Probabilités de la Machine à sous

**Ensemble de départ :**

Notre ensemble de départ est l’ensemble des symboles présent dans la machine à sous :

Ω = {joker, cerise, citron, raisin, pastèque, banane, orange}

**Fréquence des symboles :**

Chaque élément de notre ensemble correspond à un symbole de la machine à sous et chaque symbole apparaissent plus au moins dans une colonne.

* Le joker apparaît 1 fois dans chaque colonne
* La cerise apparaît 2 fois dans chaque colonne
* Le citron apparaît 4 fois dans chaque colonne
* Le raisin apparaît 8 fois dans chaque colonne
* La pastèque apparaît 16 fois dans chaque colonne
* La banane apparaît 32 fois dans chaque colonne
* L’orange apparaît 64 fois dans chaque colonne

**Les Arrangements :**

Les arrangements d’un ensemble d’éléments correspondent aux dispositions ordonnées de certains éléments de cet ensemble. Ici, les éléments sont les symboles de la machine à sous et l’ensemble et la totalité des symboles.

Les arrangements d'un ensemble **se distinguent** par l'ordre des éléments qui les composent. Par exemple, {joker, raisin, orange} et {orange, raisin, joker} sont 2 arrangements différents de notre ensemble.

Les arrangements de l’ensemble de départ d’une expérience aléatoire possèdent comme caractéristiques :

* L’expérience tient compte de l’ordre
* L’expérience est avec remise

Dans ce cas, on calcule les arrangements de la façon suivante :

On a :

n: nombre d’éléments dans l’ensemble de départ

k: nombre d’éléments sélectionnés dans l’ensemble de départ

Nombre d’arrangement avec remise = nk

Exemple :

On veut le nombre d’arrangement d’avoir des citrons sur les 3 colonnes de notre machine à sous.

n = 4

k = 3

Alors notre résultat est 43 = 64 arrangements possibles.

**La Probabilité :**

La probabilité correspond à la chance d’avoir un élément.

Pour calculer la probabilité qu’un élément soit choisi dans une colonne, nous allons effectuer le calcul suivant :

On a :

n: fréquence de l’élément choisi (dit le nombre de résultats favorables)

m: nombre d’éléments dans l’ensemble de départ (dit le nombre de résultats possibles)

Probabilités d’avoir un élément choisi = n/m

Exemple :

On veut la probabilité d’avoir un citron en n’ayant qu’une seule colonne sur la machine à sous.

n = 4

m = 127

Alors notre résultat est 4/127 ≈ 0,031 ≈ 3,1% de chance d’avoir un citron.

Cependant, notre machine à sous possède 3 colonnes. Alors le calcul à effectuer sera le suivant :

On a :

p = probabilité d’avoir un élément choisi dans une machine à sous d’une colonne

c = nombre de colonnes dans la machine à sous

Probabilités d’avoir le même élément sur « c » colonnes = pc

Exemple :

On veut la probabilité d’avoir un citron sur chaque colonne de notre machine à sous (donc 3 colonnes).

p = 4/127

c = 3

Alors notre résultat est (4/127)3 ≈ 64/2048383 ≈ 3,1 e-5 de chance d’avoir un citron sur chaque colonne.

**L’espérance :**

L’équité d’un jeu d’argent peut être mesurée à l’aide de l’espérance.

La machine à sous possède plusieurs issues possibles qui sont soit des gains soit des pertes.

On a une machine à sous à n issues possibles dont les valeurs sont x1, x2, …. xn. Si x3 = 5 et x5 = -12 cela signifie que l’issue 3 permet de remporter 5 euros et l’issue 5 nous fait perdre 12 euros.

Chaque issue possède une certaine probabilité de se produire. On note pn la proba d’avoir l’issue n.

L’espérance des machines à sous est définie par :

E = x1p1 + x2p2 + …. + xnpn

Cela correspond à la valeur moyenne (ici un bénéfice ou une perte) que reçoit le joueur à chaque fin de partie.

Si :

- bénéfice > 0 alors le jeu est favorable au joueur

- bénéfice < 0 alors le jeu est favorable à la machine à sous / casino

- bénéfice = 0 alors jeu équitable

Cependant, l’espérance est une moyenne : elle n’a de signification qu’une fois que de nombreuses observations - donc parties - ont été réalisées.

Exemple sur un jeu de dés :

Pour un dé à 6 face, avec les règles suivantes :

* Résultat 1 : Tirer 2 : le joueur gagne 15 euros
* Résultat 2 : Tirer 1 ou 4 : le joueur gagne 5 euros
* Résultat 3 : Tirer 3, 5 ou 6 : le joueur perd 10 euros

On a donc comme espérance : E = 15 x 1/6 + 5 x 2/6 + (-10) x 3/6 = -0.83

Cela signifie ici que le joueur va perdre en moyenne 83 centimes par partie.

Dans ce cas, on peut conclure que le jeu n’est pas rentable pour le joueur, mais rentable pour le casino. Car en effet l’objectif de la machine à sous et du casino étant de faire du profit, il sera normal que les jeux proposés aient une espérance négative pour le joueur. Comme il y a un grand nombre de joueurs, la moyenne des pertes de chaque joueur correspondra de manière assez précise à l’espérance que le casino a établie, garantissant ainsi au casino un bénéfice significatif.

L’espérance n’a pas nécessairement besoin d’être élevée. Par exemple, si l’on suppose une espérance de perte de 1 euro par joueur et qu’un million de personnes jouent, le casino peut être sûr de générer un bénéfice d’environ un million d’euros. Bien sûr, en pratique, le casino devra probablement verser des gains importants aux rares gagnants de jackpots, mais ces dépenses occasionnelles seront largement compensées par les pertes cumulées des nombreux autres joueurs.

**Calcul général pour notre machine à sous**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Symboles | Fréquences | Arrangements Possibles  Symbole sur 3 Colonnes | Probabilités sur une Colonne : | Probabilités d’avoir sur 3 Colonnes |
| Joker | 1 | 1x1x1 = **1** | 1/127 ≈ **0,0079** | (1/127)3  = 1/2048383  ≈ **4,9 e-7** |
| Cerise | 2 | 2x2x2 = **8** | 2/127 ≈ **0,016** | (2/127)3  = 8/2048383  ≈ **3,9 e-6** |
| Citron | 4 | 4x4x4 =**64** | 4/127 ≈ **0,031** | (4/127)3  = 64/2048383  ≈ **3,1 e-5** |
| Raisin | 8 | 8x8x8 =**512** | 8/127 ≈ **0,063** | (8/127)3  = 512/2048383  ≈ **2,5 e-4** |
| Pastèque | 16 | 16x16x16 = **4 096** | 16/127 ≈ **0,12** | (16/127)3  = 4096/2048383  ≈ **2 e-3** |
| Banane | 32 | 32x32x32 = **32 768** | 32/127 ≈ **0,25** | (32/127)3  = 32768/2048383  ≈ **1,5 e-2** |
| Orange | 64 | 64x64x64 = **262 144** | 64/127 ≈ **0,50** | (64/127)3  = 262144/2048383  ≈ **0,12** |
| Total | 127 | 127x127x127 =  **2 048 383** |  |  |

**Probabilité d’avoir un arrangement gagnant :**

(1 + 8 + 64 + 512 +4096 + 32768 + 262144)/2048383 = 2359/16129 ≈ 0,15

**Probabilité d’avoir un arrangement perdant :**

1 – 2359/16129 = 13770/16129 ≈ 0,85

**Espérance pour 100 FortuGems :**

1/2048383 x (500 x 262144 + 1000 x 32768 + 2000 x 4096 + 4500 x 512 + 6000 x 64 + 7500 x 8 + 15000 x 1) – 100 x 13770/16129 ≈ -0,041

**Espérance pour 10 000 FortuGems :**

1/2048383 x (50 000 x 262144 + 100 000 x 32768 + 200 000 x 4096 + 450 000 x 512 + 600 000 x 64 + 750 000 x 8 + 1 500 000 x 1) – 10 000 x 13770/16129 ≈ -4,10