EDO completa

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)\, y = b(x) \qquad (b(x) \neq 0)$$

A solução geral é:

$$y = y_h + y_p$$

y_h → solução da EDO homogénea correspondente

y_p → método da variação das constantes
método dos coefic. indeterminados

→ Método da variação das constantes

Dado um sistema fundamental de soluções (SFS)

$$SFS = \{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)\}$$

$$y_p = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots + c_n\varphi_n \quad , \quad c_1, c_2, \cdots, c_n \in \mathbb{R}$$

O método assume que:

$$y_p = c_1(x)\varphi_1 + c_2(x)\varphi_2 + \cdots + c_n(x)\varphi_n$$

Determinar $c_1(x), \cdots, c_n(x)$

$$\begin{cases} c_1'(x)\varphi_1 + \cdots + c_n'(x)\varphi_n = 0 \\ c_1'(x)\varphi_1' + \cdots + c_n'(x)\varphi_n' = 0 \\ \vdots \\ c_1'(x)\varphi_1^{(n-1)} + \cdots + c_n'(x)\varphi_n^{(n-1)} = \dfrac{b(x)}{a_0(x)} \end{cases}$$

- caso $n=1$ $\quad c_1'(x)\varphi_1 = \dfrac{b(x)}{a_0(x)}$

- caso $n=2$ $\quad \begin{cases} c_1'\varphi_1 + c_2'\varphi_2 = 0 \\ c_1'\varphi_1' + c_2'\varphi_2' = \dfrac{b(x)}{a_0(x)} \end{cases}$

Exemplo

- $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$

A EDO homog corresp. é: $y'' - 2y' + y = 0$

A eq caract é: $r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow r = 1 \vee r = 1$

$SFS = \{e^x, xe^x\}$

$y_h = C_1 e^x + C_2 x e^x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Solução particular (M.V.C)

$y_p = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$ onde $\begin{cases} C_1' e^x + C_2' x e^x = 0 \\ C_1'(e^x)' + C_2'(xe^x)' = \frac{e^x}{x} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -\frac{C_2' x e^x}{e^x} \\ C_1' e^x + C_2'(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -C_2' x \\ -C_2' x e^x + C_2'(e^x + xe^x) = \frac{e^x}{x} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ C_2' e^x(-x + 1 + x) = \frac{e^x}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1'(x) = -\frac{1}{x} \times x \\ C_2'(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = \int -1\, dx \\ C_2(x) = \int \frac{1}{x}\, dx \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1(x) = -x \\ C_2(x) = \ln|x| \end{cases}$ $\quad y_p = -xe^x + \ln|x|\, x e^x$

A solução geral é: $y = y_h + y_p$

$= C_1 e^x + C_2 x e^x - xe^x + \ln|x|\, x e^x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

- $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{e^x + 1}$

EDO homog corresp é $y'' - 3y' + 2y = 0$

Eq caract: $r^2 - 3r + 2 = 0 \Leftrightarrow r = 2 \vee r = 1$

$SFS = \{e^x, e^{2x}\}$

$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$

solução particular

$y_p = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{2x}$ onde $\begin{cases} C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{2x} = 0 \\ C_1'(x)(e^x)' + C_2'(x)(e^{2x})' = \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -\frac{C_2' e^{2x}}{e^x} \\ C_1' e^x + C_2' 2 e^{2x} = \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = -C_2' e^x \\ (-C_2' e^x)e^x + C_2' 2 e^{2x} = \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ e^{2x} C_2'(-1 + 2) = \frac{e^{2x}}{e^x + 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1' = \frac{-e^x}{e^x + 1} \\ C_2' = \frac{1}{e^x + 1} \end{cases}$

cont →

$$\begin{cases} C_1 = -\ln|e^x+1| \\ C_2 = \quad e^{x+1} \, ? \end{cases}$$

$y_p = -\ln|e^x+1|e^x + (x+\ln|e^x+1|)e^{2x}$

$y = y_h + y_p$

$= c_1 e^x + c_2 e^{2x} - \ln|e^x+1|e^x + (x - \ln|e^x+1|)e^{2x}$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

C.A. M.V. $t = e^x \Leftrightarrow x = \ln t$

$x' = \frac{1}{t}$

$\int \frac{1}{e^x+1}\,dx = \int \frac{1}{t+1} \times \frac{1}{t}\,dt$

$= \int \frac{1}{t(t+1)}\,dt = \int \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1}\,dt = (\ldots)$

$= \int \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\,dt = \ln|t| - \ln|t+1|$

$= \ln|e^x| - \ln|e^x+1| = x - \ln|e^x+1|$

→ Metodo dos coeficientes indeterminados

$b(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$

ou

$b(x) = P_m(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)$

$P_m \to$ polin. grau m

$y_p = x^k e^{\alpha x}[P(x)\cos(\beta x) + Q(x)\operatorname{sen}(\beta x)]$

$k \to$ multiplicidade de $\alpha+\beta i$ na eq caracterist.

$P, Q \to$ polin. grau m

$m=0 \quad P=A \; ; \; Q=B$

$m=1 \quad P=Ax+B \; ; \; Q=Cx+D$

⚠ a 1ª eq? coisa a fazer é determ m, α, β, k

Para determ. as const substitui-se y por y_p na EDO completa

Ficha 2

6 a) $y' + y = \operatorname{sen} x$

Do ___ : $y_h = C_1 e^{-x}$ EC: $R = -1$

MCI $b(x) = \operatorname{sen} x$

$m=0 \quad \alpha=0 \quad \beta=1 \quad k=0$

$y_p = x^0 e^{0x}[A\cos x + B\operatorname{sen} x]$

$= A\cos x + B\operatorname{sen} x$

$= -\frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$

$y = y_h + y_p$

$= C_1 e^{-x} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x, \; C_1 \in \mathbb{R}$

Determ. A e B

$y'_p = -A\operatorname{sen} x + B\cos x$

Subst na EDO

$y' + y = \operatorname{sen} x$

$\Leftrightarrow -A\operatorname{sen} x + B\cos x + A\cos x + B\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$

$\Leftrightarrow \cos x(A+B) + \operatorname{sen}(-A+B) = \operatorname{sen} x$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+B=0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\, ds$$

Nota:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx$$

• propriedades

$$\mathcal{L}\{f+g\}(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) + \mathcal{L}\{g(t)\}(s)$$

$$\mathcal{L}\{\lambda f\}(s) = \lambda \mathcal{L}\{f(t)\}(s), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

nota: o $s>0$ tem a ver com $f:[0,+\infty[$

Exercício

1) a) $f(t) = 2\,sen(3t) + t - 5e^{-t}$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = 2\mathcal{L}\{sen(3t)\}(s) + \mathcal{L}\{t\}(s) - 5\mathcal{L}\{e^{-t}\}(s)$$

$$= \underset{(s>0)}{2 \times \frac{3}{s^2+9}} + \underset{(s>0)}{\frac{1}{s^2}} - \underset{(s>-1)}{5 \times \frac{1}{s+1}}, \quad s>0$$

b) $f(t) = e^{2t}\cos(5t)$

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \mathcal{L}\{\cos(5t)\}(s-2)$$

$$= \frac{(s-2)}{(s-2)^2+25} \quad s>2$$

$$\mathcal{L}\{e^{\lambda t} f(t)\}(s) = \underbrace{\mathcal{L}\{f(t)\}}_{F(s)}(s-\lambda)$$

$$\mathcal{L}\{\cos(5t)\} = \frac{s}{s^2+5^2} \quad s>0$$

• Função Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t>0 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}\{H_a(t)\, f(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$$

$$H_a(t) = \begin{cases} 0, & t \leq a \\ 1, & t>a \end{cases}$$

f) $f(t) = (1 - H_\pi(t))\,sen\, t$

$$= \mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{(1-H_\pi(t))\,sen\,t\}(s)$$

$$= \mathcal{L}\{sen\,t\}(s) - \mathcal{L}\{H_\pi(t)\,sen\,t\}(s)$$

$$= \frac{1}{s^2+1} - \mathcal{L}\{-H_\pi(t)\underbrace{sen(t-\pi)}_{f(t-\pi)}\}(s) \qquad sen(t) = -sen(t-\pi)$$

$$= \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s} \times \mathcal{L}\{sen(t)\}(s)$$

$$= \frac{1}{s^2+1} + e^{-\pi s} \times \frac{1}{\;}, \quad s>0$$

g) $f(t)=(t-2)^2 e^{2(t-2)} \times H_2(t)$

$$\mathcal{L}\{\underbrace{(t-2)^2 e^{2(t-2)}}_{f(t-2)} \times H_2(t)\}(s) = e^{-2s}\mathcal{L}\{t^2 e^{2t}\}(s)$$

$$f(t)=t^2 e^{2t} \qquad = e^{-2s} \times \mathcal{L}\{t^2\}(s-2)$$

$$= e^{-2t} \times \frac{2}{(s-2)^3}, \; s>2$$

Extra:

$$\mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{4}+t\right)\right\}(s)$$

$$= \mathcal{L}\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{9\pi}{4}\right)\cos t + \operatorname{sen} t \cos\left(\frac{9\pi}{4}\right)\right\}(s)$$

$$= \mathcal{L}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t\right\}(s) + \mathcal{L}\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} t\right\}(s)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{s^2+1} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{s}{s^2+1}, \; s>0$$

nota:
$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}(a)\cos(b)+\operatorname{sen}(b)\cos(a)$

nota

$f(t) \rightarrow$ aplicar t. l.

$F(s) \rightarrow$ aplicar t. l. inversa

2 a) $F(s) = \frac{2s}{s^2-9}$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2-9}\right\}$$

$$= 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2-9}\right\}$$

$$= 2\cosh(3t), \; t \geq 0$$

nota

$x^2 - Sx + P = 0$

$S = R_1 + R_2 \quad P = R_1 \times R_2$

c) ① $F(s) = \frac{1}{s^2+s-2}$

C.A. s^2+s-2

$s=-2 \;\vee\; s=1$

$$= \frac{1}{(s+2)(s-1)}$$

$$= \frac{A}{s+2} + \frac{B}{s-1}$$

$$= \frac{A(s-1)+B(s+2)}{(s+2)(s-1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -A+2B \end{cases}$$

$$= \frac{s(A+B)-A+2B}{(s+2)(s-1)}$$

$$\begin{cases} A=-\frac{1}{3} \\ B=\frac{1}{3} \end{cases}$$

② $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1/3}{s+2}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1/3}{s-1}\right\}$

$$= -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{t}, \; t \geq 0$$

d) $F(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+6}$

$= \dfrac{1}{s^2+4s+4+2}$

$= \dfrac{1}{(s+2)^2+2}$

$\Delta = b^2-4ac$
$= 16-24 < 0$

⚠ completar o quadrado
transf. do deslocamento

$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-\lambda)\} = e^{\lambda t}\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2+2}\right\} = \frac{e^{-2t}}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1\times\sqrt{2}}{s^2+2}\right\} = \frac{e^{-2t}}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}(\sqrt{2}\,t),\ t\geq 0$$

Séries numéricas

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$$

① Condição necessária convergência

Se $\sum a_n$ converg. $\Rightarrow \lim a_n = 0$

na prática: se $\lim a_n \neq 0 \Rightarrow \sum a_n$ divergente

$\lim a_n = 0$
convergentes

$\lim a_n = 0$
$\lim a_n \neq 0$
divergentes

② Séries conhecidas

(2.1) Geométrica $= \sum_{n=0}^{\infty} a\times R^n$ ou $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a\times R^{n-1}}$

$|R| < 1$, convergente

$|R| > 1$, divergente

Soma: $S = \dfrac{a}{1-R}$

só nesta

(2.2) Séries de Mengoli / Redutíveis / Telescópicas

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n+p})$$

$S = \sum_{n=1}^{p} u_k - \lim \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k$, soma | finita → conv.; infinita → diverg.

Exemplo: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+2}\right)$ série de mengoli com $u_n = \dfrac{1}{n}$ e $p=2$

$S = u_1 + u_2 - \lim(u_{n+1} + u_{n+2})$
$= 1 + \dfrac{1}{2} - \lim\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2}\right) = \dfrac{3}{2}$, convergente (soma finita)

Ficha moodle

1 → b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2-1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-1)(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2}$

C.A

$$\boxed{\frac{2}{n(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} = \frac{n(A+B)+2A}{n(n+2)} \qquad \begin{cases} A+B=0 \\ 2A=2 \end{cases} \quad \begin{cases} B=-1 \\ A=1 \end{cases}}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A}{n} + \frac{B}{n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}$ serie de mengoli com $u_n = \frac{1}{n}$, $p=2$

$S = u_1 + u_2 - \lim (u_{n+1} + u_{n+2}) = 1 + \frac{1}{2} - \lim\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{2}$

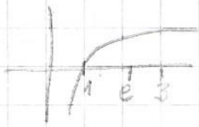
converg.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} 5/6^n = \sum_{n=0}^{\infty} 5 \times \left(\frac{1}{6}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 5 \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$

serie geométrica com $|R| = 1/6 < 1$, logo é convergente e a sua soma é:

$$S = \frac{a}{1-R} = \frac{5}{1-1/6} = 6$$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln 3)^n$



$\lim (\ln 3)^n = +\infty$ Pela cond. necess. conv., a série é divergente

i) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n-1}}{3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3} \times 2^{-(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ série geométrica com $|R| = 1/2 < 1$ logo a série é convergente

e a sua soma é:

$$S = \frac{1/6}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1/6}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

(2.3) Series Dirichlet / Harmonica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad \begin{array}{l} p \leq 1 \text{ , divergente} \\ p > 1 \text{ convergente} \end{array} \qquad \text{não tem soma}$$

(3) Critérios

(3.1) Comparação : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\underline{a_n \geq 0}$

a) $0 \leq a_n \leq b_n$

se $\sum b_n$ é conv $\Rightarrow$ $\sum a_n$ é conv

· b) $0 \leq b_n \leq a_n$

se $\sum b_n$ é div $\Rightarrow$ $\sum a_n$ é diverg

Exemplo:

• $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2} \geq 0$

$\frac{|\cos n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ Como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série de Dirichlet convergente ($p = 2 > 1$), logo pelo critério de comparação, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$ é converg.

(3.2) Critério da comparação no limite : $\sum a_n$, $a_n \geq 0$

Seja $\sum b_n$, $b_n > 0$

$L = \lim \frac{a_n}{b_n}$

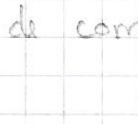
$L \in \mathbb{R}^+$, $\sum a_n$ tem a mesma natureza que $\sum b_n$

$L = 0$, se $\sum b_n$ é conv. , então $\sum a_n$ conv.

$L = +\infty$, se $\sum b_n$ é div , então $\sum a_n$ div.

Exemplo:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\arctan n|}{n^2+1}$



$\frac{|\arctan n|}{n^2+1} \leq \frac{\pi/2}{n^2+1} \leq \frac{\pi/2}{n^2}$ Como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é uma série de

Dirichlet convergente e a mult. por um escalar não altera a natureza da série, $\sum^{\infty} \frac{\pi/2}{n^2}$ é conv. Pelo critério da comp. $\sum^{\infty}$ |arctan| é convergente

Ficha moodle

1. b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+4n^3+1}{2n^8+n^4+2} \geq 0 \qquad \frac{n^5}{n^8} = \frac{1}{n^3}$

Seja $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ a série de Dirichlet convergente

$$L = \lim \frac{\frac{n^5+4n^3+1}{2n^8+n^4+2}}{\frac{1}{n^3}} = \lim \frac{n^8+4n^6+n^3}{2n^8+n^4+2} = \lim \frac{n^8}{2n^8} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^+$$

Pelo critério do limite, as séries têm a mesma natureza, logo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5+4n^3+1}{2n^8+n^4+2}$ é convergente

f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{1+4^n} \geq 0$

Considerando $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$, que é uma série geométrica conv. $(|R| = \frac{3}{4} < 1)$

$$L = \lim \frac{\frac{3^n}{1+4^n}}{\frac{3^n}{4^n}} = \lim \frac{3^n \times 4^n}{3^n \times (1+4^n)} = \lim \frac{4^n}{4^n\left(\frac{1}{4^n}+1\right)} = \lim \frac{1}{\frac{1}{4^n}+1} = 1$$

Pelo critério do limite, as séries tem a mesma natureza. Assim $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^n}{1+4^n}$ é convergente

i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^3} \geq 0$

Considerando a série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ (convergente)

$$L = \lim \frac{\frac{1}{1+n^3}}{\frac{1}{n^3}} = \lim \frac{n^3}{1+n^3} = \lim \frac{n^3}{n^3} = 1 \in \mathbb{R}^+$$

Pelo critério do limite as séries tem a mesma natureza. Assim $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^3}$ é convergente

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$ Considerando $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ (série de Dirichlet div.)

$$L = \lim \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n} \times \pi} \times \pi = 1 \times \pi = \pi \in \mathbb{R}^+$$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$

logo $\sum^{\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)$ é divergente

j) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5+\cos(\sqrt{n^3})}{n+1} \geq 0$ $\quad -1 \leq \cos(\sqrt{n^3}) \leq 1$

$\frac{4}{n+1} \leq \frac{5+\cos(\sqrt{n^3})}{n+1} \leq \frac{6}{n+1}$

- minorar → $\sum$ a comparar div.
- majorar → $\sum$ a comp conv.

Qual a natureza de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{n+1}$?

Considerando ~~a~~ $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ (serie de dirichlet div.)

$L = \lim \frac{\frac{4}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{4n}{n+1} = \lim \frac{4n}{n} = 4 \in \mathbb{R}^+$

Pelo critério do limite, a série é divergente

Assim, pelo critério da comparaçã (direta),
$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{5+\cos(\sqrt{n^3})}{n+1}$ é divergente

(3.3) Critério do integral : $\sum a_n,\ a_n \geq 0$

Seja $f: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, decrescente, tal que $f(n) = a_n\ \forall_{n \in \mathbb{N}}$

Então $\underbrace{\int_0^{+\infty} f(x)\,dx}_{\text{integral impróprio 1.ª espécie}}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ têm a mesma natureza

prolongar a $\mathbb{R}$ para poder $\int$ e ( ))

$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t f(x)\,dx$

Exemplo:

3 b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3n+2}$ Seja $f(x) = \frac{1}{3x+2}$, definida em $[1,+\infty[$

$f(n) = a_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$ $\quad f'(x) = \frac{-3}{(3x+2)^2} < 0$, f é decrescente

Então, pelo critério do integral $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ têm a mesma natureza.

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{3x+2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{3}\int_1^t \frac{1\times3}{3x+2}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{3}\left[\ln|3x+2|\right]_1^t$,

$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{3}\left(\ln(3t+2) - \ln 5\right) = +\infty$, divergente

Assim, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$ é divergente

3.4 Critério de Alembert / Razão : $a_n \neq 0$ (fatoriais, exponenciais)

$$L = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

$L<1$, convergente (absolutam.) ↳ a série dos módulos é converg. ($\sum |a_n|$ é conv)

$L>1$, divergente

3.5 Critério de Cauchy / Raiz : (exponenciais)

$L = \lim \sqrt[n]{|a_n|}$

$L<1$, convergente (absolutam.)

$L>1$, divergente

nota: $\lim \sqrt[n]{n} = 1$

Exemplo

5 a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{e^{2n}} \neq 0$

$$L = \lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim \frac{\frac{(n+1)^2}{e^{2(n+1)}}}{\frac{n^2}{e^{2n}}} = \lim \frac{\cancel{e^{2n}}(n+1)^2}{e^{\cancel{2n}+2}\, n^2}$$

$$= \lim \frac{n^2+2n+1}{e^2 n^2} = \lim \frac{n^2}{e^2 n^2} = \frac{1}{e^2} < 1$$, logo a

série é absolutamente convergente, pelo C.D'A.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} \neq 0$

$$L = \lim \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim \frac{n^n (n+1)!}{n!\,(n+1)^{n+1}} = \lim \frac{n^n \cancel{(n+1)}\, \cancel{n!}}{\cancel{n!}\,(n+1)^n \cancel{(n+1)}}$$

$$= \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n}$$

$$= \left[\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

$$\lim \left(1+\frac{k}{u_n}\right)^{u_n} = e^k, \quad u_n \to +\infty$$

Pelo C.D'A., a série é absolutam. converg.

3.6 Critério de Leibniz: séries alternadas

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n a_n$$

se • $a_n \geq 0$

• $\boxed{\lim a_n = 0}$

• a_n é decrescente ($a_{n+1} - a_n < 0$)

Então a série é (simplesm.) convergente

Nota: para concluir a divergência só usando a condição necessária de convergência

Ficha moodle

7 a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-1}$

• seja $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}-1} \geq 0$

• $\lim a_n = \lim \dfrac{1}{\sqrt{n}-1} = 0$

• $a_{n+1} - a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}-1} - \dfrac{1}{\sqrt{n}-1} = \dfrac{\sqrt{n}-1-\sqrt{n+1}+1}{(\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n}-1)}$

$= \dfrac{\overset{\ominus}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}}{\underset{\oplus}{(\sqrt{n+1}-1)}\underset{\oplus}{(\sqrt{n}-1)}} < 0$ logo a_n é decrescente

Assim, pelo critério de Leibniz, a série é convergente.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \operatorname{arctg}(n)$

• seja $a_n = \operatorname{arctg}(n) \geq 0$

• $\lim a_n = \pi/2 \neq 0$

• $\lim (-1)^n \operatorname{arctg}(n) = \begin{cases} (n \text{ é par}) & \lim \operatorname{arctg}(n) = \frac{\pi}{2} \\ (n \text{ é ímpar}) & \lim -\operatorname{arctg}(n) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$

O limite não existe, logo pela condição necessária de converg. a série é divergente

Séries de potências centradas em c

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-c)^n$$

Exemplo:

Queremos saber o domínio de conv. de $\sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1)x^n$

nota: usam-se os critérios

Pelo C. D'Alembert

$$\lim \frac{|(n+1)(n+1+1)x^{n+1}|}{|n(n+1)x^n|} = \lim \frac{(n+2)}{n}|x| = |x| \lim \frac{n}{n} = |x|$$

Para a série ser convergente: $|x|<1 \Leftrightarrow x<1 \wedge x>-1$

A série é absolutam. converg para $\underbrace{x \in]-1,1[}_{\text{Domínio de convergência (é sempre absoluta)}}$

Na prática: Cálculo do raio de convergência $R>0$

$$R = \lim \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \quad \text{ou} \quad R = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

*

se $R=+\infty$, a série é abs. conv $\forall x \in \mathbb{R}$: $D=\mathbb{R}$

$R=0$, " " " " " $x=c$: $D=\{c\}$

$R \in \mathbb{R}^+$, " " " " " para $x \in]c-R; c+R[$

→ é necessário analisar separadam. as séries quando $x=c-R$ e $x=c+R$ *

a) analisar $\sum |a_n|$
→ divergente?
→ n há conv abs
→ analisar $\sum a_n$
→ diverg? div.
→ conv? conv. simples
→ converg? há conv abs. limite fechado

Ficha UA:

1 b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{(n-1)!} x^n$ série centrada em $c=0$

$$R = \lim \left| \frac{\frac{2^n}{(n-1)!}}{\frac{2^{n+1}}{n!}} \right| = \lim \frac{n(n-1)! \, 2^n}{(n-1)! \, 2^n \times 2} = \lim \frac{n}{2} = +\infty$$

Domínio de convergência $D=\mathbb{R}$

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x-3)^n}{2n+4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2(x-3/2))^n}{2n+4} = \sum_{n=1} \frac{2^n}{2n+4}(x-3/2)^n$ $\underline{\underline{22}}$

série de potências centrada em $c = 3/2$

$$R = \lim \frac{\left|\frac{2^n}{2n+4}\right|}{\left|\frac{2^{n+1}}{2(n+1)+4}\right|} = \lim \frac{2^n(2(n+1)+4)}{2^n \times 2 \times (2n+4)} = \lim \frac{2n}{4n} = \frac{1}{2}$$

$]c-R; c+R[=]3/2 - 1/2; 3/2 + 1/2[=]1,2[$

Para $x = 1$: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2\times 1-3)^n}{2n+4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+4}$

Considerando a série dos modulos correspondente:

nota: queremos saber 1º se a série dos módulos converge $\frac{\text{sim}}{\text{não}}$ stop conv. simples?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{2n+4}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+4} \geq 0$$

$L = \lim \frac{\frac{1}{2n+4}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{2n+4} = \lim \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}^+$, pelo critério do limite

a série é divergente. (Não há converg. absoluta)
Haverá convergencia simples?

Seja $a_n = \frac{1}{2n+4} \geq 0$

$\lim a_n = \lim \frac{1}{2n+4} = 0$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+6} - \frac{1}{2n+4} = \frac{-2}{(2n+4)(2n+6)} <$

Pelo C. de Leibniz, a série é simplesmente convergente

Para $x = 2$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\times 2-3)^n}{2n+4} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1^n}{2n+4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+4}$$

A série dos modulos coincide com ela própria

Pelos cálculos anteriores, a série é divergente

$D =]1,2[$

Ficha UA

1)

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} x^n$ série de potencias centrada em $c=0$

$$R = \lim \frac{\left|\frac{n^2}{n!}\right|}{\left|\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}\right|} = \lim \frac{n^2(n+1)n!}{(n+1)^2 n!} = \lim \frac{n^2}{(n+1)} = \lim \frac{n^2}{n} = +\infty$$

Dominio convergencia : $D = \mathbb{R}$

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!(x-2)^n}{n-1}$ série de potencias centrada $c=2$

$$\lim \frac{\left|\frac{n!}{n-1}\right|}{\left|\frac{(n+1)!}{(n-1+1)}\right|} = \lim \frac{n!(n)}{(n+1)n!(n-1)} = \lim \frac{n}{n^2-1^2} = \lim \frac{n}{n^2} =$$

$$= \lim \frac{1}{n} = 0$$

a série de potencias é absolutam/ conv em

$x = 2$ cujo domínio de convergencia é $D = \{2\}$

g) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n} (x+2)^n$ série de potencias centrada em $c=-2$

$$R = \lim \frac{\left|\frac{\ln n}{n}\right|}{\left|\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right|} = \lim \frac{\ln n\,(n+1)}{\ln(n+1)\,n}$$ desisti

$$R = \lim \frac{1}{\sqrt[n]{\left|\frac{\ln n}{n}\right|}} = \lim \frac{1}{\frac{\sqrt[n]{\ln n}}{\sqrt[n]{n}}} = \lim \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{\ln n}} = \frac{1}{1} = 1$$

nota

$$\lim \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim f(x)^{g(x)} = \lim e^{\ln(f(x)^{g(x)})}$$

C.A

$$\lim (\ln n)^{\frac{1}{n}} = \lim e^{\ln((\ln n)^{1/n})} = \lim e^{\frac{1}{n}\ln(\ln n)}$$

$$= \lim e^{\frac{\ln(\ln n)}{\ln n} \times \frac{\ln n}{n}} = e^0 = 1$$

$D =]c-R, c+R[=]-2-1, -2+1[=]-3, -1[$

para $x = -3$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}(-3+2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}(-1)^n$$

é absolutam/ conv. ?

Considerando a série dos módulos correspondente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\ln n}{n} (-1)^n \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$L = \lim \frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim \ln n = +\infty$$ pelo critério do limite, como $\sum \frac{1}{n}$ é diverg. a série dos módulos tb é.

haverá conv. simples?

a série é alternada

- $a_n = \frac{\ln n}{n} \geq 0$ • $\lim a_n = \frac{\ln n}{n} = 0$

- $a_{n+1} - a_n = \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = \frac{n\ln(n+1) - (n+1)\ln n}{n(n+1)} = \frac{\ln(n+1)^n - \ln n^{(n+1)}}{n(n+1)}$

$$= \frac{\ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \times \frac{1}{n}\right)}{n(n+1)} < 0$$ a_n é decrescente

<0 e

Pelo critério de Leibniz, a série é simpl. conv.

Para $x = -1$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}(-1+2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n} \times 1^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$

A série coincide com a série dos módulos, pelos cálculos anteriores, a série é divergente.

$D = [-3, -1[$, para $x = -3$, a conv é simples.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ não da pra por na forma de serie de potencias

$$L = \lim \frac{\left| \frac{(-1)^{n+1} x^{(n+1+1)}}{n+1+1} \right|}{\left| \frac{(-1)^n x^n}{n+1} \right|} = \lim \frac{(n+1)\,|x^{n+2}|}{(n+2)\,|x^{n+1}|} = \lim \frac{n+1}{n+2}|x| = |x|$$

$|x| < 1 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[$, pelo C. Alembert

Para $x = -1$: $\sum_{n=1} \frac{(-1)^n (-1)^{n+1}}{n+1} = \sum \frac{(-1)^{\overset{\text{ímpar}}{2n+1}}}{n+1} = \sum \frac{-1}{n+1}$

A série dos módulos é: $\sum \frac{1}{n+1} \geq 0$

$$\lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{n+1} = 1 \in \mathbb{R}^+$$

Como $\sum \frac{1}{n}$ é div, pelo c. do limite, a série dos módulos é div.

Haverá conv. simples? $\sum \frac{-1}{n+1} = -\sum \frac{1}{n+1}$ como a multipl. por um escalar (-1) não altera a natureza da série $\sum \frac{-1}{n+1}$, terá a mesma natureza de $\sum \frac{1}{n+1}$, ou seja, é divergente

Para $x = 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$

seja $a_n = \frac{1}{n+1} \geq 0$

$\lim a_n = 0$

$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n-2}{(n+2)(n+1)} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} < 0$

a_n é decrescente

Assim, pelo critério de Leibniz, a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ é simplesmente convergente

* há conv. absoluta? considerando a série dos módulos correspondente

$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{n+1} (-1)^n \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$

seja $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ uma série de Dirichlet divergente

$L = \lim \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim \frac{n}{n+1} = \lim \frac{n}{n} = 1$

Pelo critério do limite a série dos módulos tem a mesma natureza da de Dirichlet, logo é divergente

Assim, $D =]-1, 1]$, para $x = 1$, a conv é simples