Unidad N°1 - Ecuaciones e inecuaciones

Repaso de función lineal

1. Hallar la fórmula de la función lineal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifique las siguientes condiciones:

   a) $f(0) = -1$ y $f(3) = 0$

   b) Cuyo gráfico pasa por los puntos $(2; 4)$ y $(5; -3)$

   c) Cuyo gráfico es paralelo a la recta dada por $y = \frac{1}{2}x + \pi$ y corta al eje y en $y = 3$.

   d) Cuyo gráfico es perpendicular a la recta dada por $y = -4x + 2$ y ambas rectas se cortan en $x = 1$.

2. Encontrar analíticamente los intervalos de positividad y negatividad para las funciones del ítem anterior.

3. Para las siguientes funciones dar el $Dom(f)$, $Im(f)$ y los puntos de intersección con los ejes:

   a) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f_1(x) = \frac{1}{4}(x - 1) + 2$

   b) $f_2 : (-\infty, 4) \to \mathbb{R}$ dada por $f_2(x) = -\frac{2}{5}x + 7$

   c) $f_3 : [-5, -2] \to \mathbb{R}$ dada por $f_3(x) = 3x + 1$

Función cuadrática

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a(x - s)(x - t)$ hallar los parámetros $a, s, t \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ de forma tal que la función verifique las siguientes condiciones dadas en cada caso.

   a) Su conjunto de negatividad sea $(2; 4)$.

   b) Que alcance el mínimo en $x = 1$.

   c) Que $x = 2$ sea una raíz.

   d) Que cumpla simultáneamente las dos condiciones anteriores.

   e) Que tenga una única raíz en $x = 3$ y que $I_C(f) = (-\infty; 3)$.

   f) Que $C_+(f) = (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ y que su intersección con el eje y sea $y = -2$.

   Analizar en cada caso si los parámetros hallados resultan ser únicos.

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = a(x - k)^2 + h$ hallar los parámetros $a, k, h \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ de forma tal que la función verifique las siguientes condiciones dadas en cada caso.

   a) La función posee un máximo.

   b) Que su imagen sea $(-\infty; 3]$.

   c) Que su $I_C(f) = (-\infty; 2)$ y $I_D(f) = (2, +\infty)$.

   d) Que verifiquen simultáneamente los dos ítem anteriores y que $f(1) = \frac{7}{2}$.

   Analizar en cada caso si los parámetros hallados resultan ser únicos.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$ explorando en GeoGebra responder a las siguientes preguntas:

   a) ¿Cómo es la curva si $a > 0$?

   b) ¿Cómo es la curva si $a < 0$?

   c) ¿Qué sucede si $a = 0$?

d) ¿Cómo es la curva en relación con la recta vertical que pasa por el vértice?

e) ¿Qué características tienen las coordenadas de los puntos que equidistan del vértice?.

f) ¿Se puede cambiar el valor de c y obtener una función de 1 sola raíz? ¿Y otra sin raíces reales?

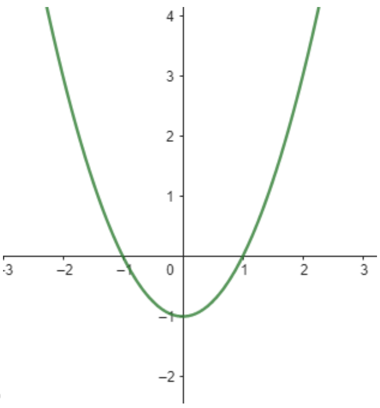
g) ¿Qué parámetro hay que cambiar para modificar el punto de intersección con el eje Y?

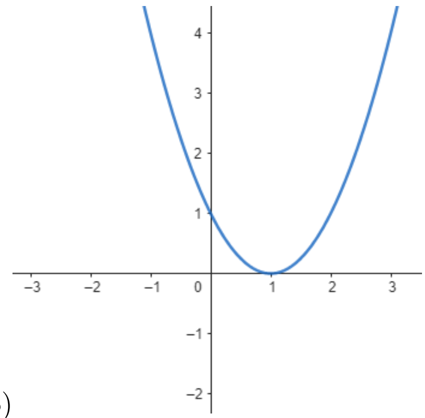
h) ¿Cuántas raíces puede tener la función?

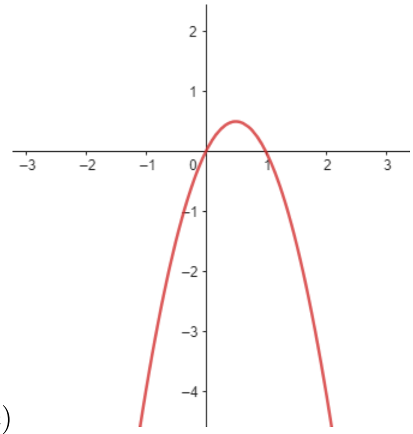
i) ¿Qué ocurre con el vértice cuando modificamos el parámetro b? (sugerencia: Utilizar la herramienta rastro de GeoGebra)

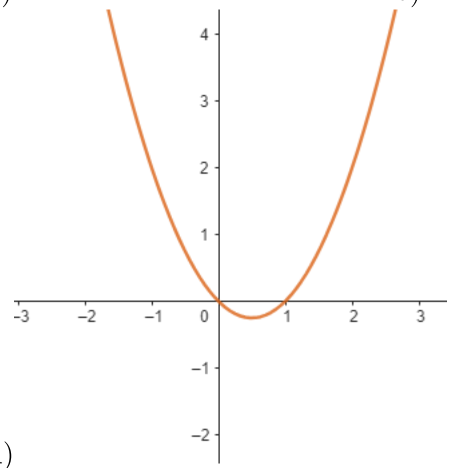
j) Caracterizar el conjunto formado por todos los puntos del plano al que pertenece el vértice de la parábola de la función $f(x) = x^2 + bx$ con $b \in \mathbb{R}$

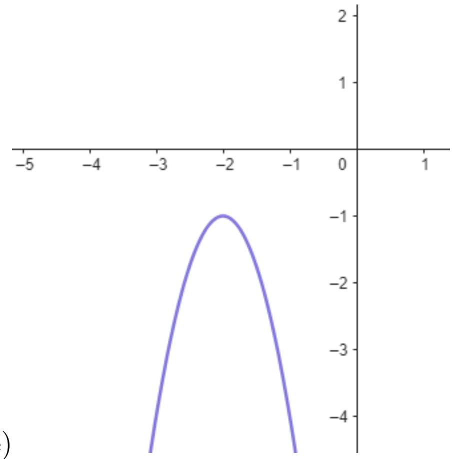
4. Asociar el gráfico con la fórmula:


a)


b)


c)


d)


e)

- $f(x) = x^2 - 1$
- $g(x) = (x-1)^2$
- $h(x) = -2x^2 + 2x$
- $j(x) = x^2 - x$
- $k(x) = -3(x+2)^2 - 1$

5. Realizar el gráfico de las siguientes funciones determinando si la parábola es cóncava hacia arriba o hacia abajo, encuentre el vértice, eje de simetría, hallar máximo o mínimo valor y la intersección con los ejes coordenados.
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a) $f(x) = 2(x-3)^2 + 4$

b) $f(x) = -2(x-5)^2 + 8$

c) $f(x) = -2x^2 + 2x - 3$

d) $f(x) = x^2 - 6x + 9$

e) $f(x) = -2(x-5)^2$

f) $f(x) = -\frac{1}{3}(x-4)(x+7)$

6.

7. En cada caso hallar $k \in \mathbb{R}$ que verifique las condiciones dadas:

a) $f(x) = 2x^2 + x + k$ tenga dos raíces reales distintas

b) $f(x) = kx^2 + 2(k-1)x - 4$ tenga una única raíz real.

c) $f(x) = kx^2 + 2(k-1)x - 4$ no tenga raíces.

Soluciones de ecuaciones e inecuaciones

1. Resolver analíticamente las siguientes igualdades y desigualdades.

a) $2x - 1 = x^2 - 4$

b) $1 + (x-3)^2 < 0$

c) $x + 1 \geq \frac{1}{2}x$

d) $\left(x + \frac{11}{5}\right)^2 \leq \frac{1}{30}$

e) $3x + 6 = 3\,(x+2)$

f) $2 + \frac{1}{4}x < 1 + \frac{1}{4}x$

2. Utilizando geogebra resolver de manera gráfica las siguientes inecuaciones:

a) $\sqrt[3]{15 - 6x} > 5x - \frac{1}{3}$

b) $\frac{x-6}{8+x^3} = 6 + 4x$

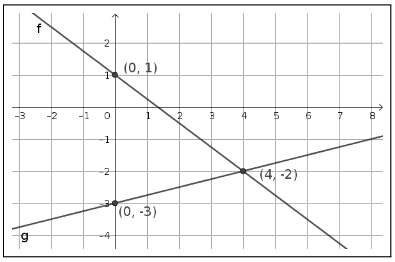
c) $\sqrt{3x+1} \geq 4 - x$

¿Son exactas las soluciones halladas?

3. En cada caso, hallen el conjunto solución de las ecuaciones indicadas de manera gráfica y analítica.

a)

f y g son funciones lineales.



1) $f(x) = g(x)$

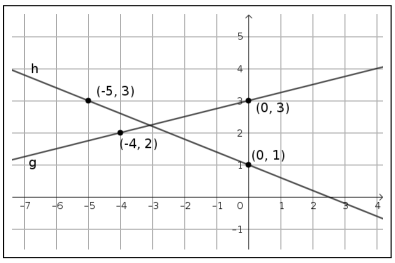
2) $g(x) > f(x)$

3) $-3 \leq g(x)$

4) $f(x) = 2$

b)

h y g son funciones lineales.



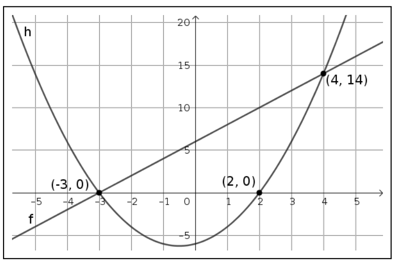
1) $h(x) < 3$

2) $g(x) = 2$

3) $g(x) \geq h(x)$

c)

f es una función lineal y h es una función cuadrática.



1) $f(x) = h(x)$

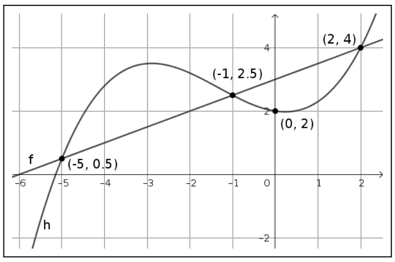
2) $h(x) > f(x)$

3) $h(x) \leq 14$

4) $f(x) = -1$

d)

f es una función lineal y h es la función no lineal:



1) $h(x) > f(x)$

2) $h(x) \geq 4$

Definiciones

Ecuación

Sean $f\colon A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g\colon B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones, se llama *ecuación* a la igualdad $f(x) = g(x)$.

Dominio de una ecuación

Sea $\mathcal{E}$ la ecuación $f(x) = g(x)$, se define el *dominio de la ecuación*:

$$\mathrm{Dom}\,(\mathcal{E}) = \mathrm{Dom}\,(f) \cap \mathrm{Dom}\,(g) = A \cap B$$

Solución de una ecuación

Decimos que un valor $k \in \mathbb{R}$ es *solución* de la ecuación $\mathcal{E}\colon f(x) = g(x)$ si $k \in \mathrm{Dom}\,(\mathcal{E})$ y se verifica que $f(k) = g(k)$. Es decir que se verifica la igualdad al reemplazar la variable por el valor k.

Conjunto solución de una ecuación

Se llama *conjunto solución de una ecuación* $\mathcal{E}$ al conjunto formado por todas las soluciones de la ecuación y se lo nota $\mathrm{Sol}\,(\mathcal{E})$.

Se observa que $\mathrm{Sol}\,(\mathcal{E}) \subseteq \mathrm{Dom}\,(\mathcal{E})$

Se pueden considerar definiciones análogas para inecuaciones cambiando las igualdades por desigualdades.

4. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones de manera gráfica y analítica.

a) $\frac{6x+30}{2} = \frac{5}{2}x + 12$

b) $-\frac{1}{4}\,(9 - 2x) > 0.5x$

c) $-x^2 + 5x + 16 = 2$

d) $0 \geq -2\,(x-3)\,(x+6)$

e) $-2(x+1)^2 + 8 \geq 10$

f) $-2x^2 + \frac{3}{2}x + 10 = 4 + \frac{1}{2}x$

g) $9 - (x+2)^2 < 9$

h) $4x^2 + 10x - 15 < 2x - 3$

i) $x - 1 > 9 \vee -x \geq 3$

j) $\frac{1}{2} \leq x \wedge 4x < 1 + 5x$

k) $x^2 < 9 \wedge \frac{1}{4}x > 3$

l) $2x^2 - x - 6 < 2$

5. En cada caso, inventar ecuaciones o inecuaciones, según corresponda, cuyo conjunto solución sea el indicado y utilizando dos funciones que cumplan con las características descritas.

a) f y g son funciones cuadráticas. $S = \{-3; 4\}$

b) f y g son funciones lineales. $S = (-\infty; 6)$

c) f y g son funciones cuadráticas. $S = [-6; 5]$

d) f es una función cuadrática y g es una función lineal creciente. $S = \{0; 5\}$

e) f y g son funciones cuadráticas. $S = \{2\}$

f) f es una función cuadrática y g una función lineal constante. $S = (-1; 3)$

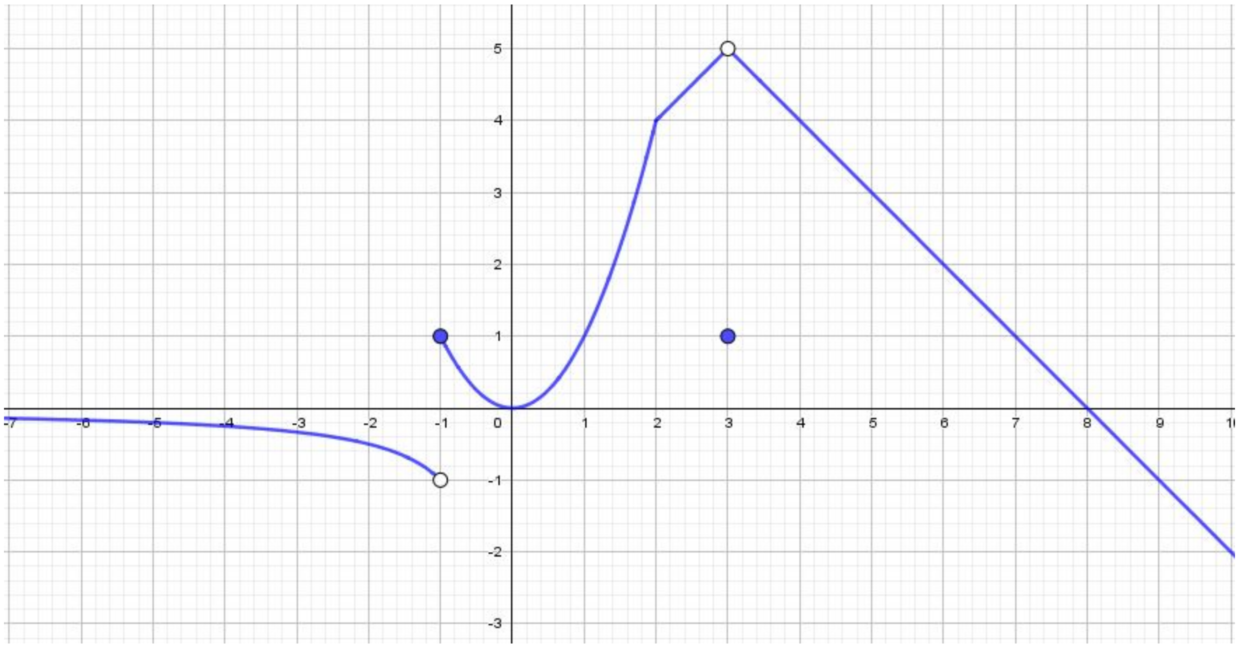
6. Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = ax + b$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) y $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/g(x) = (x-2)^2 - 3$. En cada caso, hallar valores de a y b de manera que se cumplan las siguientes condiciones.

   a) El conjunto solución de la ecuación $f(x) = g(x)$ sea $S = \{2\}$.

   b) El conjunto solución de la ecuación $f(x) = g(x)$ sea $S = \{3\}$.

7. f es la función cuyo gráfico se muestra a continuación. Decidir, en caso de existir, para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ la ecuación $f(x) = k$ tiene:

   - No tiene solución.
   - Tienen una solución.
   - Tiene dos soluciones.
   - Tiene tres soluciones.
   - Tiene cuatro soluciones.
   - Tiene infinitas soluciones.



8. Sean f, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f una función lineal cualquiera y g una función cuadrática cualquiera. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, fundamentando su respuesta. En los casos en que es falsa, mostrar un contraejemplo (que puede ser un gráfico).

   a) Todas las funciones g poseen dos raíces.

   b) Para toda función f, la ecuación $f(x) = y_0$ tiene solución no vacía $\forall y_0 \in \mathbb{R}$.

   c) La pendiente de f es no nula si y solo si f tiene una única raíz.

   d) Para toda función f, $\exists x_1$ y x_2 tal que $f(x_1) = f(x_2)$.

   e) Para toda función g, la ecuación $g(x) = y_0$ tiene solución no vacía $\forall y_0 \in \mathbb{R}$.

   f) Para toda función g, $\exists x_1$ y x_2 tal que $g(x_1) = g(x_2)$.

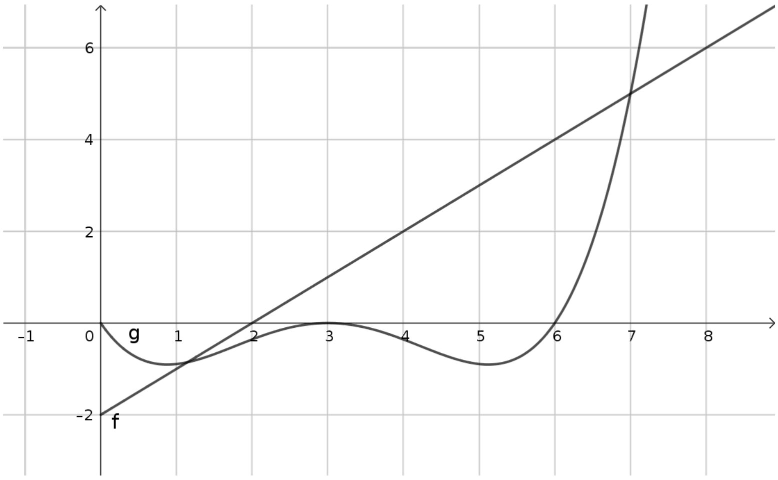
   g) Para todas las funciones f y g, la ecuación $f(x) = g(x)$ tiene al menos una solución.

9.

   a) Resolver la ecuación $x - 2 = \sqrt{x}$. ¿Cuántas soluciones tiene?

   b) Sean $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/f(x) = x - 2$ y $g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}/g(x) = \sqrt{x}$. Hallar el/los punto/s de intersección entre los gráficos de las funciones. ¿Cuántos son?

10. Sean $f,\, g\colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$, a continuación se presentan sus gráficos. El conjunto solución de la ecuación $f(x) = g(x)$ es $S = \{1.15; 7\}$.



Hallar el conjunto solución de:

a) $f(x) \cdot g(x) = 0$
b) $f(x) \cdot g(x) \geq 0$
c) $f(x) \cdot g(x) < 0$

11. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones de manera algebraica. Luego representar sus planteos de manera gráfica y establecer relaciones entre sus resoluciones y los gráficos.

a) $(2x-3) \cdot \left(x^2+1\right) = 0$
b) $(2x-3) \cdot \left(x^2+1\right) < 0$
c) $-3|4x-1| = 1$
d) $\left(x^2-4x+2\right) \cdot 5x \geq 0$
e) $|\frac{3}{4} - 3| \geq -2$
f) $\frac{8x-2x^2}{x-4} > 0$
g) $\frac{8x-2x^2}{x-4} = 0$
h) $\frac{1-x}{4-4x+x^2} > 0$
i) $|\frac{3}{4} - 3| \leq -1$
j) $(x-6)^{14} \cdot \left(x^2-12x+36\right) \leq 0$
k) $\frac{-50+2x^2}{x^2-25} = 0$
l) $|\frac{3x}{x-1}| > 1$
m) $\frac{-50+2x^2}{x^2-25} > 0$
n) $\frac{\left(x-x^2\right)(2+x)}{x^2+x-2} = 0$
ñ) $(6-3x) \cdot \left(\frac{x+5}{x^2-4}\right) = 0$
o) $\frac{12}{x} \cdot \left(-5-x^2\right) < 0$
p) $|2x-1| + |1-2x| = 4$
q) $\frac{12}{x} \cdot \left(-5-x^2\right) = 0$
r) $|2-3x| - |6x-4| = 3$

12. Sean $f,\, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, f una función lineal cualquiera y g una función cuadrática cualquiera. Analizar la cantidad de soluciones que pueden tener las siguientes ecuaciones y explicitar bajo qué condiciones. Se sugiere utilizar gráficos.

a) $f(x) = g(x)$
b) $f(x) = -g(x)$
c) $f(x) \cdot g(x) = 0$
d) $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$
e) $\frac{g(x)}{f(x)} = 0$

13. Hallar el conjunto solución de las siguientes ecuaciones.

a) $(1-2x)^3+9=12x^2-8x^3-6x+10$

b) $\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{(x-1)^2}{x^2-1}$

c) $\dfrac{\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x^2-1}}{1-x}=\dfrac{x-2}{(x+1)(x-1)(1-x)}$

d) $\dfrac{5+5x-\left(1+2x+x^2\right)-4}{x}=\dfrac{9-x^2}{x+3}$

e) $4(x-1)^2-16=4x^2-8x-12$

f) $\dfrac{\left(36-x^2\right)\left(x^2-36\right)}{4x^2-144}=\dfrac{-3x}{\frac{6}{6+x}-\frac{6}{6-x}}$

14. Para cada uno de los ítems del problema anterior, se consideran las funciones f y g de manera tal que la fórmula de f es la expresión del miembro izquierdo de la ecuación, y la fórmula de g, la expresión del miembro derecho. Además, se define el dominio de cada una de las funciones como el dominio natural de su fórmula.

¿En cuáles de los casos las funciones f y g son iguales?

Definiciones

Expresiones equivalentes

Se dice que dos expresiones $f(x)$ y $g(x)$ son *equivalentes* en un conjunto A si $\forall a \in A, f(a) = g(a)$. Es decir, las dos expresiones dan el mismo resultado si se reemplaza la variable por el mismo valor.

Otra manera de exprearlo: dos expresiones $f(x)$ y $g(x)$ son *equivalentes* en un conjunto A si el conjunto solución de la ecuación $f(x)=g(x)$ es el conjunto A.

Funciones iguales

Se dice que dos funciones $f\colon D_1 \to C_1$ y $g\colon D_2 \to C_2$ son *iguales* (o que son la misma función) si y solo si:

- $D_1 = D_2$
- $C_1 = C_2$
- $f(k) = g(k) \qquad \forall k \in D_1 = D_2$

Es decir, ambas funciones tienen el mismo dominio, el mismo codominio y todo valor del dominio tiene la misma imagen a través de ellas.

Otra manera de expresarlo: dos funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon A \to B$ son *iguales* (o son la misma función) si el conjunto solución de la ecuación $f(x)=g(x)$ es el conjunto A

Conclusión: dos funciones son iguales si tienen el mismo dominio, la misma imagen y sus fórmulas son equivalentes en el dominio de las funciones.

15. Dadas las funciones $f\colon A \to B$ y $g\colon A \to C$, se sabe que A es el conjunto solución de la ecuación $f(x)=g(x)$.

a) ¿Es cierto que el gráfico de ambas funciones es el mismo?

b) ¿Es cierto que la fórmula de ambas funciones es la misma?