Polinómios de Taylor

T_c^n ← ordem, ↑ centro

↳ serve p/ aproximação de funções

⚠ $c=0$ → polinómio de MacLaurin

$$T_c^n(f(x)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

Exemplo:

$$T_\pi^3(\operatorname{sen} x) = \frac{f(\pi)}{0!} + \frac{f'(\pi)(x-\pi)}{1!} + \frac{f''(\pi)(x-\pi)^2}{2!} + \frac{f'''(\pi)(x-\pi)}{3!}$$

$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f(\pi) = \operatorname{sen}\pi = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad f'(\pi) = \cos\pi = -1$

$f''(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f''(\pi) = -\operatorname{sen}\pi = 0$

$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(\pi) = -\cos\pi = 1$

$$T^3_\pi(\operatorname{sen} x) = 0 - (x-\pi) + 0 + \frac{(x-\pi)^3}{3!} = -x + \pi + \frac{(x-\pi)^3}{3!}$$

Erro da aproximação: $|f(x) - T_c^n(f(x))|$ → Resto de Lagrange

↳ $R_c^n(f(x)) = \frac{f^{n+1}(\theta)(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}$ definição

⚠ Quando é pedida a fórmula de Taylor, pretende-se:

$$f(x) = T_c^n(f(x)) + R_c^n(f(x))$$

Majorante p/ erro: $|R_c^n(f(x))| \leq \frac{M|x-c|^{n+1}}{(n+1)!}$

$M = \sup|f^{n+1}(y)|$ y entre x e c

Exemplo:

Considera a função f definida em $]-100, +\infty[$ por
$f(x) = \sqrt{100+x}$

a) encontre o polin. de MacLaurin, $p_2(x)$ p/ $f(x)$

$$T_0^2(f(x)) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k$$

$$\Leftrightarrow T_0^2(\sqrt{100+x}) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)(x)}{1!} + \frac{f''(0)(x)^2}{2!}$$

$f(x) = \sqrt{100+x} = (100+x)^{1/2}$ $\qquad f(0) = 10$

$f'(x) = \frac{1}{2}(100+x)^{-1/2} \times 1$ $\qquad f'(0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$

$f''(x) = -\frac{1}{4}(100+x)^{-3/2} \times 1$ $\qquad f''(0) = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{100^{3/2}} = -\frac{1}{4000}$

$$p_2 = 10 + \frac{1}{20}x - \frac{1}{\frac{4000}{2}}x^2$$

b) Usando o polinómio anterior, calcule uma aprox de $\sqrt{104}$.

$\sqrt{104} = \sqrt{100+4} = f(4)$

$$p_2(4) = 10 + \frac{4}{20} - \frac{16}{8000} = 10{,}198$$

c) Mostre q o erro da aprox da alínea anterior é inferior a 4×10^{-5}

Majorante p/ erro:

$|R_0^2(f(x))| \leq \frac{M|x-0|^3}{3!}$ $\qquad M = \sup|f^{(3)}(y)|$ y entre x e c
$\qquad\qquad 4 \quad 0$

$f^3(x) = \frac{3}{8}(100+x)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{8\sqrt{(100+x)^5}}$

$M = \sup \left| \frac{3}{8\sqrt{(100+y)^5}} \right|$ $y \in [0,4]$

$0 \leq y \leq 4$
$100 \leq 100 + y \leq 104$
$(100)^5 \leq (100+y)^5 \leq 104^5$
$10^5 \leq \sqrt{(100+y)^5} \leq \sqrt{104^5}$

$\frac{1}{8 \times 10^5} \geq \frac{1}{8\sqrt{(100+y)^5}} \geq \frac{1}{8 \times \sqrt{104^5}}$

$\frac{3}{8 \times 10^5} \geq \frac{3}{8\sqrt{(100+y)^5}} \geq \frac{3}{8 \times \sqrt{104^5}}$

$$M = \frac{3}{8\times10^5} = \frac{3}{8}\times10^{-5}$$

$$|R_0^2 f(4)| \le \frac{\frac{3}{8}\times10^{-5}\times 4^3}{3!} = 4\times10^{-5}$$

Ex 2 Mostre q $\cos x$ pode ser aprox pelo polinómio $1-\frac{x^2}{2}$ no intervalo $]-0{,}1;0{,}1[$ c/ erro inf a $\frac{1}{6}\times10^{-3}$

$f(x)=\cos x \qquad f(0)=1 \qquad T_0^2(f(x)) = 1-\frac{x^2}{2}$

$f'(x)=-\operatorname{sen} x \qquad f'(0)=0$

$f''(x)=-\cos x \qquad f''(0)=-1$

$$T_0^2(\cos x) = 1+0-\frac{1\times(x-0)^2}{2!} = 1-\frac{x^2}{2}$$

$$|R_0^2(\cos x)| \le \frac{M|x-0|^3}{3!}$$

$M = \sup|\operatorname{sen} y| \qquad y\in]-0{,}1;0{,}1[$

$= \operatorname{sen}(0{,}1) \qquad -0{,}1\le \operatorname{sen} y \le 0{,}1$

$$|R_0^2(\cos x)| \le \frac{\operatorname{sen}(0{,}1)|x|^3}{6} \le \frac{1\times|x^3|}{6} \le \frac{1}{6}\times(0{,}1)^3 = \frac{1}{6}\times10^{-3}$$

Para $x\in]-0{,}1;0{,}1[\iff |x^3|\le 0{,}1^3$

Séries de Taylor

Quando $|R_c^n(f(x))| \to 0$ o polinómio de Taylor vai coincidir c/ a funç (n→+∞)

$$f(x) = T_0^n(f(x)) = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)(x-0)^n}{n!}$$ → representaç de f em série de Taylor

Exemplos:

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\ln(x+1) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

! Qualquer outra funç pode ser obtida por substituiç, derivaç ou integraç destas.

Séries de Taylor → aplicado a funções contínuas

$$f(x) = T_c^n(f(x)) + \underbrace{R_c^n(f(x))}_{\to 0}$$

- a representação em série de Taylor corresponde c/ a série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(c)(x-c)^n}{n!}$$ → representação de $f(x)$ em Série de Taylor

Exemplo gerais

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad |x|<1 \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Exercícios

$$e^{2x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x)^n}{n!} = \sum \frac{2^n x^n}{n!}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\operatorname{sen}(4x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n (4x)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 4^{2n+1} x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Outras operações

- subst. direta
- primitivação
- derivação

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}$$

$$\left(\int \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n dx\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int a_n (x-c)^n dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n (x-c)^{n+1}}{n+1}$$

Exercício

ln → derivação

- $\ln(x+1) = ?$

$$(\ln(x+1))' = \frac{1}{1+x} \Leftrightarrow (\ln(x+1))' = \frac{1}{1-(-x)}$$

$$\Leftrightarrow (\ln(x+1))' = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x)^n \Leftrightarrow \ln(x+1) = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx$$

$$\Leftrightarrow \ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^n dx \Leftrightarrow \ln(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

Úteis

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

Exercício exame (~~def~~ agrup 1 2015)

1) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

a) Sabendo que $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, obtenha uma representaç em séries de potências de f

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2} = x \times \frac{1}{1+x^2} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0} (-1)^n x^{2n+1}$$

b) Prove que $g(x) = \ln(1+x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+2}}{n+1}$

$$\left(\ln(1+x^2)\right)' = \frac{2x}{1+x^2} \Leftrightarrow \left(\ln(1+x^2)\right)' = 2\,\frac{x}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\ln(1+x^2)\right)' = 2\sum_{n=0} (-1)^n x^{2n+1} \Leftrightarrow \ln(1+x^2) = \int 2\sum_{n=0} (-1)^n x^{2n+1}\,dx$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+x^2) = 2\sum_{n=0} (-1)^n \int x^{2n+1}\,dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+x^2) = \sum_{n=0} \frac{2(-1)^n x^{2n+2}}{2n+2}$$

$$\Leftrightarrow \ln(1+x^2) = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{n+1}$$

2) Sabendo que $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

a) Determine a representaç em série de potencias de $\cos x$

qnd subst $n=0$ não cria expoentes negativos nem fatoriais mantém-se 0 "0"

$$\cos x = (\operatorname{sen} x)'$$

$$= \left(\sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)'$$

$$= \sum_{n=0} \frac{(-1)^n (2n+1)\, x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{\underline{n=0}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Aplicação → Cálculo da soma de séries numéricas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = S$$

exemplo geral

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

exerc. Soma da série $\sum_{n=0} \frac{3^n}{n!} = e^3$

$$\sum_{n=0} \frac{(-1)^n (2\pi)^{2n}}{(2n)!} = \cos(2\pi) = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n(n+1)} = \sum_{n=0} \frac{(\frac{1}{3})^n}{n+1} \qquad \ln(x+1) = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \sum_{n=0} \frac{(-1)^n (-1/3)^n}{n+1} = -3 \times \sum_{n=0} \frac{(-1)^n (-1/3)^{n+1}}{n+1}$$

$$= -3 \ln\left(-\frac{1}{3}+1\right) = -3\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

b) $$\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Séries de funções | $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$

exemplos: $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{n}$

→ Convergência pontual

$$\forall x \in D \quad f(x) = \lim_{x \to +\infty} f_n(x)$$

→ Convergência uniforme

? ⇒ $\Pi_n = \sup |f_n(x) - f(x)|$ é um infinitésimo

Critério de Weierstrass

Seja (f_n) uma sucessão de funções em D e $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série numérica convergente de termos não negativos, tais que $|f_n(x)| \leq a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in D$, então a série $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ converge uniformemente

Exemplos

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $x \in [0,1]$

?

Como $\left|\frac{x^n}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série de termos não negativos de Dirichlet convergente $(p=2>1)$ então, pelo C. Weierstrass, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$ converge uniformemente

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$, $x \in [0, 2\pi]$

Como $\cos(nx) \leq 1$, então $\left|\frac{\cos(nx)}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ é uma série de Dirichlet convergente de termos não negativos, pelo C-W, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$ é uniformem. convergente.

Consequencias da convergencia uniforme de Σf_n para $f_n(x)$

→ Se (f_n) é uma sucessão de funções contínuas em $[a,b]$

① f é contínua em $[a,b]$

② f é integrável em $[a,b]$ e $\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to +\infty} \int_a^b f_n(x)dx$? x / n

③ Se as funções f_n têm derivada contínuas em $[a,b]$ e (f_n') converge uniformem., então f é diferenciável e $f'(x) = \lim_{n \to +\infty} f'_n(x)$

?

(4) Seja $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ (funçã soma)

(4.1) S é contínua em $[a,b]$

(4.2) $\int_a^b S(x)\,dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,dx \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$

(4.3) Se $(f_n)'$ converge uniformemente :

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$$

Exemplo

Considera S definida por $S = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{sen(x)}{n^4}$ n?

a) Mostre que S é contínua em $\mathbb{R}$

b) Mostre que S é diferenciável em $\mathbb{R}$ e que S' é uma funçã contínua

a) como $\left| \frac{sen(nx)}{n^4} \right| \leq \frac{1}{n^4}$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ é uma série de Dirichlet convergente ($p = 4 > 1$), pelo C.W., $\sum_{n=1} \frac{sen(nx)}{n^4}$ é uniformem/ converg. . Como consequência, e pq $\frac{sen(nx)}{n^4}$ é contínua em $\mathbb{R}$, S é contínua em $\mathbb{R}$.

b) $f_n(x) = \frac{sen(nx)}{n^4}$

$f'_n(x) = \frac{n\cos(nx)}{n^4} = \frac{\cos(nx)}{n^3}$

(por calculos anteriores) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3}$ é uniformem/ convergente. Logo, S é diferenciavel, e portanto S é contínua em $\mathbb{R}$

Teste 1 agr. 3 2016

4 → Considere $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{2^{n-2}}$

a) Mostre que a série de potencias dada é uniformem/ convergente com $[-1,1]$

b) Determine o seu domínio de convergencia

a) $\left|\frac{x^{3n-1}}{2^{n-1}}\right| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} a r^n / \sum_{n=1} a r^{n-1}$?

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ é uma série geométrica convergente ($|r| = \frac{1}{2} < 1$), pelo critério de Weierstrass, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{3n-1}}{2^{n-1}}$ é uniformemente convergente

Em branco

Séries de Fourier

→ serve p/ o mesmo q as séries de Taylor aplicadas à funções descontínuas

29

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\underbrace{a_n}_{} \cos(nx) + \underbrace{b_n}_{} \operatorname{sen}(nx) \right]$$

coef de Fourier

Para funções de período 2π, definidas em $[-\pi, \pi]$

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx \qquad ; n \in \mathbb{N}_0$$

Relembrar

$$\int u'\cos u = \operatorname{sen} u \qquad \int u'\operatorname{sen} u = -\cos u \qquad \int_a^b u v' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$$

Exemplo

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

- $a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{0} 0\cos(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\times\cos(nx)\,dx$

$n \neq 0$

$$= \frac{1}{n}\int_0^{\pi} n\cos(nx)\,dx = \frac{1}{n}\left[\operatorname{sen}(nx)\right]_0^{\pi} = \frac{1}{n}(\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen} 0) = 0$$

↓ a_0 vai ser calc à parte

- $a_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(0x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \int_0^{\pi} 1\,dx$

$$= [x]_0^{\pi} = \pi$$

- $b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx = \frac{1}{n}\int_0^{\pi} n \times 1 \times \operatorname{sen}(nx)\,dx \quad n \neq 0$

$$= \left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n}\cos 0$$

$$= -\frac{1}{n}(-1)^n + \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(-(-1)^n + 1) = \frac{1}{n}((-1)^{n+1} + 1) = \frac{2}{2k+1} \quad , n = 2k+1$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[0\cos(nx) + \frac{2}{2n+1}\operatorname{sen}(nx)\right] = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2n+1}\operatorname{sen}(nx)$$

Exercício

$f(x) = x$, def em $[-\pi, \pi]$

$f(-x) = -x$
$-f(x) = -x$ f é ímpar e $a_n = 0$

- $b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx) dx = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen}(nx) dx$

Cal aux

$u = x$ $u' = 1$
$v' = \operatorname{sen}(nx)$ $v = -\frac{1}{n}\cos(nx)$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{x}{n}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -\frac{1}{n}\cos(nx) dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) + -\frac{\pi}{n}\cos(-n\pi) + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}(-1)^n - \frac{\pi}{n}(-1)^n + \frac{1}{n}\left[\frac{1}{n}\cancel{\operatorname{sen}(nx)}\right]_{-\pi}^{\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \times \left(-\frac{2\pi}{n}\right)(-1)^n = -\frac{4(-1)^n}{n}$$

$$f(x) \simeq \frac{0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[0\cos(nx) - \frac{4(-1)^n}{n}\operatorname{sen}(nx)\right]$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}(nx)$$

Salvadores da pátria

- Se f é par
  $(f(-x) = f(x))$
  $b_n = 0$
  $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$

- Se f é ímpar
  $(f(-x) = -f(x))$
  $a_n = 0$
  $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx$

- $\operatorname{sen}(n\pi) = \operatorname{sen}(-n\pi) = 0$
- $\cos(n\pi) = \cos(-n\pi) = (-1)^n$
- $\int \cos(nx) = \frac{1}{n}\operatorname{sen}(nx)$
- $\int \operatorname{sen}(nx) = -\frac{1}{n}\cos(nx)$

$\overbrace{LI}^{u'}\,|\,\overbrace{ATE}^{v'}$

E → expon.
T → trign.
A → algébricas
I → inv trign.
L → log

Ficha

1 a) $f(x) = x + x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$

$f(-x) = -x + (-x)^2 = 0$ $\neq f(x)$ não é par
$-f(x) = -(x + x^2) = -x^2 - x$ $\neq f(-x)$ não é ímpar

$a_n =$

Teorema de Dirichlet

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π - periódica e seccionalmente dif e $c \in \mathbb{R}$

Então a série de Fourier de f converge no ponto c para

$\frac{f(c^+) + f(c^-)}{2}$ $\qquad f(c^+), f(c^-) \to$ limites laterais

Assim, a função soma é:

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & x \text{ é ponto de continuidade de } f \\ \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}, & x \text{ é ponto de descontinuidade} \end{cases}$$

$$f(x) \underset{?}{\approx} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)] \Leftarrow \text{Teorema Furier}$$

TD

$$f(x) \overset{\downarrow}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \operatorname{sen}(nx)] \quad \downarrow$$

cálculo da soma de séries numéricas

Exame Final 2009

8) Seja f a função periódica de período 2π, definida em $[-\pi, \pi]$ por $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\pi, 0[\\ -1, & x \in [0, \pi[\end{cases}$

Determ. a série de Fourier associada a f e apresente o esboço gráfico da função soma no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$

$f(-x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \pi[\\ -1, & x \in [-\pi, 0[\end{cases}$ $\qquad -f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, \pi[\\ -1, & x \in [-\pi, 0[\end{cases}$

Logo, é ímpar e $a_n = 0$ e $b_n = \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} 1 \operatorname{sen}(nx)\, dx + \int_0^{\pi} -\operatorname{sen}(nx)\, dx \right) = \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_{-\pi}^{0} \right.$$

$$\left. - \left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos(0) + \frac{1}{n}\cos(-n\pi) + \frac{1}{n}\cos(n\pi) - \frac{1}{n}\cos 0 \right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}(-1)^n + \frac{1}{n}(-1)^n - \frac{1}{n} \right) = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{2}{n} + \frac{2}{n}(-1)^n \right)$$

$$= \frac{4}{\pi n}\left(-1 + (-1)^n \right) \underset{\substack{\uparrow \\ n = 2k+1}}{=} \frac{4}{\pi(2k+1)} \times (-2) = \frac{-8}{\pi(2k+1)}$$

Série de Fourier

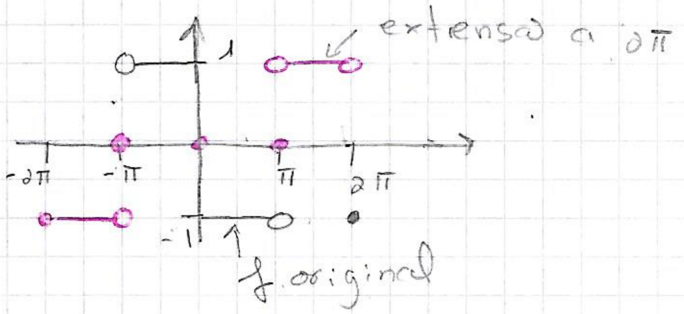
$$f(x) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi(2n+1)} \operatorname{sen}(nx)$$

Pelo T. Dirichlet, para $x \in]-\pi, 0[$ e $]0, \pi[$, $[-2\pi, -\pi[$, $]\pi, 2\pi]$, f é contínua e portanto $S(x) = f(x)$

para $x = -\pi$: $S(-\pi) = \frac{1+(-1)}{2} = 0$

$x = \pi$: $S(\pi) = \frac{1+(-1)}{2} = 0$

$x = 0$: $S(0) = 0$



2º Teste ag 4 2015/2016

1) $f(x) = \begin{cases} -\pi - x, & x \in [-\pi, 0[\\ 0, & x = 0 \\ \pi - x, & x \in]0, \pi[\end{cases}$

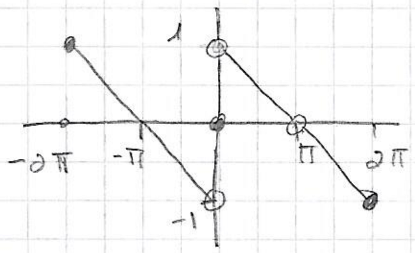
referir sempre c. Dirichlet

a) Esboça o gráf de f no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$

Pelo T Dirichlet, para $x \in [-\pi, 0[$, $\{0\}$, $]0, \pi[$, $[-2\pi, -\pi[$, $]\pi, 2\pi]$.

f é contínua é e portanto $S(x) = f(x)$

$x = 0$ é o único ponto descont. $S(0) = 0$



b) Mostra q ~~a soma~~ da série de Furier de f é $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx)$

31

$$f(-x) = \begin{cases} -\pi + x, & x \in]0, \pi] \\ 0, & x = 0 \\ \pi + x, & x \in [-\pi, 0[\end{cases}$$

$$-f(x) = \begin{cases} \pi + x, & x \in [-\pi, 0[\\ 0, & x = 0 \\ x - \pi, & x \in]0, \pi[\end{cases}$$

$f(-x) = -f(x)$, logo f é ímpar, $a_0 = 0$ e $b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\,dx$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi} (\pi - x) \operatorname{sen}(nx)\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{(\pi - x)}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -1 \times \frac{-\cos(nx)}{n}\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(0 - \frac{\pi}{n}\cos(n\pi) - \frac{1}{n}\int_0^{\pi} \cos(nx)\,dx\right)$$

$$= \frac{2}{\pi} \times \left(+\frac{\pi}{n} - \frac{1}{n} \times \frac{1}{n}\left[\cancel{\operatorname{sen}(nx)}\right]_0^{\pi}\right)$$

$$= \frac{2}{n}$$

$$f(x) \simeq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx)$$

Calc. aux

~~$u = -\pi - x \quad u' = -1$~~

~~$v' = \operatorname{sen}(nx) \quad v = \frac{-\cos(nx)}{n}$~~

$u = \pi - x \quad u' = -1$

$v' = \operatorname{sen}(nx) \quad v = \frac{-\cos(nx)}{n}$

c) Soma série?

$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} \operatorname{sen}(nx)$, para pontos de continuidade

$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n} \times n \cos(nx)$

$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2\cos(nx)$

$f'(\pi) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2\cos(n\pi)$ $\quad x = \pi$ não é ponto de continuidade

$\sum_{n=1}^{+\infty} 2\cos(n\pi) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2(-1)^n \Rightarrow \lim 2(-1)^n \begin{cases} 2 \\ -2 \end{cases}$

Pela cond necess. conv., a série é divergente.