Calculo II – explicações

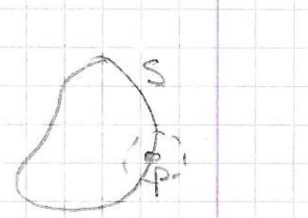
Conceitos topológicos

Ponto interior:

P é ponto interior de S se existe uma bola $B_R(P)$ contida em S

Ao conjunto de pontos interiores chamamos de interior : $\operatorname{int}(S)$

Ponto fronteira:



P é ponto fronteira se qualquer bola $B_R(P)$ contiver pontos de S e de $\operatorname{ext}(S)$

Ao conjunto de pontos fronteiros chamamos fronteira : $fR(S)$

Classificação:

Aberto: um conjunto é aberto se na sua definição estiverem apenas conjunções e disjunções do tipo $p<k$ ou $p>k$

$S \cap fR(S) = \emptyset$ (S e a fronteira são disjuntos)

Fechado: " " " " "
conjunções e disjunções do tipo $p\leq k$ ou $p\geq k$

$fR(S) \subset S$ (a fronteira está contida em S)

Limitado: $\exists M, \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \|(x,y,z)\| \leq M$

Se existir um bola fechada $B_M(0,0)$ que contenha S

Ficha 1.2

1 $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}+y}{\sqrt{1-y^2}}$

a)

$$D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \underbrace{1-x^2\geq 0} \wedge \underbrace{\sqrt{1-y^2}\neq 0 \wedge 1-y^2\geq 0}\}$$

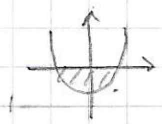
$x^2 \leq 1$ | $1-y^2>0$

$x^2-1\leq 0$ | $y^2<1$

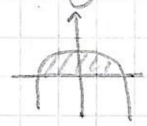
$y^2-1<0$

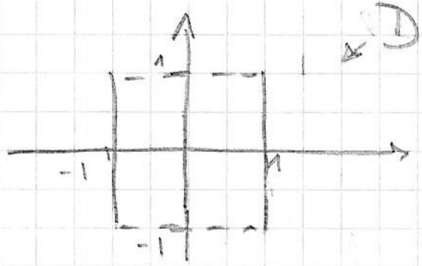
continua →

$x^2-1\le 0$



$1-y^2>0$





não é aberto nem fechado

nota:

só tem $>$ ou $<$ $\rightarrow$ aberto
só tem $\geq$ ou $\leq$ $\rightarrow$ fechado
tem $>$ ou $<$ ou $\geq$ ou $\leq$ $\rightarrow$ nem aberto nem fechado
$\mathbb{R}^2$ ou $(0,0)$ $\rightarrow$ aberto e fechado

b)

i) $fr(D)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: (x=-1 \wedge -1\le y\le 1) \vee$
$(y=1 \wedge -1\le x\le 1) \vee$
$(x=1 \wedge -1\le y\le 1) \vee$
$(y=-1 \wedge \underbrace{-1\le x\le 1}_{|x|\le 1})\}$

ii) $int(D)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \underbrace{-1<x<1}_{|x|<1} \wedge \underbrace{-1<y<1}_{|y|<1}\}$

c) $D\cap fr(D)\neq\emptyset$, logo não é aberto.

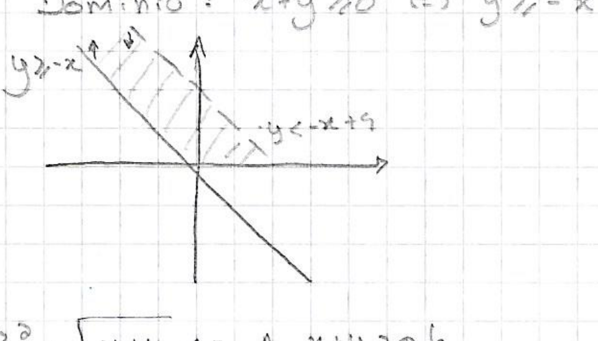
$fr(D)\not\subset D$, logo não é fechado.

7)

a) $S=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \sqrt{x+y}<3\}$

$\sqrt{x+y}<3$
$x+y<9$
$y<-x+9$
reta

Domínio: $x+y\geq 0 \Leftrightarrow y\geq -x$



$int(S)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \sqrt{x+y}<3 \wedge x+y>0\}$

$fr(S)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=-x+9 \vee y=-x\}$

$S\cap fr(S)\neq\emptyset$, não é aberto

$fr(S)\not\subset S$, não é fechado

Como $y=-x$ pertence ao conjunto este não é limitado.

a) $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}$

Revisão:

$< \; \wedge \; >$

$> \; \vee \; <$

$|f(x)| < k$

$\Leftrightarrow f(x) < k \wedge f(x) > -k \wedge k \geq 0$

$|x| + |y| \leq 1$

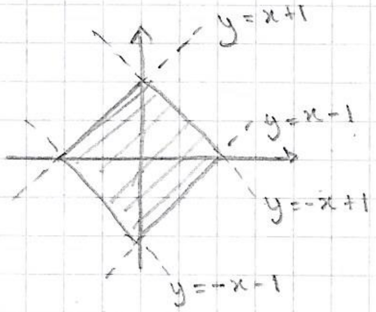
$\Leftrightarrow |x| \leq 1 - |y|$

$\Leftrightarrow x \leq 1 - |y| \wedge x \geq -1 + |y| \wedge (1 - |y| \geq 0)$

$\Leftrightarrow |y| \leq 1 - x \wedge |y| \leq x + 1 \wedge (|y| \leq 1)$

$\Leftrightarrow y \leq 1 - x \wedge y \geq -1 + x \wedge y \leq x + 1 \wedge y \geq -x - 1 \wedge (|y| \leq 1 \wedge 1 - x \geq 0 \wedge x + 1 \geq 0)$

$\Leftrightarrow y \leq -x + 1 \wedge y \geq x - 1 \wedge y \leq x + 1 \wedge y \geq -x + 1 \wedge (-1 \leq y \leq 1 \wedge x \leq 1 \wedge x \geq -1)$



$\text{int}(S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 1\}$

$fr(S) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| = 1\}$

$S \cap fr(S) \neq \emptyset$, não é aberto

$fr(S) \subset S$, logo é fechado

Considerando $\overline{B_2(0,0)}$, $S \subset \overline{B_2(0,0)}$, logo S é limitado

Alternativa: $M = 2$ $\quad \|(x,y)\| \leq 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq 4$

S verifica a condição, logo é limitado.

Estudar derivadas parciais

Teorema de Weierstrass

Se f tem um domínio fechado e limitado então f atinge

$\exists R (D) \subset D \quad \exists R : B_R : D \subset B_R(0)$

em D um máximo e um mínimo global

Extremos locais

- Determinar as expressões das derivadas parciais de f
- Calcular os pontos críticos: $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

- Classificar os pontos críticos: Matriz hessiana

$$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y \end{bmatrix}$$

Para cada ponto crítico:

→ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) > 0$ e $|Hf(x,y)| > 0$: Mínimo local

→ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) < 0$ e $|Hf(x,y)| > 0$: Máximo local

→ $|Hf(x,y)| < 0$: Ponto de sela, não é extremo

→ Outros casos nada se conclui

Ficha 1.5

1) a) $f(x,y) = 3xy^2 + x^3 - 3x$

∇ gradiente de f:

$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3y^2 + 3x^2 - 3$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy$

Pontos críticos: $\nabla f(x,y) = (0,0)$

$\begin{cases} 3y^2 + 3x^2 - 3 = 0 \\ 6xy = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3y^2 + 3x^2 - 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3y^2 + 3x^2 - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 3y^2 - 3 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 3x^2 - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y = \pm 1 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 0 \end{cases}$

Pontos críticos

$(0,1), (0,-1) (1,0) (-1,0)$

Matriz hessiana

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (3y^2 + 3x^2 - 3)' = 6x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = (3y^2 + 3x^2 - 3)' = 6y = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ (teorema Swartz)

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = (6xy)' = 6x$

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix}$

$Hf(0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad |Hf(0,1)| = 0 - 36 < 0$ Ponto de sela

$Hf(0,-1) = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad |Hf(0,-1)| < 0$ Ponto de sela

$Hf(1,0) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ $\quad |Hf(1,0)| = 36 > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) = 6 > 0$ $\quad f(1,0)$ é mínimo local

$Hf(-1,0) = \begin{bmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$ $\quad |Hf(-1,0)| = 36 > 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,0) = -6 < 0$ $\quad f(-1,0)$ é um máximo local

e) $f(x,y) = x^3y + 12x^2 - 8y$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3yx^2 + 24x$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^3 - 8$

Pontos críticos: $\nabla f(x,y) = 0$

$\begin{cases} 3yx^2 + 24x = 0 \\ x^3 - 8 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3yx^2 + 24x = 0 \\ x^3 = 8 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3y \cdot 2^2 + 24 \times 2 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 12y + 48 = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = -\frac{48}{12} \\ x = 2 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = -4 \\ x = 2 \end{cases}$

$\begin{array}{r|l} 48 & 12 \\ 00 & 4 \end{array}$

Ponto crítico $(2,-4)$

Matriz hessiana:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6yx + 24$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 3x^2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)$ (teorema de Swartz)

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$

$Hf(x,y) = \begin{bmatrix} 6yx + 24 & 3x^2 \\ 3x^2 & 0 \end{bmatrix}$

$Hf(2,-4) = \begin{bmatrix} 6 \times (-4) \times 2 + 24 & 3 \times 2^2 \\ 3 \times 2^2 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 72 & 12 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad |Hf(2,-4)| = -144 < 0$

Ponto de sela

j) $f(x,y,z) = x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 4xy - 2x - 4y - 8z + 2$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 4y - 2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 10y + 4x - 4$

$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 4z - 8$

Pontos críticos: $\nabla f(x,y,z) = (0,0,0)$

$\begin{cases} 2x + 4y - 2 = 0 \\ 10y + 4x - 4 = 0 \\ 4z - 8 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = -2y + 1 \\ 10y + 4(-2y+1) - 4 = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} — \\ 10y - 8y + 4 - 4 = 0 \\ — \end{cases}$

$\begin{cases} — \\ 2y = 0 \\ — \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ Ponto crítico: $(1,0,2)$

Matriz hessiana:

$$Hf = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) = (2x + 4y - 2)' = 2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) = (2x + 4y - 2)' = 4 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y,z)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) = (10y + 4x - 4)' = 10$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) = (10y + 4x - 4)' = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y,z)$ — teorema de Swartz

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) = (2x + 4y - 2)' = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y,z)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) = (4z - 8)' = 4$

$$Hf(x,y,z) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} H_1 & H_2 & H_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

$H_1 = 2 > 0$

$|H_2| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 10 \end{vmatrix} = 2 - 16 = 4 > 0$

$|H_3| = 80 - 64 > 0$

Minimo local $f(1,0,2)$

Extremos condicionados

Otimizar (minimizar/maximizar) f sujeito a uma determinada condição/restrição $g=0$

→ Método dos multiplicadores de Lagrange (λ)

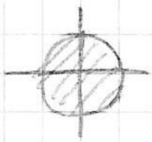
Para pontos onde $\nabla g \neq 0$, os pontos críticos de $f(x,y)$ sujeitos a $g(x,y)=0$ são obtidos através do sistema.

$$\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g & n=2 \\ g=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g}{\partial y} \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$$

Para avaliar os extremos, basta calcular as imagens dos pontos críticos.

Ficha 1.4

1 → $f(x,y) = xy$ sujeito a $x^2+y^2=1 \Leftrightarrow \overbrace{x^2+y^2-1}^{g(x,y)}=0$



Derivadas 1ª ordem:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$ $\qquad$ $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$ $\qquad$ $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y$

Pontos críticos

$$\begin{cases} y = \lambda 2x \\ x = \lambda 2y \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

⚠ A maneira mais rápida de resolver estes sistemas consiste em trabalhar as duas primeiras equações e determ. uma relação entre x e y → Substituir na 3ª eq

$$\begin{cases}\lambda = \frac{y}{2x}\\ x = \frac{y}{2x}\times 2y \\ x^2+y^2-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=\frac{y}{2x}\\ x^2=y^2\\ y^2+y^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}—\\—\\2y^2=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}—\\—\\y=\pm\sqrt{1/2}\end{cases}$$

$$\begin{cases}—\\ x^2=1/2\\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}—\\ x^2=1/2\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}—\\ x=\pm\sqrt{2}/2\\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}—\\ x=\pm\sqrt{2}/2\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=1/2\\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}\lambda=-1/2\\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}\lambda=-1/2\\ x=\sqrt{2}/2\\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \vee \begin{cases}\lambda=1/2\\ x=-\sqrt{2}/2\\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

Pontos críticos

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

é um conj fech e limitado, logo como f é cont pelo T Weierstrass, f atinge em $x^2+y^2=1$ um max e um min globais

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}=f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{2}=f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Max global: $\frac{1}{2}$ — Min global: $-\frac{1}{2}$

Maximizante: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — Minimizante: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Ficha 1.4

6 → $x^2+y^2+z^2=1$ — $T(x,y,z)=30+5(x+z)=30+5x+5z$

temp dos pontos da sup.

$g(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$

derivadas

$\frac{\partial T}{\partial x}(x,y,z)=5$ — $\frac{\partial T}{\partial z}(x,y,z)=5$ — $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z)=2y$

$\frac{\partial T}{\partial y}(x,y,z)=0$ — $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z)=2x$ — $\frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z)=2z$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 = \lambda 2x \\ 0 = \lambda 2y \\ 5 = \lambda 2z \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{5}{2x} \\ \lambda = 0 \\ 5 = \frac{5}{2x} \times 2z \\ \text{—} \end{cases} \vee \begin{cases} \text{—} \\ y=0 \\ \text{—} \\ \text{—} \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{cases} 5=0 \\ \lambda=0 \\ 5=0 \\ \text{—} \end{cases}}_{\text{imposs}} \vee \begin{cases} \lambda = \frac{5}{2x} \\ y=0 \\ z=x \\ \text{—} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ y=0 \\ z=x \\ z^2+z^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{—} \\ \text{—} \\ \text{—} \\ z^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda=5 \\ y=0 \\ x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda=5 \\ y=0 \\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Pontos $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

A sup esférica é um conj fechado e limitado. Como f é cont, pelo T. Weierstrass, esta atinge no conjunto um max e um min globais

$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 30 + 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 30 + 5\sqrt{2}$ ← Max global

$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 30 + 5\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 30 - 5\sqrt{2}$ ← Min global

3→ Ponto do plano $2x+y+3z=6$ mais prox da origem

seja $P = (x, y, z)$

$$d(P, O) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Minimizar $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ é o mesmo que minimizar $x^2+y^2+z^2$.

Seja $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ a função a minimizar sujeita a $2x+y+3z=6 \Leftrightarrow \underbrace{2x+y-3z-6}_{g(x,y,z)}=0$

derivadas

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2z$ $\qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = 1$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y$ $\qquad \frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = 2$ $\qquad \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = -3$

6

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2 \\ 2y = \lambda 1 \\ 2z = -\lambda 3 \\ 2x + y - 3z - 6 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = x \\ 2y = x \\ 2z = -3x \\ \text{---} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{---} \\ y = x/2 \\ z = -\frac{3x}{2} \\ 2x + \frac{x}{2} - 3 \times \frac{3x}{2} - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 4x + x - 9x - 12 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{---} \\ y = \frac{-3}{2} \\ z = \frac{-3 \times (-3)}{2} \\ x = \frac{12}{-4} \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = \frac{9}{2} \\ x = -3 \end{cases}$$

Ponto $\left(-3, -\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right)$

Como $f(x,y,z) \geq 0$, f não tem maximos, logo o ponto obtido terá de ser um mínimo.

*(aula que faltei, ver 6 pag à frente)

$\boxed{\text{EDO}}$ (1ª ordem)

- variaveis separáveis

$$\boxed{q(y)\,dy = p(x)\,dx} \quad \left(\text{nota: } y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

Método: aplicar $\int$ a ambos os membros

exemplo:

a) $x + yy' = 0$

$\Leftrightarrow yy' = -x$

$\Leftrightarrow y\frac{dy}{dx} = -x$

$\Leftrightarrow y\,dy = -x\,dx$ EDO de var. separaveis

$\Leftrightarrow \int y\,dy = \int -x\,dx$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C,\ C \in \mathbb{R}$ Solução geral na forma implicita

↳ têm constantes

(a não ser que peça, fica nesta forma)

d) $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0$

$(x^2-1)y' = -2xy^2$

$(x^2-1)\frac{dy}{dx} = -2xy^2$, $y \neq 0 \wedge x^2-1 \neq 0$

$\frac{1}{y^2}dy = -\frac{2x\,dx}{(x^2-1)}$ "arrumar a casa" EDO de var sep.

$\int \frac{1}{y^2}dy = \int -\frac{2x}{(x^2-1)}dx$

$\int y^{-2}dy = -\int \frac{2x}{x^2-1}dx$

$\frac{y^{-1}}{-1} = -\ln|x^2-1| + c$, $c \in \mathbb{R}$

$\frac{1}{-y} = -\ln|x^2-1| + c$, $c \in \mathbb{R}$

$y = \frac{-1}{-\ln|x^2-1|+c}$, $c \in \mathbb{R}$ solução geral na forma explícita

• homogéneas

$\boxed{y' = f(x,y)}$ onde $f(\lambda x, \lambda y) = f(x,y)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

remete para variáveis separáveis

Método: mudança de variável: $y = zx$ $\left(\begin{array}{l} z = z(x) \\ z' = \frac{dz}{dx}\end{array}\right)$

⚠ $y' = z'x + z$

Exemplo

a) $(x^2+y^2)y' = xy$

① $\Leftrightarrow y' = \frac{xy}{(x^2+y^2)}$

② Seja $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

③ Para $\lambda \in \mathbb{R}$:

$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x \lambda y}{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2}$

$= \frac{\lambda^2 xy}{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \frac{\cancel{\lambda^2} xy}{\cancel{\lambda^2}(x^2+y^2)}$

$= \frac{xy}{x^2+y^2} = f(x,y)$ Logo é uma EDO homogenea

se os λ cortaram os x tb "

④ MV

$y = zx$ com $y' = z'x + z$

$y' = \frac{xy}{x^2+y^2} \overset{MV}{\Leftrightarrow} z'x + z = \frac{xzx}{x^2+(zx)^2}$

$\Leftrightarrow z'x + z = \frac{x^2 z}{x^2 + z^2x^2} \Leftrightarrow z'x + z = \frac{z}{1+z^2}$

$\Leftrightarrow z'x = \frac{z}{1+z^2} - \underset{\times(1+z^2)}{z} \Leftrightarrow z'x = \frac{z - z - z^3}{1+z^2}$

⟶

$x\frac{dz}{dx} = \frac{-z^3}{1+z^2}$ $x\neq 0 \wedge z \neq 0$ $\Leftrightarrow \frac{1+z^2}{-z^3}dz = \frac{1}{x}dx$ EDO VS

$\Leftrightarrow -\int \frac{1+z^2}{z^3}dz = \int \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow -\int \frac{1}{z^3}dz - \int \frac{z^2}{z^3}dz = \ln|x| + C$

$\Leftrightarrow -\int z^{-3}dz - \int \frac{1}{z}dz = \ln|x| + C \Leftrightarrow -\frac{z^{-2}}{-2} - \ln|z| = \ln|x| + C$

voltando à variavel original: $y = zx \Leftrightarrow z = \frac{y}{x}$

solução: $\frac{1}{2\left(\frac{y}{x}\right)^2} - \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + C$, $C\in\mathbb{R}$ solução geral na forma implícita

b) $y'\left(1-\ln\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}$, $x>0$

(1) $y' = \frac{y}{x\left(1-\ln\frac{y}{x}\right)}$

(2) Seja $f(x,y) = \frac{y}{x\left(1-\ln\frac{y}{x}\right)}$

(3) Para $\lambda\in\mathbb{R}$:

$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\cancel{\lambda} y}{\cancel{\lambda} x\left(1-\ln\frac{\cancel{\lambda} y}{\cancel{\lambda} x}\right)}$

$= \frac{y}{x\left(1-\ln\frac{y}{x}\right)} = f(x,y)$

Logo é uma EDO homogénea

(4) M.V.

$y = zx$ com $y' = z'x + z$

$y' = \frac{y}{x\left(1-\ln\frac{y}{x}\right)}$

$\overset{MV}{\Leftrightarrow} z'x + z = \frac{z\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1-\ln\frac{z\cancel{x}}{\cancel{x}}\right)}$

$\Leftrightarrow z'x + z = \frac{z}{1-\ln z}$

$z'x + z = \frac{z}{1-\ln z}$

$\Leftrightarrow z'x = \frac{z}{1-\ln z} - z$

$\Leftrightarrow z'x = \frac{\cancel{z} - \cancel{z} + z\ln z}{1-\ln z}$

$\Leftrightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{z\ln z}{1-\ln z}$

$\Leftrightarrow \frac{1-\ln z}{z\ln z}dz = \frac{1}{x}dx$ EDO VS

$\Leftrightarrow \int\frac{1}{z\ln z}dz - \int\frac{1}{z}dz = \int\frac{1}{x}dx$

$\Leftrightarrow \int\frac{\frac{1}{z}}{\ln z}dz - \ln|z| = \ln|x| + C$, $C\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \ln|\ln z| - \ln|z| = \ln|x| + C$, $C\in\mathbb{R}$

(5) voltando à variavel original

$y = zx \Leftrightarrow z = \frac{y}{x}$

solução geral na forma implícita

$\ln\left|\ln\left(\frac{y}{x}\right)\right| - \ln\left|\frac{y}{x}\right| = \ln|x| + C$, $C\in\mathbb{R}$

Ficha moodle

1) $y' = \dfrac{-7y}{\left(8\ln\left(\frac{-3y}{5x}\right)-7\right)x}$ Seja $f(x,y) = \dfrac{-7y}{\left(8\ln\left(\frac{-3y}{5x}\right)-7\right)x}$

Para $\lambda \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{-7y\cancel{\lambda}}{\left(8\ln\left(-\frac{3\lambda y}{5\lambda x}\right)-7\right)x\cancel{\lambda}} = \frac{-7y}{\left(8\ln\left(\frac{-3y}{5x}\right)-7\right)x} = f(x,y)$$

Logo é uma EDO homogenea

MV: $y = zx$ com $y' = z'x + z$

$$z'x + z = \frac{7z\cancel{x}}{\left(8\ln\left(-\frac{3z\cancel{x}}{5\cancel{x}}\right)-7\right)\cancel{x}} \Leftrightarrow z'x = \frac{-7z}{8\ln\left(-\frac{3z}{5}\right)-7} - \frac{z}{\times\left(8\ln\left(-\frac{3z}{5}\right)-7\right)}$$

$$\Leftrightarrow z'x = \frac{-\cancel{7z} - 8z\ln\left(\frac{-3z}{5}\right) + \cancel{7z}}{8\ln\left(-\frac{3z}{5}\right)-7} \Leftrightarrow x\frac{dz}{dx} = -\frac{8z\ln\left(\frac{-3z}{5}\right)}{8\ln\left(-\frac{3z}{5}\right)-7}$$

$$\Leftrightarrow \frac{8\ln\left(\frac{-3z}{5}\right)-7}{-8z\ln\left(-\frac{3z}{5}\right)}dz = \frac{1}{x}dx \Leftrightarrow \int \frac{\cancel{8}}{-\cancel{8}z} - \frac{7}{-8z\ln\left(-\frac{3z}{5}\right)}dz = \ln|x| + c$$

EDO de v.s.

$$\Leftrightarrow -\int\frac{1}{z} + \frac{7}{8}\int\frac{\frac{1}{z}}{\ln\left(-\frac{3}{5}z\right)}dz = \ln|x| + c$$

C.A

$$\left(\ln\left(-\frac{3}{5}z\right)\right)' = \frac{\left(\frac{-3z}{5}\right)'}{-\frac{3}{5}z} = \frac{1}{z}$$

$$\Leftrightarrow -\ln|z| + \frac{7}{8}\ln\left|\ln\left(-\frac{3}{5}z\right)\right| = \ln|x| + c$$

solução: $-\ln\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{7}{8}\ln\left|\ln\left(\frac{-3}{5}\frac{y}{x}\right)\right| = \ln|x| + c, \ c \in \mathbb{R}$

• redutíveis a homogéneas

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$$ ← nos casos em q da 0, dão-nos a mudança de variável

Mudança de variável:

$$\begin{cases} x = \alpha + u \\ y = \beta + z \end{cases} \qquad z = z(u) \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

onde $\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0 \end{cases}$

Exemplo

tem de desaparecer

sem isto seria logo homogénea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-3}{x-y-1} \qquad a_1b_2 - a_2b_1 = -1-1 = -2 \neq 0$$

MV: $\begin{cases} x = \alpha + u \\ y = \beta + z \end{cases}$ onde $\begin{cases} 1\alpha + 1\beta - 3 = 0 \\ 1\alpha - \beta - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 - \beta \\ 3 - \beta - \beta - 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$

MV: $\begin{cases} x = 1 + u \\ y = 2 + z \end{cases}$

$$y' = \frac{x+y-3}{x-y-1} \overset{MV}{\Leftrightarrow} (2+z)' = \frac{1+u+2+z-3}{1+u-2-z-1} \Leftrightarrow z' = \frac{u+z}{u-z}$$

EDO homogénea

MV: $z = wu$ com $z' = w'u + w$

$$w'u + w = \frac{u + wu}{u - wu} \Leftrightarrow w'u = \frac{u(1+w)}{u(1-w)} - w \Leftrightarrow w'u = \frac{1+w-w+w^2}{1-w}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dw}{du}u = \frac{1+w^2}{1-w} \Leftrightarrow \frac{1-w}{1+w^2}dw = \frac{1}{u}du \Leftrightarrow \int \frac{1-w}{1+w^2}dw = \int \frac{1}{u}du$$

EDO v.s.

$$\Leftrightarrow \int \frac{1}{1+w^2}dw - \int \frac{w}{1+w^2}dw = \ln|u| + c, \; c \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{arctg}(w) - \frac{1}{2}\int \frac{2w}{1+w^2}dw = \ln|u| + c, \; c \in \mathbb{R}$$

$\Leftrightarrow \operatorname{arctg}(w) - \frac{1}{2}\ln|1+w^2| = \ln|u| + c \ , \ c \in \mathbb{R}$

voltar à variável inicial

$\begin{cases} x = 1+u \\ y = 2+z \\ z = wu \end{cases} \quad \begin{cases} u = x-1 \\ z = y-2 \\ w = \frac{y-2}{x-1} \end{cases}$

solução geral na forma implícita:

$\operatorname{arctg}\left(\frac{y-2}{x-1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left|1+\left(\frac{y-2}{x-1}\right)^2\right| = \ln|x-1| + c \ , \ c \in \mathbb{R}$

Ficha moodle

1) $y' = \frac{-3x+y+8}{-3x-y+1} \ , \ x > \frac{3}{2}$ $\qquad -3\times(-1) - (-3)\times 1 = 6 \neq 0$

M.V.: $\begin{cases} x = \alpha + u \\ y = \beta + z \end{cases}$ onde $\begin{cases} -3\alpha + \beta + 8 = 0 \\ -3\alpha - \beta + 1 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \beta = 3\alpha - 8 \\ -3\alpha - 3\alpha + 8 + 1 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} — \\ -6\alpha = -9 \end{cases}$ $\begin{cases} \beta = 3\times\frac{3}{2} - 8 = -\frac{7}{2} \\ \alpha = \frac{3}{2} \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + u \\ y = -\frac{7}{2} + z \end{cases}$

$y' = \frac{-3x+y+8}{-3x-y+1} \overset{MV}{\Leftrightarrow} \left(-\frac{7}{2}+z\right)' = \frac{-3(3/2+u) + (-7/2+z) + 8}{-3(3/2+u) - (-7/2+z) + 1}$

$\Leftrightarrow z' = \frac{-9/2 - 3u - 7/2 + z + 8}{-9/2 - 3u + 7/2 - z + 1} \Leftrightarrow z' = \frac{-3u+z}{-3u-z}$ EDO homogénea

MV = $z = wu$ com $z' = w'u + w$.

$w = w(u)$
$z' = (wu)'$
$= w'u + wu'$
$= w'u + w$

$(w'u + w) = \frac{-3u + wu}{-3u - wu} \Leftrightarrow w'u + w = \frac{u(-3+w)}{u(-3-w)}$

$\Leftrightarrow w'u = \frac{-3+w}{-3-w} - w \Leftrightarrow w'u = \frac{-3+w+3w+w^2}{-3-w}$

$\Leftrightarrow \frac{dw}{du}u = \frac{-3+4w+w^2}{-3-w} \Leftrightarrow \frac{-3-w}{-3+4w+w^2}dw = \frac{1}{u}du$ EDO V.S.

$\Leftrightarrow \int \frac{-3-w}{-3+4w+w^2}dw = \int \frac{1}{u}du$

C.A

$w^2 + 4w - 3 = 0$
$w = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{2}$
$w = -2+\sqrt{7} \vee w = -2-\sqrt{7}$

$\Leftrightarrow \int \frac{-3-w}{(w+2-\sqrt{7})(w+2-\sqrt{7})}dw = \ln|u| + c$

as fnmec
As fnmec-

C.A.

$$\frac{A}{(w+2-\sqrt{7})}+\frac{B}{(w+2+\sqrt{7})}=\frac{Aw+2A+A\sqrt{7}+Bw+2B-B\sqrt{7}}{\dots}$$

$$=\frac{w(A+B)+2A+A\sqrt{7}+2B-B\sqrt{7}}{\dots}$$

$$\begin{cases} A+B=-1 \\ 2A+A\sqrt{7}+2B-B\sqrt{7}=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1-A \\ 2A+A\sqrt{7}-2(-1-A)-(-1-A)\sqrt{7}=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{---} \\ 2A+A\sqrt{7}+2+2A+(1+A)\sqrt{7}=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ 4A+A\sqrt{7}+2+\sqrt{7}+A\sqrt{7}=-3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{---} \\ A(4+2\sqrt{7})=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B=-1+\frac{5}{4+2\sqrt{7}}=\frac{1-2\sqrt{7}}{4+2\sqrt{7}} \\ A=\frac{-5}{4+2\sqrt{7}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{-3-w}{(w+2-\sqrt{7})(w+2-\sqrt{7})}\,dw=\ln|u|+C$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{\frac{-5}{4+2\sqrt{7}}}{w+2-\sqrt{7}}\,dw+\int \frac{\frac{1-2\sqrt{7}}{4+2\sqrt{7}}}{w+2+\sqrt{7}}\,dw=\ln|u|+C$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5}{4+2\sqrt{7}}\ln|w+2-\sqrt{7}|+\frac{1-2\sqrt{7}}{4+2\sqrt{7}}\ln|w+2+\sqrt{7}|=\ln|u|+C$$

Voltar à variável original

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2}+u \\ y=-\frac{7}{2}+z \\ z=wu \end{cases} \qquad \begin{cases} u=x-3/2 \\ z=y+7/2 \\ w=\frac{y+7/2}{x-3/2} \end{cases}$$

solução geral

$$-\frac{5}{4+2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{y+7/2}{x-3/2}+2-\sqrt{7}\right|+\frac{1-2\sqrt{7}}{4+2\sqrt{7}}\ln\left|\frac{y+7/2}{x-3/2}+2+\sqrt{7}\right|=\ln|x-3/2|+C, \quad C\in\mathbb{R}$$