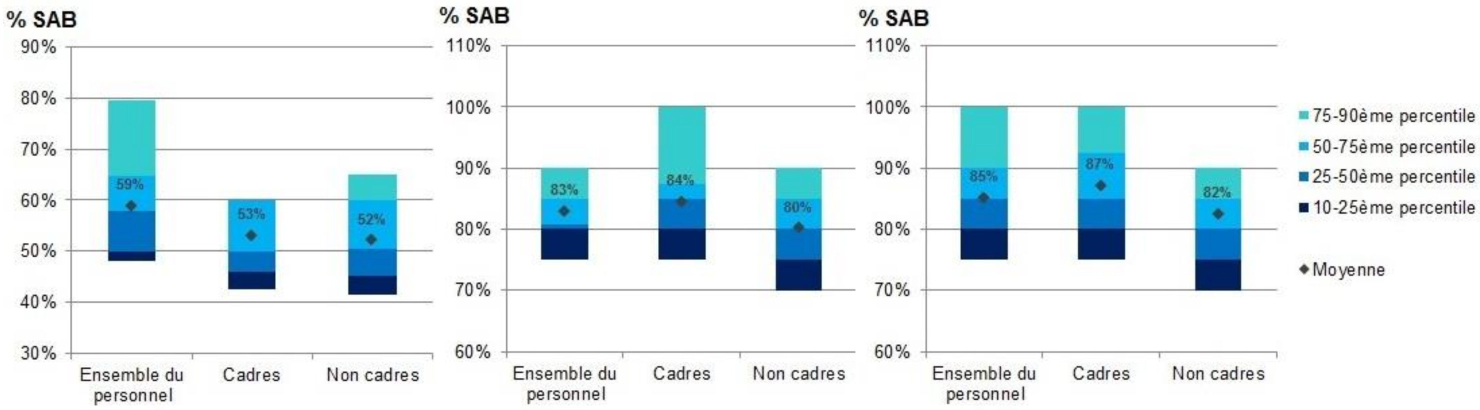


Figure 10. Indemnisation en cas d'invalidité de catégorie 1 (à gauche), de catégorie 2 (au milieu) et de catégorie 3 (à droite) (*source : enquête prévoyance-santé Towers Watson 2013*)

De manière logique, on observe que les pensions servies augmentent avec le niveau d'invalidité. On observe que pour la catégorie 1 les régimes ensemble du personnel sont globalement les plus avantageux. Pour les catégories 2 et 3, il y a une tendance à une harmonisation des couvertures quel que soit le collège assuré. Cette harmonisation est très nette pour la catégorie 3 entre les régimes cadres et ensemble du personnel.

1.11 Les bases règlementaires de la prévoyance lourde

De nombreux textes règlementent strictement le marché de la prévoyance collective [14]. Les prestataires d'assurances qui interviennent sur ce marché doivent se conformer à des règles en matière d'information et de solvabilité. Ces textes définissent aussi les standards que les entreprises doivent mettre en place pour leurs salariés et garantissent la protection des assurés.

1.11.1 Accord des cadres de 1947

La convention collective nationale du 14 Mars 1947 concerne le collège des salariés cadres et fixe l'obligation pour l'entreprise de cotiser à hauteur de 1,50% de la tranche A au minimum au titre, principalement, de la garantie décès.

1.11.2 La Loi de mensualisation du 19 Janvier 1978

Cette Loi vient généraliser l'accord de mensualisation du 10 Décembre 1977 qui a introduit l'obligation du maintien de salaire par l'employeur en cas de maladie ou d'accident du travail. Les conditions d'accès au complément de salaire ont été revues par l'accord national interprofessionnel du 11 Janvier 2008 qui ramène la condition d'ancienneté de 3 à 1 an et le délai de carence légal de 11 à 7 jours.

1.11.3 La Loi Evin

La Loi Evin du 31 Décembre 1989 vise à renforcer les garanties des assurés et définit les différents modes de mise en place des régimes de prévoyance collective (voir « Les modes de mise en place »).

Cette loi définit des exigences en matière de souscription et d'information des différents intervenants du contrat.

Ainsi, c'est cette loi qui précise que le comité d'entreprise doit être informé et consulté avant toute mise en place ou modification d'un régime. Le comité d'entreprise ou les délégués du personnel peuvent demander au chef d'entreprise un rapport détaillant les comptes établis par l'organisme assureur. Enfin, une notice d'information détaillée doit être remise à chaque salarié qui doit être informé, au préalable, par écrit de toute réduction de couverture.

De même, l'organisme assureur doit se conformer à certaines règles, en matière de souscription, qui l'obligent, si le régime est obligatoire, à considérer le groupe à assurer dans son intégralité. Il doit accepter ou refuser d'assurer le groupe entier sans exclure aucun membre. De plus, en matière d'information, il doit fournir un rapport annuel au chef d'entreprise sur les comptes du contrat ou de la convention les liant.

D'autre part, cette loi assure la protection des assurés principalement au travers de l'article 7 qui vise à assurer le maintien des garanties incapacité et invalidité et les autres prestations sous forme de rente (rente de conjoint, rente éducation,…) au minimum au niveau déjà atteint même s'il y a résiliation du contrat. Il n'y a pas d'obligation de revalorisation des rentes.

Enfin, La Loi Evin prévoit que tous les risques en cours doivent être couverts par des provisions.

1.11.4 La Loi du 8 Août 1994

La Loi du 8 Août 1994 contraint à fixer dans les contrats de prévoyance collective les modalités et la périodicité du réexamen des régimes. La périodicité, fixée contractuellement, ne peut pas excéder 5 années. De plus, en cas de changement d'organisme assureur, l'entreprise qui a souscrit le contrat est tenue de revaloriser les prestations sous forme de rente en cours de service lors de ce changement, ce qui vient compléter les dispositions prises par la Loi Evin en matière de maintien des garanties.

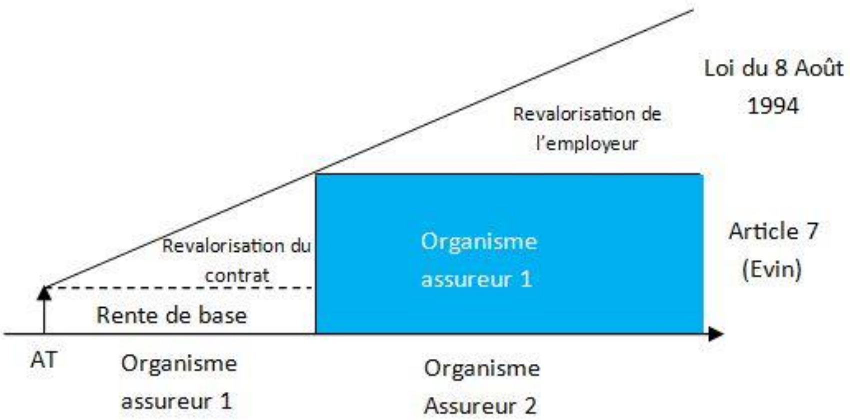


Figure 11. Principe de revalorisation des rentes suite à la Loi du 8 Août 1994

L'organisme assureur verse la rente de base qui chaque année est revalorisée par l'entreprise.

De plus, cette Loi harmonise les règles de mise en place, de modification ou de remise en cause des régimes de prévoyance ou de retraite qui deviennent identiques pour toutes les entreprises.

1.11.5 La Loi du 17 Juillet 2001

L'article 7 de la Loi Evin est ici complété car il restait obscur sur le maintien de la garantie décès. Ainsi la Loi du 17 Juillet 2001 précise que la garantie décès des contrats de prévoyance collective (en vigueur au 1er janvier 2002) est maintenue pour les personnes en arrêt de travail même s'il y a changement de l'organisme assureur. Cet engagement doit faire l'objet d'un provisionnement afin d'en garantir la solvabilité.

1.11.6 La Loi Fillon

La Loi Fillon, ou Loi du 21 Août 2003, concerne la réforme du système de retraite qui vise à allonger la durée de cotisation, à mettre en place un système de retraite par capitalisation individuelle (le PERP) et incite fortement à l'activité professionnelle des séniors afin de pérenniser le système par répartition existant. Cette loi a ainsi eu comme principal impact l'allongement de la durée de travail ce qui a entrainé un surcoût des régimes de prévoyance collective.

1.11.7 Le décret du 9 Janvier 2012

Ce décret vise à définir les « catégories objectives » des contrats de prévoyance collective. Ainsi, il est dit que « *lorsque les garanties ne s'appliquent qu'à une ou plusieurs catégories de salariés* », elles doivent couvrir tous les salariés qui sont « *dans une situation identique au regard des garanties concernées* ». Le décret identifie 5 types de catégories objectives :

- L'appartenance aux catégories « cadre » et « non cadre »,
- Les tranches de rémunération,
- L'appartenance aux catégories précisées dans les conventions de branche ou les accords professionnels ou interprofessionnels,
- Le niveau de responsabilité,
- Les catégories s'inspirant d'usage en vigueur dans la profession.

De plus, le décret renforce la notion d'uniformité des garanties et des taux des cotisations au sein d'une catégorie objective, sans que cela empêche les salariés de sur-cotiser à titre personnel au-delà du niveau collectif prévu, ni à l'employeur de majorer, dans ce cas, ses contributions. Dans ce dernier cas, la part employeur ne bénéficie pas de l'exclusion de l'assiette des cotisations.

Le décret stipule aussi que les employeurs peuvent bénéficier des avantages sociaux uniquement concernant les garanties auxquelles l'adhésion des salariés est obligatoire.

1.12 Les avantages des régimes de prévoyance collective

Les avantages dont les entreprises et leurs salariés peuvent bénéficier au titre des régimes de prévoyance collective sont à la fois fiscaux et sociaux.

1.12.1 Les avantages fiscaux

Dans le cadre des régimes obligatoires de prévoyance collective, les cotisations patronales et salariales versées sont déductibles du montant imposable dans la limite d'un plafond, dit « disponible fiscal » défini tel que [9]:

$$\textbf{Disponible fiscal} = [\textbf{Min } 7\%\ \textbf{PASS}_\textbf{n} + 3\%\ \textbf{SAB}_\textbf{n}\ ;\ 3\% * 8\ \textbf{PASS}_\textbf{n}]$$

Avec $PASS_n$: Plafond de la Sécurité Sociale de l'année n
SAB_n : Salaire Annuel Brut de l'année n

Pour que les avantages fiscaux soient applicables le régime doit être collectif et appliqué à une catégorie objective (voir « Le décret du 9 Janvier 2012 »), obligatoire et avec un taux de cotisation uniforme par catégorie.

1.12.2 Les avantages sociaux

Les avantages sociaux permettent d'exclure de l'assiette de calcul des charges sociales les cotisations de l'employeur.

Le montant maximal pouvant être exclu de l'assiette des charges sociales est appelé « disponible social » et est défini tel que [9]:

$$\textbf{Disponible social} = \textbf{Max}\left[5\%\ \textbf{PASS}_\textbf{n}\ ;\ 5\% * \textbf{Min}\left[\textbf{SAB}_\textbf{n}\ ;\ 5\ \textbf{PASS}_\textbf{n}\right]\right]$$

Avec $PASS_n$: Plafond de la Sécurité Sociale de l'année n
SAB_n : Salaire Annuel Brut de l'année n

Pour que les avantages sociaux soient applicables le régime doit être collectif, obligatoire, mis en place par une procédure spécifique (voir « Les modes de mise en place ») et les prestations doivent être versées par un organisme assureur (voir « Les prestataires d'assurances »).

2 Le compte de résultat en prévoyance collective

Cette partie vise à présenter les aspects comptables de la prévoyance collective au travers de la constitution du compte de résultat.

Le compte de résultat comptabilise l'ensemble des flux positifs ou négatifs qui impactent le régime. On distingue les éléments au crédit (flux positifs) des éléments au débit (flux négatifs) du point de vue de l'assureur.

2.1 Les postes au débit

On trouve comme postes au débit du compte de résultat :

- Les prestations payées durant l'exercice considéré au titre des garanties décès, incapacité et invalidité
- Les frais de gestion sur primes qui s'expriment, en général, en pourcentage des primes et les frais de gestion sur rentes qui s'expriment en pourcentage du montant des rentes versées
- L'ensemble des provisions constituées au 31 décembre de l'exercice considéré

On trouve dans les opérations d'inventaire plusieurs types de provisions qui se distinguent sur les risques vie et non vie.

2.1.1 Les provisions techniques vie

Les provisions techniques en assurance vie correspondent aux provisions suivantes dont les dispositions sont précisées dans le code des assurances [2] :

- **Provisions mathématiques :** Elles sont définies par l'article R. 331-3 du code des assurances. Elles sont calculées avec des taux d'intérêt au plus égaux à ceux utilisés lors de la tarification et, si elles comportent un élément viager, avec les tables de mortalité règlementaires (voir « Provisionnement »).
- **Provision pour participation aux bénéfices :** Elle est définie par l'article R. 331-3 du code des assurances. Elle correspond au montant des participations aux bénéfices alloués aux bénéficiaires du contrat lorsque les bénéfices ne sont pas payables immédiatement à la fin de l'exercice dont ils sont issus.
- **Réserve de capitalisation :** Elle est définie par les articles R. 331-3 et 6 du code des assurances. Elle correspond au montant qui sera utilisé afin de contrevenir à la dépréciation de la valeur des actifs de la société et à la diminution de leur revenu. Elle a pour but d'utiliser le bénéfice sur les ventes d'obligations à concurrence du montant suffisant pour maintenir le rendement actuariel des titres.
- **Provision de gestion :** Elle est définie par l'article R. 331-3 du code des assurances. Cette provision est destinée à couvrir les charges de gestion future des contrats
- **Provision pour aléa financier :** Elle est définie par l'article R. 331-3 du code des assurances. Elle va servir à compenser la diminution potentielle du rendement de l'actif associé aux engagements des sociétés vie, autres que les engagements des contrats dont les garanties sont en unités de compte. A chaque date d'inventaire, une comparaison sera établie entre le taux des intérêts techniques de tous les contrats rapportés à la moyenne des provisions mathématiques avec le taux de rendement de l'actif de la société.
- **Provision pour risque d'exigibilité :** Conformément à l'article R. 331-5-1 du code des assurances, cette provision est constituée lorsque les placements (définis par l'article R. 332-

20 du code des assurances) se trouvent dans une situation de moins-value latente nette globale.

- **Provision pour frais d'acquisition reportés :** L'article R. 332-35 du code des assurances précise que les sociétés qui contractent des engagements dont l'exécution dépend de la durée de la vie humaine, doivent inscrire à l'actif de leur bilan les frais d'acquisition à reporter en fonction de la durée de vie résiduelle des contrats. Cette provision sert donc à couvrir les charges dues au report des frais d'acquisition.
- **Provision d'égalisation** (voir « Mécanismes d'affectation du résultat »)

2.1.2 Les provisions techniques non vie

Les provisions techniques en assurance non vie correspondent aux provisions suivantes [2] dont les dispositions sont précisées dans le code des assurances :

- **Provisions mathématiques des rentes :** Elles sont définies par l'article R. 331-6 du code des assurances. Elles correspondent à la valeur des engagements de la société en ce qui concerne les rentes et accessoires de rentes. Les modalités des calculs (tables de mortalité, taux d'actualisation,…) sont fixées par arrêté. La méthode de calcul des provisions techniques des rentes d'incapacité et d'invalidité sont définies par l'article A. 331-10 du code des assurances (voir « Provisionnement »).
- **Provisions pour primes non acquises :** Elle est définie par l'article R. 331-6 du code des assurances. Etant donné que la date d'effet d'une prime s'étale parfois sur plus d'un exercice, cette provision a pour but de partager les primes *prorata temporis* et ainsi de constater la part de prime émise et de prime restant à émettre sur une période donnée (généralement, entre la date d'inventaire et la date de la prochaine échéance de prime).
- **Provision pour risque en cours :** Elle est définie par l'article R. 331-6 du code des assurances et vient compléter la provision pour primes non acquises dans le cas où il apparaît que le report des primes ne suffira pas pour couvrir les sinistres et les frais susceptibles de se produire après la fin de l'exercice et avant la prochaine échéance des contrats.
- **Réserve de capitalisation :** Elle correspond au montant qui sera utilisé afin de contrevenir à la dépréciation de la valeur des actifs de la société et à la diminution de leur revenu.
- **Provision pour sinistres à payer :** Elle est définie par l'article R. 331-6 du code des assurances. C'est une évaluation des dépenses nécessaires au règlement des sinistres survenus et non payés, y compris les capitaux constitutifs des rentes, non encore comptabilisés à la charge de l'entreprise.
- **Provision pour risque croissant :** Elle est définie par l'article R. 331-6 du code des assurances. Elle sert à compenser l'aggravation des risques décès, maladie et invalidité avec l'âge de l'assuré alors que souvent les primes sont constantes. Elle peut être exigée dans le cadre de la couverture des risques maladie et invalidité et est définie comme étant égale à la différence des valeurs actuelles des engagements de l'assureur et des assurés.
- **Provision d'égalisation** (voir « Mécanismes d'affectation du résultat »)
- **Provision pour risque d'exigibilité :** Conformément à l'article R. 331-5-1 du code des assurances, cette provision est constituée lorsque les placements (définis par l'article R. 332-20 du code des assurances) se trouvent dans une situation de moins-value latente nette globale.

Nous nous concentrerons dans la suite uniquement sur les provisions mathématiques et d'égalisation.

2.2 Les postes au crédit

Au titre du crédit du compte de résultat, on trouve les postes suivants :

- Le total des primes brutes associées aux risques couverts par l'organisme assureur (en l'occurrence, le décès, l'incapacité et l'invalidité)
- Les provisions constatées au 31 décembre de l'exercice précédent
- Les intérêts financiers calculés selon le taux de rendement prévu au contrat (généralement 90% de l'actif général prévoyance)

2.3 Structure du compte de résultat

On distingue dans le solde du compte de résultat deux types de solde : le **solde technique prévoyance** et le **solde global prévoyance** [9].

Le solde global prévoyance correspond à la différence des postes au crédit avec les postes au débit du compte de résultat. Le solde technique prévoyance est calculé en plafonnant les intérêts financiers (affectés au crédit) au niveau des intérêts financiers réalisés sur les provisions mathématiques à partir du taux technique escompté.

Ainsi, le solde technique prévoyance est calculé en prenant en compte le taux de rendement contractuel appliqué aux provisions pour calculer les intérêts financiers portés au crédit du compte de résultat alors que l'on applique le taux technique des garanties dans le cadre du calcul du solde global prévoyance.

Dans le cas où le solde global prévoyance est positif, le résultat est créditeur. Dans le cas contraire, il est débiteur. On obtient alors l'une des deux structures suivantes :

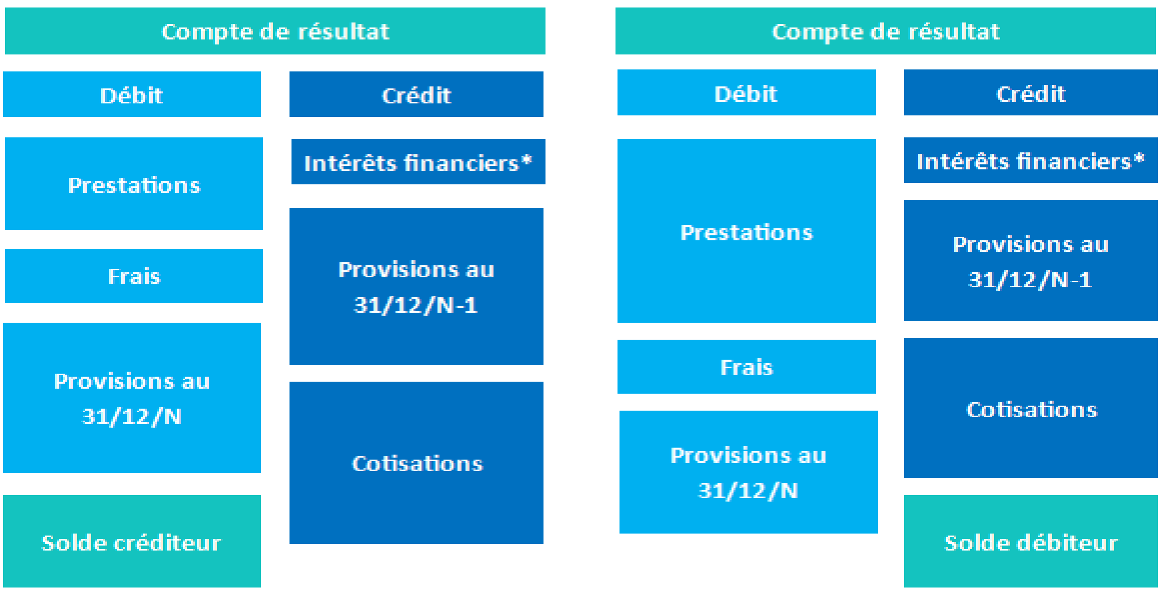


Figure 12. Structure du compte de résultat (cas d'un solde créditeur à gauche et d'un solde débiteur à droite)

**les intérêts financiers sont plafonnés si l'on s'attache au cas où l'on considère le solde technique.*

2.4 La participation aux bénéfices

La participation aux bénéfices est une pratique spécifique à l'assurance vie qui consiste à reverser aux assurés et/ou bénéficiaires d'un contrat une partie, contractuellement fixée à l'avance, des bénéfices réalisés par l'organisme assureur au cours de l'exercice [18].

Cette pratique est principalement due à la prudence à laquelle ont recours les organismes assureurs dans l'évaluation des risques couverts.

La redistribution des bénéfices se fait principalement sur 3 postes (2 techniques et 1 financier) :

- La redistribution d'une partie des primes de risques non utilisées pour payer les sinistres (qui compensent la surmortalité généralement prévue par les tables utilisées),
- La redistribution d'une partie des chargements théoriques utilisés pour le calcul des primes et qui n'a pas servi à couvrir les dépenses de l'assureur,
- La redistribution d'une partie des intérêts dus à des placements réalisés à des taux supérieurs au taux d'intérêt technique.

2.5 Mécanismes d'affectation du résultat

On s'intéresse ici à la redistribution du résultat prévoyance au travers de la provision d'égalisation et de la réserve générale du contrat de prévoyance collective. Ce mécanisme de participation aux bénéfices est contractuellement prévu entre l'organisme assureur et la société assurant son personnel.

2.5.1 Définitions

2.5.1.1 La provision d'égalisation

La provision d'égalisation est définie dans l'article 39 du Code Général des Impôts comme étant « *une provision destinée à faire face aux fluctuations de sinistralité afférentes aux opérations d'assurance de groupe contre les risques décès, incapacité et invalidité* ».

Cette provision sert donc à se prémunir face à de potentiels pics de sinistralité. La dotation annuelle à la provision d'égalisation est limitée à 75% du solde technique prévoyance [9]. Le montant global de la provision ne peut pas excéder 100% de la cotisation prévoyance [9] (ce plafond peut varier selon l'effectif couvert par le contrat. Plus l'effectif sera faible, plus le plafond le sera lui aussi). Si le montant affecté à la provision d'égalisation n'est pas consommé au cours des 10 années qui suivent l'exercice qui l'a engendré, alors ce montant est automatiquement réaffecté au résultat de l'exercice en cours [9].

La provision d'égalisation présente un avantage fiscal pour l'organisme assureur. En effet, la provision d'égalisation n'est pas imposable à l'impôt sur les sociétés [9]. Pour la société preneuse d'assurances, un montant élevé de la provision d'égalisation lui permet généralement de renégocier ses tarifs via des taux d'appels ou de négocier des garanties plus élevées ou de nouvelles couvertures (dans la limite du montant de cette provision).

2.5.1.2 La réserve générale

La réserve générale correspond au cumul annuel de la différence entre le montant global alloué à la participation aux bénéfices et le montant alloué à la provision d'égalisation. Elle constitue ainsi un second niveau de sécurité face à des fluctuations de sinistralité. Cette réserve ne présente pas d'avantage fiscal pour l'organisme assureur.

2.5.2 Evolution des réserves

Nous constatons ici que la priorité entre la provision d'égalisation et la réserve générale diffère selon que l'on parle de leur affectation (cas d'un solde global prévoyance créditeur) ou de leur consommation (cas d'un solde global prévoyance débiteur). Nous nous plaçons dans le cas d'un taux de participation aux bénéfices contractuellement fixé à 80%.

2.5.2.1 Cas d'un solde global prévoyance créditeur

Dans le cas d'un solde global prévoyance créditeur (net de réassurance) [9], la provision d'égalisation est constituée en priorité à partir de la somme du pourcentage (80%) du solde global prévoyance redistribué au titre de la participation aux bénéfices et des intérêts financiers issus de l'application du taux de rendement contractuel sur la provision d'égalisation. Cette somme est limitée à 75% du solde technique puis le montant global de la provision est limité à 100% des primes de l'exercice au maximum, ce dernier plafond dépendant de la taille de la population assurée.

Ensuite, le reliquat du solde prévoyance est alloué à la réserve générale.

On a donc le mécanisme suivant :

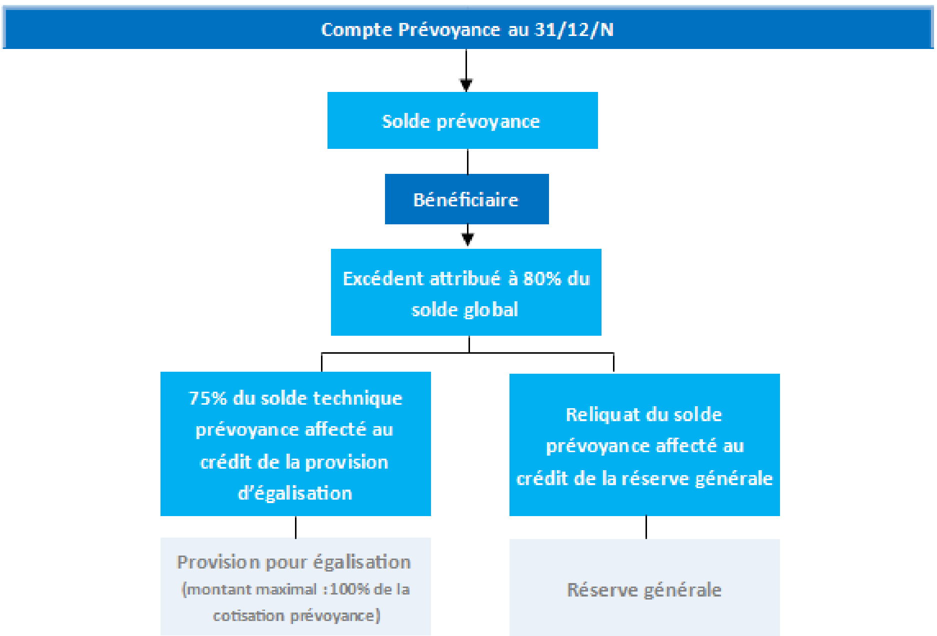


Figure 13. Mécanisme d'affectation de la provision d'égalisation

2.5.2.2 Cas d'un solde global prévoyance débiteur

Dans le cas d'un solde global prévoyance débiteur (net de réassurance) [9] celui-ci est en priorité réduit par les intérêts financiers réalisés sur la provision d'égalisation. Si ce n'est pas suffisant pour combler le déficit c'est la réserve générale qui est entamée et la provision d'égalisation ne vient qu'en ultime « niveau de sécurité » selon le schéma suivant :

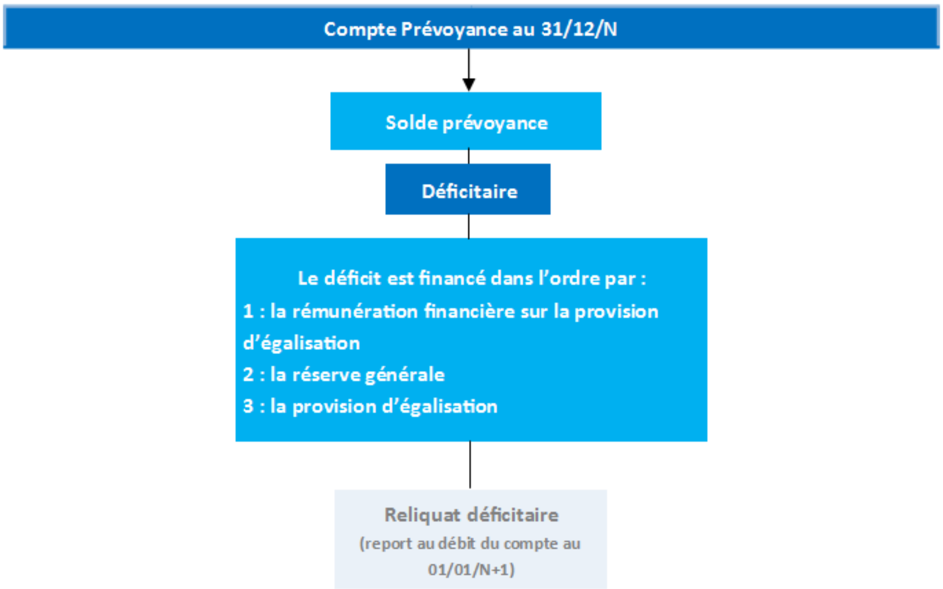


Figure 14. Mécanisme de consommation de la provision d'égalisation

Dans le cas où le mécanisme précédent ne suffirait pas à couvrir le solde global prévoyance débiteur, le reliquat, auquel s'ajoutent des intérêts débiteurs, est reporté au débit du compte de résultat de l'exercice suivant.

3 Approche actuarielle des risques en prévoyance lourde

On présente dans cette partie, les différents aspects mathématiques et règlementaires qui permettent de tarifer et de provisionner les risques décès, incapacité et invalidité. On s'intéresse uniquement aux provisions mathématiques qui sont des provisions permettant à l'organisme assureur de couvrir les engagements qu'il a pris.

3.1 Le modèle de Gompertz-Makeham

Parmi les principaux outils utilisés en prévoyance on trouve les tables de mortalité, de maintien en incapacité et en invalidité. Le modèle de Gompertz-Makeham [1] est un modèle de référence pour la construction de ces tables. Il est basé sur l'utilisation du taux instantané de mortalité μ_x qui est défini comme suit à l'âge x.

En considérant une population fictive l_x d'âge x comme une fonction continue et différentiable à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on définit le nombre de décès par unité de temps entre les âges x et $x+\Delta x$ par :

$$\frac{l_x - l_{x+\Delta x}}{\Delta x}$$

Dès lors, on appelle taux instantané de mortalité à l'âge x, le taux de décès par unité de temps au voisinage de x,

$$\mu_x = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{1}{l_x} . \frac{l_x - l_{x+\Delta x}}{\Delta x}$$

Ce qui revient à,

$$\mu_x = -\frac{l'_x}{l_x} = -\frac{d}{dx}\ln(l_x)$$

Démonstration

$$\mu_x = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{1}{l_x} . \frac{l_x - l_{x+\Delta x}}{\Delta x}$$

$$= -\frac{1}{l_x} \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{l_{x+\Delta x} - l_x}{\Delta x}$$

$$= -\frac{l'_x}{l_x}$$

□

Le modèle de Gompertz-Makeham définit le taux instantané de décès comme étant une fonction du type,

$$\mu_x = \alpha + \beta * \gamma^x$$

Dans cette équation α modélise un taux de décès accidentel indépendant de l'âge (ce paramètre sera notamment utilisé dans la partie « Simulation » pour modéliser les décès accidentels ouvrant droit à une majoration des garanties décès). Le terme $\beta * \gamma^x$ modélise la mortalité suivant un vieillissement exponentiel (si $\gamma > 1$). Considérant les aspects précédents, on a les conditions suivantes sur les paramètres : $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 1$.

En considérant les paramètres standards du modèle de Gompertz-Makeham utilisés pour modéliser la mortalité humaine,

α	β	γ
8,81E^{-6}	3,83E^{-5}	1,076207

On obtient l'allure du taux de décès suivant l'âge,

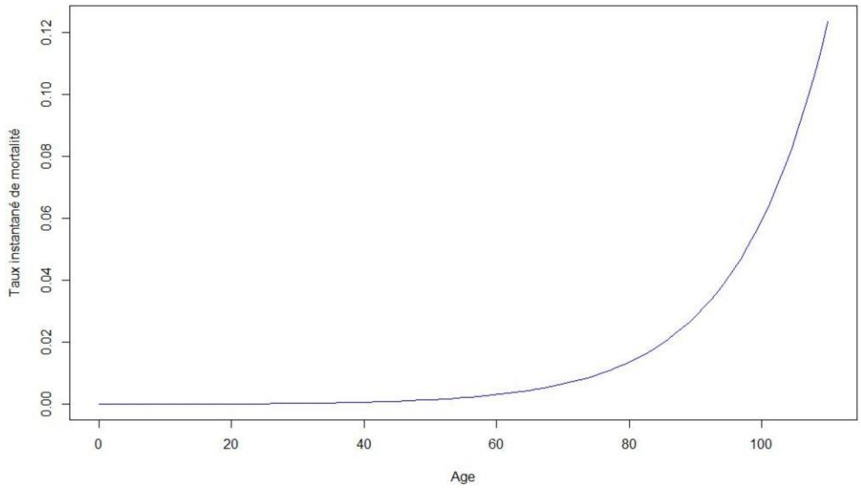


Figure 15. Taux instantané de décès (Modèle de Gompertz-Makeham)

On remarque que le modèle est bien adapté à la mortalité humaine qui croît avec l'âge de manière non-proportionnelle mais avec une croissance de plus en plus forte au fur et à mesure que l'âge considéré est grand.

On notera de plus que la probabilité de survie d'un individu d'âge x durant t années est directement reliée au taux instantané de décès par la formule,

$$ {}_t p_x = \exp\left(\int_x^{x+t} \mu_s \, ds\right) $$

3.2 Les tables règlementaires

La règlementation précise au travers de l'article A. 335-1 du Code des Assurances quelles sont les tables à utiliser selon le risque à tarifer. Dès lors, les mêmes tables doivent être utilisées en matière de provisionnement.

3.2.1 Les tables du risque décès

L'INSEE [18] définit les tables de mortalité comme étant un table annuelle qui « *suit le cheminement d'une génération fictive de 100 000 nouveaux nés à qui l'on fait subir aux divers âges les conditions de mortalité observées sur les diverses générations réelles, durant l'année étudiée. Pour éviter les aléas des tables annuelles et pour disposer d'une table détaillée par âge aussi précise que possible, on calcule également une table de mortalité couvrant une période de trois années* ».

La mortalité peut être modélisée par sexe à partir des tables TH00-02 (pour les hommes) et TF00-02 (pour les femmes). Ces tables ont été homologuées par arrêté du 20 Décembre 2005. Elles ont été créées à partir de données de l'INSEE issues d'observations réalisées entre 2000 et 2002 et s'appliquent aux contrats d'assurance en cas de décès souscrits depuis le 1er juillet 1993. Pour les contrats en cas de vie, ces mêmes tables peuvent être utilisées avec un décalage d'âge (à l'exclusion des garanties versées sous forme de rente).

Ces tables se présentent sous la forme d'un tableau à 2 colonnes représentant respectivement l'âge et le paramètre l_x correspondant (voir « Annexe 1 »). Ainsi, si on lit la table TF00-02 on a à 0 an 100 000 individus en vie et à 1 an 99 511. Ce qui signifie que la probabilité de survie de 0 à 1 an est égale à ${}_1p_0 = p_0 = \frac{99\,511}{100\,000} = 0{,}99511.$

En ce qui concerne les garanties délivrées sous forme de rente viagère, l'arrêté du 1er Août 2006 a homologué les tables TGF-05 (pour les femmes) et TGH-05 (pour les hommes). Ces tables sont générationnelles et prospectives. Cela signifie, pour l'aspect générationnel, qu'elles dépendent à la fois de l'âge des individus mais aussi de leur année de naissance et, pour l'aspect prospectif, que ces tables prennent en compte l'évolution probable de la mortalité au cours d'une période plus ou moins limitée et postérieure à celle qui a fait l'objet des observations ayant permis la création de la table. Elles ont été créées sur base de la mortalité de la population des bénéficiaires de contrats de rentes observée entre 1993 et 2005 et de données sur la population générale (issues des statistiques de l'INSEE) entre 1962 et 2000. Ces tables sont utilisées depuis le 1er janvier 2007 pour la tarification et le provisionnement des contrats de rentes viagères immédiates et/ou différées.

Ces tables se présentent sous la forme d'un tableau à 2 entrées (âge et année de naissance, voir « Annexe 1 »). La table se lit pour chaque année de naissance comme une table de mortalité classique avec l'âge et le paramètre l_x correspondant.

3.2.2 Les tables du BCAC

Les organismes assureurs qui couvrent les risques incapacité et invalidité doivent évaluer leurs engagements avec des lois de maintien règlementaires détaillées par [5] :

- L'annexe 1.1 art. 331-22 du code des assurances pour l'incapacité,
- L'annexe 1.2 art. 331-22 du code des assurances pour l'invalidité,
- L'annexe 1.3 art. 331-22 du code des assurances pour l'invalidité en attente.

Ces lois, créées à partir de statistiques et selon une méthodologie du **Bureau Commun des Assurances Collectives** (BCAC), sont obligatoires pour les organismes assureurs relevant du Code des Assurances, du Code de la Sécurité sociale et du Code de la Mutualité. Elles ont été homologuées par l'arrêté du 28 Mars 1996.

Les tables d'origines créées en 1993 ont été modifiées par l'arrêté n°ETSS1033039A du 24 décembre 2010 afin de s'adapter au recul de l'âge de départ à la retraite annoncé par la loi n°2010-1330 du 9 novembre 2010.

Un organisme assureur peut utiliser à la place de ces tables des tables d'expérience construites à partir de son portefeuille, et certifiées par un actuaire indépendant, agréé par l'Institut des Actuaires. Il est toujours intéressant de pouvoir utiliser des tables d'expérience car ce sont elles qui reflètent le mieux la sinistralité d'un portefeuille en particulier, car les tables du BCAC restent des lois construites sur des statistiques générales. Néanmoins, afin de pouvoir créer des tables d'expérience il convient d'avoir un portefeuille conséquent avec suffisamment de données historiques. Comme on pourra le voir dans la partie « Simulation », le portefeuille sur lequel j'ai travaillé n'était pas suffisamment important pour pouvoir réaliser ce type de tables.

3.2.2.1 Table de maintien en incapacité

Cette table (voir « Annexe 1 ») se présente comme un tableau à deux entrées dépendant à la fois de l'âge d'entrée en incapacité et de l'ancienneté (en mois) dans l'état d'incapacité. Cette table est établie pour les âges entre 20 et 66 ans et pour les mois entre 0 et 36 mois. Ainsi, on peut interpréter que pour 10 000 incapables de 30 ans présents à 0 mois, il n'y en aura plus que 396 au bout de 10 mois et 34 au bout de 36 mois encore en état d'incapacité.

3.2.2.2 Table de passage en invalidité

Cette table (voir « Annexe 1 ») est à interpréter avec la table de maintien en incapacité. Elle nous renseigne sur le nombre de personnes en incapacité qui passent en invalidité pour un âge d'entrée et une ancienneté en incapacité fixés. Cette table s'interprète de la manière suivante : considérant les individus rentrés en incapacité à l'âge de 45 ans et qui sont dans cet état depuis 8 mois, on aura 10 individus (lecture sur la table de passage) sur un total de 853 (lecture sur la table de maintien) qui passeront en invalidité.

L'âge d'entrée en incapacité varie de 20 à 61 ans et l'ancienneté en état d'incapacité de 0 à 36 mois.

3.2.2.3 Table de maintien en invalidité

Cette table (voir « Annexe 1 ») s'interprète de la même manière que la table de maintien en incapacité à ceci près que l'âge d'entrée en invalidité varie de 20 à 61 ans et que l'ancienneté en invalidité est exprimée en année et varie de 0 à 42 ans. Toutes les statistiques n'excèdent pas un âge cumulé (âge d'entrée en invalidité + ancienneté en invalidité) de 62 ans. A partir de cette table, on peut interpréter, par exemple, que pour 10 000 invalides d'origine ayant 21 ans, il n'y en aura plus que 8 619 au bout de 10 ans encore dans cet état.

3.2.3 Calcul de probabilités sur des lois non paramétriques

A partir des tables de mortalité, on définit la probabilité de survie d'un individu d'âge x au cours des k prochaines années comme [11],

$$\boldsymbol{{}_k p_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}}$$

avec l_x le nombre d'individus inscrits sur la table pour l'âge x correspondant.

De manière logique, la probabilité de décès pour un individu d'âge x au cours des k prochaines années est définie comme suit,

$$\boldsymbol{{}_t q_x = \frac{l_x - l_{x+k}}{l_x}}$$

De la même manière on calcule les probabilités d'entrée, de maintien et de sortie en incapacité et en invalidité à partir des tables du BCAC.

3.3 Retraitement des tables du BCAC

3.3.1 Lissage et prolongement de la table de maintien en invalidité

Comme on pourra le voir dans la partie « Simulation » les prestations en invalidité du régime évalué sont servies jusqu'à 65 ans inclus. Or, la table de maintien en invalidité revue en 2010 ne livre aucune statistique lorsque la somme de l'âge d'entrée en invalidité avec l'ancienneté en invalidité dépasse 62 ans (voir « Table de maintien en invalidité »). Il a donc été nécessaire de prolonger la table. Pour cela, j'ai lissé la table par la méthode de Whittaker-Henderson [4] (voir « Annexe 2 ») en deux temps, une première fois par rapport à l'âge puis une seconde fois par rapport à l'ancienneté en incapacité. J'obtiens la table lissée ci-dessous :

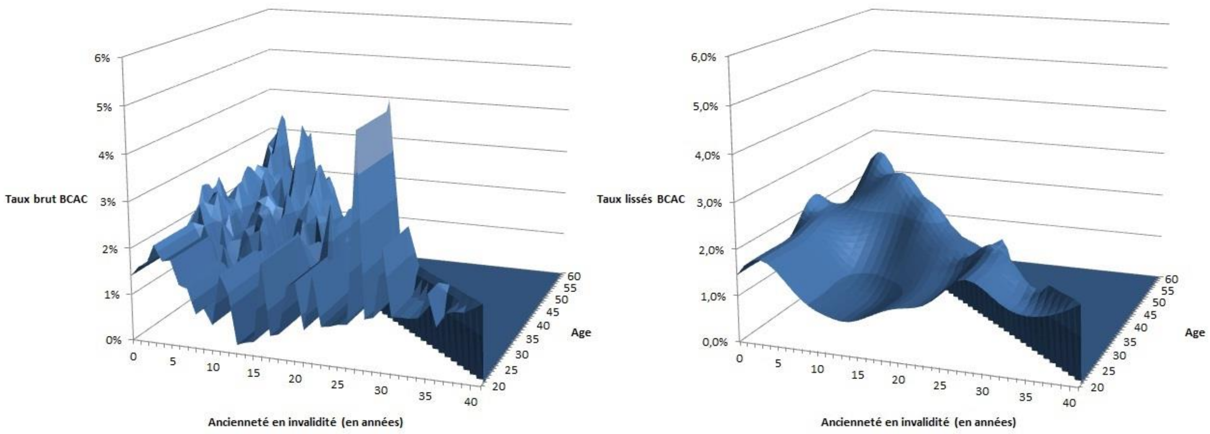


Figure 16. Table des taux bruts d'invalidité (à gauche) et Lissage de la table de maintien en invalidité par la méthode de Whittaker-Henderson (à droite)

Un double lissage unidimensionnel a été réalisé, au lieu de passer par un lissage bidimensionnel, car le lissage obtenu était visuellement satisfaisant et son adéquation avec les données d'origine a été confirmée par un test du χ^2 (voir « Annexe 4 »).

Cette opération a permis d'atténuer d'éventuelles variations trop importantes, à la suite de quoi nous avons réalisé une interpolation linéaire [1] afin de prolonger la table de la manière suivante,

Soit $a = \text{âge d'entrée en invalidité}$ et $b = \text{ancienneté en invalidité}$.
Pour $a = 20$ jusqu'à 61,
Pour $b = 0$ jusqu'à 42,
Si $a + b = 62$ alors,
Pour $j = 1$ jusqu'à 2,

$$\boldsymbol{l_{a,b+j}^{inv} = l_{a,b}^{inv} + \left(\frac{l_{a,b}^{inv} - l_{a-2,b}^{inv}}{2}\right) * (x - a)}$$

3.3.2 Prolongement de la table de passage en invalidité

De même que précédemment, la table de passage en invalidité ne couvre pas tous les âges dont nous avons besoin pour la simulation. Etant donné la grande irrégularité des statistiques, en particulier pour des âges faibles, nous n'avons pas réalisé de lissage de la table. On a alors déterminé la probabilité de passage d'un état d'incapacité à un état d'invalidité d'un individu d'âge $a \in [\![62; 64]\!]$ et d'ancienneté en incapacité b par la formule suivante [1] :

$$\boldsymbol{l_{a,b}^{pass}} = \mathbf{Min}\left[\mathbf{Max}\left[\boldsymbol{l_{61,b}^{pass}} + \left(\frac{\boldsymbol{l_{61,b}^{pass}} + \boldsymbol{l_{59,b}^{pass}}}{\mathbf{2}}\right).(\boldsymbol{x} - \mathbf{61}); \left(\frac{\boldsymbol{l_{61,b}^{pass}} + \boldsymbol{l_{60,b}^{pass}}}{\boldsymbol{l_{61,b}^{inc}} + \boldsymbol{l_{60,b}^{inc}} - (\boldsymbol{l_{61,b+1}^{inc}} - \boldsymbol{l_{60,b+1}^{inc}})}\right).(\boldsymbol{l_{a,b}^{inc}} - \boldsymbol{l_{a,b+1}^{inc}})\right]; \boldsymbol{l_{a,b}^{inc}} - \boldsymbol{l_{a,b+1}^{inc}}\right]$$

- Le premier terme $l_{61,b}^{pass} + \left(\frac{l_{61,b}^{pass}+l_{59,b}^{pass}}{2}\right).(x-61)$ représente le prolongement de $l_{61,b}^{pass}$ par une fonction affine de pente $\left(\frac{l_{61,b}^{pass}+l_{59,b}^{pass}}{2}\right)$ et d'ordonnée à l'origine $l_{61,b}^{pass}$.
- Le second terme $\left(\frac{l_{61,b}^{pass}+l_{60,b}^{pass}}{l_{61,b}^{inc}+l_{59,b}^{inc}-(l_{61,b+1}^{inc}-l_{59,b+1}^{inc})}\right).(l_{a,b}^{inc}-l_{a,b+1}^{inc})$ se décompose en deux parties. La première s'interprète comme étant la proportion d'individus de 60 et 61 ans qui étaient en incapacité et qui sont passés en invalidité. La seconde représente le nombre de sorties de l'état d'incapacité entre b et $b+1$ mois pour les individus âgés de a années. La multiplication de ces deux termes correspond donc au nombre de passage en invalidité entre b et $b+1$ mois d'ancienneté pour les individus d'âge a.

3.4 Le taux d'actualisation

Le taux d'actualisation des flux futurs est règlementé et plafonné en prévoyance. Il est au maximum égal à 60% du **Taux Moyen des emprunts d'Etat** (TME) pour le risque décès et à 75% du TME pour les risques d'arrêt de travail (incapacité et invalidité) [9].

Le TME correspond au taux de rendement sur le marché secondaire des emprunts d'État à taux fixe supérieurs à 7 ans. Il est publié chaque mois, avec une précision à deux décimales, par la Caisse des Dépôts et Consignations et est calculé en effectuant la moyenne arithmétique des **Taux Hebdomadaire des Emprunts d'État** (THE) publiés chaque semaine au cours du mois correspondant. Le THE correspond à la moyenne hebdomadaire des rendements des emprunts d'Etat de cette catégorie.

3.5 Notion de Valeur Actuelle Probable

Avant de définir ce qu'est la Valeur Actuelle Probable [3] il convient de définir certaines notions de mathématiques financières.

3.5.1 Rappels de mathématiques financières

On définit la **valeur acquise** [3] d'un capital C rémunéré par des intérêts composés au taux annuel i pendant n années comme la valeur de ce capital majoré des intérêts successifs au terme de ces n années.

$$\text{Valeur acquise} = C.(1+i)^n$$

On définit la **valeur actuelle** [3] d'un capital C disponible dans n années comme étant le capital C_0 qu'il faut placer à la date d'aujourd'hui au taux d'intérêt composé annuel i pour avoir le capital C à l'issue des n années.

$$\text{Valeur actuelle} = C_0 = C.(1+i)^{-n}$$

De plus, dans le cas, non plus d'un capital, mais d'une annuité certaine a payable d'avance, on a,

$$\text{Valeur acquise} = \ a.(1+i).\frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$\text{Valeur actuelle} = a.(1+i).\frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

De même, dans le cas d'une annuité certaine a à terme échu, on a,

$$\text{Valeur acquise} = a.\frac{[(1+i)^{n}-1]}{i}$$

$$\text{Valeur actuelle} = a.\frac{[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

3.5.2 Valeur Actuelle Probable

La Valeur Actuelle Probable (VAP) d'un engagement est définie comme étant « *le produit de la valeur actuelle de cet engagement par la probabilité de réalisation de l'engagement* ». Cette notion combine la notion de valeur probable (au travers de l'utilisation de probabilité) et la notion de valeur actuelle (par une actualisation des flux financiers futurs). Elle permet aux organismes assureurs de déterminer la valeur d'un engagement pris sur le long terme et dont la réalisation n'est pas certaine.

3.5.2.1 Principe fondamental

La prime pure d'un contrat d'assurance vie est calculée en écrivant que les VAP des engagements de l'assuré et de l'assureur sont égales à la date de souscription du contrat. Il en résulte le principe fondamental suivant [3] :

$$\boldsymbol{VAP_0(\text{assureur}) = VAP_0(\text{assuré}) \text{ à la date } t = 0 \text{ de souscription du contrat}}$$

Notations :

- x : âge de l'assuré à la souscription du contrat
- n : durée du contrat
- i : taux d'intérêt technique annuel
- P_a : prime pure annuelle (inconnue)
- P_u : prime pure unique (inconnue)
- C : capital garanti
- R : montant de la rente garantie

3.5.2.2 VAP (assuré)

La $VAP(\text{assuré})$ est indépendante de la forme du contrat. Elle ne dépend que de la périodicité des paiements de la prime. Ici, on considère le versement d'une prime annuelle au cours de n années d'un assuré ayant x années à la souscription du contrat [12],

$$VAP_1 = P_a$$
…
$$VAP_n = P_a.(1+i)^{-(n-1)}.{}_{n-1}p_x$$
$$\sum_{i=1}^{n} VAP_i = P_a.\left[\sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^{-k} * {}_{k}p_x\right]$$

Ce qui peut s'écrire de la manière suivante,

$$\boldsymbol{VAP(\text{assuré}) = P_a \cdot {}_{|n}\ddot{a}_x}$$

Dans le cas d'une prime pure unique (c'est l'hypothèse qui a été retenue pour la simulation, voir « Simulation »), on a le versement d'une prime en une seule fois. Il n'y a alors ni facteur d'actualisation, ni facteur viager. On a donc,

$$\boldsymbol{VAP}(\mathbf{assur}\acute{\mathrm{e}}) = \boldsymbol{P_u}$$

3.5.2.3 VAP (assureur)

La $VAP(\text{assureur})$ dépend du type de contrat souscrit : versement d'un capital, d'une rente. Elle se calcule de la même manière que la $VAP(\text{assuré})$, en considérant, à la place des versements de primes, les versements des prestations. Cela correspond au niveau du risque garanti multiplié par la fréquence de ce risque. En l'égalisant, par le principe fondamental, à la $VAP(\text{assuré})$ on retrouve la prime pure P (voir « Tarification ») correspondante à la garantie.

3.6 Hypothèse de répartition uniforme des décès

Pour les besoins de la simulation (voir « Simulation ») nous devons pouvoir exploiter les probabilités de décès pour des âges non entiers. Cela nécessite de poser une hypothèse afin d'avoir ${}_tp_x$ (ou ${}_tq_x$) pour $x \in \mathbb{R}^+$ et $t \in \mathbb{R}^+$.

Si on note T_x la durée de survie résiduelle et $K_x = \lfloor T_x \rfloor$ (avec $\lfloor . \rfloor$ l'opérateur partie entière).

L'hypothèse de répartition uniforme [3] des décès s'écrit : $\boldsymbol{T_x = K_x + S}$ **avec** $\boldsymbol{S \hookrightarrow Uniforme[0;1[}$.

On a donc pour $x \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ et $u \in [0;1[$,

$$\mathbb{P}_x[k < T_x \leq k + u | K_x = k] = u$$

En effet,

$$\mathbb{P}_x[k < T_x \leq k + u | K_x = k] = \frac{\mathbb{P}_x[k < T_x \leq k + u]}{{}_kp_x \cdot q_{x+k}} = \frac{{}_kp_x \cdot {}_uq_{x+k}}{{}_kp_x \cdot q_{x+k}} = \frac{{}_uq_{x+k}}{q_{x+k}} = u$$

D'où, on a, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{{}_uq_x = u.q_x}$ **pour** $\boldsymbol{u} \in [\mathbf{0};\mathbf{1}]$. On a donc directement : ${}_up_x = 1 - u.q_x$.

Cette hypothèse de travail permettra, notamment, de pouvoir, à partir de probabilités de décès annuelles, obtenir des probabilités de décès mensuelles.

Si l'on s'attache à la fonction de survie $S(x) = {}_xp_0$, il vient pour des âges non entiers,

$$S(x+u) = {}_{x+u}p_0 = {}_xp_0 \cdot {}_up_x = {}_xp_0 . \left(1 - {}_uq_x\right) = {}_xp_0 . (1 - u.q_x) = {}_xp_0 . \left(1 - u.(1 - p_x)\right)$$

$$= {}_xp_0 . (1 - u) + u. {}_xp_0 . p_x = {}_xp_0 . (1 - u) + u. {}_{x+1}p_0$$

D'où, $\boldsymbol{S(x+u) = (1-u).S(x) + u.S(x+1)}$.

En retraitant les tables TF00-02 et TH00-02 sous cette hypothèse on obtient les fonctions de survie suivantes dont les valeurs pour les âges non entiers, d'après la formule précédente, s'avèrent correspondre à des interpolations linéaires aux divers âges présents dans la table.

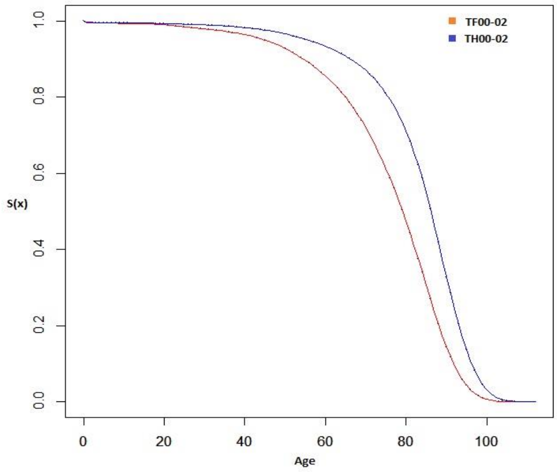


Figure 17. Fonction de survie des tables de mortalité TF00-02 et TH00-02 sous hypothèse de répartition uniforme des décès

3.7 Tarification

On reprend dans cette partie les formules de tarification [3][11] des types de garanties proposées en prévoyance collective.

3.7.1 Facteurs d'influence

On retrouve en prévoyance deux grands types de facteurs qui influencent le tarif d'une garantie. Ce sont des facteurs soit directement liés à la garantie elle-même, soit des facteurs liés à la population.

3.7.1.1 Facteurs liés aux garanties

Ce sont les caractéristiques du contrat qui vont amener à une majoration ou une minoration du tarif. On retrouve comme facteurs : le niveau de prestation garanti (capital, montant de la rente, montant d'indemnité journalière), le type de contrat (individuel ou collectif, qui permet une meilleure mutualisation des risques) et le caractère obligatoire ou non du régime de prévoyance.

3.7.1.2 Facteurs liés à la population

Ce sont ici toutes les caractéristiques propres aux individus formant le portefeuille. A savoir, l'âge, la situation professionnelle, le secteur d'activité, le sexe, la situation familiale. D'un point de vue global, généralement, plus l'effectif d'une entreprise est important plus le prix est faible.

3.7.2 Primes pures

On reprend ici les notations définies dans la partie « Principe fondamental ». Ces primes pures ont été calculées en égalisant les $VAP(\text{assureur})$ et $VAP(\text{assuré})$. Les contrats collectifs étant établis généralement sur une durée de 1 an, on considère ici des primes uniques (hors frais de chargement) de la part des assurés.

3.7.2.1 Tarification de la garantie décès en capital

La prime pure d'un individu d'âge x est donnée par :

$$\boldsymbol{P_u = C.q_x}$$

3.7.2.2 Tarification des garanties décès en rente

On distingue les rentes de conjoint (viagères R_{co}^{v} et temporaires R_{co}^{t}) et les rentes éducation $R_{éduc}$.

3.7.2.2.1 Rente de conjoint viagère

Dans le cas de la rente de conjoint viagère, pour un assuré d'âge x et un conjoint d'âge y, le capital constitutif CC_{co}^{v} est donné par,

$$CC_{co}^{v} = R_{co}^{v}. \sum_{k=0}^{\infty} (1+i)^{-k}.\ {}_{k}p_{y}$$

D'où, la prime pure,

$$\boldsymbol{P_u = R_{co}^{v}. q_x. \sum_{k=0}^{\infty} (1+i)^{-k}.\ {}_{k}p_{y}}$$

3.7.2.2.2 Rente de conjoint temporaire

Dans le cas de la rente de conjoint temporaire versée jusqu'à l'âge Ω, pour un assuré d'âge x et un conjoint d'âge y, le capital constitutif CC_{co}^{t} est donné par,

$$CC_{co}^{t} = R_{co}^{t}. \sum_{k=0}^{\Omega-y} (1+i)^{-k}.\ {}_{k}p_{y}$$

D'où, la prime pure,

$$\boldsymbol{P_u = R_{co}^{t}. q_x. \sum_{k=0}^{\Omega-y} (1+i)^{-k}.\ {}_{k}p_{y}}$$

3.7.2.2.3 Rente éducation

Afin de tarifer la garantie rente éducation d'un assuré d'âge x on doit, en plus de la mortalité de l'assuré, prendre en compte la mortalité de l'enfant mais aussi, selon les conditions fixées au contrat, l'éventuelle poursuite d'études par ce dernier (voir « Annexe 1. Les tables »).

Classiquement on trouve plusieurs tranches de garanties dépendant de l'âge de l'enfant (noté ici z) avec des prestations croissantes selon la tranche. On considère donc les âges limites n_j de chacune des N tranches j avec les garanties $R_{éduc}^{j}$ correspondantes.

On a donc le capital constitutif suivant,

$$CC_{éduc} = \sum_{j=1}^{N} R_{éduc}^{j} \cdot \left[\left(\sum_{k=\mathrm{Max}(n_{j-1}-z+1;0)}^{\mathrm{Max}(n_j-z;0)} (1+i)^{-k}.\ {}_{k}p_{z}. \frac{l_{x+k}^{éduc}}{l_{x}^{éduc}} \right) - 1 \right]$$

avec $l_{z}^{éduc}$ le nombre de personnes d'âge z qui poursuivent encore des études d'après la table de poursuite d'études considérée et $n_0 = 0$. On a donc comme prime pure,

$$\boldsymbol{P_u = q_x. \sum_{j=1}^{N} R_{éduc}^{j} \cdot \left[\left(\sum_{k=\mathrm{Max}(n_{j-1}-z+1;0)}^{\mathrm{Max}(n_j-z;0)} (1+i)^{-k}.\ {}_{k}p_{z}. \frac{l_{x+k}^{éduc}}{l_{x}^{éduc}} \right) - 1 \right]}$$

3.7.2.3 Tarification de la garantie incapacité

On considère ici la rente mensualisée des indemnités journalières, notée R_{inc}. L'éventuelle franchise est notée f (avec $\bar{f} = \lfloor f \rfloor + 1$) et est exprimée en mois. En notant $l_{x,k}^{inc}$ l'effectif correspondant dans la table de maintien en incapacité pour les individus d'âge x et ayant une ancienneté en incapacité k, on a le capital constitutif suivant pour un assuré d'âge x,

$$CC_{inc} = \begin{cases} R_{inc}.\sum_{k=f}^{36}(1+i)^{-\frac{k-f}{12}}.\frac{l_{x,k}^{inc}}{l_{x,f}^{inc}} \text{ , si } f \in \mathbb{N} \\ R_{inc}.\left((1+i)^{-(\bar{f}-f)}.\sum_{k=\bar{f}+1}^{36}(1+i)^{-\frac{k-\bar{f}}{12}}.\frac{l_{x,k}^{inc}}{l_{x,\bar{f}}^{inc}}\right) \text{ , sinon} \end{cases}$$

On a donc, en posant $u = \bar{f} - f$, et en appliquant l'hypothèse de répartition uniforme des décès aux probabilités de maintien en incapacité,

$$\boldsymbol{P_u = \left[(1-u)q_x^{inc}(\bar{f}-1) + u.\,q_x^{inc}(\bar{f})\right].CC_{inc}}$$

avec $q_x^{inc}(\bar{f})$: la probabilité d'avoir un arrêt de travail d'une durée supérieure à $\bar{f}$ pour un assuré d'âge x.

3.7.2.4 Tarification de la garantie invalidité

On dispose ici d'une garantie sous forme de rente annuelle, noté R_{inv}, versée jusqu'à l'âge Ω. On note $l_{x,k}^{inv}$ l'effectif correspondant dans la table de maintien en invalidité pour les individus d'âge x et ayant une ancienneté en invalidité k. On a pour un assuré d'âge x, le capital constitutif suivant,

$$CC_{inv} = R_{inv}.\sum_{k=0}^{\Omega-x}(1+i)^{-k}.\frac{l_{x,k}^{inv}}{l_{x,0}^{inv}}$$

On a donc,

$$\boldsymbol{P_u = q_x^{inv}.R_{inv}.\sum_{k=0}^{\Omega-x}(1+i)^{-k}.\frac{l_{x,k}^{inv}}{l_{x,0}^{inv}}}$$

avec q_x^{inv} : la probabilité d'entrée en invalidité à l'âge x.

3.7.2.5 Fractionnement des primes

Le principe de fractionnement de la prime pure unique [3] revient à la remplacer par m primes certaines de montant $\frac{P^{[m]}}{m}$ selon le schéma suivant,

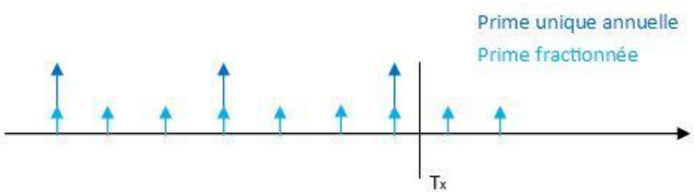


Figure 18. Principe de fractionnement des primes

On a alors,

$$P_u = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{[m]}}{m}.(1+i)^{-\frac{k}{m}} \quad \text{d'où} \quad P = \frac{P^{[m]}}{m}.\frac{1-(1+i)^{-1}}{1-(1+i)^{-\frac{1}{m}}}$$

Ce principe de fractionnement des primes sera notamment repris dans la partie « Simulation » lorsqu'il a été nécessaire de faire des boucles mensuelles à l'intérieur des boucles annuelles.

3.7.3 Tarification collective

Pour déterminer la formule de calcul de la prime globale d'une entreprise, il suffit de connaître la formule de calcul pour un salarié quelconque (voir « Primes pures »). Ainsi, il suffit de savoir que tout se passe comme si l'entreprise contractante souscrivait un contrat temporaire de durée 1 an sur la tête de chaque salarié et qu'elle le renouvelle à chaque début d'année.

Ainsi, à chaque début d'année, on déduit la prime pure globale par sommation des primes pures individuelles des assurés. On peut alors calculer le taux de prime global soit par rapport à la masse salariale soit par rapport à la masse des capitaux garantis. Ce taux est appelé taux de prime exacte.

N.B. En calculant l'âge actuariel qui correspond à l'âge du taux de prime applicable aux garanties, on peut mesurer l'erreur commise d'une tarification basée sur l'utilisation de l'âge moyen arithmétique.

3.8 Provisionnement

On s'intéresse dans cette partie au calcul des **provisions mathématiques** (PM) [11]. Il s'agit d'un passif pour l'assureur. C'est ce que l'assureur doit mettre en réserve pour faire face à ses engagements futurs. Les provisions mathématiques correspondent, à la date de calcul, à la différence de ce que, potentiellement, l'assureur doit à l'assuré et de ce que ce dernier doit, potentiellement, à son assureur. Dans toute cette partie, on se place dans le cas classique d'un contrat de durée 1 an avec une prime pure unique de l'assuré. On reprend les notations de la partie précédente.

3.8.1 Principe

Plus précisément, les provisions mathématiques se traduisent comme étant la différence entre les VAP de l'assureur et de l'assuré. Ainsi, pour un contrat de k années, on aura [3],

$$\boldsymbol{PM_k = VAP(\text{assureur})_k - VAP(\text{assuré})_k}$$

A la date $k=0$ on a bien égalité entre les deux types de VAP (et donc une PM nulle d'après ce qui précède - voir « Principe fondamental »), en revanche, si le contrat est toujours actif après t années cet équilibre est rompu, d'où la constitution de la provision mathématique correspondante.

Dans le cas, pour les contrats de prévoyance collective, des prestations sous forme de rente en cours de liquidation, il n'y a plus de paiement de prime de la part de l'assuré, on a donc,

$$\boldsymbol{PM_k = VAP(\text{assureur})_k}$$

3.8.2 PM des garanties rentes de conjoint

3.8.2.1 Rente de conjoint viagère

On rappelle que les tables à utiliser ici sont soit la TGF-05 pour les femmes (respectivement TGH-05 pour les hommes), soit la TGH-05 pour tous les bénéficiaires. Soit y l'âge du conjoint à la date de calcul, on a,

$$\boldsymbol{PM_{co}^{v} = R_{co}^{v}. \sum_{k=1}^{\infty} (1+i)^{-k}.\ {}_{k}p_{x}}$$

3.8.2.2 Rente de conjoint temporaire

On rappelle que les tables à utiliser ici sont soit la TF00-02 pour les femmes (respectivement TH00-02 pour les hommes), soit la TH00-02 pour tous les bénéficiaires. Soit y l'âge du conjoint à la date de calcul, n la durée de versement de la rente temporaire, on a,

$$\boldsymbol{PM_{co}^{t} = R_{co}^{t}. \sum_{k=1}^{n} (1+i)^{-k}.\ {}_{k}p_{x}}$$

3.8.3 PM de la garantie rente éducation

On utilise ici les mêmes tables que pour la rente de conjoint temporaire et une table de poursuite d'études. On dispose de N tranches j de garanties correspondantes aux montants des rentes $R_{éduc}^{j}$. Soit z l'âge de l'enfant, on a,

$$\boldsymbol{PM_{éduc} = \sum_{j=1}^{N} R_{éduc}^{j} \cdot \left[\left(\sum_{k=\mathrm{Max}(n_{j-1}-z+1;0)}^{\mathrm{Max}(n_j-z;0)} (1+i)^{-k}.\ {}_{k}p_{z}. \frac{l_{x+k}^{éduc}}{l_{x}^{éduc}}\right) - 1\right]}$$

3.8.4 PM de la garantie invalidité

La provision mathématique à constituer pour une rente d'invalidité versée jusqu'à l'âge Ω à un individu d'âge x et d'ancienneté en invalidité a (en années) est la suivante,

$$\boldsymbol{PM_{inv}^{x,a} = R_{inv}. \sum_{k=a+1}^{\Omega-x} (1+i)^{a-k}. \frac{l_{x,k}^{inv}}{l_{x,a}^{inv}}}$$

On remarque que pour $a = 0$, on a $PM_{inv} = CC_{inv}$.

On représente ci-après le montant de la provision mathématique en fonction de l'âge d'entrée en invalidité et de l'ancienneté en invalidité. Ce montant est calculé avec un taux d'actualisation de 2,27% qui a été utilisé afin de réaliser notre simulation.

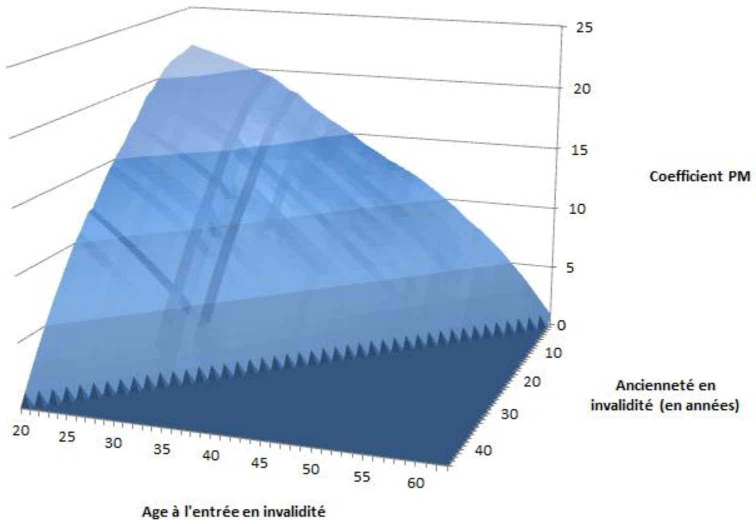


Figure 19. Montant de la provision mathématique pour une rente invalidité de 1€

On remarque que le montant de la provision mathématique décroît de manière relativement linéaire en fonction de l'âge d'entrée et de l'ancienneté en invalidité. L'aspect bien aplani de la nappe résulte directement du lissage de Whittaker-Henderson effectué sur les données brutes du BCAC.

3.8.5 PM de la garantie incapacité

La provision mathématique de la garantie incapacité se divise en deux parties qui correspondent à la provision mathématique pour l'incapacité pure et à la provision mathématique pour l'invalidité en attente.

$$\boldsymbol{PM_{inc}^{x,m} = PM_{incap.\ pure}^{x,m} + PM_{inval.\ en\ attente}^{x,m}}$$

On réutilise les notations vues dans « Les tables du BCAC ». Pour un individu d'âge x et d'ancienneté en incapacité m (en mois), on a donc,

$$\boldsymbol{PM_{incap.\ pure}^{x,m} = R_{inc}.\sum_{k=m+1}^{36}(1+i)^{\frac{m-k}{12}}.\frac{l_{x,k}^{inc}}{l_{x,m}^{inc}}}$$

$$\boldsymbol{PM_{inval.\ en\ attente}^{x,m} = \sum_{k=m+1}^{36}(1+i)^{\frac{m-k}{12}}.\frac{l_{x,k}^{pass}}{l_{x,k}^{inc}}.PM_{inv}^{x+\frac{k}{12},0}}$$

avec $PM_{inv}^{x+\frac{k}{12},0}$ la provision mathématique du risque invalidité pour un individu d'âge x obtenue par interpolation linéaire entre $PM_{inv}^{\lfloor x+\frac{k}{12}\rfloor,0}$ et $PM_{inv}^{\lfloor x+\frac{k}{12}\rfloor+1,0}$.

On se limite ici à des valeurs entières de m à la date de calcul de la provision mathématique compte tenu des hypothèses de travail qui ont été retenues pour effectuer la simulation (voir « Simulation »). En l'occurrence, les tests d'entrée en arrêt de travail sont réalisés mensuellement.

On représente ci-après le montant de la provision mathématique en fonction de l'âge d'entrée en incapacité et de l'ancienneté en incapacité. Ce montant est calculé avec un taux d'actualisation de 2,27% qui a été utilisé afin de réaliser la simulation.

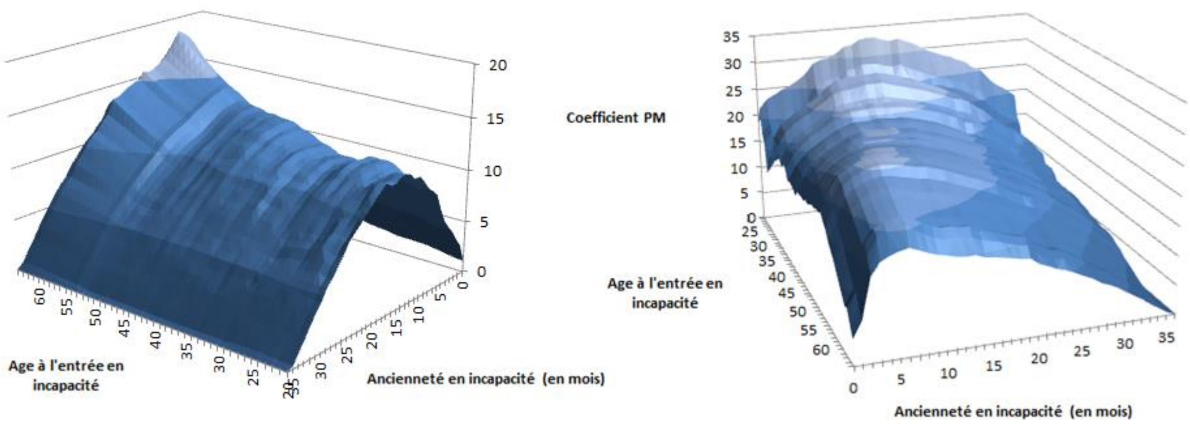


Figure 20. Montant de la provision mathématique d'une rente incapacité de 1€ sans l'invalidité en attente (à gauche) et avec (à droite)

Tout d'abord, nous pouvons remarquer que ces deux nappes sont plus irrégulières que la nappe de la provision mathématique invalidité. Cela est dû au fait qu'aucun lissage n'a été effectué sur la table de maintien en incapacité du BCAC.

La nappe de gauche correspond à l'incapacité pure. Elle présente une structure parabolique dont les extrema pour chaque âge d'entrée en invalidité se positionnent autour de l'ancienneté moyenne. L'augmentation de la provision mathématique sur la première moitié de la plage d'ancienneté est due à la diminution progressive des taux de sortie. En effet, les arrêts de travail ont tendance à être assez courts sur les premiers mois grâce à des taux de sortie élevés mais au-delà d'un certain seuil le maintien en arrêt de travail devient de plus en plus certain. Ainsi, la diminution de la provision sur la seconde moitié de la plage des anciennetés en incapacité est due à la fois à la diminution du temps maximum que l'individu va encore pouvoir passer en incapacité mais aussi à l'augmentation des passages en invalidité.

La nappe de droite correspond à la provision mathématique incapacité complète qui prend donc en compte la provision mathématique pour l'incapacité pure et la provision mathématique pour l'invalidité en attente. Le décalage observé sur les positions des maxima est dû à la structure triangulaire de la table d'invalidité. Plus l'âge d'entrée en incapacité est élevé, plus l'augmentation de la provision mathématique est violente sur les premiers mois passés en incapacité. On observe qu'au-delà de la valeur maximale de la provision, pour chaque âge d'entrée, la diminution de la provision mathématique est plus faible. Cela entraîne des montants de la provision mathématique importants sur des plages d'ancienneté en incapacité beaucoup plus étendues.

4 Réassurance

La réassurance correspond à un degré de sécurité supplémentaire pour se prémunir contre les risques en général. Cette « assurance de second niveau » est généralement mise en place afin d'éviter que des sinistres cumulatifs ou de très grande ampleur ne viennent impacter trop fortement les résultats des organismes d'assurances. Le réassureur (cessionnaire) intervient auprès d'un organisme assureur (cédante) qu'il réassure en prenant à sa charge, moyennant une prime, tout ou partie des sinistres relatifs aux polices d'assurances incluses dans le périmètre de la réassurance. Le réassureur n'est quasiment jamais en contact direct avec les assurés de la cédante, ni avec les personnes lésées et, surtout, la cédante répond seule et intégralement aux engagements vis-à-vis des assurés.

La réassurance est donc un moyen efficace de transfert de risque qui aide au pilotage financier des résultats des organismes d'assurances mais le réassureur est aussi de plus en plus un support et conseiller technique auprès de ses clients qui peut les aider, entre autres, au développement de nouveaux produits.

4.1 Le contrat de réassurance

On observe différents types de réassurances selon que le type de contrat soit facultatif ou non [12].

Cédante \ Cessionnaire	Facultatif	Obligatoire
Facultatif	FAC	Facob
Obligatoire	-	Traité

Les traités couvrent classiquement l'intégralité d'une branche ou d'une sous-branche (prévoyance, automobile,…) d'une cédante et implique l'acceptation de tous les risques qui appartiennent à la branche à réassurer. Ce type de contrats couvre donc des sommes extrêmement importantes. Les contrats dits « *Facultatives* » (FAC et Facob) couvrent un ou plusieurs risques définis spécifiquement, ils sont soit facultatifs pour la cédante et le cessionnaire (FAC) soit facultatifs pour la cédante mais obligatoires à souscrire pour le cessionnaire (Facob).

Etant donné que les sommes en jeu dans un contrat de réassurance sont particulièrement élevées, c'est souvent que la cédante se réassure auprès de plusieurs cessionnaires sur le même principe que la coassurance. Dès lors, un réassureur, dit apériteur, est choisi parmi l'ensemble des réassureurs de la cédante afin de s'occuper de la gestion du contrat.

La grande majorité des contrats de réassurance sont à renouvellement annuel. A chaque période de renouvellement, la cédante elle-même ou par l'intermédiaire de son courtier émet un appel d'offre de réassurance qui précise le type de contrat souhaité ainsi que l'ensemble de ses modalités. En réponse à cet appel d'offre, les réassureurs indiquent leur prix et éventuellement la part de risque qu'ils souhaitent prendre sur ce contrat. Une fois le ou les réassureurs choisis, la cédante leur transmet une note de couverture définitive. Plus tard, est envoyé le document officiel, à signer par chaque partie, qui définit plus finement les conditions du contrat.

La réassurance est caractérisée par deux types de formes distinctes : la réassurance proportionnelle et la réassurance non proportionnelle [12].

Type de Réassurance / Cessions	Facultatives	Obligatoires
Réassurance proportionnelle	Oui	Oui
Réassurance non proportionnelle	Oui	Oui

Sur les types de traités classiques, détaillés ci-après, la cession en réassurance proportionnelle peut être facultative ou obligatoire de même que la cession en réassurance non proportionnelle.

4.2 Réassurance proportionnelle

On parle de réassurance proportionnelle quand il y a une relation directe de proportionnalité entre le montant de la prime de réassurance et la part de risque cédée au réassureur. Ainsi, si le réassureur accepte de couvrir X% (taux de cession) des sinistres associés à un risque, la prime de réassurance correspondra à X% des primes associées à ce risque. Dans cette forme de réassurance, le cessionnaire et la cédante sont donc extrêmement liés.

Cette forme de réassurance est la plus simple mais elle est souvent très coûteuse. On distingue principalement deux types de réassurance proportionnelle : la Quote-Part et l'Excédent de plein.

4.2.1 La réassurance Quote-Part

Cette forme de réassurance est la plus souple à mettre en œuvre d'un point de vue administratif et comptable [8]. Les cessions et les acceptations sont obligatoires dans le cadre des limites fixées au traité de réassurance dans les modalités de souscription des risques mais il y a possibilité de cessions facultatives au-delà des limites du traité.

Dans une Quote-Part, le réassureur partage un pourcentage ω équivalent des primes et des sinistres du portefeuille assuré. Si on note P_i le montant de la prime individuelle i et P le montant total des primes, S_i le montant du sinistre individuel i et S le montant total des sinistres, le principe du Quote-Part se traduit comme suit,

Risque	Total	Conservé	Cédé
Prime	$P = \sum_i P_i$	$(1-\omega)P = (1-\omega).\sum_i P_i$	$\omega P = \omega.\sum_i P_i$
Sinistres	$S = \sum_i S_i$	$(1-\omega)S = (1-\omega).\sum_i S_i$	$\omega S = \omega.\sum_i S_i$

Ce mécanisme de protection est efficace et aide au développement du portefeuille, en particulier, quand les risques sont mal connus. Il aide donc au lancement de nouveaux produits mais il peut aussi traduire le souhait d'une cédante qui ne souhaite pas s'exposer sur un risque particulier. Il est principalement utilisé sur des portefeuilles homogènes.

4.2.1.1 Avantages

La Quote-Part permet un partage équitable des risques et permet une diminution importante des engagements et donc de l'exigence en marge de solvabilité. Elle permet une stabilisation du résultat de la cédante. Elle revêt, de plus, l'avantage de bénéficier d'une gestion simple.

4.2.1.2 Inconvénients

La cession importante du risque entraîne inéluctablement une cession importante des primes. Du fait du caractère proportionnel, le taux de cession ω est identique quel que soit le capital assuré. Au plus le montant du sinistre est important, au plus la conservation est importante elle aussi. Ainsi, ce programme ne protège pas réellement contre des cumuls de sinistres ou des sinistres de gravité, donc, contre des sinistralités catastrophiques.

4.2.2 La réassurance en Excédent de Plein

Cette forme de réassurance est aussi très simple à mettre en œuvre mais elle nécessite une information tête par tête de l'exposition du portefeuille car le taux de cession est calculé par police [8].

On définit les bornes suivantes :

- Le plein de souscription : correspond au montant maximal que l'assureur peut souscrire sur une seule et même tête, calculé pour chaque contrat du portefeuille. Il est généralement convenu contractuellement entre la cédante et le cessionnaire,
- Le plein de rétention : correspond au montant maximal que la cédante souhaite conserver pour son propre compte sur une seule et même tête, au cumul des contrats. Il est déterminé par la cédante afin de minimiser son risque de faillite.

La cession proportionnelle se fait au-delà du plein de rétention (PR) dans la limite du plein de souscription (PS). Il n'y a donc pas de transfert illimité de risque. La prime de réassurance est toujours proportionnelle au taux de cession défini pour chaque police. De la même manière que pour la Quote-Part, les cessions et les acceptations sont obligatoires dans le respect des limites fixées au traité de réassurance et il y a la possibilité de cessions facultatives au-delà des limites du traité.

Le taux de cession de chaque police i est calculé de la manière suivante : $\omega_i = \frac{\text{Somme assurée}_i - \text{PR}}{\text{Somme assurée}_i}$; et est donc basé sur les sommes assurés et non le montant des sinistres.

Si on note P_i le montant de la prime individuelle i et P le montant total des primes, S_i le montant du sinistre individuel i et S le montant total des sinistres, le principe de l'Excédent de plein se traduit comme suit [8],

Risque	Total	Conservé	Cédé
Prime	$P = \sum_i P_i$	$\sum_i (1-\omega_i).P_i$	$\sum_i \omega_i.P_i$
Sinistres	$S = \sum_i S_i$	$\sum_i (1-\omega_i).S_i$	$\sum_i \omega_i.S_i$

La réassurance en Excédent de Plein est utile pour le développement des portefeuilles sur des capitaux importants. Elle est principalement appliquée sur des portefeuilles dont les risques sont hétérogènes et dont les capitaux n'évoluent pas dans le temps du fait du plein de rétention qui est fixe.

4.2.2.1 Avantages

L'Excédent de Plein permet un écrêtement des sinistres et une réduction de la volatilité du résultat. Elle permet donc une réduction générale de l'engagement tout en limitant plus le volume de prime cédé qu'avec une réassurance Quote-Part.

4.2.2.2 Inconvénients

Il y a un partage inégal du risque entre la cédante et le cessionnaire ce qui entraîne une potentielle asymétrie des résultats des deux parties. Ce type de réassurance nécessite énormément d'information tant pour la tarification que pour le suivi des risques ce qui entraîne une gestion administrative assez lourde. Si l'Excédent de Plein protège globalement mieux des sinistres de gravité que la Quote-part, il n'assure pas une protection optimale en cas de cumul de sinistres.

4.3 Réassurance non proportionnelle

En opposition avec la réassurance proportionnelle, la prime d'un programme de réassurance non proportionnelle n'est pas proportionnellement liée à la part de risque cédée. Ce type de réassurance a pour objectif principal de protéger contre la sinistralité catastrophique, ce que ne peut pas faire la réassurance proportionnelle.

Ce type de réassurance est caractérisé par deux bornes [8] : la priorité f et la portée p. La priorité (resp. la portée) correspond à la limite en deçà (resp. au-dessus) de laquelle le réassureur n'interviendra pas. Le schéma suivant en illustre le principe,

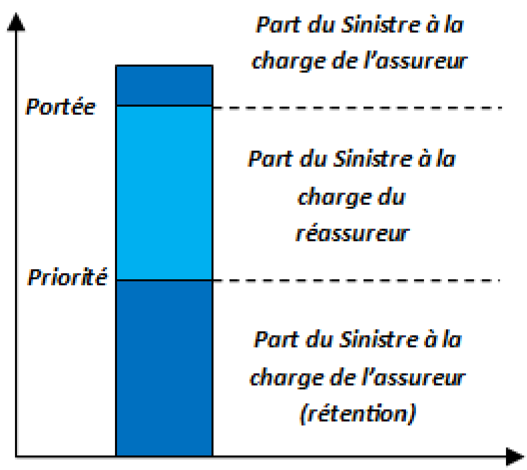


Figure 21. Principe de la réassurance non proportionnelle

La réassurance non proportionnelle permet une meilleure maîtrise du coût qu'une réassurance proportionnelle. Il est à noter que les commissions de courtage sont deux à dix fois supérieures sur ce type de produit par rapport à un programme proportionnel en termes de taux. Cependant, en termes de montants, les commissions de courtage sont équivalentes en proportionnel et en non-proportionnel puisque la réassurance non proportionnelle s'applique à des tranches hautes, donc la base sur laquelle on tarifie est plus faible. On observe ici aussi deux formes principales de réassurance non proportionnelle : l'Excédent de Sinistre (XS) et l'Excédent de perte (Stop Loss).

4.3.1 Excédent de Sinistre XS

On distingue au sein des programmes XS les XS par risque et les XS par évènement. On note p XS f, le programme XS de priorité f et de portée p.

4.3.1.1 XS par risque

En contrepartie d'une prime de réassurance dont le taux est fixé au début de l'exercice, le réassureur prend en charge les montants des sinistres par risque compris entre la priorité et la portée.

Il convient alors de définir ce qu'est un risque. Il peut s'agir d'une tête assurée ou d'une police d'assurance. Dans le cas où le risque est une tête, la franchise du programme s'applique au cumul des capitaux assurés sur une même tête. Il y a donc une unique franchise par tête. Dans le cas où le risque est une police d'assurance, s'il y a pluralité des contrats d'assurance sur une même tête assurée, le réassureur applique à chaque sinistre de chaque contrat la priorité de l'XS. Il y a donc autant de franchises qu'il y a de polices par tête.

Si on note X_i le $i^{\text{ème}}$ sinistre survenu, $i \in [\![1; N]\!]$, pendant l'exécution du programme XS, on a les restants à charge S suivants pour chaque partie au contrat,

$$S^{\text{Organisme Assureur}} = \sum_i X_i - \text{Min}(\text{Max}(X_i - f\,;0)\,;p - f)$$

$$S^{\text{Réassureur}} = \sum_i \text{Min}(\text{Max}(X_i - f\,;0)\,;p - f)$$

En ce qui concerne la prime de réassurance, on a $\text{Prime} = \text{Taux}\,.\,\text{Assiette}$

Le Taux est déterminé par des calculs tels que le Burning Cost (voir « Cotation ») et l'assiette, en assurance prévoyance collective, correspond généralement à la masse salariale de l'entreprise assurée.

4.3.1.1.1 Avantages

Ce type de programme permet une diminution non négligeable du coût de la réassurance par rapport à un contrat de réassurance proportionnelle. Le système de gestion par risque reste simple à mettre en œuvre pour le réassureur ce qui diminue ses coûts de gestion relatifs au programme. Il permet un rééquilibrage du portefeuille sur la partie des risques conservés dont les montants des sinistres sont homogénéisés tout en prenant en charge d'éventuels cumuls.

4.3.1.1.2 Inconvénients

Le risque de déviation de la fréquence des sinistres n'est pas pris en charge et le coût de ce type de contrat varie beaucoup plus, même s'il reste plus faible, qu'une réassurance proportionnelle selon la politique de souscription du réassureur et la sinistralité passée.

4.3.1.2 XS par évènement

Le principe du XS par évènement [8] est le même que celui du XS par risque sauf qu'il couvre la cédante en cas de sinistres consécutifs à un même évènement. Dans ce cas particulier, la priorité est exprimée à la fois en nombre de têtes couvertes et en unité monétaire tandis que la portée est précisée uniquement en unité monétaire. Ainsi, sur chaque tête le sinistre doit dépasser la priorité pour que le réassureur intervienne, l'ensemble cumulé ne pouvant pas excéder la portée.

4.3.1.2.1 Avantages

Ce type de programme limite significativement l'impact des cumuls de sinistres issus d'un même évènement mais il nécessite du coup une identification précise de cet évènement pour que la réassurance opère.

4.3.1.2.2 Inconvénients

Le prix, dépendant de l'exposition au risque de la cédante, est très sensible aux informations fournies par celle-ci. Le programme inclut des exclusions précises qui peuvent fortement limiter la portée du programme.

4.3.2 Excédent de perte (Stop Loss)

La principale différence entre le Stop Loss et tous les autres types de programmes de réassurance c'est que l'on ne s'intéresse pas aux montants des sinistres mais au résultat de la cédante [8]. En effet, les bornes de priorité et de portée ne sont plus exprimées en montants des sinistres mais par rapport à un indicateur sur le résultat, en général le ratio des sinistres à primes (S/P – voir ci-dessous).

$$\text{Ratio S/P} = \frac{\text{Coût des sinistres}}{\text{Total des primes perçues}}$$

De fait, il s'agit de la forme de réassurance la plus protectrice pour la cédante puisqu'elle ne s'intéresse pas à couvrir un type de risque (de fréquence et/ou d'intensité) mais, en s'attaquant directement au résultat, elle permet de couvrir une dérive de sinistralité de n'importe quel type.

D'autres ratios que le ratio S/P peuvent être utilisés afin de définir les bornes du programme comme on pourra le voir dans la suite.

Si on note X_i le $i^{\text{ème}}$ sinistre survenu, $i \in [\![1;N]\!]$, D le dénominateur du ratio utilisé pour définir les bornes sur Stop Loss, on a les restants à charge S suivants pour chaque partie,

$$S^{\text{Organisme Assureur}} = \sum_i X_i - \text{Min}\left(\text{Max}\left(\frac{\sum_i X_i}{D} - f\,;0\right)\,;p\right).D$$

$$S^{\text{Réassureur}} = \text{Min}\left(\text{Max}\left(\frac{\sum_i X_i}{D} - f\,;0\right)\,;p\right).D$$

4.3.2.1 Avantages

La protection Stop Loss est efficace quel que soit le type de sur-sinistralité subi et assure une protection immédiate du résultat.

4.3.2.2 Inconvénients

Ce type de couverture est généralement très cher car les bornes de priorité et de portée étant variables, les niveaux des capitaux assurés sont hétérogènes. De même, le prix croît avec la variabilité de la sinistralité passée. La détermination des limites peut s'avérer sensible. De plus, l'aspect de l'aléa moral peut entrer en jeu avec une possible déresponsabilisation de la cédante sur la gestion de son portefeuille.

4.4 Tarification

Nous allons présenter, dans cette partie, des méthodes de cotation pour les deux grands types de traités non proportionnels qui ont été utilisés afin d'évaluer le coût de différents programmes de réassurance d'un régime de prévoyance collective dont la simulation est présentée en Partie 5. On trouvera ci-après des méthodes de tarification non paramétrique et paramétrique.

4.4.1 Cotation sur expérience

La cotation d'un traité non proportionnel de type XS peut se faire selon la méthode dite du « Burning Cost » (ou taux de flambage) [15] qui se base sur l'hypothèse forte suivante : « *la connaissance de la sinistralité passée du portefeuille permet d'estimer la charge attendue des sinistres pour le cessionnaire* ». Il s'agit donc d'une méthode empirique basée sur la charge de la sinistralité passée du réassureur. Néanmoins, d'une année sur l'autre, les montants mis en jeu subissent des évolutions telles que l'inflation qui obligent à un retraitement des données avant d'appliquer la cotation en Burning Cost.

4.4.1.1 Transformation « As if » des données

Les données de la cédante vont être modifiées pour obtenir pour chaque année antérieure utilisée dans la cotation une statistique « As if » [6] qui sera comparable aux données de l'année de la cotation. Il est donc nécessaire pour cela d'indexer à la fois les sinistres et les primes perçues et les soumettre aux mêmes conditions de réassurance que celles de l'année de cotation.

4.4.1.1.1 Indexation des sinistres

Le principe appliqué ici est qu'un sinistre de même montant X survenu il y a dix ans ne s'apprécie pas de la même manière qu'un sinistre de même montant survenu cette année du fait de l'érosion monétaire. On peut revaloriser le sinistre datant de dix ans, comme suit, pour le rendre comparable aux sinistres contemporains [6].

Si on note n l'année de cotation, I_k l'indice de revalorisation de l'année k, X_k le montant d'un sinistre survenu au cours de l'année k, et X_k^n la valeur « As if » du sinistre de l'année k vu de l'année n, on a,

$$X_k^n = X_k.\frac{I_n}{I_k}$$

Nous avons retenu, lors de la simulation, comme indice de revalorisation I le taux annuel d'inflation.

4.4.1.1.2 Indexation des primes

Les primes sont influencées à la fois par l'érosion monétaire mais aussi par les cycles tarifaires des prestataires d'assurances [6]. Il convient donc de prendre en compte en plus de l'inflation un indice supplémentaire. Ce second paramètre est un indice de changement de tarif qui correspond au coût de 1 € de somme assurée au cours de l'année considérée et qui est donc indépendant de l'inflation contrairement au coût total de la police d'assurance.

Si on note n l'année de cotation, I_k l'indice d'inflation de l'année k, T_k l'indice de changement de tarif de l'année k, P_k le montant de la prime de l'année k, et P_k^n la valeur « As if » de la prime de l'année k vue de l'année n, on a,

$$P_k^n = P_k.\frac{I_n}{I_k}.\frac{T_n}{T_k}$$

4.4.1.2 Taux du Burning Cost

Calculer le taux de flambage revient à considérer le rapport des montants des sinistres pris en charge par le réassureur avec le total des primes perçues. Deux estimateurs sans biais [6] sont alors envisageables. On note n le nombre d'années d'historique utilisé pour calculer le taux, X_k le montant des sinistres pris en charge par le réassureur au cours de l'année k, et P_k le montant des primes de l'année k,

$$\text{Taux}_{\text{BC}}^{1} = \frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1}\frac{X_k}{P_k} \qquad \text{et} \qquad \text{Taux}_{\text{BC}}^{2} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} X_k}{\sum_{k=0}^{n-1} P_k}$$

Seulement, nous allons retenir comme estimateur le $\text{Taux}_{\text{BC}}^{2}$ car il est plus stable que le $\text{Taux}_{\text{BC}}^{1}$. En effet, si une année i aucun sinistre ne vient à être pris en charge par le réassureur, considérant la formule du $\text{Taux}_{\text{BC}}^{1}$, le ratio $\frac{X_k}{P_k}$ va s'annuler pour $k = i$, empêchant ainsi de prendre en considération les primes perçues au cours de cette année. Ce problème ne se posera pas avec le $\text{Taux}_{\text{BC}}^{2}$.

Il est important de noter que cette méthode doit être appliquée à des tranches disposant de suffisamment d'historique de sinistralité [8] pour permettre la tarification car, même s'il n'y a pas eu de sinistre bénéficiant de la couverture de réassurance, cela ne signifie pas que cette couverture est gratuite.

4.4.2 Cotation paramétrique

La cotation paramétrique [16] diffère de la cotation par Burning Cost dans le sens où l'on modélise le coût et la fréquence des sinistres à partir de lois usuelles. Le processus classique revient à retraiter l'historique des sinistres bruts avec la création d'une statistique As if de la même manière que présentée pour la cotation par expérience. Dès lors, on peut estimer les paramètres de la loi du nombre de sinistres et de la loi des montants des sinistres individuels.

On applique par la suite les clauses particulières de la réassurance (dans notre cas, uniquement la priorité et la portée du programme XS) afin de modéliser la loi des montants des sinistres à la charge du réassureur.

On note :

- X la variable aléatoire du montant « As if » de chaque sinistre individuel
- Y la variable aléatoire du montant de chaque sinistre individuel à la charge du réassureur telle que $Y = p.\mathbf{1}_{(X>l)} + (X - f).\mathbf{1}_{(f\leq X\leq l)}$, avec f la priorité, p la portée et l la limite de la tranche de réassurance ($l = f + p$).
- N la loi du nombre de sinistres

Le taux de prime pure de réassurance, sur la base du modèle collectif, s'obtient alors grâce à la formule suivante [16] :

$$P_{\text{pure}} = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right) = \mathbb{E}[N].\,\mathbb{E}[Y]$$

Où $\mathbb{E}(Y) = l.\,\mathbb{P}[X > l] - f.\,\mathbb{P}[X \geq f] + \mathbb{E}\big[X.\mathbf{1}_{(f\leq X\leq l)}\big]$

La cotation paramétrique permet de pallier aux faiblesses du Burning Cost dès que le nombre de données n'est pas suffisamment important et permet donc de réaliser une cotation sur des tranches peu travaillantes.

Dans notre estimation de la tarification de la réassurance (dont les résultats sont présentés dans la dernière partie), nous avons privilégié la tarification par Burning Cost sur les tranches travaillantes et dès que les résultats, entre cotation non paramétrique et cotation paramétrique, ont divergé nous avons basculé sur les résultats de la cotation paramétrique.

Les différentes lois qui ont été testées pour approcher la distribution des données d'origine dans le cas du programme XS sont : la loi exponentielle, la loi normale, la loi log-normale, la loi Weibull, la loi Gamma, la loi Pearson5, la loi GEV, la loi Pareto généralisée (voir « Annexe 5 »). Leurs adéquations seront testées dans la dernière partie par les tests de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson-Darling (voir « Annexe 4 »).

4.4.3 Cotation d'un programme Stop Loss

Afin de tarifer des programmes de réassurance Stop Loss, nous avons appliqué la méthode de Galton [8] qui contrairement au Burning Cost ne se base pas sur une approche non paramétrique des données empiriques mais passe par la modélisation des données historiques au travers d'une loi de Galton [8] (appelée aussi loi log-normale). Cette modélisation est généralement utilisée pour des Stop Loss dont la priorité et la portée sont exprimées en fonction de ratios S/P mais, étant donné que l'objectif de ce mémoire n'est pas de trouver un programme de réassurance qui protège l'ensemble du résultat d'un compte de prévoyance collective mais bien uniquement sa provision d'égalisation, les bornes de priorité et de portée considérées sont exprimées en pourcentage de consommation de la provision d'égalisation.

On avance donc que la consommation de la provision d'égalisation suit une loi de Galton. Cette décision se justifie grâce au fait que le niveau de la provision d'égalisation est proportionnellement lié au résultat de l'exercice (voir « Mécanismes d'affectation du résultat ») et par là-même au ratio S/P. Donc, si l'on considère, comme l'indique cette méthode, que le ratio S/P suit une loi de Galton, alors le niveau de consommation de la provision d'égalisation peut lui aussi suivre une loi de Galton.

Nous soulignons que nous aurions tout à fait pu réaliser une cotation par Burning Cost seulement comme il apparaît très clairement que l'on souhaite appliquer ce programme à une tranche peu travaillante (puisque la provision d'égalisation ne doit servir qu'en cas de sinistralité extrême) nous avons directement écarté cette approche.

4.4.3.1 Méthode de Galton

On considère R le vecteur des ratios historiques observés de dimension n avec $R^{Max} = \text{Max}(R_1, \dots, R_n)$ et $R^{min} = \text{Min}(R_1, \dots, R_n)$. On note m et σ respectivement la moyenne et l'écart-type empirique de R.

Le principe est de modéliser la distribution de R par une loi de Galton de densité,

$$f(x) = \frac{\alpha}{x\sqrt{\pi}}.\exp\left(-\left(\alpha.\ln\left(\frac{x}{\beta}\right)\right)^2\right)$$

Dont les paramètres sont les suivants,

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2.\ln\left(1+\frac{\sigma^2}{m^2}\right)}}$$

$$\beta = \frac{m^2}{\sqrt{\sigma^2 + m^2}}$$

Où α représente le paramètre de position et β le paramètre d'échelle de la distribution des logarithmes de la variable aléatoire suivant la loi de Galton.

On peut, à partir de là, déterminer notamment la valeur la plus probable du ratio grâce à la formule,

$$R^{Maj} = \beta.\exp\left(-\frac{1}{2\alpha^2}\right).100$$

On pose la fonction intégrale suivante,

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int_0^t \exp(-z^2)\,.\mathrm{dz}$$

Dès lors, deux cas se posent :

- Cas de portée limitée : On considère que priorité $=\ R^{min}$ et portée $=\ R^{Max}$
- Cas de portée illimitée : On considère que priorité $=\ R^{min}$ et portée $=\ \infty$

4.4.3.1.1 Cas de portée limitée

On effectue les calculs suivants :

$$I_1 = \frac{m}{2}.\left[\Theta\left(\alpha.\ln\left(\frac{R^{Max}}{\beta}\right)-\frac{1}{2\alpha}\right)-\Theta\left(\alpha.\ln\left(\frac{R^{min}}{\beta}\right)-\frac{1}{2\alpha}\right)\right]$$

$$I_2 = \frac{R^{min}}{2}.\left[\Theta\left(\alpha.\ln\left(\frac{R^{Max}}{\beta}\right)\right)-\Theta\left(\alpha.\ln\left(\frac{R^{min}}{\beta}\right)\right)\right]$$

$$I_3 = \frac{R^{Max}-R^{min}}{2}.\left[1-\Theta\left(\alpha.\ln\left(\frac{R^{Max}}{\beta}\right)\right)\right]$$

On rappelle que pour toute variable aléatoire $X \sim N(0,1)$ l'égalité suivante se vérifie,

$$\Theta\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \mathbb{P}\big[X \in [-t;t]\big]$$

De plus, on notera que le logarithme d'une variable aléatoire suivant une loi log-normale suit une loi normale. Avec ces éléments, on interprète la signification des termes I_1, I_2 et I_3 de la manière suivante :

- Le terme $\left[\Theta\left(\alpha.\ln\left(\frac{R^{Max}}{\beta}\right)-\frac{1}{2\alpha}\right)-\Theta\left(\alpha.\ln\left(\frac{R^{min}}{\beta}\right)-\frac{1}{2\alpha}\right)\right]$ de I_1 donne la probabilité que la sinistralité, connaissant l'historique des ratios de sinistralité, ouvre droit à la prise en charge par le réassureur sans que le montant global de celle-ci ne complète forcément la tranche de réassurance intégralement.

- Le terme $\left[\Theta\left(\alpha.\ln\left(\frac{R^{Max}}{\beta}\right)\right) - \Theta\left(\alpha.\ln\left(\frac{R^{min}}{\beta}\right)\right)\right]$ de I_2 donne la probabilité que la sinistralité n'ouvre pas droit à la réassurance, cela signifie que celle-ci n'excède pas la valeur de priorité.
- Le terme $\left[1 - \Theta\left(\alpha.\ln\left(\frac{R^{Max}}{\beta}\right)\right)\right]$ de I_3 donne la probabilité que la sinistralité excède la borne de limite de la réassurance. Par conséquence, le réassureur doit prendre en charge l'intégralité de la tranche de réassurance.

Les termes $\frac{m}{2}$, $\frac{R^{min}}{2}$ et $\frac{R^{Max}-R^{min}}{2}$ permettent d'obtenir les équivalents tarifaires pour respectivement I_1, I_2 et I_3 par rapport aux probabilités qui ont été calculées. Sachant que la division par 2 permet de se ramener sur les valeurs positives uniquement.

On détermine alors le Taux pur grâce à la formule suivante,

$$\text{Taux pur} = (I_1 - I_2 + I_3).100$$

Auquel on ajoute un coefficient de sécurité directement relié au coefficient de dispersion de la distribution,

$$\text{Coeff. Sécu.} = \frac{\sigma}{m}.100$$

D'où,

$$\text{Taux} = \left(1 + \frac{\text{Coeff. Sécu.}}{100}\right).\text{Taux pur}$$

4.4.3.1.2 Cas de portée illimitée

On effectue les calculs suivants :

$$J_1 = \frac{m}{2}.\left[1 - \Theta\left(\alpha.\ln\left(\frac{R^{min}}{\beta}\right) - \frac{1}{2\alpha}\right)\right]$$

$$J_2 = \frac{R^{min}}{2}.\left[1 - \Theta\left(\alpha.\ln\left(\frac{R^{min}}{\beta}\right)\right)\right]$$

Les termes J_1 et J_2 s'interprètent de la même manière que les termes I_1 et I_2 du cas d'une portée limitée. La seule différence réside le terme J_1 qui donne le prix pour une sinistralité potentielle ouvrant droit à la réassurance en intégrant le risque (initialement traduit dans I_3) que celle-ci puisse être illimitée mais, dans le cas de la portée illimité, couverte par le réassureur.

On détermine ainsi le Taux pur grâce à la formule suivante,

$$\text{Taux pur} = (J_1 - J_2).100$$

Auquel on ajoute un coefficient de sécurité directement relié à la mesure de dispersion de la distribution,

$$\text{Coeff. Sécu.} = \frac{\sigma}{m}.100$$

D'où,

$$\text{Taux} = \left(1 + \frac{\text{Coeff. Sécu.}}{100}\right).\text{Taux pur}$$

Le taux alors obtenu est à multiplier avec le terme au dénominateur du ratio utilisé pour définir la priorité et la portée du Stop Loss afin d'obtenir le montant monétaire à payer.

4.4.3.2 Approximation de la fonction d'erreur

La principale difficulté technique dans la cotation par méthode de Galton est le passage par la fonction d'erreur Θ qui ne possède pas de solution analytique. Même si le logiciel Excel dispose d'une fonction préprogrammée pour calculer cette fonction (commande « ERF »), celle-ci n'existe pas en VBA (langage utilisé pour réaliser notre simulation). Il est donc nécessaire d'approcher cette intégrale. Nous avons pour cela retenu une approche par estimation polynomiale.

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.\int_0^t \exp(-z^2).\mathrm{dz}$$

En se plaçant au voisinage de 0, on a le développement limité suivant,

$$\exp(-t^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}$$

Il vient alors le développement limité de la fonction Θ au voisinage de 0 suivant,

$$\Theta(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)k!}$$

Donc la fonction Θ peut être approximée par le polynôme de degré $2n + 1$ suivant,

$$\Theta(t) \approx P_{2n+1}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}.\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)k!} + R(t)$$

Avec $R(t)$ le reste de la troncature polynomiale à l'ordre n. On observe les écarts de notre estimation avec la fonction « ERF » du logiciel Excel sur le graphe suivant,

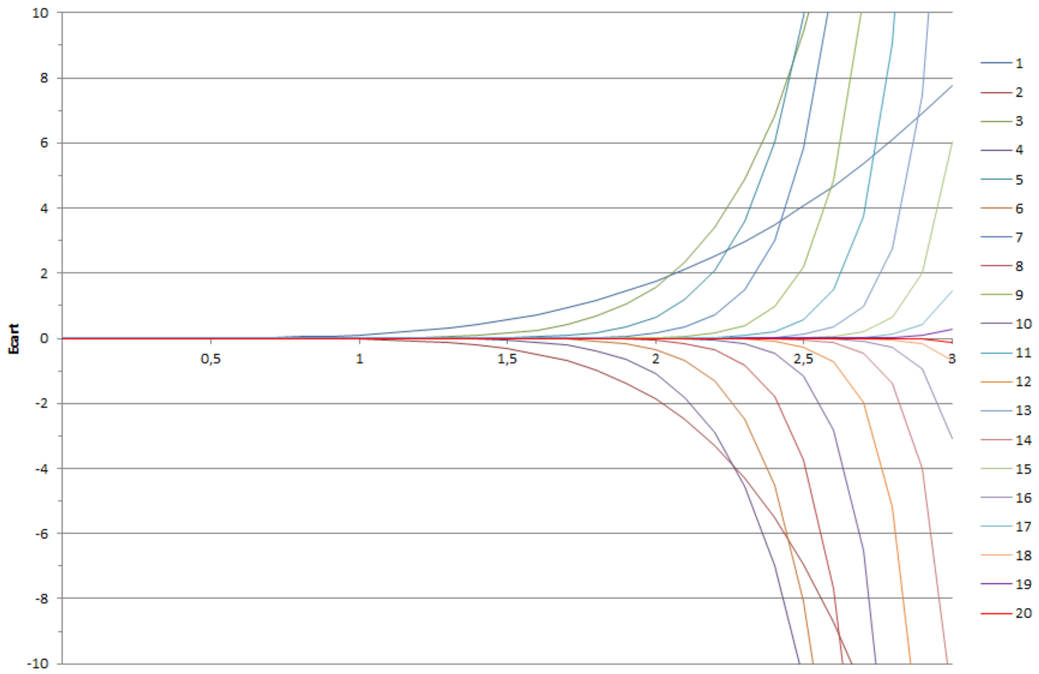


Figure 22. Ecart de l'estimation polynomiale de la fonction d'erreur en fonction du degré du polynôme

On remarque que quel que soit le degré du polynôme, pour des valeurs proche de 0, celui-ci converge très bien. C'est au-delà de la valeur $1{,}5$ que des écarts d'estimations plus ou moins importants selon les valeurs de n se font sentir. En revanche, pour les valeurs de n supérieures à 18, la convergence de l'estimation reste très bonne même pour des valeurs éloignées de 0. Nous avons donc retenu la valeur $n = 20$ pour l'approximation de la fonction d'erreur.

4.4.4 Autres approches paramétriques

De la même manière que vue précédemment (voir Partie 4.2.2) pour la cotation paramétrique du programme XS nous pouvons approcher la distribution des ratios par une loi usuelle et obtenir la prime pure à partir de l'espérance de la variable aléatoire de la charge annuelle du réassureur sur cette garantie $P_{\text{pure}} = \mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{N} Y_i\right)$.

Les lois qui ont été testées et dont les résultats sont présentés dans la dernière partie sont : la loi Beta, la loi GEV, la loi Pearson5, la loi Weibull, la loi Gamma, la loi Normale, la loi Pareto généralisée et la loi exponentielle. Leurs adéquations seront validées grâce aux tests de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson-Darling.

4.5 Optimisation de la réassurance

Une fois le type de programme de réassurance choisi et la tarification effectuée, il convient de pouvoir déterminer quel programme en particulier serait le plus efficace. Il y a alors deux paramètres à prendre en compte : le coût de la réassurance à minimiser et le gain en capital dû au risque cédé à maximiser. Si l'on dispose de tout ce qui est nécessaire pour évaluer le premier critère il va nous falloir définir une mesure de risque afin de pouvoir appréhender le second.

4.5.1 Mesures de risques

Une mesure de risque est une fonction définie sur l'espace des variables aléatoires et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle permet d'estimer le niveau de risque associé à une variable aléatoire. Nous allons présenter deux des principales mesures de risques utilisées pour estimer des risques monétaires.

4.5.1.1 *Value at Risk*

On appelle *Value at Risk* [10] de niveau $\alpha \in [0\,;1]$ le quantile de niveau α,

$$VaR_\alpha(X) = x_\alpha \quad \text{où} \quad \mathbb{P}[X \leq x_\alpha] = \alpha$$

Ce qui peut se traduire sous la forme,

$$VaR_\alpha(X) = \inf\{x, \mathbb{P}[X \leq x] \geq \alpha\} = F_X^{-1}(\alpha)$$

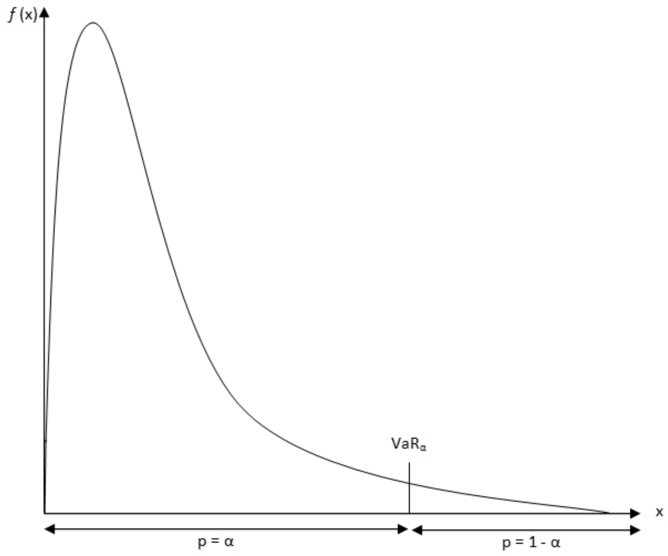


Figure 23. Value at Risk sur une densité de probabilité

La *Value at Risk*, appliquée à une variable aléatoire de perte, se traduit donc comme la perte probable sur un horizon prédéterminé avec un niveau de confiance α (la Value at Risk croît avec α).

4.5.1.2 *Conditional Tail Expectation*

La *Conditional Tail Expectation* [10] de niveau $\alpha \in [0\,;1]$, notée CTE_α, est définie comme suit,

$$CTE_\alpha(X) = \mathbb{E}[X \mid X > VaR_\alpha(X)]$$

La *conditional Tail Expectation* s'interprète donc comme la valeur moyenne des pertes qui excèdent la *Value at Risk* de même niveau de confiance. Il s'agit donc de l'excédent moyen de sinistre au-delà de la *Value at Risk*.

4.5.1.3 *Capital ajusté au risque*

Le capital ajusté au risque [15] (ou *Risk Adjusted Capital*) de niveau $\alpha \in [0\,;1]$, noté RAC_α, peut être défini des deux manières suivantes,

$$RAC_\alpha^1 = VaR_\alpha\left(S^{\mathrm{NR}}\right) - P^{\mathrm{NR}}$$

$$RAC_\alpha^2 = CTE_\alpha\left(S^{\mathrm{NR}}\right) - P^{\mathrm{NR}}$$

Où S^{NR} représente les montants des sinistres nets de réassurance et P^{NR} le montant total des primes de la cédante net de la prime de réassurance.

Ainsi le capital ajusté au risque s'interprète comme le montant nécessaire pour assurer la solvabilité sur la couverture des risques. Le tout étant diminué de la prime totale nette de la prime de réassurance. Cette méthode d'allocation de capital est additive.

Nous avons retenu le RAC_α^2 pour nos calculs car, comme la provision d'égalisation est utilisée pour couvrir une sinistralité exceptionnelle, la réassurance qui va s'y appliquer portera logiquement sur des sinistres extrêmes (en gravité ou en fréquence). La mesure RAC_α^2 est donc plus adaptée car elle s'intéresse aux montants des sinistres au-delà d'un certain seuil (en l'occurrence, la VaR_α associée).

4.5.2 Mesure de performance

La performance d'un programme de réassurance peut se mesurer grâce à l'indicateur de performance $RORAC$ [15] (*Return On Risk Adjusted Capital*). Cet indicateur correspond au ratio entre un facteur mesurant le retour sur investissement d'un contrat et un facteur de capital alloué à la gestion des risques avec un niveau de confiance $\alpha \in [0\,;1]$.

$$\mathrm{RORAC} = \frac{\mathbb{E}[\mathrm{Profits}]}{RAC_\alpha} = \frac{P^{\mathrm{NR}} - \mathbb{E}[S^{\mathrm{NR}}]}{RAC_\alpha}$$

Où S^{NR} représente les montants des sinistres nets de réassurance et P^{NR} le montant total des primes de la cédante net de la prime de réassurance.

On détermine l'optimalité des programmes de réassurance selon le critère qui maximise le RORAC. Le fait de maximiser ce ratio revient donc à chercher à maximiser les revenus tout en minimisant le risque. C'est donc une mesure très adaptée à la problématique de la réassurance puisque, dans ce cas précis, maximiser les revenus revient à minimiser le coût de la couverture de réassurance tout en optimisant sa capacité de couverture des risques qui est mesurée par la diminution du capital alloué à la gestion de ces risques. Donc, plus le RORAC est important, plus la couverture de réassurance est efficace et optimisée financièrement.

4.5.3 But de la démarche

Grâce à ces différentes méthodes nous allons mesurer la performance des différentes couvertures de réassurance (XS décès, XS arrêt de travail et Stop Loss) pensées pour protéger la provision d'égalisation afin qu'elles protègent des sinistralités extrêmes tant en terme de fréquence que de gravité. Les différentes approches de cotation vont permettre de calibrer au mieux le tarif selon que l'on réassure des tranches travaillantes ou non.

5 Présentation des données

Nous allons introduire dans cette partie les données du portefeuille de prévoyance collective sur lequel a été réalisée la simulation de la réassurance de la provision d'égalisation du régime. Pour des raisons de confidentialité, la société à laquelle ces données correspondent sera nommée Société Ω. Aucune distinction ne sera faite entre les différentes catégories socio-professionnelles car le régime de prévoyance considéré est un régime « ensemble du personnel ».

5.1 Aspects démographiques

L'ensemble des salariés de la Société Ω est majoritairement composé d'hommes (74,5%). La population d'hommes se décompose en deux sous-populations âgées de 23 à 42 ans et de 45 à 55 ans. La population féminine est quant à elle plus homogène et regroupe des personnes principalement âgées de 25 à 51 ans. La population importante d'hommes entraîne une sensibilité plus importante qu'un portefeuille équilibré sur le risque décès.

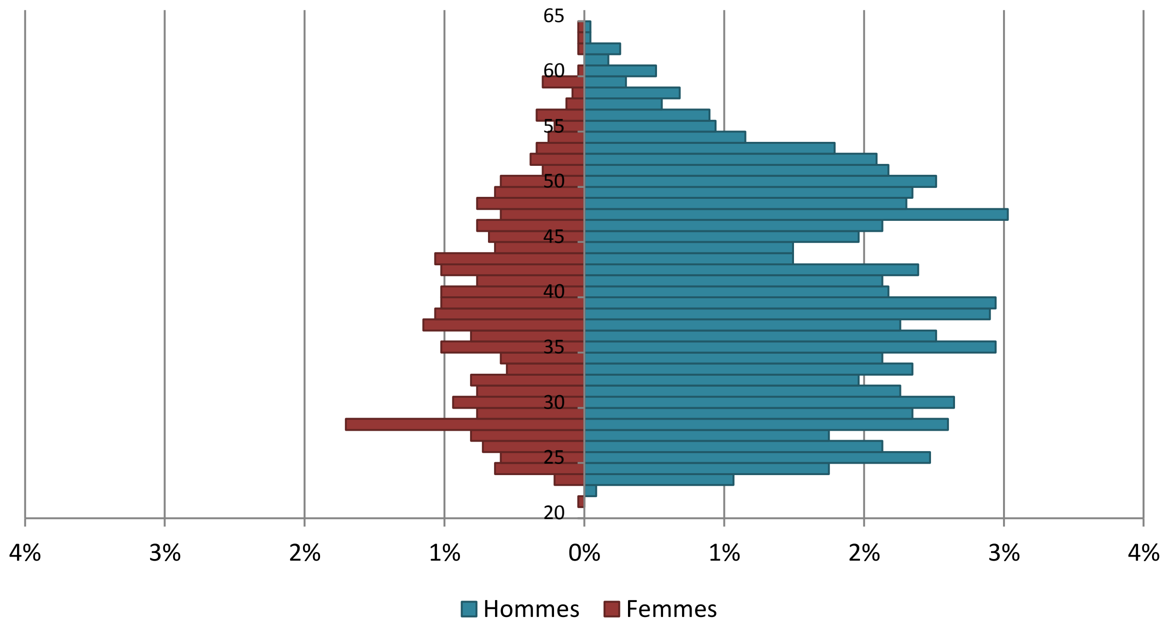


Figure 24. Pyramide des âges de la Société Ω

Moyennes	Hommes	Femmes	Ensemble
Age	39,5	38,3	39,2
Ancienneté	12,2	9,7	11,6

La population exerce principalement des activités intellectuelles supérieures qui induisent une minoration des risques de prévoyance lourde avec une mortalité plus faible que la moyenne nationale et des arrêts de travail eux aussi plus rares et moins longs que la moyenne.

5.2 Aspects économiques

Moyennes (€)	Hommes	Femmes	Ensemble
Rémunération fixe	58 530	50 959	56 612
Rémunération variable*	20 876	14 795	19 934
Rémunération globale	63 406	52 827	60 727

*si exigible (rémunération variable > 0)

On remarque que la population masculine bénéficie de rémunérations fixes supérieures en moyenne de 15% et de rémunérations globales supérieures en moyenne de 20% à celles des femmes. De plus, la population masculine est légèrement plus âgée que la population féminine. Ces deux constats aggravent le risque potentiel décès mal mutualisé avec la population féminine qui, en plus d'être soumis à une fréquence plus élevée due au nombre d'hommes, est aussi soumis à des capitaux sous-risques plus importants du fait de la rémunération globale importante des hommes au sein de la société.

Nous allons maintenant découper la population globale selon les tranches de rémunération afin d'isoler les populations les plus soumises à risques.

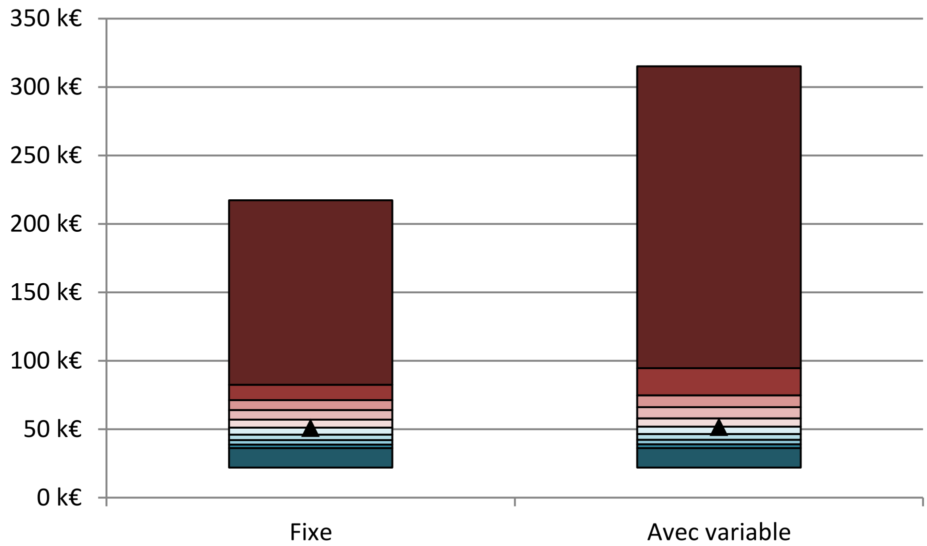


Figure 25. Distribution des percentiles des rémunérations annuelles fixes et globales

Considérant les rémunérations fixes et variables, il apparaît clairement que 80% de la population est limitée à des rémunérations n'excédant pas 75 k€. La variabilité des rémunérations est plus importante sur les 20% restants et en particulier sur les 10% d'individus ayant les rémunérations les plus élevées. On peut donc avancer que la population la plus à risque en matière de risque en prévoyance lourde concerne les individus ayant une rémunération globale supérieure ou égale à 100 k€. Il est à noter que cette population est âgée en moyenne de 48 ans (quasiment 10 années de plus que la moyenne générale) et composée à 84% d'hommes.

5.3 Présentation du régime

Le régime de prévoyance collective de la Société Ω est un régime ensemble du personnel. On ne s'intéresse qu'aux garanties en prévoyance lourde. Le régime permet aux salariés de choisir entre deux options. La première option ne prévoit ni rente de conjoint ni rente éducation alors que la seconde prévoit une garantie rente éducation. L'option par défaut du régime est l'Option 1.

De plus, le régime prévoit une participation aux bénéfices à hauteur de 80% des excédents nets de réassurance. Considération faite de la taille de l'effectif assuré, le plafond de la provision d'égalisation est fixé à 80% du total des primes perçues.

5.3.1 Garanties de la couverture décès

5.3.1.1 Garanties servies en versement unique

Les garanties en capital de la couverture décès sont détaillées ci-après,

	Option 1	Option 2	Unité
Capital de base	330	235	% SAB*
Majoration par enfant à charge	50	0	% SAB
Limite de la majoration	250	0	% SAB
Capital double effet	330	330	% SAB
Capital additionnel (décès accidentel)	100	100	% SAB
Frais d'obsèques	120	120	% PMSS

**SAB : salaire annuel brut*

Il faut noter que l'on n'a pas de différence de garantie en capital selon que le salarié soit marié ou non. Si l'on compare le capital de base de l'option par défaut avec le panel de l'*enquête prévoyance-santé Towers Watson 2013* (voir « Les garanties décès complémentaires »). Il apparaît que la garantie proposée par défaut fait partie des meilleures garanties existantes. En revanche, la garantie de l'Option 2 se situe seulement dans le second quartile. De plus, notons que la majoration par enfant à charge de l'option 1 correspond à la valeur du premier quartile de l'échantillon. On a donc une bonne garantie de base sur l'Option 1 mais les majorations et le capital de l'Option 2 sont dans la partie basse des pratiques marché.

Le capital double effet est un capital versé en cas de décès simultané ou postérieur du conjoint non remarié (ou du partenaire lié par un PACS) ayant à sa charge encore au moins un enfant bénéficiaire des prestations décès du salarié assuré.

Le capital additionnel est versé au(x) bénéficiaire(s) désigné(s) lorsque le décès de l'assuré est consécutif à un accident, à condition, qu'il survienne au plus tard 12 mois après la date de l'accident.

Les frais d'obsèques sont une allocation, limitée au montant des frais réels engagés, versée en cas de décès de l'assuré, de prédécès du conjoint (ou du partenaire lié par un PACS) ou d'un enfant à charge. Les frais d'obsèques ne sont pas à considérer comme un capital mais comme une indemnité compensatrice des frais funéraires occasionnés par le décès.

5.3.1.2 Garanties servies en rente

Les prestations en rente sur le risque décès se composent uniquement d'une rente éducation servie pour les salariés ayant pris l'option 2.

Rente éducation		Option 1	Option 2	Unité
Age début de tranche	**Age fin de tranche**			
0	**10**	0	5	% SAB
11	**16**	0	10	% SAB
17	**25**	0	15	% SAB

En comparaison avec le panel de l'*enquête prévoyance-santé Towers Watson 2013* (voir « Les garanties décès complémentaires »), on se situe sur des garanties extrêmement faibles et bien en deçà des pratiques marché.

5.3.2 Garantie de la couverture incapacité

La couverture incapacité est identique quelle que soit l'Option considérée et propose la couverture suivante :

	Option 1	Option 2	Unité
Rente d'incapacité	80	80	% SAB
Franchise	45	45	Jours

Cette couverture est soumise à une franchise de 45 jours, le versement de la rente ne commençant donc qu'au $46^{ème}$ jour selon le schéma suivant,

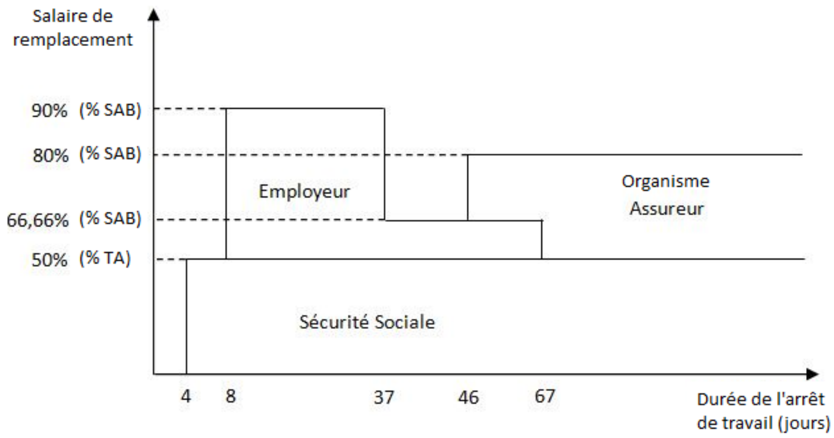


Figure 26. Salaire de remplacement en cas d'incapacité

En comparaison avec le panel de l'*enquête prévoyance-santé Towers Watson 2013* (voir « Les garanties incapacité complémentaires »), cette garantie se situe exactement à la médiane de l'échantillon, mais les pratiques marché sont extrêmement proches les unes des autres sur ce risque. Il faut tout de même souligner qu'à la vue de la sinistralité historique du portefeuille (voir « Aspects historiques de la sinistralité ») sur l'incapacité, la franchise de 45 jours parait élevée. En effet, les durées des arrêts de travail ont très rarement excédé 2 mois.

5.3.3 Garanties de la couverture invalidité

On dispose de garanties différentes selon que l'invalidité résulte d'un évènement dû à l'activité professionnelle ou non :

	Option 1	Option 2	Unité
Invalidité résultant d'un accident ou d'une maladie non professionnelle			
Catégorie 1	45	45	% SAB
Catégorie 2	90	90	% SAB
Catégorie 3	90	90	% SAB
Majoration par tierce personne	6	6	% SAB
Invalidité résultant d'un accident ou d'une maladie professionnelle			
Rente si taux d'invalidité ≤ 33%	0	0	% SAB
Rente si 33% < taux d'inval. ≤ 66%	90	90	% SAB
Rente si taux d'invalidité >66%	90	90	% SAB
Majoration par tierce personne	6	6	% SAB

En comparant les garanties pour une invalidité résultant d'un accident ou d'une maladie non professionnelle avec le panel de l'*enquête prévoyance-santé Towers Watson 2013* (voir « Les garanties invalidité complémentaires »), on remarque que l'on se positionne, pour la catégorie 1, sur une garantie parmi les plus faibles du marché alors que globalement les régimes « ensemble du personnel » sont censés être les plus avantageux sur cette catégorie. En revanche sur les garanties des catégories 2 et 3 on est sur le 4ème quartile de la distribution.

5.3.4 Positionnement global

Nous représentons ci-dessous le positionnement de la Société Ω sur l'ensemble des garanties proposées par son régime de prévoyance par rapport au panel d'étude de l'enquête Prévoyance-Santé Towers Watson 2013 dont les principaux résultats ont été vus à la Partie 1.

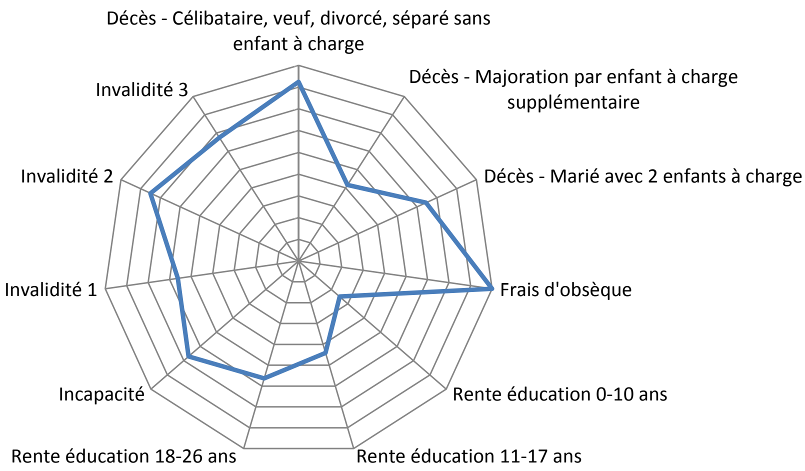


Figure 27. Positionnement global de la Société Ω par rapport au panel de l'enquête Prévoyance-Santé Towers Watson 2013

Il ressort de cette figure que, mis à part les garanties portant sur la rente éducation, la Société Ω dispose d'une couverture prévoyance faisant partie des plus élevées du marché (considérant l'échantillon étudié – voir « Annexe 3 ») sur les postes les plus importants en termes de risque et de sinistralité. Seule la majoration par enfant à charge n'est pas très élevée, ce qui entraîne mécaniquement un positionnement plus faible sur la garantie décès pour un assuré marié avec deux enfants à charge.

5.4 Aspects historiques de la sinistralité

On s'intéresse dans cette partie à l'historique de sinistralité en termes de décès et d'arrêts de travail depuis 2005. Pour cela, on se base sur l'étude des ratios Sinistres sur Primes (S/P) qui permettent d'avoir facilement une vision claire de l'équilibre du régime. Il existe deux types de ratios S/P ; le premier prend en compte les provisions techniques et les frais auxquels sont soumis l'assureur et reflète donc plus un équilibre du régime du point de vue de l'assureur puisqu'il considère tout son passif. Le deuxième ratio prend quant à lui en compte les primes et les prestations effectivement versées et reflète l'échange de liquidité entre les deux parties liées au contrat, il s'agit ici de mettre en évidence l'état du régime du point de vue de l'entité assurée.

Nous retrouvons l'historique de ces deux types de ratios dans les graphes ci-après :

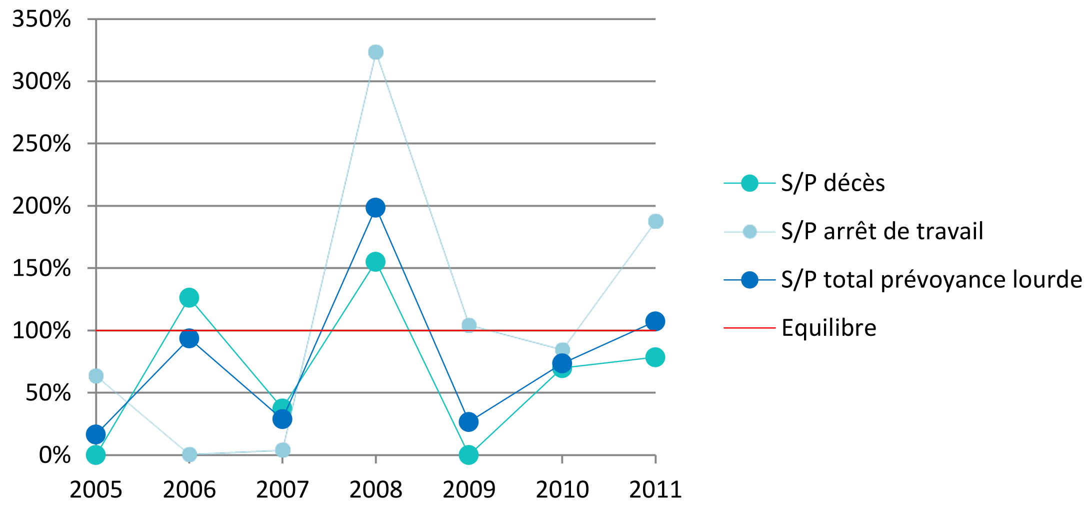


Figure 28. Ratios combinés Sinistres sur Primes historiques (avec provisions et nets de frais)

En ce qui concerne le ratio S/P prenant en compte les provisions et les frais, on observe une augmentation du ratio principalement due aux provisions techniques des arrêts de travail en fin d'exercice.

On remarque sur ce graphe que le S/P spécifique à l'arrêt de travail connaît un pic en 2008 et en 2011. Cela est principalement dû aux provisions mathématiques pour les rentes d'incapacité et/ou d'invalidité encore servies au moment de la clôture de l'exercice. Le provisionnement du risque arrêt de travail nécessite de mettre de côté des sommes très importantes, en particulier pour le risque incapacité pour lequel, en plus de provisionner la rente d'incapacité, on provisionne la rente d'invalidité en attente. Or, le portefeuille, en matière d'arrêt de travail, est principalement touché par le risque incapacité.

L'augmentation du ratio sur le risque décès résulte en partie du provisionnement des rentes éducation.

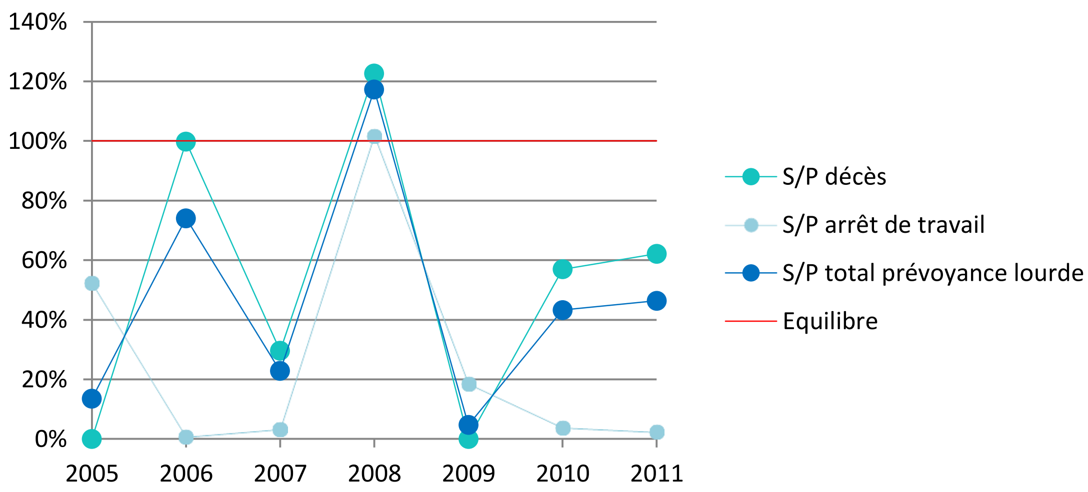


Figure 29. Ratios combinés Sinistres sur Primes historiques (hors provisions et frais)

Le ratio S/P hors provisions et frais est intéressant dans le cas de la Société Ω dont la sinistralité réelle est très faible car il ne prend pas en compte les provisions mathématiques qui sont calculées sur des durées très largement supérieures à la durée historique moyenne des arrêts de travail dans la société. Ce ratio délivre donc une vision des cash flows effectivement réalisés entre les deux parties du contrat.

L'évolution du ratio S/P hors provisions et frais nous montre que le contrat est très largement bénéficiaire et, de fait, que la sinistralité tant en décès qu'en arrêt de travail est très faible. Le contrat sur risque décès n'a été déficitaire qu'une seule année (2008) avec un ratio avoisinant 120%. Le risque arrêt de travail quant à lui n'a jamais été déficitaire, sauf, très légèrement, en 2008 avec un S/P de 102%.

Lorsque l'on observe le ratio S/P global il apparaît que c'est le risque décès qui influence le plus le ratio global, c'est donc bien le risque majeur du portefeuille.

Ce déséquilibre en termes de sinistralité et de primes est due à l'activité principale des salariés (professions intellectuelles supérieures) qui induit une faible exposition aux risques de prévoyance lourde.

Dans tous les cas et quel que soit le ratio considéré, le contrat reste majoritairement bénéficiaire, exception faite de l'exercice 2008 pendant lequel des prestations importantes ont été versées tant pour le risque décès que pour le risque arrêt de travail.

Cette sinistralité « extrême » peut être corrigée par des programmes de réassurance qui vont servir à lisser le résultat.

5.5 Réassurance actuelle du régime

Actuellement, le régime de prévoyance bénéficie d'un programme de réassurance proportionnel appliqué au risque arrêt de travail exclusivement. En l'occurrence, le programme mis en place ici est un Quote-Part à 75% sur le risque arrêt de travail. Cela signifie que si un arrêt de travail suffisant ouvre droit au versement d'une rente, seuls 25% de la rente versée seront pris en charge par l'assureur, le réassureur couvrera les 75% restants. La prime est directement calculée sur le résultat du risque arrêt de travail exclusivement. Si ce résultat est positif alors 75% en est reversé au réassureur.

Néanmoins, ce type de contrat n'est pas adapté au contrat de prévoyance collective considéré. En effet, on a pu observer que la faible sinistralité en matière d'arrêt de travail ne nécessite pas de réassurance car les prestations sont généralement servies sur de courtes durées. De plus, le contrat est largement bénéficiaire sur le risque arrêt de travail, mais ce résultat vient être écrêté par le coût de la réassurance qui correspond alors à 75% de ce résultat, ce qui entraîne inévitablement une diminution de la participation aux bénéfices qui sont redistribués à la Société Ω (moins de capacité est donc allouée à la provision d'égalisation qui sera donc moins en mesure d'absorber des pics de sinistralité d'envergure).

De plus, comme on a pu le voir au travers des ratios S/P, le risque extrême potentiellement le plus dangereux ne porte pas sur le risque arrêt de travail mais sur le risque décès qui n'est pas réassuré.

Il apparaît donc que la réassurance actuellement en place n'est pas appropriée aux particularités historiques du régime, puisqu'en plus d'être très chère pour protéger de surcroît une faible sinistralité en arrêt de travail, elle ne protège pas contre un éventuel pic de sinistralité en décès semblable à ce qui a pu survenir durant l'exercice 2008.

6 Simulation

Nous détaillons dans cette partie la projection par simulation (réalisée sous VBA) du régime de prévoyance collective de la Société Ω afin d'étudier l'impact de la réassurance non proportionnelle sur son compte de résultat et de l'optimiser pour protéger au mieux et à moindre coût la provision d'égalisation associée.

6.1 Génération de nombres aléatoires

La qualité d'une simulation passe irrémédiablement par la qualité du générateur aléatoire avec lequel on cherche à imiter des tirages de nombres au hasard. Afin de pouvoir simuler des décès ou des entrées en arrêt de travail à partir des tables de mortalité ou du BCAC, il faut être en mesure de pouvoir tirer des **nombres indépendants suivant une loi uniforme** sur $[0; 1]$.

En effet, lorsque l'on veut, par exemple, voir si une personne d'âge x est morte durant l'année suivant son dernier anniversaire, on va générer un nombre aléatoire p. Alors, le décès correspond à une variable aléatoire de Bernoulli, dont la réalisation est effective si elle vaut 1, qui est définie comme suit,

$$\text{Décès} = \begin{cases} 0 \text{ si } p > q_x \\ 1 \text{ si } p \leq q_x \end{cases}$$

L'approche est identique pour les entrées et le maintien en arrêt de travail.

Il est à noter que si l'on est en mesure de générer efficacement des réalisations uniformes, on peut générer n'importe quel type de loi dont la fonction de répartition est inversible car si $S \hookrightarrow Uniforme[0; 1]$ alors $X = F^{-1}(S)$ va suivre une loi de fonction de répartition F.

Afin d'obtenir des réalisations de nombres aléatoires, il existe de nombreux générateurs dont chaque type a ses avantages et ses inconvénients. Nous allons nous concentrer sur les types de générateurs que nous avons utilisé, à savoir des générateurs pseudo et quasi-aléatoires.

6.1.1 Les générateurs congruentiels

Les générateurs pseudo-aléatoires sont des générateurs de nombres basés sur une suite de nombres simulés qui sera prévisible du moment où on connait les caractéristiques intrinsèques du générateur utilisé. Ce type de générateur regroupe de nombreuses familles dont celle des générateurs congruentiels. Ces derniers sont initialisables à partir d'une graine [13] qui définit la première valeur de la suite à générer qui s'obtient alors par une formule récursive. Cette spécificité permet, en changeant de graine, de changer de suite de nombres.

Un générateur congruentiel est donc défini par :

- Le choix d'une graine $X_0 \in \mathbb{N}^*$
- Le calcul récursif : $X_{n+1} = (k.X_n + p) \bmod(m)$

où $k, m, p \in \mathbb{N}^*$ et mod correspond à l'opérateur du reste de la division euclidienne.

En pratique le générateur Rnd() de Visual Basic (fonction « Alea() » sur Excel) est un générateur congruentiel qui utilise l'instruction Randomize() sans argument comme graine génératrice. La fonction Randomize() renvoie ainsi une valeur initiale basée sur l'horloge système. Nous précisons que nous avons travaillé avec le générateur sous sa version 2010.

Ces générateurs ont la particularité de générer de manière équiprobable au plus m réalisations dans l'intervalle $[0; 1[$ mais généralement avec une répartition hétérogène.

6.1.2 Les générateurs quasi-aléatoires

Les générateurs quasi-aléatoires présentent des propriétés d'équirépartition sur l'intervalle $[0; 1]$ bien meilleures que les générateurs pseudo-aléatoires. Ils se basent sur des suites déterministes à discrépance faible dont la notion est précisée grâce aux définitions ci-après [13].

6.1.2.1 Définitions

Discrépance locale

Soit $x = (x_n)_{n\geq 1}$ une suite de points sur $[0; 1]^n$, λ_n la mesure de Lebesgue et A un sous pavé quelconque de $[0; 1]^n$. La discrépance locale d'ordre k de la suite x par rapport à A est la quantité suivante,

$$D_k(A, x) = \frac{1}{k}.\mathrm{Card}\{k \in [\![1; k]\!] | x \in A\} - \lambda_n(A)$$

Discrépance

Soit $x = (x_n)_{n\geq 1}$ une suite de points sur $[0; 1]^n$, λ_n la mesure de Lebesgue et A un sous pavé quelconque de $[0; 1]^n$ et P l'ensemble des sous pavés de $[0; 1]^n$. La discrépance d'ordre k de la suite x correspond à la quantité suivante,

$$D_k^\infty(x) = \mathrm{Sup}\{|D_k(A, x)|,\ A \in P\}$$

La notion de discrépance permet de mesurer la qualité de l'équirépartition de la suite étudiée sur son espace de définition. La discrépance est d'autant plus faible que cette répartition est bonne. Dès lors, nous pouvons définir les notions suivantes,

Suites équiréparties

Soit $x = (x_n)_{n\geq 1}$ une suite de points sur $[0; 1]^n$ et P l'ensemble des sous pavés de $[0; 1]^n$. La suite x est dite équirépartie (ie. uniformément distribuée) si et seulement si pour tout pavé $A \in P$,

$$\lim_{k\to+\infty} D_k(A, x) = 0$$

Suites à discrépance faible

Soit $x = (x_n)_{n\geq 1}$ une suite de points sur $[0; 1]^n$. La suite x est à discrépance faible si,

$$\lim_{k\to+\infty} D_k^\infty(x) = O\left(\frac{\ln(k)^n}{k}\right)$$

Les suites à discrépance faible bénéficient donc d'une vitesse de convergence de l'ordre de $\frac{\ln(k)^n}{k}$ ce qui surpasse les caractéristiques asymptotiques des suites pseudo-aléatoires utilisées dans les simulations de Monte-Carlo et dont la vitesse de convergence (obtenue par le théorème central limite) n'excède pas l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{k}}$. Les générateurs quasi-aléatoires sont utilisés pour réaliser des simulations de Quasi Monte Carlo.

6.1.2.2 La translation irrationnelle du Tore

La translation irrationnelle du Tore est l'algorithme d'un générateur multidimensionnel qui permet de générer des suites de nombres quasi aléatoires de manière efficace grâce à une implémentation simple.

L'algorithme est tel que la $n^{\text{ième}}$ réalisation de la $i^{\text{ème}}$ variable aléatoire uniforme à simuler prend la valeur suivante [13],

$$x_n = n\sqrt{p_i} - \lfloor n\sqrt{p_i} \rfloor$$

où p_i représente le $i^{\text{ème}}$ nombre premier (dont les seuls diviseurs sont 1 et le nombre lui-même) et $\lfloor\,.\,\rfloor$ l'opérateur partie entière.

Si cette méthode donne de très bons résultats du point de vue de la répartition de la suite sur son espace de définition, elle montre néanmoins sa faiblesse sur des corrélations importantes entre les différentes valeurs de la suite. L'algorithme de Tore mélangé remédie à ce problème.

6.1.3 Le Tore mélangé

6.1.3.1 Algorithme

Afin de diminuer la corrélation des valeurs obtenues par la transformation irrationnelle du Tore, l'idée est de mélanger ces valeurs avant leur utilisation avec un second générateur de nombres aléatoires. Nous avons, pour notre part, retenu de mélanger les valeurs de la transformation irrationnelle du Tore par le générateur pseudo-aléatoire Rnd().

L'algorithme s'implémente comme suit,

Soit $x = (x_n)$ la suite générée par le nombre premier p et au lieu d'utiliser le nombre x_n pour le $n^{\text{ième}}$ tirage de la loi uniforme sur $[0; 1]$ on va extraire x_m, où $m \in \mathbb{N}$ est choisi de manière aléatoire [13].

$$x_m = x_{\varphi(n)}$$

où,

$$\varphi(n) = \lfloor \alpha . N . \tilde{x} + 1 \rfloor$$

avec $\alpha \geq 1$ (qui sert à réduire le nombre de tirage de valeurs identiques ; au plus α est grand, au plus la probabilité de tirer deux fois le même nombre est faible), N le nombre souhaité de réalisations de la variable aléatoire uniforme, $\tilde{x}$ la réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme et $\lfloor\,.\,\rfloor$ l'opérateur partie entière.

En pratique, nous avons retenu comme paramètres : $p = 4\,093, \alpha = 5\,000, N = 10\,000$ et $\tilde{x}$ est généré à partir de l'instruction Rnd().

6.1.3.2 Convergence et efficacité du Tore mélangé

Afin de comparer l'évolution de la qualité des générateurs entre le générateur Rnd() (2010) dont nous disposons au départ grâce à Excel et le générateur finalement utilisé du Tore mélangé, nous calculons les écarts observés entre la moyenne théorique et la moyenne empirique des échantillons générés d'une loi uniforme sur $[0; 1]$ en fonction du nombre de tirages aléatoires réalisés.

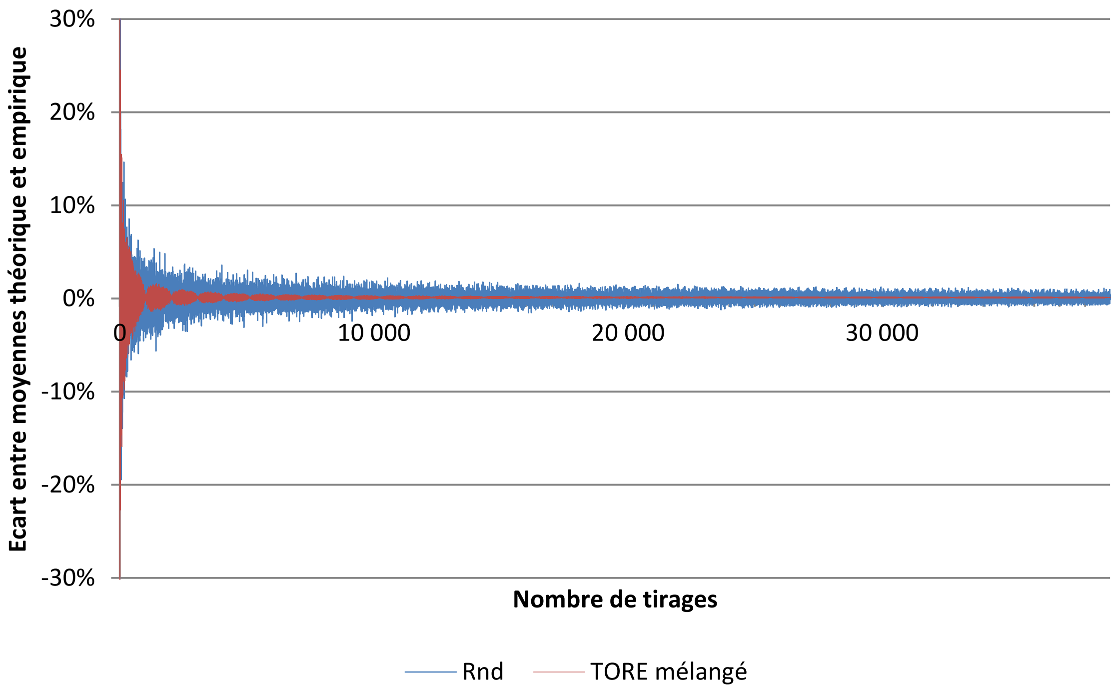


Figure 30. Ecart avec la moyenne théorique en fonction du nombre de tirages réalisés

Nous observons donc que le générateur issu du Tore mélangé converge bien plus vite que celui issu de Rnd(). En l'occurrence, on obtient des écarts inférieurs à 1% dès $5\,000$ valeurs générées alors que pour l'instruction Rnd() l'erreur reste supérieure à cette valeur pour des nombres de tirages bien plus élevés.

On observe alors les histogrammes pour $5\,000$ valeurs générées afin de comparer leur qualité d'équirépartition.

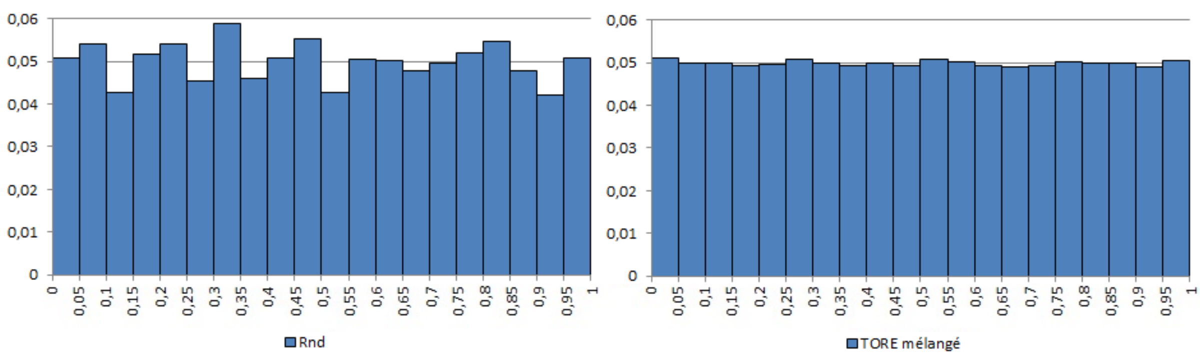


Figure 31. Histogramme de répartition des valeurs générées par Rnd() (à gauche) et par le Tore mélangé (à droite)

Il apparaît clairement que le Tore mélangé conduit à une meilleure répartition des valeurs sur l'intervalle $[0;1]$, ce qui est confirmé par les tests statistiques suivants (voir « Annexe 4. Les tests statistiques »),

p-value	Rnd()	Tore mélangé
Test du χ^2	1	1
Test de Kolmogorov-Smirnov	0,5936	0,8222

Ces tests, réalisés sous le logiciel R, montrent clairement que même si la fonction Rnd() arrive à tromper le test du χ^2, relativement peu exigeant, elle est beaucoup moins bien assimilée à une loi uniforme par le test de Kolmogorov-Smirnov pour lequel on obtient une p-value bien plus élevée avec le générateur du Tore mélangé, dont la supériorité de la répartition ressort clairement.

Dès lors, le dernier point qui assure l'efficacité du Tore mélangé est la faible corrélation entre les éléments de la suite générée qui est mise en évidence par le corrélogramme ci-dessous, dont les termes sont calculés comme suit,

$$\rho_h = \frac{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})(x_{k+h} - \bar{x})}{\sum_{k=1}^{n}(x_k - \bar{x})^2}$$

avec $\bar{x}$ la moyenne empirique de la suite x.

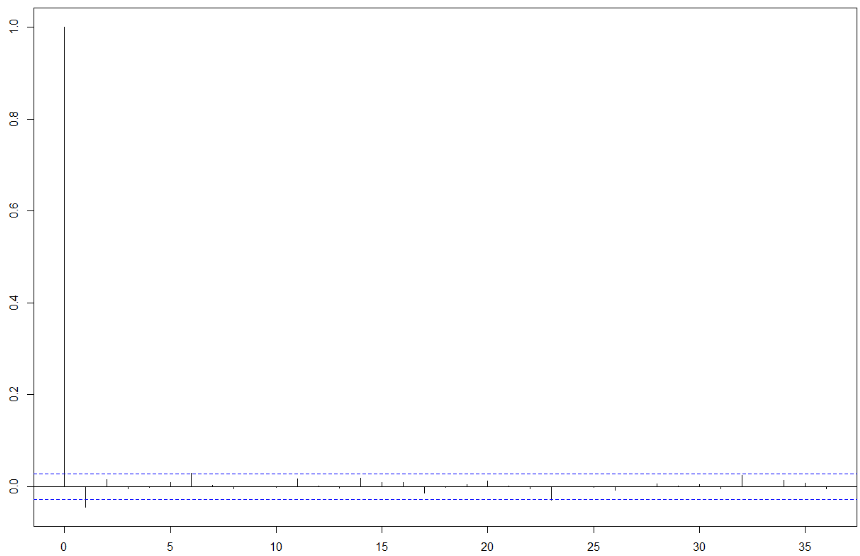


Figure 32. Corrélogramme de l'algorithme du Tore mélangé

Le corrélogramme montre que nous sommes dans la zone d'indépendance dès le troisième pic assurant ainsi une corrélation très faible terme à terme.

Finalement, il apparaît que l'algorithme du Tore mélangé est un moyen efficace et facilement implémentable à partir de l'instruction Rnd() d'Excel pour générer les variables aléatoires indépendantes et uniformes sur $[0; 1]$ nécessaires à la réalisation de notre outil de simulation.

6.2 Eléments de simulation

Etant donné que la simulation réalisée prend en considération un nombre très important d'hypothèses de travail, si elle nous permet de préciser ce qui peut se passer sur le court ou le moyen terme où les hypothèses peuvent rester valables, elle ne peut pas être considérée comme fiable sur le long terme où la situation aura nécessairement évolué d'ici là. Cependant, l'allocation de la provision d'égalisation du régime nous oblige à voir le plus loin possible et à avoir la possibilité de raisonner sur le long terme car les montants des bénéfices qui lui sont alloués annuellement le sont pour une décade au maximum. Nous avons donc pris le parti de projeter notre portefeuille sur 25 années.

De plus, le portefeuille est projeté en cycle fermé car les statistiques démographiques antérieures ont mis en évidence une forte stabilité du portefeuille dont le principal facteur d'influence est le vieillissement régulier de la population.

6.2.1 Hypothèses de travail

Etant donné que nous ne disposions pas de données détaillées sur les conjoints et les enfants des salariés assurés de la Société Ω, il a été nécessaire de retraiter les données à partir des statistiques nationales de l'INSEE afin de pouvoir exploiter les garanties décès associées. De plus, un certain nombre d'hypothèses économiques ont été fixées afin de rendre la simulation la plus réaliste possible.

6.2.1.1 Retraitement démographique

Afin de retraiter les données démographiques nous nous sommes basés sur des statistiques de l'INSEE pour créer des tables exploitables par notre programme (voir « Annexe 1.2 Tables de retraitement démographique issues des statistiques INSEE »). Ces tables nous ont permis de simuler des salariés en couple et une répartition des enfants à charge.

Pour simuler les salariés ayant un conjoint nous avons tiré un nombre aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0;1]$ et l'avons comparé aux probabilités de la table de nuptialité. L'âge du conjoint a été tiré de manière aléatoire suivant une loi uniforme sur l'intervalle $[x-5;x+5]$, avec x l'âge du salarié assuré.

Dès qu'un salarié se voyait être affecté d'un conjoint, on a simulé de la même manière le nombre d'enfants du couple ayant entre 0 et 26 ans. L'âge de chaque enfant a été déterminé à partir d'une dernière table précisant la probabilité, sachant que les parents ont au moins un enfant de moins de 27 ans, que ce dernier soit âgé de $z \in [0;26]$ années.

Après retraitement, nous avons obtenu le portefeuille fictif suivant,

	Age moyen salariés	Conjoints	Age moyen conjoints	Nombre moyen d'enfants à charge	Age moyen enfants
Simulation	39,2	45%	39,6	1,033	10,1
Réalité	39,2	51%	_	0,771	_

Nos tables nous ont mené à légèrement surestimer le nombre d'enfants et à sous-estimer le nombre de conjoints. Etant donné que le contrat de prévoyance collective de la Société Ω ne prévoit pas de garantie « rente de conjoint » la sous-évaluation du nombre de conjoint n'est pas un problème. Cela aura un impact sur la garantie capital double effet, mais la moyenne d'âge des conjoints étant proche de la moyenne d'âge du portefeuille d'assurés, cela conduit à une certaine homogénéité des risques entre les garanties capital décès et capital double effet.

L'âge moyen des enfants permet de calculer des versements des rentes éducation sur des durées probables non négligeables, ce qui permet, en considérant que le nombre moyen d'enfants à charge de notre échantillon fictif est supérieur au ratio réel, d'assurer une approche prudente sur cette garantie.

Par ailleurs, étant donnée la faible sinistralité du portefeuille sur tous les types de risques, des facteurs correctifs ont été appliqués aux tables de mortalité et d'arrêt de travail afin de retranscrire au mieux la réalité.

6.2.1.2 Hypothèses financières

6.2.1.2.1 Hypothèses sur les données économiques

Le taux d'actualisation retenu est celui communiqué par l'organisme assureur lorsqu'il a réalisé sa propre tarification à savoir 2,27%.

Le taux d'inflation retenu est de 2% (décision corporate).

Le taux d'augmentation de salaire retenu correspond au taux d'inflation plus 1% (décision corporate).

Le plafond mensuel de la Sécurité Sociale considéré est le plafond 2013 correspondant à 3 086€.

Le taux de participation aux bénéfices est de 80% avec une dotation à la provision d'égalisation fixée à 75% du résultat dans la limite de 80% du total de la prime prévoyance perçue, considérant la taille de la population assurée.

Enfin, le partage de la population entre les options 1 et 2 du régime s'est fait de la manière suivante. Etant donné, qu'il n'y a pas de rente de conjoints notre attention s'est portée sur le nombre d'enfant de chaque assuré. Nous avons considéré pour chaque individu la valeur actuelle probable des garanties décès (capital + majoration – option 1 ou capital + VAP rente éducation – option 2) dont ses bénéficiaires sont susceptibles de bénéficier et nous avons affecté l'individu à l'option qui lui était la plus favorable, donc pour laquelle la valeur actuelle probable était la plus élevée.

Bien que nous ayons conscience que cette approche soit peu réaliste elle se montre très prudente car elle nous soumet toujours aux risques les plus importants.

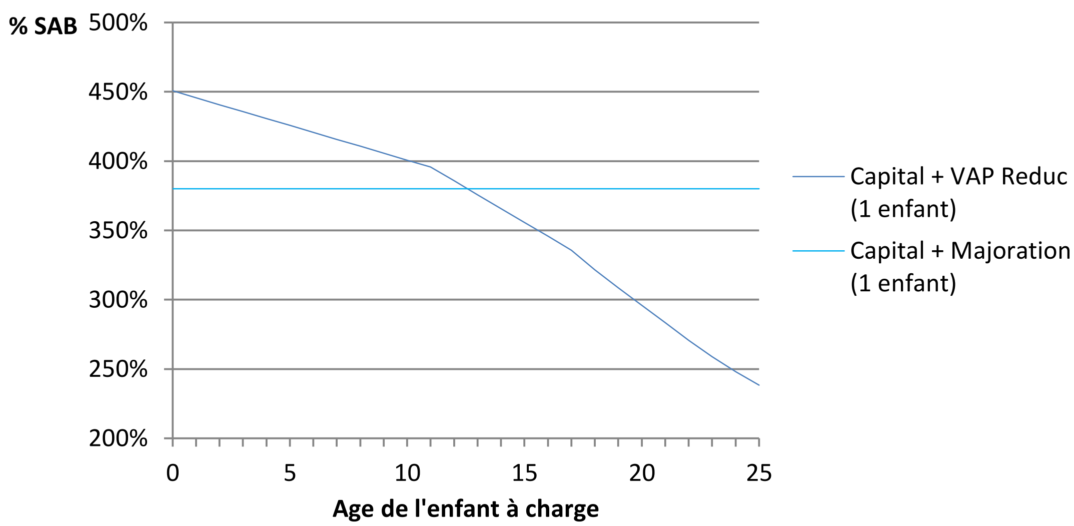


Figure 33. Comparatif des garanties par enfant à charge

Le graphe précédent illustre la situation pour un individu avec un enfant. Si cet enfant est âgé de moins de 13 ans l'assuré sera affecté à l'option 2. En revanche, si l'enfant à plus de 13 ans, l'assuré sera affecté à l'option 1. On ne considère ici que les âges entiers.

6.2.1.2.2 Tarification du régime

Etant donné que les garanties du régime ne dépendent pas des tranches de salaires (fixées par rapport au plafond annuel de la Sécurité Sociale), les taux obtenus lors de la tarification sont homogènes sur toutes les tranches.

Les garanties de base (capital décès, rente éducation, rente d'incapacité, rente d'invalidité) sont calculées à partir des formules présentées en partie 3.7 et des taux de couvertures présentés en partie 5.3. Les garanties additionnelles (capital double effet, décès additionnel et frais d'obsèques) sont directement exprimées en fonction du taux obtenu pour la tarification du capital décès.

Après retraitement des taux bruts par des coefficients d'expérience et des coefficients commerciaux, j'obtiens les taux suivants :

Garantie	Taux chargés
Décès	0,521%
Décès Accidentel	0,129%
Double Effet	0,010%
Frais d'obsèques	0,019%
Total cotisation décès	**0,679%**
Taux de cotisation Rente Education	0,135%
Taux de cotisation Rente de Conjoint	0,000%
Taux de cotisation Incapacité	0,967%
Taux de cotisation Invalidité	0,381%
Total	**2,162%**

Ce taux dépend de l'âge moyen de la population de la société Ω, on a l'évolution du taux de cotisation global suivant :

Age	39 ans	40 ans	41 ans	42 ans	43 ans	44 ans	45 ans	46 ans
Taux	2,162%	2,266%	2,392%	2,525%	2,661%	2,792%	2,919%	3,076%

Comme la simulation se fait en groupe fermé, et compte tenu de l'historique du régime, nous considérons que le taux global au-delà d'un âge moyen fixé à 43 ans n'est pas représentatif de la réalité du régime. Le taux maximal applicable lors de la simulation est donc fixé à 2,661%.

L'âge moyen de l'échantillon variant au grès du vieillissement naturel de la population, mais aussi des sorties de la vie active et des décès, chaque année, le taux à appliquer est calculé par interpolation linéaire entre les valeurs d'âge moyen à considérer.

6.2.1.2.3 Evolution des primes acquises

On représente ci-après l'évolution du niveau moyen des primes acquises au cours de chaque exercice comptable de la simulation. Cette évolution est soumise à des facteurs déterministes et aléatoires. Les facteurs fixes qui entrent en jeu sont la revalorisation annuelle de la valeur monétaire par le taux d'inflation et le taux d'augmentation des salaires qui font augmenter la masse salariale de la Société Ω. Par ailleurs, cette prime globale est soumise au taux de prime applicable qui, comme vu précédemment, dépendra de l'âge moyen de la population encore en activité au cours de l'exercice considéré et, bien entendu, cette prime dépend de la taille de la population qui fluctue à cause des éventuels départs en retraite ou décès.

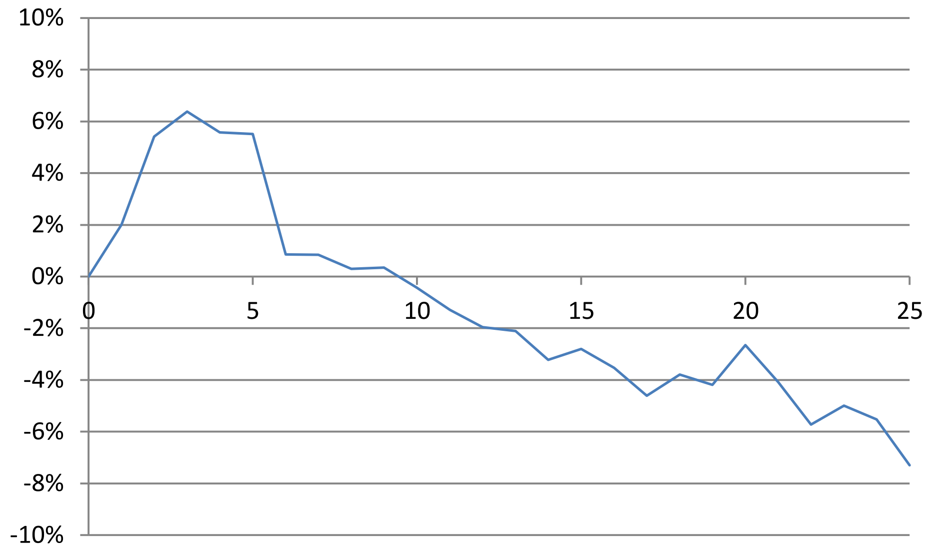


Figure 34. Evolution moyenne de la variation annuelle du niveau des primes acquises

La croissance sur la première partie de la courbe jusqu'à la 6ème année de projection est due à la stabilité de l'échantillon qui vieillit linéairement, ce qui implique une augmentation du taux de cotisation en plus de l'inflation et des augmentations de salaire. La seconde partie de la courbe (de la 7ème année à la 10ème année de projection) est due à une diminution de l'âge moyen, à cause des départs à la retraite et des décès plus nombreux. Ce phénomène compense donc à un quasi équilibre les taux d'augmentation de salaire et l'inflation. Au-delà de la 10ème année de projection, c'est la réduction de l'échantillon qui impose à la prime moyenne sa décroissance annuelle. Cela nous conforte dans le fait qu'au-delà de 10 ans, les résultats sont à prendre avec une extrême prudence.

6.2.2 Logigramme de la simulation

Ce logigramme présente le cœur de fonctionnement de la simulation stochastique avec l'ensemble des tests qui sont réalisés afin de gérer la sinistralité et les aspects comptables du régime de la Société Ω :

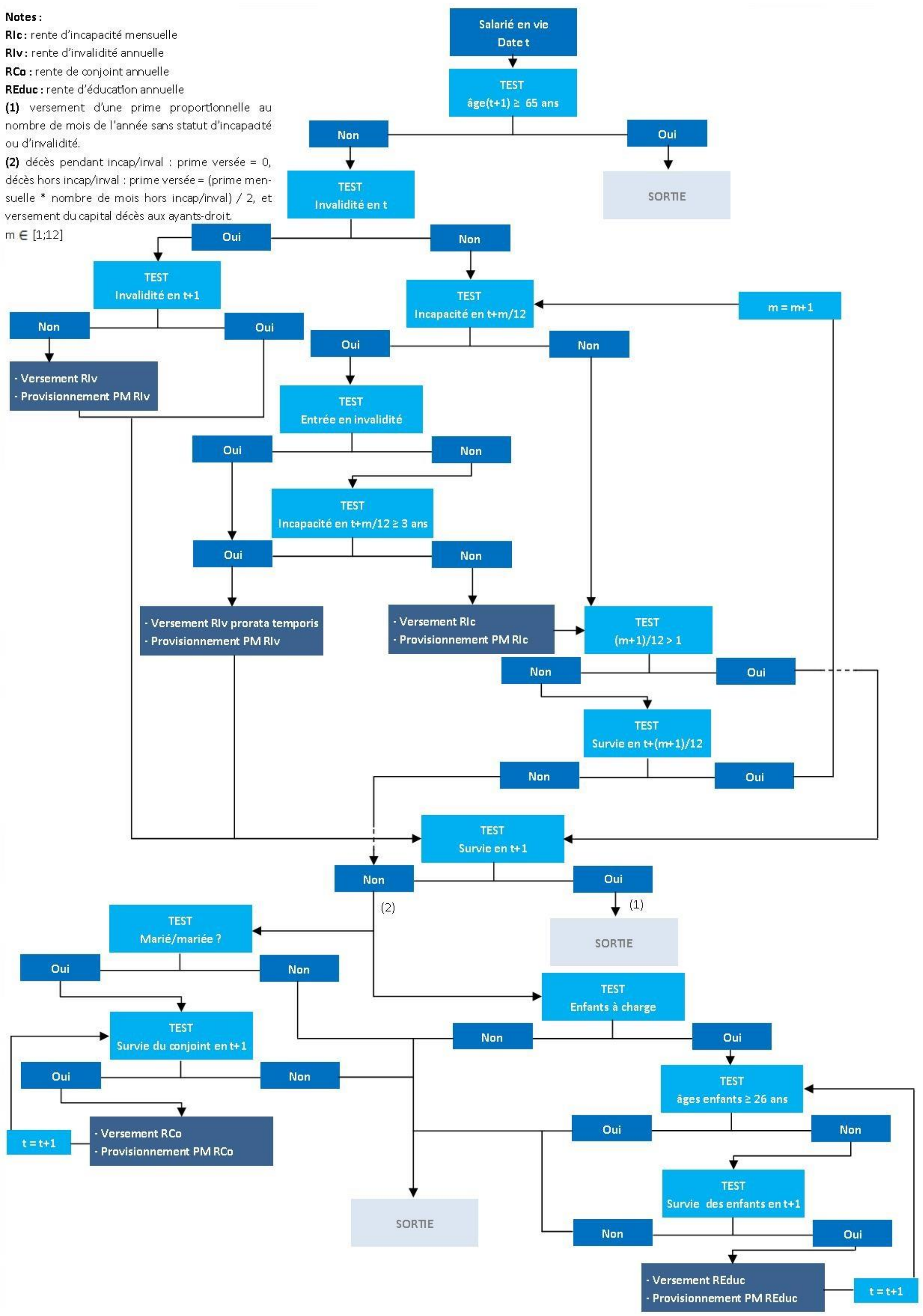


Figure 35. Logigramme de la simulation

Cette boucle est réalisée pour chaque salarié chaque année de la projection.

On vérifie tout d'abord si le salarié est toujours dans l'échantillon actif de la population.

On vérifie ensuite s'il est en invalidité en début d'année, si c'est le cas, on teste, via les lois de maintien, s'il reste une année supplémentaire dans cet état, si c'est le cas on verse la rente d'invalidité et on provisionne. Si l'individu n'est pas en invalidité en début d'année on rentre dans une seconde boucle qui teste pour chaque mois l'entrée en invalidité ou en incapacité avec versement et provisionnement des garanties le cas échéant.

La seconde grande étape consiste à tester le décès de l'assuré conditionnellement à son état (sain, incapable, invalide). S'il vient à décéder, on va tester parallèlement s'il a un conjoint et/ou des enfants. Si c'est le cas, on verse les rentes correspondantes et on constitue les provisions aussi longtemps qu'il le faut.

6.3 Résultats

Nous présentons dans cette partie l'apport des différents programmes de réassurance à la protection de la provision d'égalisation.

6.3.1 Réassurance XS

On a distingué pour la réassurance XS deux programmes complémentaires dont l'un porte sur le risque décès et l'autre sur le risque arrêt de travail.

6.3.1.1 Cotation XS décès

Comme vu précédemment la cotation par le burning cost nécessite beaucoup plus de données que ce qu'exige une cotation par estimation paramétrique ce qui impose d'appliquer les programmes XS à des tranches suffisamment travaillantes. On exclura donc, de bon sens, de prendre en compte uniquement les résultats du Burning Cost pour des catégories de salariés trop élevées. Il a donc fallu pour les tranches élevées estimer la distribution des sinistres par des lois usuelles.

Comme à l'origine nous ne disposions pas de suffisamment de sinistralité pour estimer nos lois de survenance et de gravité des sinistres nous avons utilisé la distribution des sinistres obtenus par la simulation (servant à l'origine au calcul du Burning Cost) afin de travailler sur une distribution exploitable.

Pour pouvoir vérifier que les lois estimées sont en adéquation avec les données d'origine il existe différentes approches de vérification. Tout d'abord, on peut vérifier que les fonctions de répartition estimées et empiriques sont proches l'une de l'autre. En effet, si les deux types de distributions ont des fonctions de répartition proches, on peut avancer qu'elles ont une structure similaire. Par ailleurs, on peut évaluer l'adéquation grâce aux tests de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson-Darling qui vont permettre d'obtenir une statistique issue de la différence entre les lois estimées et les lois empiriques qui servira pour pouvoir conclure sur l'acceptation ou le rejet des lois estimées.

Après retraitement As if de la distribution, nous présentons ci-dessous les fonctions de répartition des lois estimées (voir « Annexe 5 ») avec la fonction de répartition empirique (du risque décès) issue de la simulation.

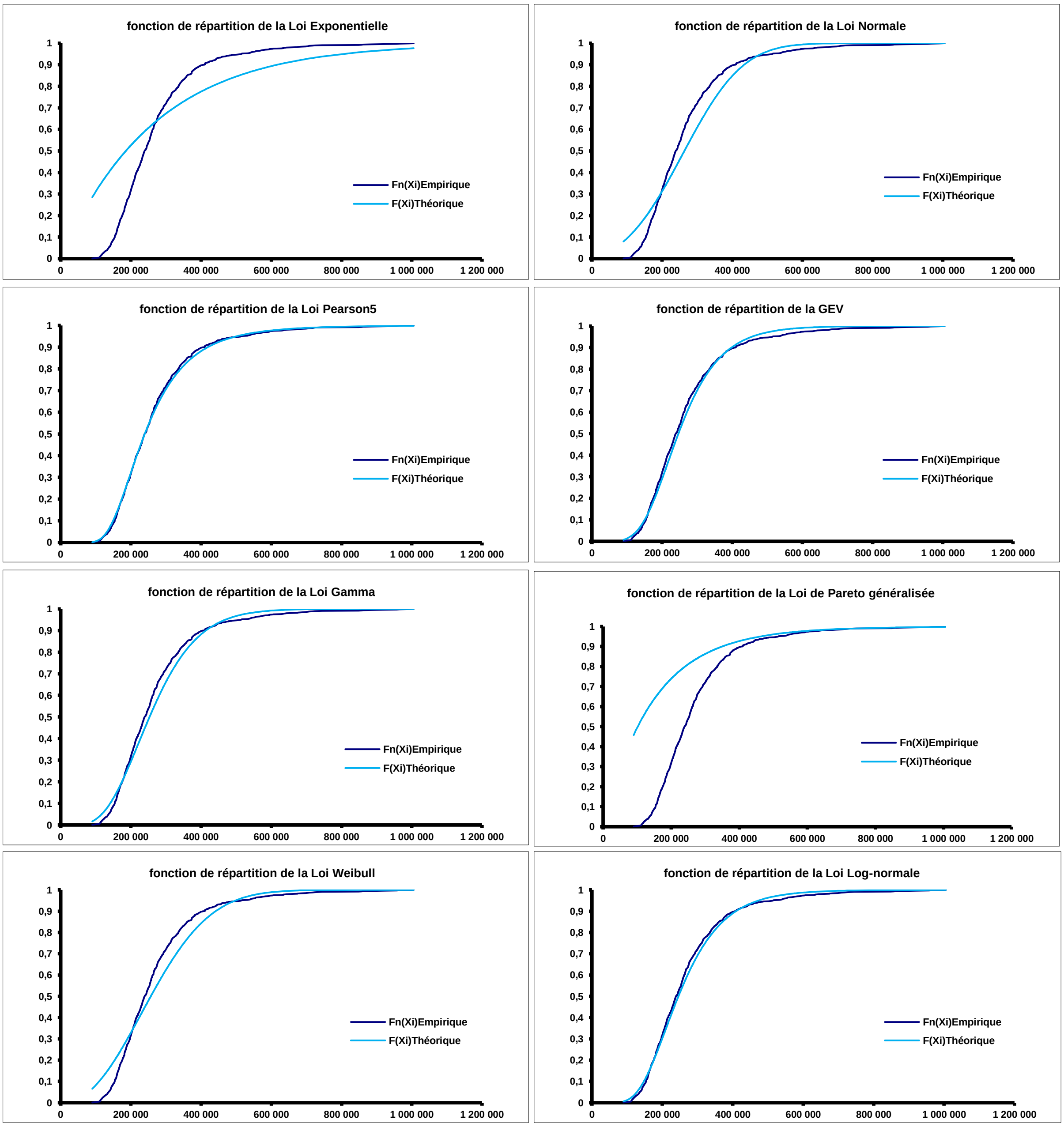


Figure 36. Fonctions de répartition empirique et estimées des sinistres décès

Ces graphes nous apprennent une première chose importante sur la distribution, c'est que la très large majorité des sinistres apparaît entre 200 k€ et 400 k€ et que la sinistralité extrême sur la queue de distribution peut atteindre des montants 2 à 3 fois plus importants. Ainsi, la queue de distribution illustre bien le cas du sinistre de gravité contre lequel on cherche à se prémunir.

Le principe consiste maintenant à comparer la proximité des fonctions de répartition estimées avec la fonction de répartition empirique. On remarque que visuellement les lois Pearson5, GEV, Gamma et log-normale sont les plus proches. Nous cherchons dès lors à valider cette interprétation grâce aux tests de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson-Darling (voir « Annexe 4 »). On utilise un test de Kolmogorov-Smirnov à deux échantillons avec lequel on compare deux fonctions de répartitions empiriques : la première étant issue des données simulées et la seconde étant obtenue en simulant un échantillon à partir des lois dont les paramètres ont été estimés. On réalise la même approche pour le test d'Anderson-Darling à deux échantillons [17].

	Test de Kolmogorov Smirnov			Test d'Anderson-Darling		
Loi	D_n	**p-value**	**Verdict**	A_n	**p-value**	**Verdict**
Pearson5	0,0227	0,1977	**Accepté**	0,8505	0,1136	**Accepté**
GEV	0,0412	0,0954	**Accepté**	4,0994	0,0153	Refusé
Log-normale	0,0439	0,0607	**Accepté**	3,2218	0,0465	Refusé
Gamma	0,0749	0,0114	Refusé	10,4018	0,0052	Refusé
Weibull	0,1110	$3{,}4E^{-06}$	Refusé	30,1277	$< 2.2E^{-16}$	Refusé
Normale	0,1215	$2{,}5E^{-10}$	Refusé	35,5848	$< 2.2E^{-16}$	Refusé
Exponentielle	0,3524	$< 2.2E^{-16}$	Refusé	168,6496	$< 2.2E^{-16}$	Refusé
Pareto généralisée	0,5580	$< 2.2E^{-16}$	Refusé	519,8265	$< 2.2E^{-16}$	Refusé

Nous remarquons que les tests ne valident qu'en partie nos premières conclusions sur l'adéquation des lois. En effet, le test de Kolmogorov-Smirnov n'accepte que les lois Pearson5, GEV et log-normale et rejette donc la loi Gamma que nous aurions initialement retenu. De plus, le test d'Anderson-Darling n'accepte, pour sa part, que la loi Pearson5. Cette différence vient du fait que le test de Kolmogorov-Smirnov va tester les distributions avec une sensibilité particulière à la médiane de chaque distribution tandis que le test d'Anderson-Darling capture mieux les subtilités de la queue de distribution. Etant donné que l'on s'attache à la sinistralité extrême c'est justement le comportement de la queue de distribution qui nous intéresse, donc c'est bien les résultats du test d'Anderson-Darling sur lesquels nous allons nous concentrer le plus. Nous retenons donc, pour estimer la distribution de la sinistralité individuelle en décès, la loi Pearson5. Pour la loi du nombre de sinistres, nous avons retenu une loi de Poisson, ce qui nous conduit à un modèle collectif Poisson-Pearson5.

Dès lors, nous pouvons appliquer les clauses de réassurance afin d'estimer la loi des montants totaux à la charge du réassureur chaque année. Dans notre étude, comme nous disposons du détail des rémunérations de la population et des garanties dont elle bénéficie, nous connaissons le montant maximal par risque qui peut être versé à chaque individu de la population. Connaissant ce plafond détaillé par tête nous avons pris le parti d'opérer sur une réassurance XS illimitée. Le seul facteur à prendre en compte est donc la priorité du programme de réassurance qui revient à appliquer une troncature à gauche sur la loi des sinistres individuels tel que l'on observe $Y_i = (X_i - f).\mathbf{1}_{(X_i \geq f)}$.

La cotation du régime XS va dépendre de la tranche que l'on couvre. De manière logique, notre simulation aboutit à une tarification qui croît avec la taille de la population couverte.

On présente ci-après le prix moyen du programme XS décès sur les 5 premières années de projection en fonction de la borne de priorité. La borne de priorité variant en fonction de salaire minimal de la population de salariés couverte (à multiplier par la garantie de la couverture décès de base).

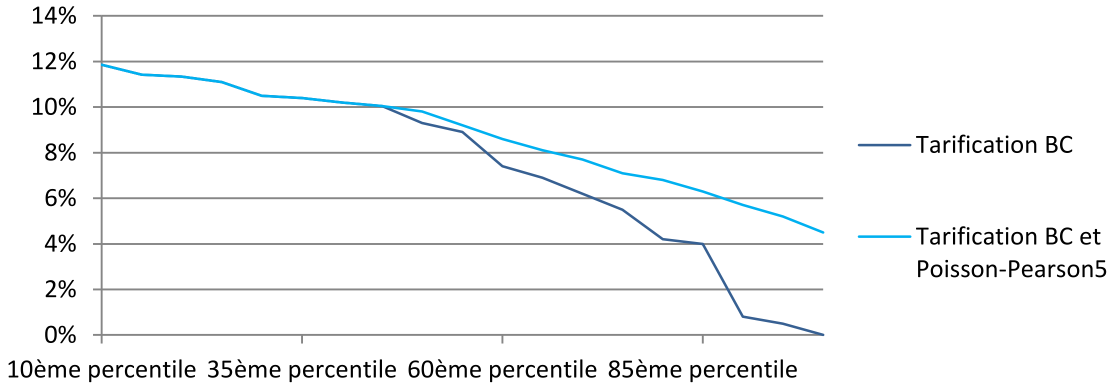


Figure 37. Taux pur moyen sur le programme XS décès

Nous rappelons que nous avons choisi de privilégier le taux Burning Cost sur les tranches travaillantes, c'est la raison pour laquelle les deux courbes se confondent au départ. Le taux obtenu par le modèle Poisson-Pearson5 n'étant pas suffisamment différent du taux Burning Cost, il n'a pas été sélectionné.

On en déduit directement que la plus forte décroissance du Burning Cost est simplement due à une absence significative de sinistralité qui fait mécaniquement baisser le taux pur obtenu par cette méthode. On peut donc avancer que, dès que les courbes divergent, les résultats du Burning Cost ne sont pas suffisamment solides pour être exploités comme nous l'avions initialement supposé.

Par ailleurs, la courbe obtenue par la méthode mixte Burning Cost et modèle Poisson-Pearson5 est bien plus linéaire que celle du taux de flambage, ce qui résulte de l'utilisation d'un modèle d'estimation et qui traduit une certaine homogénéité dans le comportement de la population. Par ailleurs, le taux moyen global est plus élevé sur cette méthode car comme nous l'a montré le test d'Anderson-Darling, c'est la loi Pearson5 qui capture le mieux le comportement de la queue de la distribution qui, comme on peut le voir sur la fonction de répartition (voir Figure 36), peut générer des montants particulièrement importants. Cela vient compenser le fait que le nombre de ces sinistres soit très faible et implique donc un taux pur plus fort que celui du Burning Cost qui est incapable de capturer le comportement de la queue de distribution.

L'analyse de la seule cotation par le Burning Cost viendrait à constater la forte variation qui apparaît entre les 85ème et 90ème percentiles impliquant que l'on passerait d'une tranche relativement travaillante à une qui ne l'est pas du tout. Cela laisserait présager que la réassurance au-delà du 90ème percentile ne sera pas intéressante. On pourrait donc penser que la population à risque (par rapport à l'équilibre du régime) se termine au 90ème centile. Cependant ce qui va réellement jouer sur le taux pur c'est le fait que les sinistres sur les populations aux rémunérations élevées vont être plus pris en charge par la réassurance. Donc la seule analyse du Burning Cost est fausse, et la population au-delà du 90ème percentile représente un véritable risque de gravité, qu'heureusement, le modèle Poisson-Pearson5 évalue mieux.

6.3.1.2 Cotation XS arrêt de travail (AT)

Nous réalisons le même cheminement que pour le décès. A savoir, que nous estimons d'abord la loi des sinistres individuels. Comme nous l'avons vu précédemment, l'analyse visuelle des graphes des fonctions de répartition n'étant pas suffisamment précise nous ne reportons ici que les résultats des tests statistiques de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson-Darling.

	Test de Kolmogorov Smirnov			Test d'Anderson-Darling		
Loi	D_n	p-value	Verdict	A_n	p-value	Verdict
Log-normale	0,0273	0,1543	Accepté	1,1593	0,1354	Accepté
GEV	0,0320	0,1237	Accepté	1,3158	0,1121	Accepté
Gamma	0,0326	0,0951	Accepté	1,6361	0,0756	Accepté
Pearson5	0,0448	0,0628	Accepté	2,3194	0,0554	Accepté
Weibull	0,0556	0,0428	Refusé	7,0020	0,0217	Refusé
Normale	0,0651	0,0103	Refusé	7,4410	0,0064	Refusé
Exponentielle	0,3793	$< 2.2E^{-16}$	Refusé	192,7361	$< 2.2E^{-16}$	Refusé
Pareto généralisée	0,5925	$< 2.2E^{-16}$	Refusé	569,8412	$< 2.2E^{-16}$	Refusé

On observe cette fois-ci que quatre lois sont acceptées par les deux tests : la loi log-normale, la loi GEV, la loi Gamma et la loi Pearson5. Elles disposent d'ailleurs du même rang d'acceptation sur les deux tests ce qui laisse supposer un comportement homogène sur l'ensemble de la distribution sans grande influence des queues des distributions. Cela résulte du fait que le risque arrêt de travail, bien que plus fréquent que le risque décès, ne présente pas de caractère extrême sur cette population. Nous avons pu voir cet aspect dans la partie 5 où il a été précisé que très peu d'arrêts de travail étaient observés dans l'historique du régime (notamment à cause de la franchise de 45 jours).

Nous avons retenu comme loi du nombre de sinistre une loi de Poisson et, à la vue des résultats de tests statistiques, la loi log-normale pour la sinistralité individuelle. Cela nous conduit à une modèle Poisson-log-normale. On réalise de même une troncature à gauche sur la loi des sinistres individuels afin de prendre en compte la priorité de la réassurance et ainsi obtenir la loi des montants de sinistres annuels à la charge du réassureur.

On peut alors estimer le taux pur de la réassurance. On observe un comportement très similaire sur le risque arrêt de travail même si le taux de flambage y est plus faible et son augmentation selon la taille de la population couverte y est atténuée, principalement parce que le portefeuille est peu sujet à ce risque.

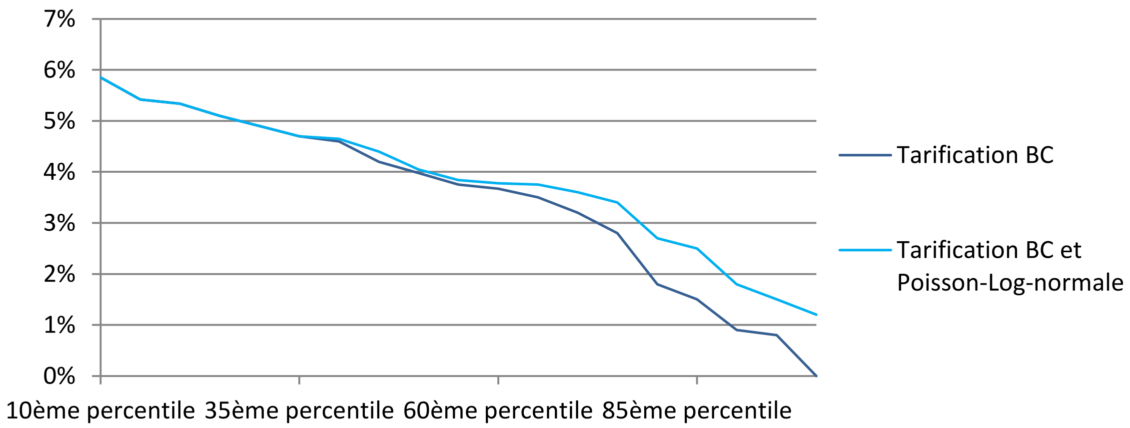


Figure 38. Taux pur moyen sur le programme XS AT

Nous avons choisi, de retenir la même borne que pour le risque décès (40ème percentile) à partir de laquelle on a basculé du taux pur Burning Cost sur le taux pur par estimation paramétrique afin de montrer sur la figure 38 que les tranches travaillantes sont plus importantes sur le risque arrêt de travail. En effet, les deux méthodes de cotation commencent à diverger seulement vers le 60ème percentile. Le taux pur estimé par la méthode paramétrique, bien que proche du taux pur Burning

Cost, reste plus élevé que ce dernier car il capte, de la même manière que pour le décès, mieux les effets de la queue de distribution.

6.3.1.3 Chargements

Afin d'obtenir les taux de réassurance définitif, nous avons ajouté au taux pur un taux de chargement de sécurité et un taux de courtage [16]. De cette façon, nous obtenons la prime commerciale définitive de la manière suivante,

$$P_{\text{commerciale}} = \frac{\left(1 + Tx_{\text{chargement}}\right).P_{\text{pure}}}{\left(1 - Tx_{\text{courtage}}\right)}$$

Ainsi, la rémunération du courtier est incorporée dans la prime commerciale.

6.3.2 Réassurance Stop Loss

Nous réitérons une nouvelle fois le processus précédemment décrit afin d'estimer la meilleure loi pour simuler la consommation de la provision d'égalisation et ainsi obtenir le taux pur du programme de réassurance Stop Loss.

Nous obtenons les résultats suivants pour les tests statistiques de Kolmogorov-Smirnov et d'Anderson-Darling :

	Test de Kolmogorov Smirnov			Test d'Anderson-Darling		
Loi	D_n	**p-value**	**Verdict**	A_n	**p-value**	**Verdict**
Log-normale	0,0366	0,2771	**Accepté**	0,1550	0,1825	**Accepté**
Extreme Value	0,0411	0,1906	**Accepté**	0,1526	0,2144	**Accepté**
Pearson5	0,0418	0,1814	**Accepté**	0,1603	0,1508	**Accepté**
Beta	0,0647	0,0576	**Accepté**	0,6318	0,0923	**Accepté**
Normale	0,0746	0,0513	**Accepté**	0,9055	0,0689	**Accepté**
Weibull	0,0781	0,0001	Refusé	1,1776	0,0577	**Accepté**
Pareto généralisée	0,4313	$< 2.2E^{-16}$	Refusé	25,2579	$< 2.2E^{-16}$	Refusé
Exponentielle	0,4313	$< 2.2E^{-16}$	Refusé	25,2579	$< 2.2E^{-16}$	Refusé

Nous remarquons que le test de Kolmogorov-Smirnov valide mieux la loi log-normale tandis que le test d'Anderson-Darling lui préfère la loi GEV. Cependant, le test d'Anderson-Darling valide plus de lois que le test de Kolmogorov-Smirnov, on peut donc en déduire, que contrairement aux distributions des risques couverts par l'XS, ici, c'est le test de Kolmogorov-Smirnov qui est le plus sensible.

Etant donné que la Méthode de Galton repose uniquement sur l'estimation de la distribution par une loi log-normale, et que c'est celle qui s'approche le mieux de notre distribution empirique, nous n'avons retenu comme méthode de cotation que la Méthode de Galton.

La figure ci-après correspond à la fonction de répartition de l'estimation par une loi de Galton (loi Log-normale) lorsqu'il y a consommation de la provision d'égalisation (considérant l'ensemble des itérations).

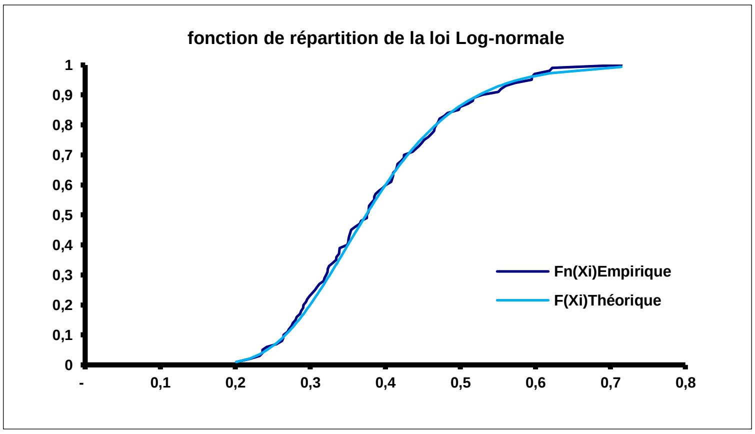


Figure 39. Estimation de la consommation de la provision d'égalisation par la Loi de Galton

Cette densité montre que la provision d'égalisation, lorsqu'elle est entamée, l'est principalement entre 30% et 60%. On a observé sur l'ensemble des réalisations que la volatilité de cette consommation de la provision par rapport à son montant total est assez élevée. Cela entraîne des problèmes dans la tarification par la méthode de Galton qui est très sensible à la volatilité et conduit à des tarifs pouvant être excessifs du fait du coefficient de sécurité.

La méthode de Galton revient à lisser les pertes sur une durée équivalente au nombre d'années du vecteur des observations. Dès lors, si la volatilité en amont est élevée, elle entraîne une augmentation mécanique du tarif en aval. J'ai obtenu sur l'ensemble des simulations les valeurs suivantes :

Avec application du coefficient de sécurité :

	Min	Moyenne	Max
Tarifs (en % PE) – portée limitée	0,31%	18,78%	49,03%
Tarifs (en % PE) – portée illimitée	0,34%	21,06%	54,47%

Sans application du coefficient de sécurité :

	Min	Moyenne	Max
Tarifs (en % PE) – portée limitée	0,28%	8,13%	18,09%
Tarifs (en % PE) – portée illimitée	0,30%	10,17%	20,11%

Si lors des premières années de simulation, le tarif reste relativement proche du minimum observé pour cette couverture, il a tendance à augmenter graduellement au fil des éventuelles consommations faibles de la provision et il augmente très fortement dès que la provision vient à être entamée de manière significative et redescend très difficilement.

L'application du coefficient de sécurité mène à une augmentation du tarif de 10 points en moyenne. La forte variation entre le tarif minimal et le tarif maximal, quel que soit la situation, montre que la tarification sur cette seule garantie de réassurance est assez erratique.

Cette couverture n'est donc pas adaptée à la protection de la provision d'égalisation, en tout cas pas toute seule, car elle ne protège pas des pics de sinistralité en tant que tels et si la provision d'égalisation vient à être entamée, la réévaluation annuelle du tarif peut en faire un produit prohibitif. On voit donc ici tout l'intérêt du programme XS en premier niveau de sécurité.

Un aspect important à prendre en compte dans la gestion comptable du programme Stop Loss est qu'il est géré par les organismes réassureurs comme un programme proportionnel. En effet, cela vient du décalage nécessaire entre la constatation du résultat annuel de l'organisme assureur et le versement de la contrepartie de réassurance. Il y a donc toujours, au moins, un exercice comptable de délai entre les deux étapes. Cela pourra poser problème du point de vue de la gestion de la provision d'égalisation.

6.3.3 Combinaison des deux programmes

Comme on a pu le voir, la réassurance Stop Loss à elle seule entraîne une trop grande variabilité des tarifs pour qu'elle soit applicable et la réassurance XS ne protège pas contre un éventuel cumul de sinistres catastrophiques. Or, il apparaît que les faiblesses d'un chacun de ces deux programmes peuvent être palliées, du moins en partie, par les avantages de l'autre.

On va donc appliquer au régime de prévoyance collective le programme Stop Loss optimal en rétention du programme XS optimal, c'est-à-dire que le programme Stop Loss sera appliqué sur le résultat net de la réassurance XS. L'avantage de l'XS qui consiste à écrêter les montants des sinistres et donc à réduire leur variance va permettre une réduction du prix du programme Stop Loss qui lui va permettre de protéger des sinistralités extrêmes de fréquence.

On mesure l'impact de l'efficacité de la rétention du programme Stop Loss sur le programme XS grâce aux taux de prime suivants,

Avec application du coefficient de sécurité :

	Min	Moyenne	Max
Tarifs (en % PE) – portée limitée	0,22%	4,74%	10,03%
Tarifs (en % PE) – portée illimitée	0,26%	5,11%	10,27%

Sans application du coefficient de sécurité :

	Min	Moyenne	Max
Tarifs (en % PE) – portée limitée	0,15%	3,89%	8,13%
Tarifs (en % PE) – portée illimitée	0,16%	4,36%	8,27%

On remarque une réduction drastique des taux de primes de la réassurance Stop Loss par rapport à ce qui a été présenté dans la partie précédente. Cela démontre l'efficacité de l'association des deux programmes. D'ailleurs, on peut déduire de cette forte diminution que le risque principal du portefeuille est bien maitrisé par le programme XS, et que le programme Stop Loss ne jouera donc que le rôle d'arrière-garde.

6.3.4 Evolution et interprétation du RORAC

6.3.4.1 RORAC sur la tarification Burning Cost de la réassurance

A partir de là, nous avons évalué le RORAC pour différents niveaux de priorité (la portée retenue étant illimitée). Nous rappelons que l'optimalité d'un programme s'obtient en maximisant le RORAC. Le graphe ci-dessous reporte les valeurs du RORAC que j'obtiens selon la valeur de la priorité exprimée par rapport aux percentiles des rémunérations annuelles de la population étudiée pour chacun des 25 exercices simulés.

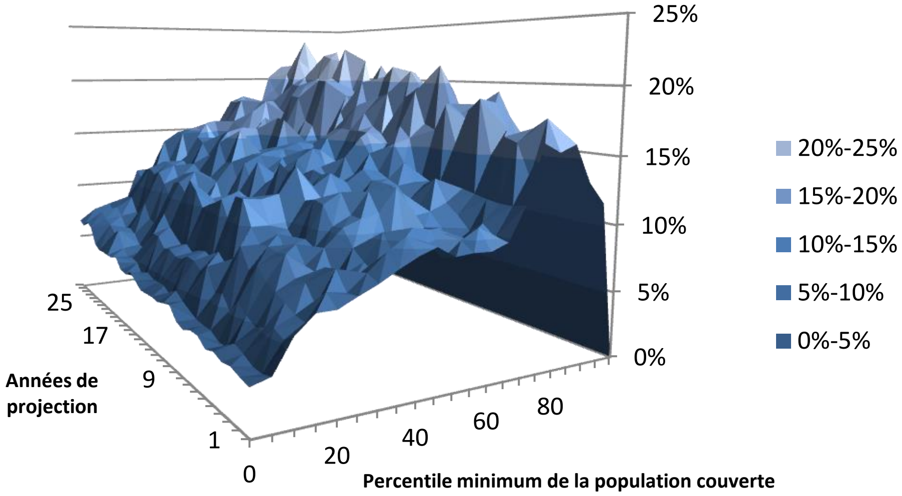


Figure 40. Valeur de l'indicateur RORAC pour la tarification Burning Cost

On remarque que le RORAC maximal est obtenu pour une priorité égale à la valeur du 80ème percentile de la distribution des rémunérations que l'on avait identifié comme étant la limite de la population la plus à risque. Le pas utilisé pour faire varier les bornes de l'XS ne nous permet pas de savoir s'il s'agit exactement de la valeur pour le RORAC maximal. Mais cela correspond à une borne facilement identifiable qui assure une bonne protection face à la sinistralité de gravité.

La valeur maximale du RORAC a tendance à se déplacer vers la gauche (vers des valeurs plus faibles de priorité) au cours des années de simulations ce qui résulte du vieillissement de la population et de l'augmentation globale des salaires.

Le RORAC peu élevé pour des faibles priorités résulte de la combinaison d'une sinistralité prise en charge par la réassurance plus élevée en terme de fréquence mais sur des montants relativement faibles à cause des salaires moins élevés sur ces tranches.

On remarque que la contribution au RORAC est principalement apportée par le programme XS décès (80% en moyenne) suivit du programme XS AT (15-20% en moyenne). Cette couverture étant complétée par le programme Stop Loss dont la contribution au RORAC est plus faible (5% en moyenne) sauf lorsque l'échantillon subit une sinistralité qui n'est pas gérée par les programmes XS. Cependant, selon le niveau de consommation de la provision d'égalisation, si elle vient à être trop entamée, cela peut exceptionnellement conduire à une contribution négative de Stop Loss au RORAC sur les 5 exercices suivants le pic de sinistralité à cause d'une augmentation généralement significative du coût du Stop Loss.

La couverture Stop Loss est donc à appréhender avec prudence et ne sera recommandée que dans des cas d'une aversion très forte au risque sans considération pour le coût de la couverture.

6.3.4.2 RORAC sur la tarification paramétrique de la réassurance

Nous réalisons la même approche que précédemment en utilisant cette fois-ci la tarification de la réassurance qui se base sur le Burning Cost pour les tranches suffisamment travaillantes et sur la modélisation d'une loi de probabilité paramétrée pour les tranches moins travaillantes. Nous obtenons ainsi le détail du RORAC moyen sur l'ensemble des simulations dont la nappe est représentée ci-dessous.

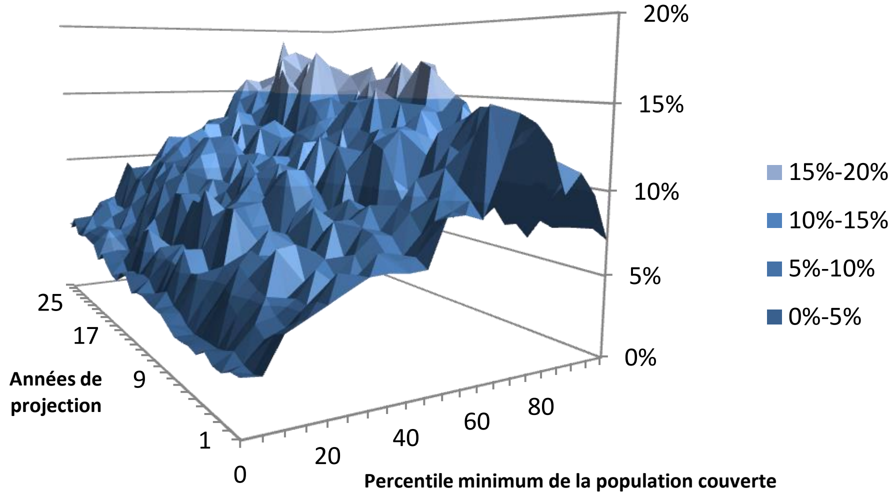


Figure 41. Valeur de l'indicateur RORAC pour la tarification mixte Burning Cost et paramétrique

La première différence flagrante avec la première nappe (cas du Burning Cost seul) c'est que, même si l'on réassure seulement les valeurs extrêmes du portefeuille, le RORAC qui nous est retourné sur la tarification mixte montre qu'il y a un intérêt à le faire, alors que le RORAC du Burning Cost était quasi-nul du fait du manque de la sinistralité nécessaire.

De plus, il apparaît que le maximum atteint par le RORAC peut se retrouver sur une plage d'abscisses plus étendue que précédemment (entre le 65ème et le 85ème percentile). Cela vient du fait que la borne de réassurance du 65ème percentile permet de couvrir une grande majorité des sinistres car c'est bien l'échantillon de population au-delà de cette borne qui est la plus soumise au risque décès. Ce qui nous montre notamment que c'est bien le risque décès (et donc l'XS portant sur le décès) qui contribue le plus au retour sur réassurance du programme et donc à la valeur du RORAC.

En définitive, nous retiendrons donc, la borne du 65ème percentile de rémunération de la population étudiée pour les programmes XS décès et arrêt de travail.

Cela nous conduit aux taux de prime de réassurance suivants :

Type de réassurance	Taux bruts	Prime commerciale	Base
XS	3,90%	4,77%	Prime acquise
SL	3,62%	5,08%	Montant de la provision d'égalisation

6.3.4.3 Impact sur l'évolution simulée de la provision d'égalisation

Lorsque l'on applique le programme de réassurance sur les comptes de résultat qui ont été simulés, on remarque que sur les premières années (lorsque le niveau de la provision croît) le programme permet de largement amortir les impacts des fortes sinistralités permettant un lissage de la croissance du niveau de la provision. Celle-ci n'est affectée que par les sinistres non couverts par le périmètre de réassurance mais leurs impacts, comme vu précédemment ne permettent pas une consommation excessive de la provision. De plus, sur la seconde partie de la simulation (où le niveau de la provision est stabilisé aux alentours du maximum contractuel), la sinistralité décès se fait beaucoup plus forte en raison du vieillissement naturel du portefeuille mais reste bien couverte par le programme XS, les éventuels cumuls étant gérés par le Stop Loss. Cependant, à notre avis, c'est en testant sur l'historique de sinistralité connu que l'impact de la réassurance sera le plus fiable car basé sur la population réelle. Nous réalisons donc un back-testing sur les exercices 2005 à 2011.

6.3.5 Back-testing

Afin de valider que ce programme de réassurance est réellement efficace, nous réalisons un back-testing sur les 7 dernières années de l'historique du régime qui nous ont été communiquées.

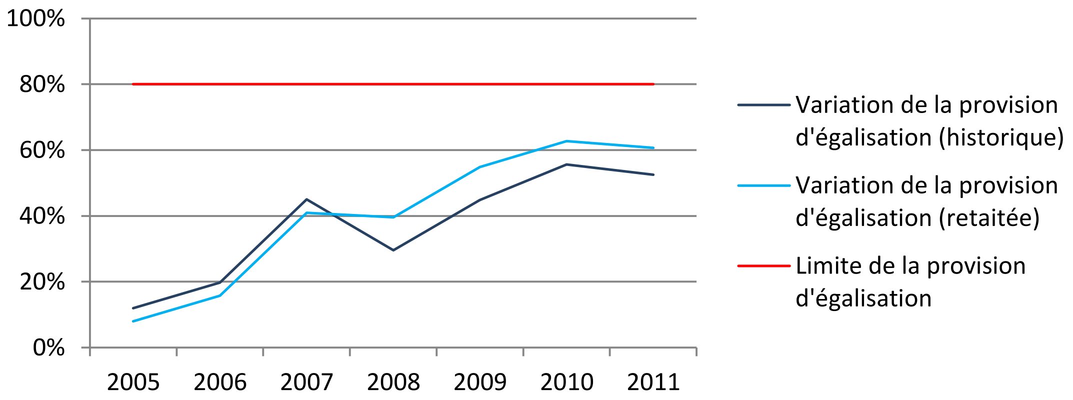


Figure 42. Comportement de la provision d'égalisation (en % du total des primes annuelles)

Nous remarquons que tant qu'il n'y a pas eu d'exercice ayant une sinistralité suffisante, le coût du programme de réassurance vient diminuer le montant total de la provision d'égalisation. Néanmoins, l'impact apparaît minime. Par ailleurs, lorsque qu'une très mauvaise sinistralité est enregistrée comme au cours de l'exercice 2008 (voir partie 5.4) le programme de réassurance protège bien la provision assurant ainsi un lissage de sa progression. La légère diminution enregistrée sur le cas retraité est due à des sinistres n'ouvrant pas droit à la réassurance. Nous rappelons que les programmes XS ne couvrent que la population la plus à risque comme définie précédemment et le Stop Loss ne couvre pas l'intégralité de la provision d'égalisation.

En effet, la provision sert normalement à absorber la sinistralité extrême et même si nous cherchons à la protéger nous avons pris le parti de ne pas la protéger complètement afin qu'elle puisse quand même jouer son rôle d'origine, ce qui permet notamment de réduire le coût de la réassurance.

Mais, même en considérant le coût de la réassurance, l'aire arithmétique entre les deux courbes nous montre qu'appliquer le programme de réassurance testé est profitable à la provision d'égalisation du régime.

Conclusion

En définitive, ce mémoire a présenté le contexte de la prévoyance lourde ainsi que les méthodes actuarielles qui permettent de bien appréhender les risques concernés. Cela nous a permis d'étudier différents types de programmes de réassurance non proportionnels afin de déterminer s'il s'agissait d'une approche à retenir afin de protéger la provision d'égalisation.

Nos résultats nous ont conduits à considérer la réassurance de type Stop Loss prudemment car selon l'exposition au risque (même réduite par le programme XS en amont) elle peut se révéler trop coûteuse et inadaptée à la gestion des risques de ce contrat spécifiquement. En revanche, la réassurance de type XS s'avère être beaucoup plus bénéfique sur ce type de contrats collectifs car elle s'adapte bien au risque principal du portefeuille qu'est le risque décès, qui s'avère être un risque de gravité. Elle permet donc une meilleure gestion de ce risque. Après, la réassurance Stop Loss s'est montrée inefficace car elle avait été testée pour être complémentaire aux programmes XS et couvrir les risques de fréquence mais le portefeuille y est très peu sensible ce qui a faussé d'entrée de jeu cette approche.

Par contre, il convient de voir que la mise en place de ce type de protection vient dénaturer l'intérêt même de la provision d'égalisation qui n'est alors plus considérée comme un moyen d'absorber une sinistralité exceptionnelle mais comme un fond fiscalement intéressant ou un argument de négociation des tarifs et des garanties. Car c'est la réassurance qui vient jouer le rôle de la provision. Dès lors, il est à considérer, pour l'organisme assureur, si le coût de la réassurance est inférieur à une éventuelle taxation, et, pour la compagnie assurée, si le gain en terme de tarifs ou de garanties est supérieur à la diminution de la participation aux bénéfices reversée nette de réassurance. Ce n'est qu'alors qu'une éventuelle réassurance spécifique à la provision d'égalisation sera intéressante.

Enfin, il serait intéressant de réaliser cette étude avec un portefeuille ouvert et d'étudier si la réassurance spécifique à la provision d'égalisation pourrait s'effectuer au travers d'une approche globale de la branche prévoyance d'un organisme assureur.

***

Annexe 1. Les tables

Annexe 1.1 Les tables règlementaires

Les tables utilisées pour le risque décès sont les tables TH/TF-00-02 et pour les risques en cas de vie les tables générationnelles TGH/TGF-05. En ce qui concerne les individus en arrêt de travail, les tables utilisées sont les tables du BCAC de maintien, de décès en incapacité ou en invalidité selon le cas et la table du BCAC de passage de l'incapacité à l'invalidité.

La table de mortalité TF-00-02 se présente comme suit (TH-00-02 possède la même structure) :

Age	Nombre de survivants
0	100000
…	…
107	89
108	44
109	20
110	9
111	4
112	1

La table générationnelle TGF-05 se présente comme suit (TGH-05 possède la même structure) :

Age \ Année de naissance	1900	…	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
0	0	…	0	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000	100000
1	0	…	100000	99738	99739	99739	99740	99741	99742	99743	99743	99744	99745
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…	…
115	8	…	2178	2267	2364	2464	2566	2670	2777	2886	2997	3110	3226
116	3	…	1538	1606	1679	1755	1833	1913	1995	2079	2165	2252	2342
117	1	…	1061	1111	1166	1222	1280	1340	1401	1464	1529	1595	1663
118	0	…	714	750	790	831	873	916	961	1007	1055	1104	1154
119	0	…	468	494	522	550	580	611	643	676	710	746	782
120	0	…	299	316	335	355	376	397	419	442	466	491	516
121	0	…	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

La table de maintien en incapacité du BCAC se présente comme suit (la table de mortalité en incapacité du BCAC a la même structure) :

Ancienneté en incapacité (en mois) \ Age d'entrée en invalidité	20	…	59	60	61	62	63	64
0	10000	…	10000	10000	10000	10000	10000	10000
…	…	…	…	…	…	…	…	…
29	68	…	666	681	696	711	726	741
30	68	…	650	667	684	701	719	736
31	65	…	624	643	661	680	698	717
32	63	…	601	621	641	661	681	700
33	62	…	587	613	638	663	689	714
34	58	…	559	585	611	636	662	688
35	55	…	535	561	587	612	638	664
36	15	…	212	244	275	307	338	370

La table de maintien en invalidité se présente comme suit (la table de mortalité en invalidité et la table de passage en invalidité présentent la même structure) :

Ancienneté en invalidité (en années) \ Age d'entrée en invalidité	20	21	…	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
0	10000	10000	…	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
1	9859	9859	…	9857	9869	9903	9895	9895	9881	9864	9872	9856	9840
2	9699	9699	…	9721	9721	9772	9735	9752	9738	9713	9721	9672	
3	9534	9534	…	9514	9526	9571	9523	9549	9533	9502	9509		
4	9331	9331	…	9316	9297	9331	9242	9268	9257	9224			
5	9163	9163	…	9104	9056	9084	8983	8968	8977				
6	8994	8994	…	8843	8772	8764	8651	8650					
7	8874	8874	…	8656	8565	8559	8422						
8	8761	8761	…	8463	8382	8357							
9	8696	8696	…	8296	8202								
10	8619	8619	…	8018									
…	…	…	…										
39	5939	5939											
40	5852												

Annexe 1.2 Tables de retraitement démographique issues des statistiques INSEE

Taux de nuptialité (2012)	
Sexe	**Taux**
Homme	0,48310165
Femme	0,44115148

Nombre d'enfants de 0 à 26 ans par couple	
Nombre	**Taux**
0	0,473
1	0,225
2	0,203
3	0,074
4 et +	0,025

Table d'âge pour les enfants d'un couple	
Age	***p***
0	0,05053123
1 ou -	0,10106246
2 ou -	0,15159370
3 ou -	0,20030766
4 ou -	0,24902162
5 ou -	0,29773558
6 ou -	0,34260363
7 ou -	0,38747168
8 ou -	0,43233973
9 ou -	0,47720779
10 ou -	0,52207584
11 ou -	0,56694389
12 ou -	0,61181194
13 ou -	0,65667999
14 ou -	0,70154804
15 ou -	0,74641610
16 ou -	0,79128415
17 ou -	0,83615220
18 ou -	0,85852989
19 ou -	0,88090759
20 ou -	0,90328528
21 ou -	0,92566297
22 ou -	0,94804066
23 ou -	0,97041836
24 ou -	0,99279605
25 ou -	0,99639802
26 ou -	1,00000000

Table de poursuite d'études	
Age	l_x
0	100 000
1	100 000
2	100 000
3	100 000
4	100 000
5	100 000
6	100 000
7	100 000
8	100 000
9	100 000
10	100 000
11	100 000
12	100 000
13	100 000
14	100 000
15	100 000
16	100 000
17	100 000
18	93 982
19	82 287
20	69 770
21	57 701
22	48 811
23	38 326
24	28 055
25	18 002
26	4 084

Annexe 2. La méthode de Whittaker-Henderson

Cette méthode est une méthode de lissage non-paramétrique qui consiste à combiner à la fois un critère de fidélité et un critère de régularité grâce à deux paramètres $h, z \in \mathbb{R}^+$. Plus les paramètres h et z sont importants, plus le lissage est important, réduisant ainsi la fidélité aux données brutes d'origine. Le choix de ses paramètres se fait de manière arbitraire jusqu'à obtenir le lissage qui paraît le plus adéquat.

On définit tout d'abord les vecteurs suivants :

- Le vecteur de dimension n des données brutes à lisser : $B = (b_1, \dots, b_n)^t$
- Le vecteur de dimension n des données lissées : $L = (l_1, \dots, l_n)^t$
- La matrice de dimension nxn des poids associés aux estimations : $W = \text{diag}(w_1, \dots, w_n)$

On peut définir les poids :

- **a priori**, si l'on remarque des incohérences pour certaines estimations ou des absences de données,

$$\begin{cases} w_i = 0 \text{ si } b_i = 0 \\ w_i = 1 \text{ sinon} \end{cases}$$

- **a posteriori**, si l'on remarque que le lissage tient trop compte de certaines valeurs estimées compte tenu de la valeur des données brutes correspondantes,

$$w_i = \frac{N_i}{\overline{N}}$$

où N_i représente l'effectif observé d'âge i et $\overline{N} = \frac{\sum_{i=1}^{n} N_i}{n}$ l'effectif moyen sur la plage d'âges de l'étude.

Les critères de fidélité et de régularité sont les suivants :

- **Critère de fidélité :** $\boldsymbol{F = \sum_{i=1}^{n} w_i (l_i - b_i)^2}$, ce critère revient à mesurer la distance euclidienne entre les données à lisser et les données lissées,
- **Critère de régularité :** $\boldsymbol{R = \sum_{i=1}^{n} [\Delta_z (l_i)]^2}$, ce critère est bien un critère de régularité car en approchant l_i' par la différence avant $l_{i+1} - l_i$ on obtient $l_i^{(z)} \approx \Delta_z(i)$ et donc z fixe le degré du polynôme du critère de régularité. La croissance de z impliquant la croissance de la régularité. De plus, du fait de la différentiation on a $\Delta_z(l_i) = \sum_{k=0}^{z} C_z^k . (-1)^{z-k} . l_{i+k}$ et, donc, on a une plage d'âges de longueur $(n - z)$.

On définit maintenant la moyenne de Whittaker-Henderson qui correspond à une combinaison linéaire des critères de fidélité F et de régularité R. La contribution de la régularité y est ajustable au moyen du paramètre h,

$$\boldsymbol{M = F + h.R = \sum_{i=1}^{n} w_i (l_i - b_i)^2 + h. \sum_{i=1}^{n} [\Delta_z (l_i)]^2}$$

Dès lors, la méthode consiste à minimiser cette moyenne. Ces sont les valeurs ajustées l_i, $i = 1, \dots, n$ qui sont les solutions de cette minimisation. Pour trouver les l_i, une condition nécessaire est que les

n équations provenant des dérivées partielles de M par rapport à chacun des l_i soient nulles. Cette condition est suffisante étant donnée la convexité des composantes de M et donc par là-même de M.

On doit donc résoudre :

$$\forall \boldsymbol{i}, \frac{\boldsymbol{\partial M}}{\boldsymbol{\partial l_i}} = \mathbf{0}$$

Réécrivons les critères de fidélité et de régularité sous forme matricielle :

$$\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{L} - \boldsymbol{B})^{\boldsymbol{t}} \,.\boldsymbol{W}.(\boldsymbol{L} - \boldsymbol{B})$$

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{L^t}.(\boldsymbol{K_z^t}.\boldsymbol{K_z}).\boldsymbol{L}$$

avec K_z définit tel que $\Delta^z(L) = K_z.L$ et $\Delta^z(L) = \left(\Delta(l_1), \dots, \Delta(l_{n-z})\right)^t$, le vecteur différence avant de dimension $(n - z)$.

On a alors,

$$\begin{aligned} M &= F + hR \\ &= (L - B)^t.W.(L - B) + h.L^t.(K_Z^t.K_z).L \\ &= L^t.W.L - 2L^t.W.B + B^t.W.B + hL^t.K_Z^t.K_z \end{aligned}$$

En dérivant vectoriellement M par V il vient,

$$\frac{\partial M}{\partial V} = 2W.L - 2W.B + 2hK_z^t.K_z = 0$$

D'où, on a,

$$W.L + hK_Z^t.K_z.L = W.B$$

Donc, on trouve,

$$\boldsymbol{L}^* = (\boldsymbol{W} + \boldsymbol{hK_Z^t}.\boldsymbol{K_z})^{-1}.\boldsymbol{W}.\boldsymbol{B}$$

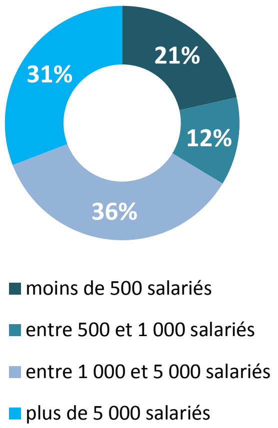
Choix empirique des paramètres

Dans notre application de cette méthode, nous avons choisi d'utiliser les poids a priori. Le paramètre z étant généralement compris entre 2 et 5, ces valeurs ont été testées et c'est finalement la valeur 3 qui a été retenue car pour des valeurs inférieures le lissage n'est pas assez fort et, par conséquent, ne corrige pas bien les irrégularités et pour les valeurs supérieures le lissage tend à donner une droite. Compte tenu des objectifs, les valeurs testées pour h étaient comprises entre 30 et 100. La variation obtenue sur le lissage étant très faible entre toutes ces valeurs, c'est la valeur $h = 30$ que nous avons retenu.

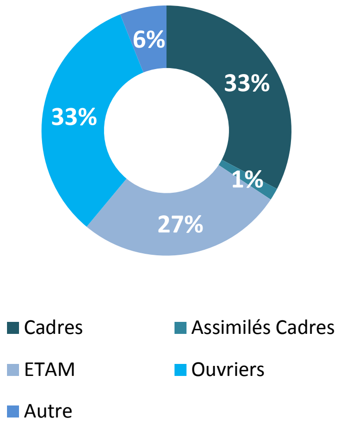
Annexe 3. Enquête prévoyance-santé Towers Watson 2013

L'enquête prévoyance santé Towers Watson 2013 est une enquête de marché réalisée auprès de 108 sociétés afin d'étudier les garanties en prévoyance et en santé présentes sur le marché du collectif. Cette enquête recouvre une population totale de 971 177 salariés assurés (hors bénéficiaires).

Proportion d'entreprises par classe d'effectifs



Effectif par catégorie de salariés



Secteur d'activité	Proportion d'entreprises	Proportion en termes d'effectifs
Agroalimentaire	4,8 %	0,8 %
Automobile	2,4 %	16,2 %
Autres secteurs	4,8 %	1,8 %
Banque / assurance	11,9 %	14,7 %
Bâtiment / travaux publics	1,2 %	0,5 %
Biens de consommation	6,0 %	0,9 %
Biens et services industriels	3,6 %	2,7 %
Commerce / distribution / négoce	6,0 %	1,9 %
Distribution	2,4 %	3,2 %
Électronique	4,8 %	1,1 %
Energie	4,8 %	4,7 %
Etudes et conseils	1,2 %	0,3 %
Informatique	7,1 %	5,3 %
Média / communication	8,3 %	5,9 %
Métallurgie / travail du métal	8,3 %	8,0 %
Santé / chimie	13,1 %	2,1 %
Services	2,4 %	27,3 %
Plastique / caoutchouc	1,2 %	0,3 %
Textile / habillement / chaussure	1,2 %	0,1 %
Transports / logistique	4,8 %	2,2 %

Annexe 4. Les tests statistiques

Annexe 4.1 Le Test du χ^2

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{E}$ de loi $\mathbb{P}_X$ inconnue et $\mathbb{P}_0$ une loi connue sur $\mathbb{E}$. Soit $A_1, \dots, A_d$ une partition de $\mathbb{E}$ telle que $p_k = \mathbb{P}_0[A_k] > 0 \; \forall k$. On dispose d'un n-échantillon indépendant et identiquement distribué $(X_1, \dots, X_n)$ de X. Soit N_k le nombre de variables aléatoires X_i dans A_k. On pose l'hypothèse $(H_0) : \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_0$ dont la statistique D^2 est définie comme suit,

$$D^2 = \sum_{k=1}^{d} \frac{(N_k - n.p_k)}{n.p_k}$$

D^2 est asymptotiquement distribuée comme une variable de loi χ^2_{d-1}.

La p-value du test est alors donnée par,

$$\hat{\alpha} = \mathbb{P}\left[X^2_{d-1} > D^2\right]$$

Annexe 4.2 Le Test de Kolmogorov-Smirnov à 1 échantillon

Si F_n^* est la fonction de répartition empirique d'un n-échantillon d'une variable aléatoire de fonction de répartition F, alors la statistique $D_n = \text{Sup}|F_n^*(x) - F(x)|$ est asymptotiquement distribuée de la manière suivante,

$$\mathbb{P}\left[\sqrt{n}D_n < y\right] \to \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^k \exp\{-2k^2y^2\}$$

La statistique D_n est indépendante de F et le résultat asymptotique précédent permet de tester,

$$\begin{cases} H_0 : F(x) = F_0(x) \\ H_1 : F(x) \neq F_0(x) \\ \qquad \alpha \end{cases}$$

Annexe 4.3 Le Test de Kolmogorov-Smirnov à 2 échantillons

Les hypothèses du test de Kolmogorov-Smirnov à deux échantillons avec un niveau de confiance α s'écrivent :

$$\begin{cases} H_0 : F_1(x) = F_2(x) \\ H_1 : F_1(x) \neq F_2(x) \\ \qquad \alpha \end{cases}$$

Où $F_k(x)$ est la fonction de répartition de la variable d'intérêt X dans la sous population associée au n_k-échantillon Ω_k avec $k = 1{,}2$.

La statistique du test est donnée par,

$$D = \max_x |F_1(x) - F_2(x)|$$

Ce qui revient à mesurer l'écart vertical maximal entre les fonctions de répartitions des deux échantillons.

La région critique du test au niveau de confiance α est la suivante,

$$RC : D \geq k_\alpha(n_1, n_2)$$

Où $k_\alpha(n_1, n_2)$ est lue dans la table des valeurs critiques de Kolmogorov-Smirnov à deux échantillons.

Annexe 4.4 Le Test d'Anderson-Darling à deux échantillons

Les hypothèses du test d'Anderson-Darling à deux échantillons avec un niveau de confiance α s'écrivent :

$$\begin{cases} H_0 : F_1(x) = F_2(x) \\ H_1 : F_1(x) \neq F_2(x) \\ \alpha \end{cases}$$

Où $F_k(x)$ est la fonction de répartition de la variable d'intérêt X dans la sous population associée au n_k-échantillon Ω_k avec $k = 1,2$.

La statistique du test s'écrit alors,

$$A^2_{n_1,n_2} = \frac{n_1.n_2}{N} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[F_1(x) - F_2(x)]^2}{H_N(x).[1 - H_N(x)]} \mathrm{d}H_N(x)$$

Avec $N = n_1 + n_2$ et $H_N(x) = \frac{n_1.F_1(x)+n_2.F_2(x)}{N}$

On rejette l'hypothèse H_0 dès lors que l'on a pour le niveau de confiance α,

$$\frac{A^2_{n_1,n_2} - 1}{\sigma_N} \geq z(1-\alpha)$$

Où $z(1-\alpha)$ est le $(1-\alpha)$-percentile de la distribution asymptotique standardisée de $A^2_{n_1,n_2}$ et $\sigma_N = \mathrm{var}\left(A^2_{n_1,n_2}\right)$ [17].

Le test d'Anderson-Darling permet de tester les hypothèses retenues en prenant mieux en comptes les queues de distribution que le test de Kolmogorov-Smirnov qui est plus sensible à la médiane des échantillons.

Annexe 5. Les lois de probabilité

Annexe 5.1 La loi Normale

Soient μ et σ^2 respectivement la moyenne et la variance de la loi normale. On a alors la fonction de répartition F suivante,

$$F(x) = \frac{1}{2}.\left(1 + \Theta\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)$$

Avec Θ la fonction d'erreur.

Annexe 5.2 La loi Log-Normale

Pour tout $x > 0$, on a μ et σ^2 la moyenne et la variance du logarithme de la variable, on a alors la fonction de répartition F suivante,

$$F(x) = \frac{1}{2}.\left(1 + \Theta\left(\frac{\ln(x)-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)$$

Avec Θ la fonction d'erreur. Une caractérisation alternative est présentée en partie 4.4.3.

Annexe 5.3 La loi Exponentielle

Soit μ la moyenne de la loi. Alors on définit la fonction de répartition F de la loi exponentielle comme suit,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right), & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & , \text{ sinon} \end{cases}$$

Annexe 5.4 La loi de Pareto généralisée (GPD)

On a la fonction de répartition F de la loi de Pareto généralisée comme suit,

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \xi.\frac{x}{\beta}\right)_+^{-\frac{1}{\xi}} & \text{, pour } \xi \neq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) & \text{, pour } \xi = 0 \end{cases}$$

Où $x > 0$ si $\xi \geq 0$ et $0 \leq x \leq -\frac{\beta}{\xi}$ si $\xi < 0$ et $x_+ = \mathrm{Max}(x, 0)$

Annexe 5.5 La loi Beta

Soient les paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, la fonction de répartition de la loi Beta est définie de la manière suivante,

$$F(x) = \frac{B_x(\alpha,\beta)}{B(\alpha,\beta)} = I_x(\alpha,\beta)$$

Avec $B_x(\alpha,\beta) = \frac{x^{\alpha-1}.(1-x)^{\beta-1}}{\int_0^1 u^{\alpha-1}.(1-u)^{\beta-1}\mathrm{d}u}$ et $B(\alpha,\beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1}.(1-u)^{\beta-1}\mathrm{d}u.$

Annexe 5.5 La loi Gamma

Soient $k > 0$ et $\theta > 0$. On définit la fonction de répartition de la loi Gamma de la manière suivante,

$$F(x) = \frac{\gamma\left(k, \frac{x}{\theta}\right)}{\Gamma(k)}$$

Avec $\gamma\left(k, \frac{x}{\theta}\right) = \int_0^{\frac{x}{\theta}} \exp(-u) . u^{k-1} \mathrm{d}u$ et $\Gamma(k) = \int_0^{+\infty} \exp(-u) . u^{k-1} \mathrm{d}u$.

Annexe 5.6 La loi de Weibull

Soient $k, \lambda > 0$, alors la fonction de répartition de la loi de Weibull est définie comme suit,

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right)$$

Annexe 5.7 La loi *Extreme Value* (GEV)

On a la fonction de répartition de la loi valeurs extrêmes comme suit,

$$F(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left[1 + \xi . \frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]_+^{-\frac{1}{\xi}}\right) & \text{, pour } \xi \neq 0 \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right)\right) & \text{, pour } \xi = 0 \end{cases}$$

Avec $x_+ = \mathrm{Max}(x, 0), \sigma > 0$ et $\xi, \mu \in \mathbb{R}$.

Annexe 5.8 La loi du χ^2 (ou de Pearson)

On définit la fonction de répartition de la loi du χ^2 à k degrés de liberté de la manière suivante,

$$F(x) = \frac{\gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{x}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

Avec $\gamma\left(\frac{k}{2}, \frac{x}{2}\right) = \int_0^{\frac{x}{2}} \exp(-u) . u^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{d}u$ et $\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) = \int_0^{+\infty} \exp(-u) . u^{\frac{k}{2}-1} \mathrm{d}u$.

On notera que nous avons évalué au cours de nos tests plusieurs lois du χ^2 avec des degrés de libertés différents mais c'est l'analyse de la loi du χ^2 à 5 degrés de liberté (notée Pearson5 dans ce mémoire) qui a été la plus concluante.

Bibliographie

Mémoires

[1] BAILLARD, E. (2009). Mémoire d'actuaire ISFA. *Pilotage prévoyance individuelle.*

[2] MOURELOT, B. (2009). Mémoire d'actuaire ISFA. *Provision d'égalisation et solvabilité, étude d'un portefeuille de prévoyance collective décès.*

Cours

[3] RULLIERE, D. (2012). Cours d'assurance vie (ISFA). *Tarification et provisionnement*.

[4] PLANCHET, F. (2012-2013). Cours de modèles de durée (ISFA). *Méthodes de lissage et d'ajustement*.

[5] PLANCHET, F. (2012-2013). Cours de modèles de durée (ISFA). *Estimation du maintien en arrêt de travail*.

[6] JAL, P. (2013). Cours de réassurance (ISFA).

[7] ROBERT, C. (2013). Cours de théorie des valeurs extrêmes (ISFA).

Formations

[8] DUBOIS, D. (2012). Edition Formation Entreprise. *Réassurance vie*. Paris.

[9] MAGALHAES, R., & ROUSSEAU, S. (2011). Formation Towers Watson. *Risk benefits*. Paris.

Ouvrages et publications

[10] DEELSTRA, G., & PLANTIN, G. (2006). *Théorie du risque et réassurance.* ECONOMICA.

[11] DENUIT, M., & ROBERT, C. (2007). *Actuariat des assurances de personnes, modélisation, tarification et provisionnement.* ECONOMICA.

[12] HESS, C. (2000). *Méthodes actuarielles de l'assurance vie.* ECONOMICA.

[13] PLANCHET, F., & JACQUEMIN, J. (2003). *L'utilisation des méthodes de simulation en assurance.* BULLETIN FRANÇAIS D'ACTUARIAT, Vol. 6, N° 11, Juin-Décembre 2003, pp. 3-35.

[14] TOSETTI, A. (2002). *Assurance, comptabilité, règlementation, actuariat.* ECONOMICA.

[15] WALHIN, J.-F. (2007). *La réassurance.* LARCIER.

[16] BLONDEAU, J. & PARTRAT, C. (2003). *La réassurance, approche technique*. ECONOMICA.

[17] SCHOLZ, F.W. & STEPHENS, M.A. (1987). *K-sample Anderson-Darling Tests*. Journal of the American Statistical Association, Vol. 82, N°399, pp. 918-924.

Sites

[18] *Centre Technique des Institutions de Prévoyance*. (2013). Récupéré sur http://www.ctip.asso.fr/index.html

[19] *L'Assurance Maladie en Ligne*. (2013). Récupéré sur http://www.ameli.fr/