1.10.2025

Uvod

SPLOŠNE INFORMACIJE

- Kolokviji: trije
- Izpiti: tudi za ustno se prijaviš kot na pisno in napišeš asistentu.
- Predavatelj: Klemen Šivic, klemen.sivic@fmf.uni-lj.si, v 5.01, govorilne ure: sreda ob 12h.
- Proseminar A: na predavanjih ponovitev srednješolske snovi, na vajah kakršnakoli vprašanja.
- Proseminar A lažji – če to opraviš, proseminar B ni treba.
- Ponovi za nazaj
- Literatura: Moravec, linearna algebra (notri so vsi dokazi, manjkajo le strukture)

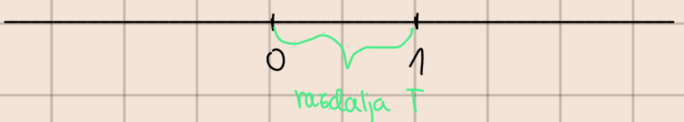
LEGENDA:

- Glavni naslov, definicija
- podnaslov,
- pomembno
-

I. VEKTORSKI PROSTOR $\mathbb{R}^3$

1. KOORDINATNI SISTEM IN VEKTORJI V $\mathbb{R}^3$

Model za množico realnih števil je realna os.



To je premica, na kateri označim izhodišče 0 in enoto 1. Ponavadi je 1 desno od 0.

Točki T, ki je desno od 0, priredimo razdaljo T od 0.

Točki T, ki je levo od 0, priredimo nasprotno vrednost razdalje T od 0.(*) Na ta način dobimo bijekcijo iz realne osi v množico $\mathbb{R}$.

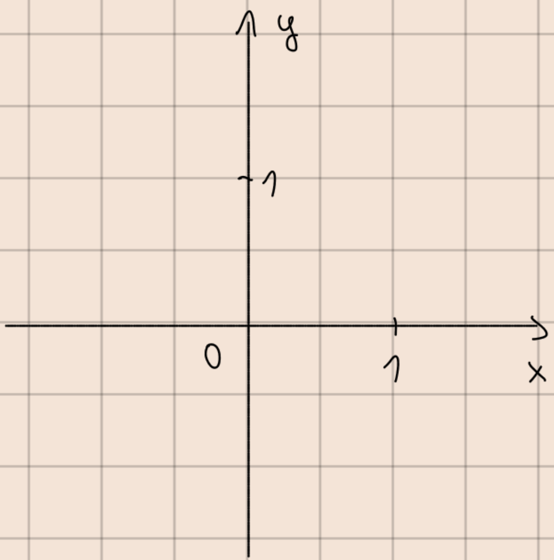
Na ta način množico $\mathbb{R}$ identificiramo z realno osjo. Točki 0 in 1 podajata koordinatni sistem na premici.

$(f(x) = x)$

($\times$ - kartezični produkt)

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y) ; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$: množica urejenih parov realnih števil. $\mathbb{R}^2$ identificiramo z ravnino z danim koordinatnim sistemom.

Koordinatni sistem določata dve realni osi, ki se sekata v koordinatnem izhodišču pod pravim kotom. Običajno ena realna os kaže v desno in ji rečemo abscisna os, druga realna os pa kaže gor in ji rečemo ordinatna os. Tak koordinatni sistem je pozitivno orientiran.



PRESLIKAVE:

$f: A \to B$

- domena (od tu jemljemo vhodne vrednosti) - kodomena (sem padejo izhodne vrednosti)

$\forall a \in A$ velja, da je $f(a) \in B$

SURJEKTIVNOST: nič ne ostane brez para

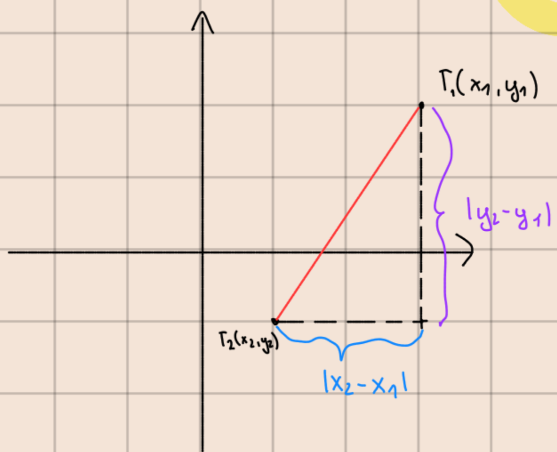
INJEKTIVNOST: ni podvojitev

Bijekcija med $\mathbb{R}^2$ in ravnino z danim koordinatnim sistemom:

Naj bo T poljubna točka v ravnini.

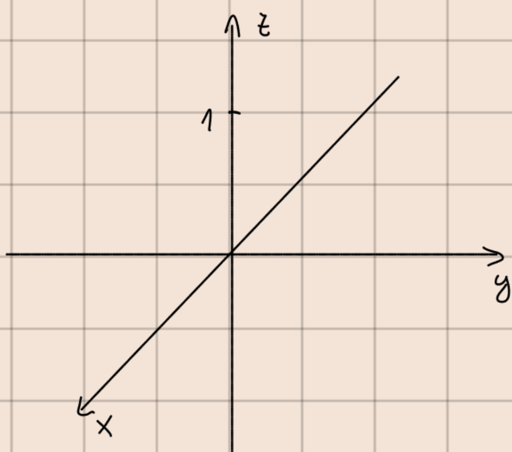
Podegnemo skozi T pravokotnico na abscisno os. Ta seka abscisno os v natanko eni točki, ki ji po prejšnji konstrukciji (*) pripada natanko eno realno število x. Na enak način dobimo točko na ordinatni osi, ki ji pripada natanko eno realno število y. Točki T priredim urejen par (x,y). Paru (x,y) rečemo koordinati točke T. Na ta način smo dobili bijekcijo iz ravnine v $\mathbb{R}^2$. $\mathbb{R}^2$ torej identificiramo z ravnino z danim koordinatnim sistemom. Razdaljo v $\mathbb{R}^2$ računamo po Pitagorovem izreku:

Če je $T_1(x_1,y_1)$ in $T_2(x_2,y_2)$, je $d(T_1,T_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.



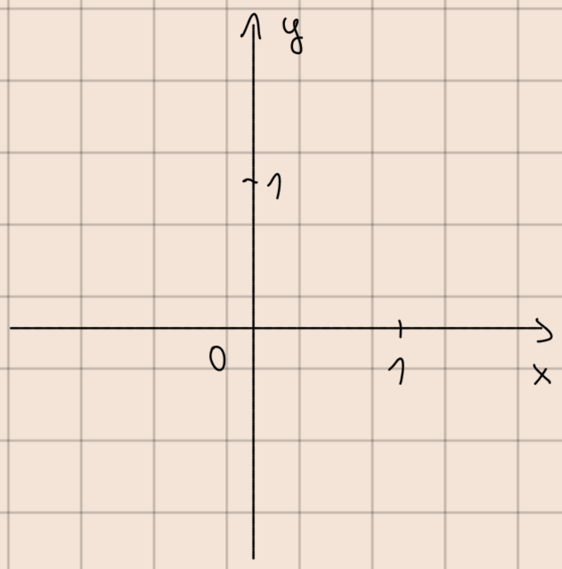
$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} = \{(x,y,z) ; x,y,z \in \mathbb{R}\}$

$\mathbb{R}^3$ identificiramo s prostorom z danim koordinatnim sistemom. Koordinatni sistem v $\mathbb{R}^3$ določajo tri realne osi, ki se pravokotno sekajo v isti točki, ki je koordinatno izhodišče. Osem rečemo x-os, y-os in z-os.



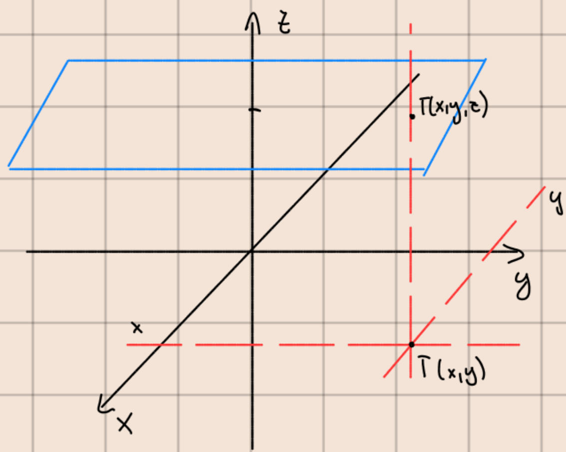
Dogovor je, da uporabljam pozitivno orientiran koordinatni sistem:

če se postavim v 1 na z-osi in pogledam na ravnino, ki jo določata x-os in y-os, vidimo koordinatni sistem, kot smo ga definirali v ravnini:



Če x os zarotiramo okrog izhodišča v pozitivni smeri (nasprotna smer urinega kazalca), dobimo y-os.

Bijekcija med prostorom s koordinatnim sistemom in $\mathbb{R}^3$:



Razdalja med točkama $T_1(x_1,y_1,z_1)$ in $T_2(x_2,y_2,z_2)$:

$$d(T_1,T_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Na $\mathbb{R}^3$ definiramo seštevanje in množenje s skalarjem:

$$(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2).$$

$$a\cdot(x,y,z)=(ax,ay,az)$$

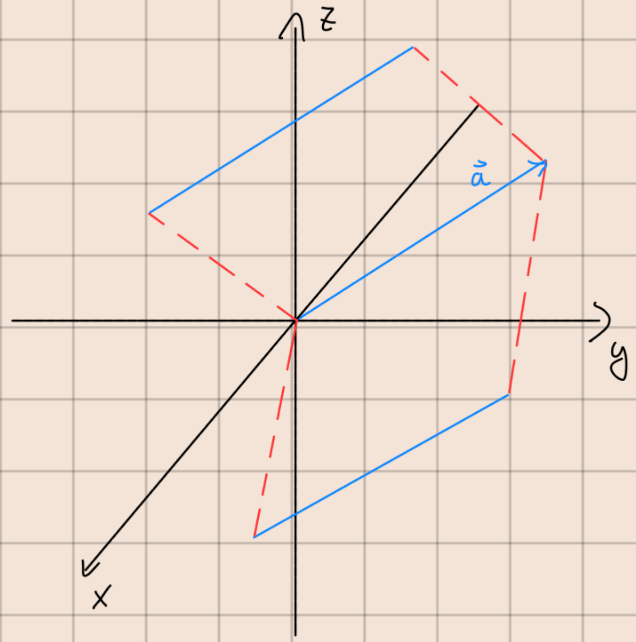
DEFINICIJA: Naj bo $a=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ poljubna točka.

KRAJEVNI VEKTOR točke a je usmerjena daljica od izhodišča do a. Oznaka: $\vec{a}=(x,y,z)$.

Krajevni vektor označimo z istimi koordinatami kot točko.

Krajevni vektor je enolično določen s končno točko, zato imamo identifikacijo (bijekcijo) med krajevnimi vektorji, točkami v prostoru in $\mathbb{R}^3$. !

DEFINICIJA: Vektor $\vec{a} = (x, y, z)$ je množica vseh usmerjenih daljic v $\mathbb{R}^3$, ki jih dobimo z vzporednim premikom krajevnega vektorja $\vec{a} = (x, y, z)$.



Če rečemo, da je končna točka (a,b,c), je krajevni vektor natanko (a,b,c). Noben drug vektor iz izhodišča ne vodi do te iste točke. Obstaja torej ena-na-ena zveza med točkami prostora in krajevnimi vektorji.

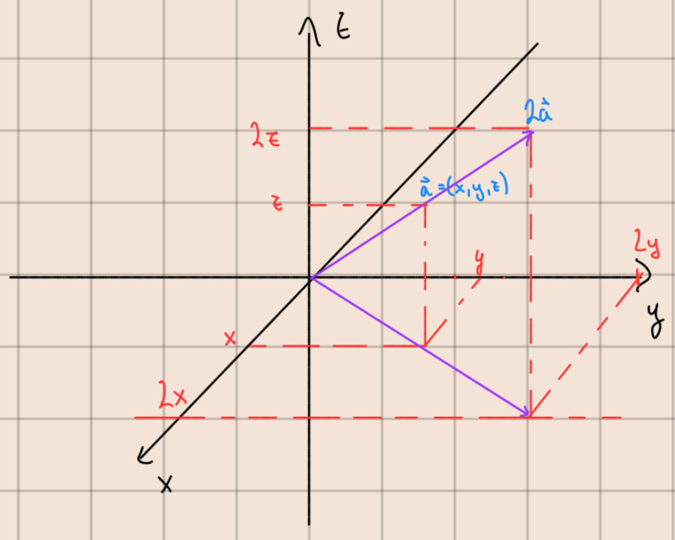
krajevni vektorji
$\longleftrightarrow$
točke v prostoru
$\longleftrightarrow$
$\mathbb{R}^3$

OPOMBA: Pogosto bomo nenatančno rekli:

Vektor je določen z usmerjeno daljico. Dve usmerjeni daljici določata isti vektor, kadar eno usmerjeno daljico vzporedno premaknemo v drugo.

Množica vektorjev je v očitni bijekciji z množico krajevnih vektorjev, ki smo jih že prej identificirali v $\mathbb{R}^3$. Torej $\mathbb{R}^3$ lahko razumemo kot množico vektorjev.

KAKO VEKTORJE SEŠTEVAMO IN MNOŽIMO S SKALARJI?

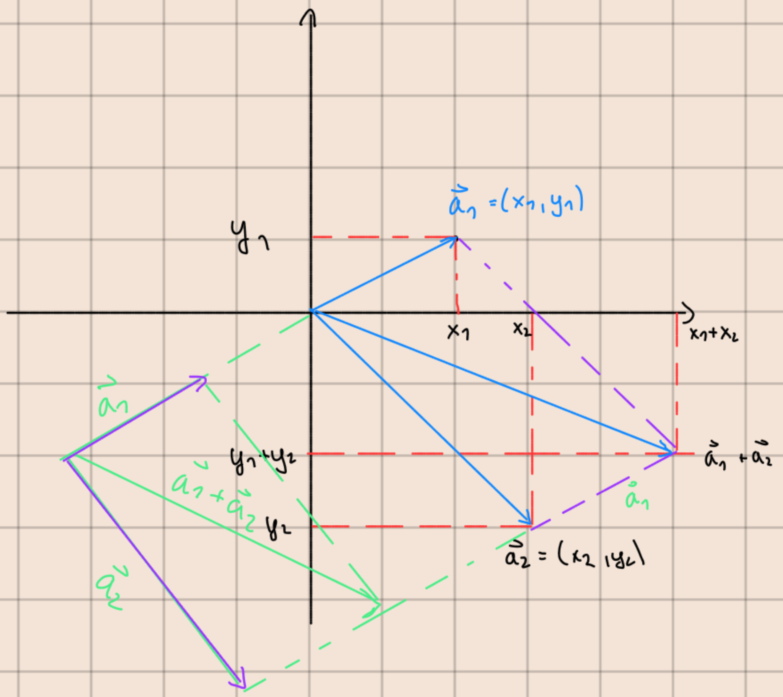


Dobimo običajno množenje vektorja s skalarjem.

Na $\mathbb{R}^3$ definiramo seštevanje in množenje s skalarjem:

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$$

$$a \cdot (x, y, z) = (ax, ay, az)$$



Dobimo običajno seštevanje vektorjev (slika je v $\mathbb{R}^2$, enak razmislek pa velja tudi v $\mathbb{R}^3$).

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2)$$

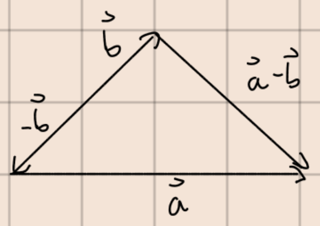
Če usmerjeni daljici vzporedno premaknemo, se tudi diagonala paralelograma, ki ga določata, vzporedno premakne. Zato lahko seštevamo kjerkoli v prostoru in je seštevanje vektorjev dobro definirano. Isto velja za množenje s skalarjem.

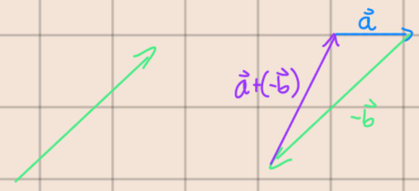
Vektor $\vec{0} = (0,0,0)$ imenujemo ničelni vektor. Določajo ga usmerjene daljice, ki imajo isto začetno in končno točko. Vektor $-\vec{a} = (-x, -y, -z)$ imenujemo nasprotni vektor vektorja $\vec{a} = (x, y, z)$. Če je $\vec{a}$ določen z usmerjeno daljico od B do A. Zato pišemo tudi $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

ODŠTEVANJE VEKTORJEV definiramo s predpisom $\vec{a}-\vec{b} = \vec{a}+(-\vec{b})$.

Po komponentah: $(x_1, y_1, z_1) - (x_2, y_2, z_2) = (x_1-x_2, y_2-y_1, z_2-z_1)$.

Geometrijsko:





LASTNOSTI SEŠTEVANJA VEKTORJEV IN MNOŽENJA S SKALARJI:

1.) $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$

2.) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

3.) $\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$

4.) $\vec{a}+(-\vec{a}) = -\vec{a}+\vec{a} = \vec{0}$

5.) $(\lambda+\beta)\vec{a} = \lambda\vec{a}+\beta\vec{a}$

6.) $\lambda(\vec{a}+\vec{b}) = \lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

7.) $\lambda(\beta\vec{a}) = (\lambda\beta)\vec{a}$

8.) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}$

To so aksiomi za vektorski prostor

9.) $(-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$

10.) $0\cdot\vec{a} = \vec{0}$

11.) $\lambda\cdot\vec{0} = \vec{0}$

$$((-1)\vec{a})+\vec{a} = (-1)\cdot\vec{a}+1\cdot\vec{a} = (-1+1)\cdot\vec{a} = \vec{0}\cdot\vec{a}$$

$$\cancel{0\cdot\vec{a}} = (0+0)\cdot\vec{a} = 0\cdot\vec{a} + \cancel{0\cdot\vec{a}}$$

DEFINICIJA: Naj bodo $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$ poljubni vektorji. Vsak vektor oblike $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_k \vec{a}_k$, kjer so $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, se imenuje linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k$.

PRIMER: $-\vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 3\vec{c}$ je linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$.

DEFINICIJA: Vektorji $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ so linearno neodvisni, kadar nobenega od njih ne moremo izraziti kot linearno kombinacijo ostalih.

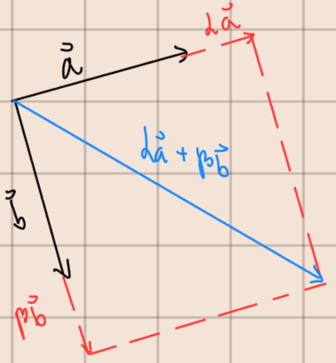
Vektorji so linearno odvisni, kadar lahko katerega od njih izrazimo kot linearno komb. ostalih.

Kdaj sta 2 vektorja $\vec{a}, \vec{b}$ linearno odvisna?

$\vec{a} = \alpha \vec{b}$ ali $\vec{b} = \beta \vec{a}$

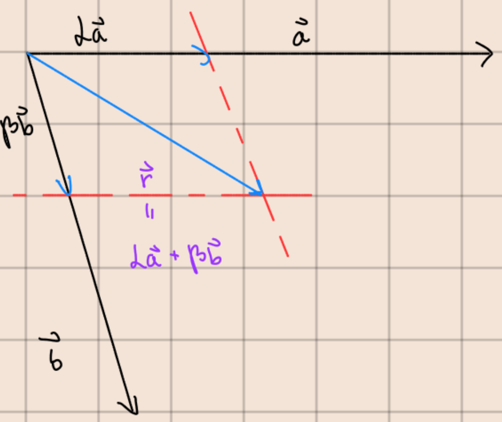
To je natanko takrat, ko pripadajoča krajevna vektorja ležita na isti premici. To je natanko takrat, ko je $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Naj bosta $\vec{a}, \vec{b}$ LN krajevna vektorja.



Kje leži $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ za $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$?

$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ leži v ravnini, ki jo določata $\vec{a}$ in $\vec{b}$.



Tudi obratno je res: vsak vektor v ravnini, ki ga določata $\vec{a}$ in $\vec{b}$, se da zapisati v obliki $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ za neka $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

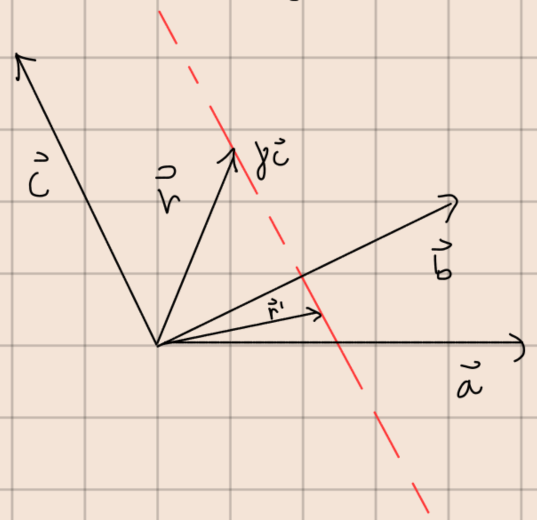
Ravnina, ki jo določata $\vec{a}$ in $\vec{b}$, je torej enaka množici vseh linearnih kombinacij vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Trije (krajevni) vektorji so torej linearno odvisni natanko takrat, ko ležijo v isti ravnini.

DEFINICIJA: Baza prostora $\mathbb{R}^3$ je množica, sestavljena iz treh linearno neodvisnih vektorjev. Če je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ baza prostora $\mathbb{R}^3$, potem lahko vsak vektor $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ enolično zapišemo v obliki $\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, kjer so $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

To je glavna lastnost baze

DOKAZ: Obstoj razcepa $\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$:



$\Rightarrow$ bazo za $\mathbb{R}^3$ sestavljata dva linearno neodvisna vektorja.

DOKAZ: Obstoj razcepa $\vec{r} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$:

Od konca $\vec{r}$ potegnemo vzporednico vektorja $\vec{c}$. Ta seka ravnino, ki jo določata $\vec{a}$ in $\vec{b}$ v natanko eni točki, ki določa krajevni vektor $\vec{r}'$. $\vec{r}'$ že znamo razcepiti kot $\vec{r}' = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ za neka $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Vektor od konca $\vec{r}'$ do konca $\vec{r}$ je vzporeden $\vec{c}$, torej oblike $\gamma\vec{c} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}' + \gamma\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$.

ENOLIČNOST RAZCEPA: Recimo, da je $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b} + \gamma'\vec{c}$ še za neke $\alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{R}$.
Če je $\alpha \neq \alpha'$, dobimo $\vec{a} = \frac{\beta' - \beta}{\alpha - \alpha'}\vec{b} + \frac{\gamma' - \gamma}{\alpha - \alpha'}\vec{c}$, kar je v protislovju z linearno neodvisnostjo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \Rightarrow \alpha = \alpha'$.
Na enak način dobimo tudi $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$.

POSLEDICA: 4 vektorji v $\mathbb{R}^3$ so vedno linearno odvisni.

PRIMER BAZE: $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$, $\vec{k} = (0,0,1)$ tvorijo bazo $\mathbb{R}^3$. Pravimo ji standardna baza $\mathbb{R}^3$. Standardno bazo $\mathbb{R}^2$ sestavljata vektorja $\vec{i} = (1,0)$, $\vec{j} = (0,1)$.

TRDITEV: Vektorji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ so linearno neodvisni natanko takrat, ko velja naslednji sklep: Če je $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$, potem je $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ so torej LN natanko takrat, ko vektor $\vec{0}$ lahko napišemo kot LK $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ samo kot $0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + 0 \cdot \vec{c}$.

POSLEDICA: $\vec{0}$ je linearno odvisen vektor: $\vec{0} = 1 \cdot \vec{0}$

ta skalar ni 0

8.10.2025

(↑) DOKAZ: Ko imamo $\Leftrightarrow$ dokazujemo eno za drugo.

($\Rightarrow$) Predpostavimo, da so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ LN. Recimo, da sklep ne velja. Potem obstajajo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, ne vsi 0, da je $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$.

Zaradi simetrije privzemimo, da $\alpha \neq 0$.

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$$

$$\alpha\vec{a} = -\beta\vec{b} - \gamma\vec{c} \quad / : \alpha \neq 0$$

$$\vec{a} = -\frac{\beta}{\alpha}\vec{b} - \frac{\gamma}{\alpha}\vec{c}$$ $\rightsquigarrow$ dobimo protislovje z linearno neodvisnostjo

($\Leftarrow$) Predpostavimo, da so $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ LO. Potem lahko enega od njih izrazimo kot linearno kombinacijo ostalih dveh. Zaradi simetrij lahko predpostavimo, da je to $\vec{a}$. Naj bo $\vec{a} = \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ za neka $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

$$\underset{\neq 0}{-1}\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = 0$$

POSLEDICA: Množica $\{\vec{a}\}$ je LN $\Leftrightarrow$ $\vec{a} \neq \vec{0}$.

DOKAZ: Če je $\vec{a} \neq \vec{0}$, ne moremo napisati $\vec{0} = \alpha \cdot \vec{a}$ za nek $\alpha \neq 0$. Če je $\vec{a} = \vec{0}$, pa lahko napišemo $\vec{0} = \underset{\neq 0}{1} \cdot \vec{a}$.

2. SKALARNI PRODUKT

DEFINICIJA: Skalarni produkt vektorjev $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ in $\vec{a}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ je število (skalar) $a_1 \cdot a_2 = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.

POSLEDICA: Za $\vec{a} = (x, y, z)$ je $\vec{a} \cdot \underset{(1,0,0)}{\underset{\parallel}{\vec{i}}} = x_1$, $\vec{a} \cdot \vec{j} = y$, $\vec{a} \cdot \vec{k} = z$.

LASTNOSTI SKALARNEGA PRODUKTA:

1.) Komutativnost: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ za vsaka $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}$.

2.) Distributivnost: $\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$ (in $(\vec{b} + \vec{c}) \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{c}$) za vse $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$

3.) Homogenost: $(\lambda \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda \cdot \vec{b}) = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$ za vse $\lambda \in \mathbb{R}$ in $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$

4.) Pozitivna definitnost: $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ za vse $\vec{a} \in \mathbb{R}^2$

če je $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$, potem je $\vec{a} = 0$.

DOKAZ: Preverimo z računom. (1), (2), (3) D.N.

(4) Naj bo $\vec{a} = (x, y, z)$. Potem je $\vec{a} \cdot \vec{a} = x^2 + y^2 + z^2 \geq 0$.

Kdaj je $x^2 + y^2 + z^2 = 0$. Samo takrat, ko je $x = y = z = 0$, torej ko je $\vec{a} = 0$.

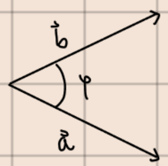
$\square$

OPOMBA: Ko bomo definirali abstraktni skalarni produkt, bodo 1) – 4) aksiomi za skalarni produkt.

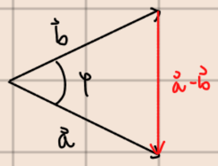
Zaradi lastnosti (4) lahko definiramo:

DEFINICIJA: Dolžina ali norma vektorja $\vec{a}$ je število $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$, potem je $\|\vec{a}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. To je dolžina usmerjene daljice, ki predstavlja vektor $\vec{a}$.

IZREK: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\varphi$, kjer je φ kot med usmerjenima daljicama $\vec{a}$ in $\vec{b}$, ki imata isti začetek.



DOKAZ:

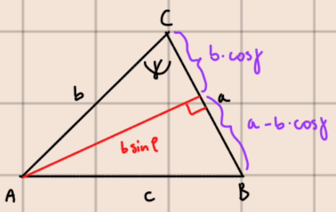


Po kosinusnem izreku je $\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\cdot\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\varphi$

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = (\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a} - \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{b}\cdot\vec{a} + \vec{b}\cdot\vec{b} =$$

$$= \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$$

$$\Rightarrow +|2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\varphi = +2\vec{a}\vec{b}$$

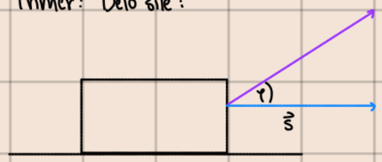


$$c^2 = (b\cdot\sin\gamma)^2 + (a - b\cdot\cos\gamma)^2$$

$$= b^2\cdot\sin^2\gamma + a^2 - 2ab\cos\gamma + b^2\cos^2\gamma$$

$$= a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$$

Primer: Delo sile:



$A = F\cdot s\cdot\cos\varphi = \vec{F}\cdot\vec{s}$

Dogovor: Vektor $\vec{0}$ je pravokoten na vsak vektor.

Posledica: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \iff \vec{a}\perp\vec{b}$

Primer: $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$

PRIMER: Izračunaj kot med vektorjema $\vec{a} = (1,1,2)$ in $\vec{b} = (1,0,1)$.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\varphi$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 1\cdot1 + 1\cdot0 + 2\cdot1 = 3$$

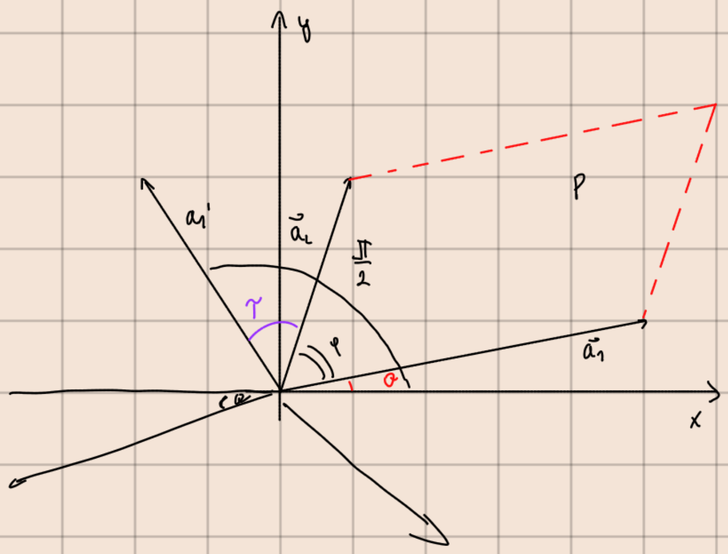
$$\|\vec{a}\| = \sqrt{1^2+1^2+2^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\vec{b}\| = \sqrt{1^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 3 = \sqrt{6}\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\varphi = 2\sqrt{3}\cdot\cos\varphi$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

PRIMER: V ravnini $z=0$ imamo dana vektorja $\vec{a}_1=(x_1,y_1,0)$ in $\vec{a}_2=(x_2,y_2,0)$. S pomočjo vektorjev $\vec{a}_1$ in $\vec{a}_2$ (oz. njunih komponent) izračunaj S paralelograma, ki ga določata $\vec{a}_1$ in $\vec{a}_2$.



Recimo, da je $(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ pozitivno orientiran par. To pomeni, da vektor $\vec{a}_1$ zavrtimo v nasprotni smeri urinega kazalca za kot, manjši π, da dobimo vektor, ki leži v smeri $\vec{a}_2$.

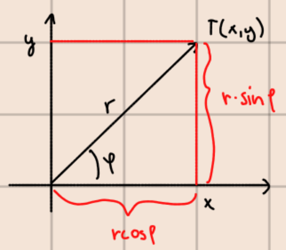
$\vec{a}_1'$ naj bo vektor, ki ga dobimo, če $\vec{a}_1$ zavrtimo za $\frac{\pi}{2}$ v pozitivni smeri.

τ naj bo kot med $\vec{a}_1'$ in $\vec{a}_2$.
(tau)

$P = \|\vec{a}_1\|\cdot\|\vec{a}_2\|\cdot\sin\varphi = \|\vec{a}_1'\|\cdot\|\vec{a}_2\|\cdot\sin\varphi$

Če je φ ostri kot je τ enako $\frac{\pi}{2}-\varphi$ in $\cos\tau = \sin\varphi$.

Če je φ topi kot, pa je $\tau = \varphi - \frac{\pi}{2}$ in je spet $\cos\tau = \sin\varphi$.

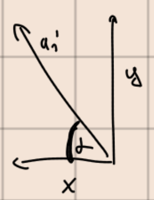


$\Rightarrow P = \|\vec{a}_1'\|\cdot\|\vec{a}_2\|\cdot\cos\tau = \vec{a}_1'\cdot\vec{a}_2.$

$\vec{a}_1 = (\underset{x}{\|\vec{a}_1\|\cdot\cos\vartheta}, \underset{y}{\|\vec{a}_1\|\sin\vartheta}, \underset{z}{0})$ polarni KS

$\Rightarrow \vec{a}_1' = (\|\vec{a}_1\|\cdot\cos(\vartheta+\frac{\pi}{2}), \|\vec{a}_1\|\sin(\vartheta+\frac{\pi}{2}), 0) =$

$= (-\|\vec{a}_1\|\cdot\sin\vartheta, \|\vec{a}_1\|\cdot\cos\vartheta, 0) = (-y_1, x_1, 0)$



$\Rightarrow p = (-y_1, x_1, 0)\cdot(x_2,y_2,0) = -y_1x_2 + x_1y_2$

Če bi bil par $(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ negativno orientiran, bi dobili $p = y_1x_2 - x_1y_2$.

$\cos\alpha = \frac{a_1'}{x} \quad /\cdot x$

$x\cdot\cos\alpha = a_1'$

$-x\cdot\cos\alpha = a_1'$

Izraz $x_1y_2 - y_1x_2$ imenujemo determinanta reda 2 in ga označimo z $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

Ugotovili smo, da je det $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$ enaka produktu ploščine paralelograma, ki ga napenjata $\vec{a}_1$ in $\vec{a}_2$, ter orientacije.

$\alpha = \pi - \frac{\pi}{2} - \vartheta$

$\alpha = \frac{2\pi - \pi - 2\vartheta}{2} = \frac{\pi}{2} - \vartheta$

Ploščina trikotnika je absolutna vrednost od $\frac{1}{2}\cdot\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

Ugotovili smo tudi: vektorja $(x_1,y_1,0)$ in $(x_2,y_2,0)$ sta LO $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow$ ploščina paralelograma je 0

3. VEKTORSKI PRODUKT

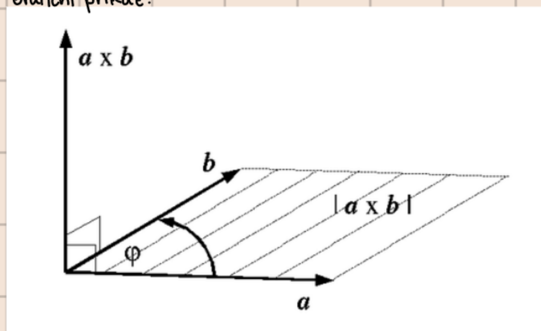
DEFINICIJA: Vektorski produkt vektorjev $\vec a$ in $\vec b$ je vektor $\vec a \times \vec b$, ki ustreza naslednjim lastnostim:

1.) $\vec a \times \vec b \perp \vec a$ in $\vec a \times \vec b \perp \vec b$

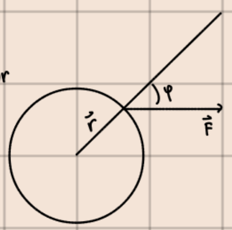
2.) $\|\vec a \times \vec b\|$ je ploščina paralelograma, ki ga napenjata krajevna vektorja $\vec a$ in $\vec b$, torej $\|\vec a \times \vec b\| = \|\vec a\| \cdot \|\vec b\| \cdot \sin\varphi$, kjer je φ kot med $\vec a$ in $\vec b$.

3.) $\langle \vec a, \vec b, \vec a \times \vec b \rangle$ je pozitivno orientirana trojica. To pomeni: če iz vrha $\vec a \times \vec b$ pogledamo na ravnino, ki jo določata $\vec a$ in $\vec b$, potem se $\vec a$ zavrti v pozitivni smeri za kot, manjši od π, da dobimo vektor v smeri $\vec b$.

Grafični prikaz:



PRIMER: navor



$\vec M = \vec r \times \vec F$

$\|\vec M\| = \|\vec r\| \cdot \|\vec F\| \cdot \sin\varphi$

DOGOVOR: $\vec 0$ je vzporeden vsakemu vektorju.

POSLEDICA: $\vec a \times \vec b = \vec 0 \iff \vec a \parallel \vec b$

Naj bo $\vec a_1 = (x_1, y_1, z_1)$ in $\vec a_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Poiščimo komponente vektorja $\vec a_1 \times \vec a_2$.

Naj bo $\vec a_1 \times \vec a_2 = (x_3, y_3, z_3)$. Zaradi simetrije bomo poiskali samo z_3.

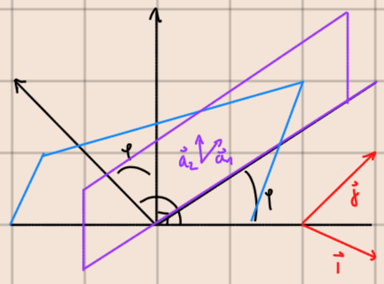
Naj bo φ kot med $\vec a_1, \vec a_2$ in $\vec k$. Potem je $z_3 = (\vec a_1 \times \vec a_2) \cdot \vec k = \|\vec a_1 \times \vec a_2\| \, \underbrace{\|\vec k\|}_{=1} \cdot \cos\varphi =$

$= \|\vec a_1 \times \vec a_2\| \cdot \cos\varphi$

$\vec k = (0,0,1)$

$\|\vec k\| = 1$

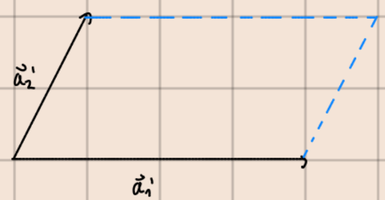
Ploščina paralelograma, napetega na $\vec a_1$ in $\vec a_2$.



$\vec{k}$ je pravokoten na ravnino, ki jo določata $\vec{i}$ in $\vec{j}$, $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ pa je pravokoten na ravnino, ki jo določata $\vec{a}_1$ in $\vec{a}_2$. Zato je φ tudi kot med vodoravno ravnino in ravnino, ki jo določata $\vec{a}_1$ in $\vec{a}_2$.

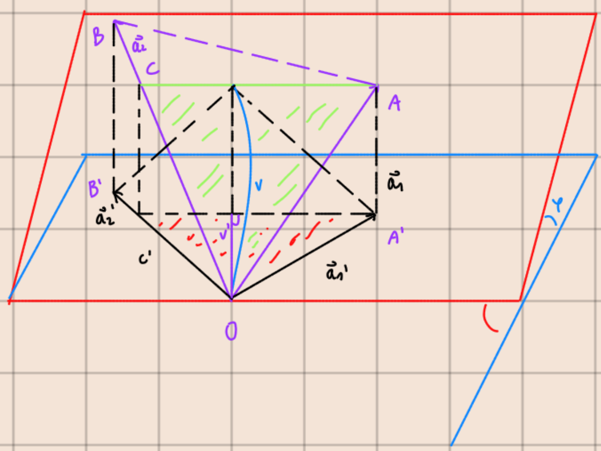
Vektorja $\vec{a}_1$ in $\vec{a}_2$ projiciramo na vodoravno ravnino in dobimo vektorja $\vec{a}_1' = (x_1, y_1, 0)$ in $\vec{a}_2' = (x_2, y_2, 0)$. Vse, kar bomo projicirali, bomo označevali s $'$.

Paralelogram, ki ga določata $\vec{a}_1$ in $\vec{a}_2$, ima oglišča $(0,0,0)$, (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) in $(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2)$. Če ta paralelogram projiciramo, dobimo 4-kotnik z oglišči $(0,0,0)$, $(x_1, y_1, 0)$, $(x_2, y_2, 0)$ in $(x_1+x_2, y_1+y_2, 0)$.



Ta lik je paralelogram, napet na $\vec{a}_1'$ in $\vec{a}_2'$.

Ploščina projiciranega paralelograma je zato absolutna vrednost determinante $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.



Naj bo C presečišče premic OB in ravnine skozi A, ki je vodoravna. C' naj bo projekcija točke C. $|AC| = |A'C'|$, ker je AC vzporedna ravnini, napeti na $\vec{i}$ in $\vec{j}$.

Kot med v in v' je φ ali $\pi - \varphi$ (odvisno od tega, ali je φ ostri ali topi).

$\Rightarrow v' = v \cdot |\cos\varphi|$

$\Rightarrow \boxed{p_{OA'C'} = \underbrace{p_{OAC}}_{\frac{1}{2}|AC| \cdot v} \cdot |\cos\varphi|}$

$p_{OA'C'} = \frac{1}{2}|A'C'| \cdot v'$, $|A'C'| = |AC|$, $v' = v|\cos\varphi|$

Na enak način je $P_{\Delta C'A'B'} = P_{\Delta CAB} \cdot |\cos\varphi|$

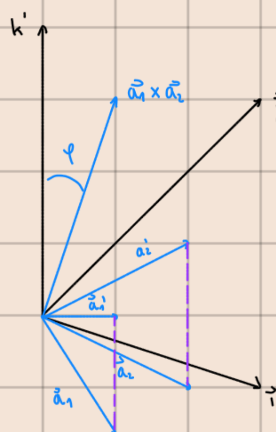
$\Rightarrow P_{OA'B'} = P_{OAB} \cdot |\cos\varphi|$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\|\vec{a}_1' \times \vec{a}_2'\| = \frac{1}{2}\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\| \cdot |\cos\varphi|$

$\Rightarrow \|\vec{a}_1' \times \vec{a}_2'\| = \|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\| \cdot |\cos\varphi|$

$\vec{z}_3 = \|\vec{a}_1' \times \vec{a}_2'\|$; φ ostri kot

$\|-\vec{a}_1' \times \vec{a}_2'\|$; φ topi kot



Če je φ ostri kot, potem $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ kaže gor in je $(\vec{a}_1', \vec{a}_2')$ pozitivno orientiran par in je $\|\vec{a}_1' \times \vec{a}_2'\| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

Če je φ topi kot, pa $\vec{a}_1 \times \vec{a}_2$ kaže dol in je $(\vec{a}_1', \vec{a}_2')$ negativno orientiran par $\Rightarrow \|\vec{a}_1' \times \vec{a}_2'\| = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$.

simetrija

V obeh primerih je $\boxed{\vec{z}_3 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.}$

Na enak način dobimo $x_3 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}$, $y_3 = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

$x \to y \to z \to x$ (ciklično spreminjanje osi → poz. orientiran KS. Če bi zamenjal samo dve bi dobili neg. KS

$$\Rightarrow \boxed{(x_1, y_1, z_3) \times (x_2, y_2, z_3) = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)}$$

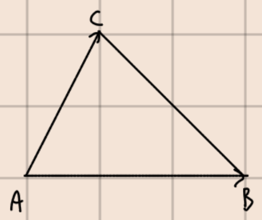
$$-\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}$$

Determinanta reda 3 je izraz

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{(x_1, y_1, z_1) \times (x_2, y_2, z_2) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}}$$

PRIMER: Izračunaj ploščino trikotnika z oglišči $A(1,0,2)$, $B(2,2,0)$ in $C(3,-2,1)$.



$$P = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \|(1,2,-2) \times (2,-2,-1)\| =$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \right\|$$

$$= \frac{1}{2} \left\| \left(\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{i}, - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \vec{j}, + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \right\|$$

$$= \frac{1}{2} \left\| (-6, -3, -6) \right\| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{36 + 9 + 36} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{81} = \frac{9}{2}$$

$$\vec{\mathbf{a}} = \begin{Vmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Vmatrix}$$

in

$$\vec{\mathbf{b}} = \begin{Vmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Vmatrix},$$

se njun vektorski produkt izračuna kot:

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{Vmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{Vmatrix}.$$

15.10.2025

LASTNOSTI VEKTORSKEGA PRODUKTA:

1.) Antikomutativnost: $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

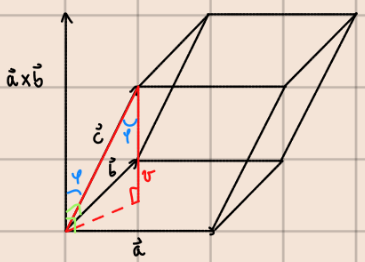
2.) Distributivnost: $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}$, $(\vec{b}+\vec{c})\times\vec{a} = \vec{b}\times\vec{a} + \vec{c}\times\vec{a}$

3.) Homogenost: $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(\lambda\vec{b}) = \lambda\cdot\vec{a}\times\vec{b}$ za vse $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ in vse $\lambda\in\mathbb{R}$

4. MEŠANI PRODUKT

Mešani produkt vektorjev $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ je število $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$.

Geometrijski pomen: Paralelepiped je geometrijsko telo s 3 četvericami para vzporednih robov.



Paralelepiped je določen s 3 LN vektorji.

Zanima nas prostornina paralelepipeda.

Paralelepiped je posebna prizma, katere osnovna ploskev je paralelogram, ki ga določata $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

$$V = O\cdot v = \|\vec{a}\times\vec{b}\|\cdot v = \begin{cases} \|\vec{a}\times\vec{b}\|\cdot\|\vec{c}\|\cdot\cos\varphi, & \text{če je } \varphi \text{ oster} \\ -\|\vec{a}\times\vec{b}\|\,\|\vec{c}\|\cdot\cos\varphi, & \text{če je } \varphi \text{ topi} \end{cases} = \begin{cases} (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}, & \text{če je } \varphi \text{ oster} \\ -(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}, & \text{če je } \varphi \text{ topi} \end{cases}$$

ploščina osnovne ploskve

višina paralelepipeda

Sledi: $$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = \begin{cases} V, & \text{če je } (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \text{ pozitivno orientirana trojica} \\ -V, & \text{če je } (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \text{ negativno orientirana trojica} \end{cases}$$

LASTNOSTI MEŠANEGA PRODUKTA:

1.) Homogenost v vseh treh faktorjih: $[\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\lambda\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}] = \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$.

2.) Distributivnost v vseh treh faktorjih, npr. $[\vec{a}+\vec{a}',\vec{b},\vec{c}] = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}] + [\vec{a}',\vec{b},\vec{c}]$, podobno sta ostala dva faktorja.

3.) $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{a},\vec{c},\vec{b}] = -[\vec{c},\vec{b},\vec{a}] = -[\vec{b},\vec{a},\vec{c}]$

Če zamenjamo dva vektorja 1x se spremeni orientacija. Če ju 2x spet postane ista. Če pa vse tri vektorje (ciklično) pa se ohranja.

Naj bo $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{a}_1 = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{a}_3 = (x_3, y_3, z_3)$. Radi bi izračunali $[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]$.

$$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = (\vec{a}_1 \times \vec{a}_2) \cdot \vec{a}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot (x_3, y_3, z_3) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (x_3, y_3, z_3) =$$

$$= x_3 \cdot \begin{matrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{matrix} - y_3 \cdot \begin{matrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix} + z_3 \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3] = [a_2, a_3, a_1] = [a_3, a_1, a_2]$ $\Rightarrow$ v determinanti lahko ciklično zamenjamo vrstice.

$$\Rightarrow [a_1, a_2, a_3] = \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix}$$

3x3 determinanta $\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix}$ je enaka $0 \Longleftrightarrow$ prostornina paralelepipeda je 0

$\Longleftrightarrow$ vrstice $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ so LO.

DVOJNI VEKTORSKI PRODUKT

skalarni produkt

$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (a \cdot c) \cdot b - (b \cdot c) \cdot a$

produkt vektorja s skalarjem

Lahko preverimo z računom:

Pol geometrijskega dokaza: $(a \times b) \times c \perp a \times b \Rightarrow (a \times b) \times c$ leži v ravnini, ki ga napenjata a in b $\Rightarrow$

$\Rightarrow (a \times b) \times c = \alpha a + \beta b$ za neka $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$(a \times b) \times c \perp c \Rightarrow \alpha ac + \beta bc = 0$. Če je npr. $b \cdot c \neq 0$, je $\beta = -\alpha \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \Rightarrow$

$\Rightarrow (a \times b) \times c = \alpha \cdot a - \alpha \cdot \frac{ac}{bc} b = -\frac{\alpha}{bc} \left(-(bc) a + (ac) b \right)$. Račun bi pokazal, da je $\alpha = -b \cdot c$.

V formulo na dvojni VP ustavimo $c \times d$ namesto c. Dobimo:

$$(a \times b) \times (c \times d) = (a \cdot (c \times d)) b - (b \cdot (c \times d)) a =$$

$$= [a, c, d] b - [b, c, d] a$$

$$(a \times b)(c \times d) = [a, b, c \times d] = [b, c \times d, a] =$$

$$= [c \times d, a, b] = ((c \times d) \times a) \cdot b =$$

$$= ((a \cdot c) d - (a \cdot d) \cdot c) \cdot b = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c)$$

$$\boxed{(a \times b) \cdot (c \times d) = \begin{vmatrix} ac & ad \\ bc & bd \end{vmatrix}}$$ ~ Lagrangova identiteta

Kaj če je $c = a$, $d = b$?

$$\boxed{\|a \times b\|^2 = \|a\| \cdot \|b\| - (a \cdot b)^2}$$

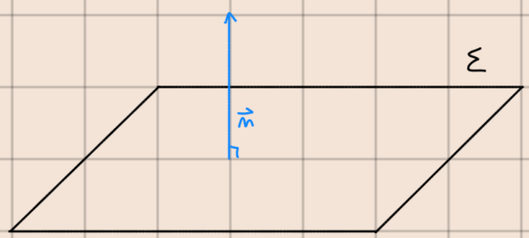
$$\|a\|^2 \|b\|^2 \cdot \sin^2 \varphi = \|a\|^2 \|b\|^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 \cos^2 \varphi$$

5. PREMICE IN RAVNINE V $\mathbb{R}^3$

ENAČBA RAVNINE: Enačba ravnine Σ je enačba v treh spremenljivkah x, y, z, da velja:

Točka $T(a,b,c)$ leži na ravnini $\Sigma \iff$ trojica (a,b,c) zadošča enačbi.

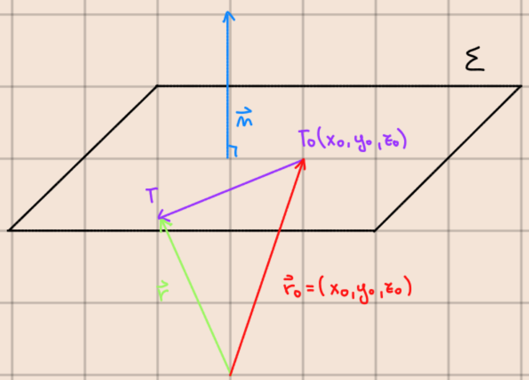
DEFINICIJA: Normala ravnine Σ je poljuben neničeln vektor, ki je pravokoten na ravnino Σ.



Normala še ne določa ravnine, saj ravnino lahko vzporedno premaknemo in premaknjena ravnina ima isto normalo.

Ravnina je enolično določena z normalo in eno točko na ravnini.

Imejmo ravnino Σ in normalo $\vec{n} = (a,b,c)$ in točko $T_0(x_0, y_0, z_0)$ na ravnini.



Naj bo $T(x,y,z)$ poljubna točka v prostoru in $\vec{r} = (x,y,z)$ njen krajevni v.

$T \in \Sigma \iff \overrightarrow{T_0T} \in \Sigma \iff \overrightarrow{T_0T} \perp \vec{n}$

$\iff \overrightarrow{T_0T} \cdot \vec{n} = 0 \iff \boxed{(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0}$

vektorska enačba ravnine

Po komponentah: $((x,y,z) - (x_0, y_0, z_0)) \cdot (a,b,c) = 0$

$\boxed{a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) \quad \cdot (a,b,c) = 0}$

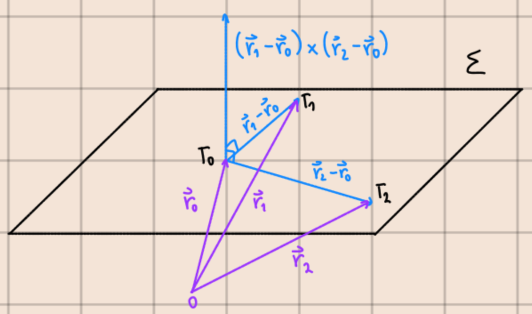
fiksna števila: komponente normale

fiksna števila: koordinate izbrane točke na ravnini kjer a, b, c niso vsi 0

Obratno je tudi res: Vsaka enačba $ax + by + cz + d = 0$ je enačba neke ravnine z normalo (a, b, c).

Opazimo tudi, da je enačba ravnine linearna enačba. Enačba ravnine je določena do množenja z neničelnim številom natančno, ker je normala določena le do množenja z neničelnim številom natančno. Včasih je ugodno, da je dolžina normale enaka 1. Če je $\vec{n} = (a, b, c)$ poljubna normala je $\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} = \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right)$.

$\forall$



T_0, T_1, T_2 so nekolinearne, zato sta vektorja $\vec{r}_1 - \vec{r}_0$ in $\vec{r}_2 - \vec{r}_0$ linearno neodvisna in določata ravnino. Njen vektorski produkt je pravokoten na oba in zato na vse vektorje v ravnini. Za normalo zato lahko vzamemo $\vec{n} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_0)$.

$\vec{r} = (x, y, z)$ je krajevni vektor točke, za katero preverjam, ali je na ravnini.

$\Rightarrow$ Enačba ravnine: $(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot ((\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_0)) = 0$

$[\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{r}_1 - \vec{r}_0, \vec{r}_2 - \vec{r}_0] = 0$

PRIMER: Poišči enačbo ravnine skozi točke $A(1,-5,2)$, $B(3,4,-2)$, $C(0,3,-4)$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-2 \\ 3-1 & 4+5 & -2-2 \\ 0-1 & 3+5 & -4-2 \end{vmatrix} = 0$$

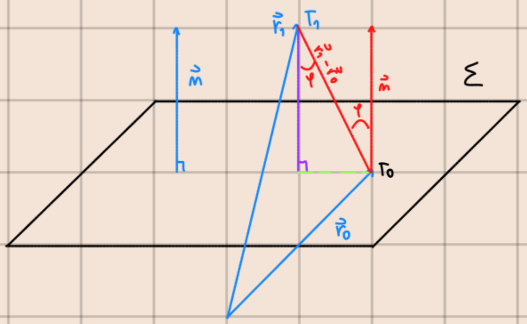
$$\begin{vmatrix} x-1 & y+5 & z-2 \\ 2 & 9 & -4 \\ -1 & 8 & -6 \end{vmatrix} = (x-1)\cdot\begin{vmatrix} 9 & -4 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} - (y+5)\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & -6 \end{vmatrix} + (z-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -22(x-1) + 16(y+5) + 25(z-2) = -22x + 22 + 16y + 80 + 25z - 50 = -22x + 16y + 25z + 52 :$$

enačba ravnine: $\boxed{-22x + 16y + 25z + 52 = 0}$. Normala je $(-22, 16, 25)$.

RAZDALJE DO RAVNINE: Imejmo ravnino Σ z enačbo $(\vec{r} - \vec{r}_0)\cdot\vec{n} = 0$ in neko točko $T_1(x_1, y_1, z_1)$.

$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$



Zanima nas razdalja med T_1 in Σ. Razdalja med T_1 in Σ je po definiciji najkrajša razdalja med T_1 in točko na Σ.

Najkrajša razdalja je med T_1 in pravokotno projekcijo T_1 na Σ.

$$\Delta = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_0\|\cdot\cos\varphi$$

$$|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)\cdot\vec{n}| = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_0\|\cdot\|\vec{n}\|\cdot\cos\varphi$$

$\cos\varphi$

$$\Delta = \frac{|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Brez absolutne vrednosti bi predznak povedal, na kateri strani ravnine leži T_1.

Po komponentah : $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n} = (a, b, c)$:

$$\Delta = \frac{|x_1 - x_0| \cdot a + |y_1 - y_0| b + |z_1 - z_0| c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + \overbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}^{d}|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$\boxed{\Delta = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Koordinati točke T_1 ustavimo v enačbo ravnine ($= 0$) in delimo z dolžino normale.

Iz enačbe se vidi tudi, da je $T_1 \in \Sigma \iff \Delta = 0$.

PRIMER: Izračunaj razdaljo od točke $T_1(3, -1, 2)$ do ravnine z enačbo $2x - y - 2z = 5$.

$$\Delta = \frac{|2 \cdot 3 - (-1) - 2 \cdot 2 - 5|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|6 + 1 - 4 - 5|}{3} = \frac{2}{3}$$

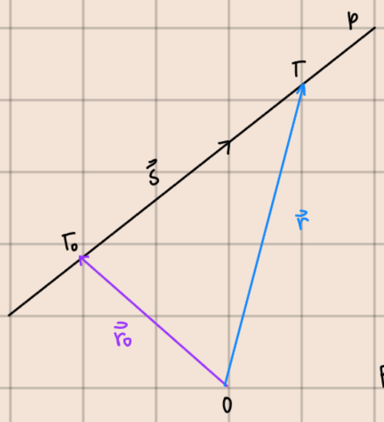
Razdalja med ravninama, ki se sekata je 0.

Razdalja med ravnino in premico, ki sta vzporedni, je enaka razdalji med poljubno točko na premici in ravnino.

ENAČBA PREMICE:

Premica je presek dveh ravnin. Enačba ravnine je linearna enačba. Zato bo enačba premice sistem dveh linearnih enačb v spremenljivkah x, y, z, tako da bo veljalo: $T(a,b,c)$ leži na premici $\Leftrightarrow$ trojica (a,b,c) zadošča obema enačbama.

SMERNI VEKTOR premice je vsak neničelni vektor, ki je vzporeden s premico. Premica je enolično določena s svojim smernim vektorjem in eno točko na njej. Naj bo $\vec{s} = (a, b, c)$ smerni vektor premice p in naj bo $T_0(x_0, y_0, z_0)$ neka točka na p.



Naj bo $T(x,y,z)$ poljubna točka s krajevnim vektorjem $\vec{r} = (x,y,z)$.

$T \in p \Leftrightarrow \overrightarrow{T_0T} \parallel \vec{s} \Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r_0} \parallel \vec{s} \Leftrightarrow$ obstaja $\lambda \in \mathbb{R}$, da je $\vec{r} - \vec{r_0} = \lambda \vec{s}$

$\boxed{\vec{r} = r_0 + \lambda \vec{s}, \ \lambda \in \mathbb{R}}$ vektorska parametrična enačba premice

Po komponentah: $\boxed{\begin{array}{l} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{array}}$ parametrična enačba premice

Znebimo s λ:

Če so $a, b, c \neq 0$, potem je $\boxed{\lambda = \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$ enačba premice.

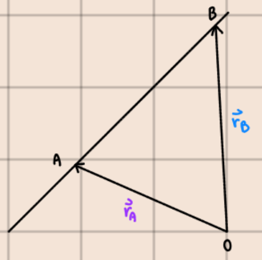
V imenovalcih so koordinate smernega vektorja, v števcih pa odštejemo koordinate izbrane točke na premici.

Če je $a = 0$ in $b, c \neq 0$, je enačba premice sistem $\boxed{x = x_0, \ \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$.

Če je $a = b = 0$ je enačba premice sistem $\boxed{x = x_0, \ y = y_0}$.

22.10.2025

Premico lahko podamo tudi z dvema nekolinearnima točkama na premici.



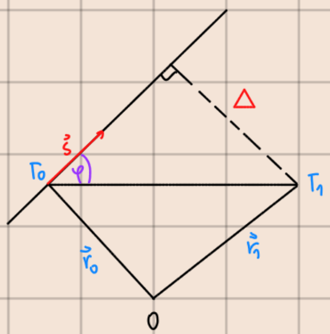
Za smerni vektor lahko vzamemo $\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

$\Rightarrow$ vektorska enačba premice je $\vec{r} = \vec{r}_A + \lambda(\vec{r}_B - \vec{r}_A)$

$$= (1-\lambda)\vec{r}_A + \lambda\vec{r}_B$$

RAZDALJA DO PREMICE:

Imejmo premico p s smernim vektorjem $\vec{s}$ in točko $T_0 \in p$ s krajevnim vektorjem $\vec{r}_0$. Naj bo T_1 poljubna točka s krajevnim vektorjem $\vec{r}_1$. Zanima nas razdalja od T_1 do p.



$\Delta = \|\overrightarrow{T_0T_1}\| \cdot \sin\varphi = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_0\| \cdot \sin\varphi$

Vemo, da je $\|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{s}\| = \|\vec{r}_1 - \vec{r}_0\| \cdot \underbrace{\|\vec{s}\|}_{\neq 0} \cdot \sin\varphi$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{\|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0) \times \vec{s}\|}{\|\vec{s}\|}}$$

Primer: Izračunaj razdaljo med točko $A(1,1,1)$ in premico z enačbo $\frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = z+1$.

$\vec{s} = (2,-2,1)$

$\vec{r}_0 = (0,-1,-1)$

$\vec{r}_1 = (1,1,1)$

$$\Delta = \frac{\|(1,2,2) \times (2,-2,1)\|}{\|(2,-2,1)\|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{\|(6,3,-6)\|}{3} = \frac{\sqrt{36+9+36}}{3} = 3$$

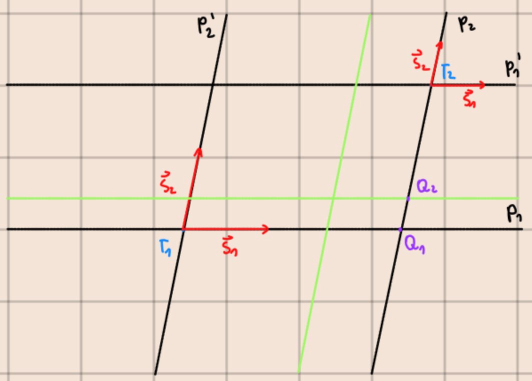
Razdalja med premicama, ki se sekata, je 0.

Razdalja med vzporednima premicama je enaka razdalji med poljubno točko na prvi premici in drugo premico.

Razdalja med mimobežnima premicama:

Imejmo premico p_1 z enačbo $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{s}_1$ in premico p_2 z enačbo $\vec{r} = \vec{r}_2 + \lambda \vec{s}_2$. Predpostavimo, da premici nista vzporedni, torej da $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$. Zanima nas razdalja med p_1 in p_2. Označimo jo z Δ.

Po definiciji je Δ najkrajša razdalja med točko na p_1 in točko na p_2. Naj bo $T_1 \in p_1$ točka s krajevnim vektorjem $\vec{r}_1$ in $T_2 \in p_2$ točka s krajevnim vektorjem $\vec{r}_2$.



Naj bo p_2' premica skozi T_1 vzporedna p_2 in p_1' premica skozi T_2 vzporedna p_1. Premici p_1 in p_2' določata ravnino Π_1, premici p_2 in p_1' pa določata ravnino Π_2. Ravnini Π_1 in Π_2 sta vzporedni, saj na obeh ležita vektorja $\vec{s}_1$ in $\vec{s}_2$. $p_1 \in \Pi_1$, $p_2 \in \Pi_2 \Rightarrow d(\Pi_1, \Pi_2) \le d(p_1, p_2) = \Delta$.

Q_1 naj bo presečišče p_1 in pravokotne projekcije p_2 na Π_1. Q_2 pa naj bo presečišče p_2 in pravokotne projekcije p_1 na Π_2. Po konstrukciji je $|Q_1Q_2| = d(\Pi_1, \Pi_2)$. Po definiciji razdalje pa je $|\underset{p_1}{Q_1}\,\underset{p_2}{Q_2}| \ge \underbrace{d(p_1, p_2)}_{\Delta}$.

Dobili smo $\Delta \le |Q_1Q_2| = d(\Pi_1, \Pi_2) \le \Delta$.

Povsod morajo veljati enakosti, zato je $\Delta = d(\Pi_1, \Pi_2)$.

$$\underbrace{d(\Pi_1, \Pi_2)}_{\Delta} = d(\underset{\in \Pi_1}{T_1}, \Pi_2) = \frac{|(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Formula za razdaljo od točke do ravnine

Za $\vec{n}$ lahko vzamemo $\vec{s}_1 \times \vec{s}_2$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{|(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \vec{r}_2 - \vec{r}_1)|}{\|\vec{s}_1 \times \vec{s}_2\|}}$$

$\Delta = 0$, kadar se premici sekata.

PRIMER: Izračunaj razdaljo med premicama $x = 1,\ y - 1 = -z$ in $\frac{1-x}{4} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+1}{4}$.

$\vec{s}_1 = (0, 1, -1)$

$\vec{r}_1 = (1, 1, 0)$

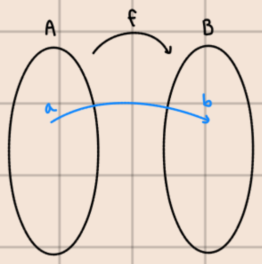
$\vec{s}_2 = (-4, 3, 4)$

$\vec{r}_2 = (1, -1, -1)$

$$\vec{s}_1 \times \vec{s}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = (7, 4, 4)$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{|(7,4,4) \cdot (0,-2,-1)|}{\sqrt{49 + 16 + 16}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

II. OSNOVNE ALGEBRAIČNE STRUKTURE



$f: A \longrightarrow B$

$Z_f = \{ b ; \exists a \in A : b = f(a) \}$

Injektivnost: $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$

inverz

Če je f bijektivna, definiramo $f^{-1} : B \longrightarrow A$ s predpisom $f^{-1}(b) =$ tisti $a \in A$, za katerega je $f(a) = b$.

$f: A \longrightarrow B$, $g: B \longrightarrow C$

$g \circ f : A \longrightarrow C$

$(g \circ f)(a) = g(f(a))$

$f: A \longrightarrow B$, $f^{-1}: B \longrightarrow A$

$f \circ f^{-1} = id_B$, $f^{-1} \circ f = id_A$

$f \circ id = f$

$id \circ f = f$

OPERACIJE

Operacija na množici A je preslikava $A \times A \longrightarrow A$

$(x,y) \longmapsto x \circ y$

Kompozitum, kadar bomo želeli dokazati za vse operacije

Elementu $x \circ y \in A$ rečemo kompozitum.

PRIMERI: $\mathbb{N}, \circ$ je lahko seštevanje ali množenje. Odštevanje ni operacija na $\mathbb{N}$, saj razlika dveh naravnih števil v splošnem ni naravno število.

2.) $\mathbb{Z}, \circ$ je seštevanje ali odštevanje ali množenje

3.) $\mathbb{R}^3, \circ$ je seštevanje ali vektorski produkt. Skalarni produkt ni operacija na $\mathbb{R}^3$, ker skalarni produkt dveh vektorjev ni vektor, ampak število.

4.) Naj bo A neprazna množica in $\mathcal{F}$ množica vseh preslikav $A \longrightarrow A$. Kompozitum preslikav je operacija na $\mathcal{F}$.

Natančneje, zgoraj smo definirali dvočleno (linearno) operacijo na A.

n-členа operacija na A je preslikava $\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n\text{-krat}} \longrightarrow A$.

Zgoraj smo definirali dvočleno notranjo operacijo na A.

Naj bo A neka množica in R še ena množica.

Dvočlena zunanja operacija na A je preslikava $R \times A \longrightarrow A$.

Tipični primer zunanje operacije je množenje vektorja s skalarjem $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$(\lambda, \vec{x}) \longmapsto \lambda \vec{x}$

Pravimo, da ima množica A algebraično strukturo, če je na njej definirana vsaj ena notranja ali zunanja operacija.

Če bomo govorili o operacijah, bomo vedno imeli v mislih dvočleno notranjo operacijo. Za zunanje operacije bomo poudarili, da so zunanje

LASTNOSTI, KI JIH OPERACIJE LAHKO IMAJO:

Operacija je asociativna, kadar je $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ za vse $a, b, c \in A$.

Pri asociativni operaciji je vseeno, kako postavimo oklepaje.

TRDITEV: Če je operacija $\circ$ asociativna, potem je izraz $a_1 \circ a_2 \circ \dots \circ a_n$ neodvisen od tega, kako postavimo oklepaje.

Dokaz z indukcijo na n:

$\forall$

PRIMERI:

1.) Seštevanje in množenje na $\mathbb{R}$ sta asociativna in komutativna.

2.) Odštevanje ni niti asociativno niti komutativno.

3.) Kompozitum preslikav je asociativen. V splošnem ni komutativen.

Primer:

$f, g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\qquad (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = (x+1)^2$

$f(x) = x^2$ $\qquad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 1$

$g(x) = x+1$

Element $e \in A$ je enota ali nevtralni element za operacijo $\circ$, kadar je $a \circ e = e \circ a = a$ za vsak $a \in A$. Če je $e \circ a = a$ za vsak $a \in A$, je e leva enota. Če je $a \circ e = a$ za vsak $a \in A$, je e desna enota.

PRIMERI:

1.) $(\mathbb{R}, +)$: enota je 0

2.) $(\mathbb{R}, \cdot)$: enota je 1

3.) $(\mathbb{R}^3, \times)$: enota ne obstaja

4.) $\mathcal{F} = \{f: A \longrightarrow A\}$: enota je id.

TRDITEV: Naj bo e leva enota in f desna enota za operacijo $\circ$. Potem je $e = f$.

enota je sama sebi inverz

DOKAZ: $e \underset{\text{f je desna enota}}{=} e \circ f \underset{\text{e je leva enota}}{=} f$ $\square$

POSLEDICA: Če obstaja enota za operacijo $\circ$, je ta enota ena sama. Lahko pa se zgodi, da ima operacija več levih enot, a potem nima desne enote.

Naj bo $\circ$ operacija na množici A in naj za to operacijo obstaja enota e.

Element $a' \in A$ je levi inverz elementa $a \in A$, če je $a' \circ a = e$.

Element $a'' \in A$ je desni inverz elementa $a \in A$, če je $a \circ a'' = e$.

Element, ki je hkrati levi in desni inverz elementa a, se imenuje inverz elementa a. Oznaka: a^{-1}.

Nima nujno vsak element inverza. Če ima a inverz, pravimo, da je obrnljiv.

Na primer: 0 nima inverza v $(\mathbb{R}, \cdot)$.

TRDITEV: Naj bo $\circ$ asociativna operacija na A. Če je a' levi inverz elementa a in a'' desni inverz elementa a, je $a' = a''$.

DOKAZ: $(a' \circ a) \circ a'' \underset{\text{a je levi inverz}}{=} e \circ a'' = a''$

asociativnost $\parallel$

$a' \circ (a \circ a'') \underset{\text{a'' je desni inverz}}{=} a' \circ e = a'$

POSLEDICA: Če je $\circ$ asociativna operacija na A in je $a \in A$ obrnljiv, potem ima a samo en inverz.

GRUPE

DEFINICIJE:

1.) Neprazna množica A z dano dvočleno operacijo se imenuje grupoid. Grupoid je torej par $(A, \circ)$.

2.) Polgrupa je neprazna množica A z asociativno operacijo $\circ$.

3.) Monoid je polgrupa z enoto. To je torej neprazna množica z asociativno operacijo, ki ima enoto.

PRIMERI:

1.)

2.)

3.)

4.)

TRDITEV: Naj bo $(A, \circ)$ monoid z enoto e. Če sta $a, b \in A$ obrnljiva, potem je tudi $a \circ b$ obrnljiv in velja $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.

DOKAZ:

$(a \circ b) \circ (b^{-1} \circ a^{-1}) = a \circ (b \circ b^{-1}) \circ a^{-1} = a \circ e \circ a^{-1} = a \circ a^{-1} = e \Rightarrow b^{-1} \circ a^{-1}$ je desni inverz od $a \circ b$.

$(b^{-1} \circ a^{-1}) \circ (a \circ b) = b^{-1} \circ (a^{-1} \circ a) \circ b = b^{-1} \circ e \circ b = b^{-1} \circ b = e \Rightarrow b^{-1} \circ a^{-1}$ je tudi levi inverz. $\square$

5.) Grupa je monoid, v katerem je vsak element obrnljiv.

PRIMERI:

1.) $(\mathbb{N},+)$ ni grupa, $(\mathbb{N}_0,+)$ tudi ne: ni inverza

2.) $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$ so grupe: inverz za $+$ od a je $-a$.

3.) $(\mathbb{Q},\cdot)$ ni grupa, ker ne obstaja 0^{-1}.

4.) $(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$, $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$, $(\{1,-1,i,-i\},\cdot)$ so grupe.

5.) $(\mathbb{Z}\setminus\{0\},\cdot)$ ni grupa, ker npr. $\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$.

6.) Naj bo $A\neq\emptyset$ in $\mathcal{F}=\{f: A\longrightarrow A\}$. To ni grupa, če ima A vsaj dva elementa.

DOKAZ: Naj bosta $a,b\in A$, $a\neq b$.

Definiramo preslikavo $f: A\longrightarrow A$, $x\longmapsto a$ (konstantna preslikava)

Trdimo, da f nima inverza.

Recimo, da je g inverz od f. To pomeni, da je $g\circ f=f\circ g=id$.

$\Rightarrow g(f(x))=f(g(x))=x$ za vsak $x\in A$.

$a=x$ za vsak $x\in A$

To ni res, ker $a\neq b$.

$\Rightarrow f$ nima inverza.

7.) Naj bo A poljubna neprazna množica in $S(A)=\{f: A\longrightarrow A;\ f \text{ je bijektivna}\}$. $(S(A),\circ)$ je grupa.

DOKAZ: Vemo že, da je kompozitum preslikav asociativen.

29.10.2025

Še en primer grupe: grupa ostankov pri deljenju z m. Naj bo $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ in označimo $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$. To je množica ostankov pri deljenju z m. Na $\mathbb{Z}_m$ definiramo operacijo + s predpisom $a \oplus b :=$ ostanek števila $a+b$ pri deljenju z m.

operacija v $\mathbb{Z}_m$ — sestevanje števil

$$= \begin{cases} a+b ; & a+b < m \\ a+b-m ; & a+b \geq m \end{cases}$$

Primer: V $\mathbb{Z}_6$ je $3+4 = 1 \pmod 6$

TRDITEV: $(\mathbb{Z}_m, +)$ je grupa.

DOKAZ: Asociativnost: Naj bodo $a, b, c \in \mathbb{Z}_m$.

v $\mathbb{Z}$ — odveč pogoj

$$\underbrace{(a \oplus b) \oplus c}_{\text{v } \mathbb{Z}_m} = \begin{cases} (a \oplus b) + c ; & (a \oplus b) + c < m \\ (a \oplus b) + c - m ; & (a \oplus b) + c \geq m \end{cases} = \begin{cases} (a+b)+c ; & a+b < m \text{ in } a+b+c < m \\ (a+b-m)+c ; & a+b \geq m \text{ in } a+b-m+c < m \\ (a+b)+c-m ; & a+b < m \text{ in } a+b+c \geq m \\ (a+b-m)+c-m ; & a+b \geq m \text{ in } a+b-m+c \geq m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a+b+c ; & a+b+c < m \\ a+b+c-m ; & a+b \geq m \text{ in } a+b+c < 2m \\ a+b+c-m ; & a+b < m \text{ in } a+b+c \geq m \\ a+b+c-2m ; & a+b \geq m \text{ in } a+b+c \geq 2m \end{cases}$$

$2m > a+b+c \geq m$

$2m > a+b+c \geq m$

odveč pogoj

v $\mathbb{Z}_m$ velja asociativnost

$$= \begin{cases} a+b+c ; & a+b+c < m \\ a+b+c-m ; & a+b \geq m \text{ in } m \leq a+b+c < 2m \\ a+b+c-m ; & a+b < m \text{ in } m \leq a+b+c < 2m \\ a+b+c-2m ; & a+b+c \geq 2m \end{cases}$$

$$= \begin{cases} a+b+c ; & a+b+c < m \\ a+b+c-m ; & m \leq a+b+c < 2m \\ a+b+c-2m ; & a+b+c \geq 2m \end{cases}$$

$a \oplus (b \oplus c)$ bo tudi enako $\begin{cases} a+b+c ; & a+b+c < m \\ a+b+c-m ; & m \leq a+b+c < 2m \\ a+b+c-2m ; & a+b+c \geq 2m \end{cases}$

Ker je ta izraz simetričen v a in c. (natančno poračunati doma)

$\Rightarrow a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$.

Enota je 0: $0 \oplus a = 0 + a = a$ in $a \oplus 0 = a + 0 = a$ za vsak $a \in \mathbb{Z}_m$.

Inverzi: naj bo a poljuben. Če je $a = 0$, je njegov inverz enak 0. Če pa $a \neq 0$, je $a \oplus (m-a) = \underbrace{a + m - a}_{= m \geq m} - m = 0$ in $(m-a) \oplus a = 0$.

$\Rightarrow$ $m-a$ je inverz elementa a. $\square$

$\oplus$ ne bomo več pisali ampak bomo operacijo v $\mathbb{Z}_m$ označevali s $+$.

V grupi namesto $a \circ b$ pišemo ab ali $a \cdot b$ in operaciji rečemo produkt. Enoto običajno označujemo z 1. Zapisu operacije s $\cdot$, enoti z 1 (in inverza z a^{-1}) pravimo multiplikativni zapis operacije.

Definiramo potence:

- Za $m > 0$ definiramo $a^m = \overbrace{a \cdot a \cdots a}^{m\text{-krat}}$.
- Za $m = 0$ definiramo $a^0 = 1$: enota.
- Za $m < 0$ definiramo $a^m = (a^{-1})^{-m}$.

TRDITEV: V grupi velja $\overset{(a^{-1})^m}{\overset{\shortparallel}{a^{-m}}} = (a^m)^{-1}$ za vsak $m \in \mathbb{N}$ (in posledično za vse $m \in \mathbb{Z}$) in vse $a \in G$.

DOKAZ: Če je $m \in \mathbb{N}$, je $a^{-m} = (a^{-1})^m = a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1}$.

$a^m \cdot a^{-m} = a \cdot a \cdots \cancel{a} \cdot \cancel{a^{-1}} \cdot \cancel{a^{-1}} \cdots a^{-1} = 1$ in enako $a^{-m} \cdot a^m = 1$.

$\Rightarrow a^{-m}$ je inverz od a^m, torej $a^{-m} = (a^m)^{-1}$.

Če je $m = 0$, je $a^{-m} = 1$ in $(a^m)^{-1} = 1$.

Če je $m < 0$, smo zgoraj dokazali, da je $a^m = (a^{-m})^{-1} \;/^{-1}$

$$(a^m)^{-1} = a^{-m}$$

$\square$

TRDITEV: V grupi velja $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ in $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ za vse $a \in G$ in vse $m, n \in \mathbb{Z}$.

DOKAZ: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Če je $n = 0$, je to očitno.

Če je $n > 0$, to dokažemo z indukcijo na n. Baza indukcije:

$n = 1$:

Če je $m = 0$.

Če je $m > 0$, je $a^m \cdot a = \overbrace{a \cdots a}^{m\text{-krat}} \cdot a = a^{m+1}$.

Če je $m < 0$, je $a^m \cdot a = (a^{-1})^{-m} \cdot a = \underbrace{a^{-1} \cdot a^{-1} \cdots a^{-1}}_{(-m)\text{-krat}} \cdot a$

$= \underbrace{a^{-1} \cdots a^{-1}}_{(-m-1)\text{-krat}} = (a^{-1})^{-m-1} = a^{m+1}$.

Indukcijski korak:

$n \longrightarrow n+1$:

$a^m \cdot a^{n+1} = a^m \cdot a^n \cdot a \overset{\text{I.P.}}{=} a^{m+n} \cdot a \overset{\text{baza indukcije}}{=} a^{m+n+1}$.

Če je $n < 0$, pa je $a^m \cdot a^n = (a^{-1})^{-m} \cdot (a^{-1})^{-n} = (a^{-1})^{-m-n} =$

$= a^{m+n}$ prejšnja trditev

$-n > 0$, zato lahko uporabimo, kar smo dokazali za pozitivne n-je.

$\underline{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$

Če je $n=0$, je to očitno.

Če je $n>0$, po prvi formuli velja $(a^m)^n = \overbrace{a^m \cdot a^m \cdots a^m}^{n\text{-krat}} =$

$$= a^{m+m+\dots+m} = a^{m \cdot n}.$$

Če je $n<0$, pa upoštevamo prejšnjo trditev:

$$(a^m)^n = ((a^m)^{-1})^{-n} = (a^{-m})^{-n} \underset{-n>0}{=} a^{(-m)(-n)} = a^{m \cdot n}. \qquad \square$$

Grupa G je komutativna ali Abelova, če velja $ab=ba$ za vsaka $a,b \in G$.

Primeri: $(\mathbb{Z},+), (\mathbb{Q},+), (\mathbb{R},+), (\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot), (\mathbb{Z}_m,+)$.

V komutativnih grupah običajno uporabljamo aditivni zapis:

namesto $\cdot$ pišemo $+$, namesto 1 pišemo 0, namesto a^{-1} pišemo $-a$, namesto a^n pišemo na.

Posledica: V Abelovi grupi $(G,+)$ velja $ma+na=(m+n)a$, $m(na)=(mn)a$ in $n(a+b)=na+nb$ za vse $a,b \in G$ in vse $m,n \in \mathbb{Z}$.

Dokaz: Prvi dve enakosti smo dokazali že v prejšnji trditvi, le da smo ju zdaj zapisali v aditivnem zapisu.

$\underline{n(a+b) = na + nb}$

Če je $n=0$, očitno velja.

Če je $n>0$, je $n(a+b) = (a+b)+(a+b)+\dots+(a+b) =$

$\underset{\text{komutativnost}}{=} a+a+\dots+a+b+b+\dots+b = na+nb.$

Če je $n<0$, pa je $n(a+b) = -n(-a-b) =$

$= -n(-a)+(-n)(-b) = na+nb.$ $\square$

Kadar je jasno, o kateri operaciji v grupi govorimo, pišemo samo G namesto $(G,\circ)$ ali $(G,\cdot)$ ali $(G,+)$.

Končne grupe podamo s tabelo množenja :

Naj bo $G=\{x_1=1, x_2, \dots, x_m\}$ grupa za operacijo $\cdot$.

$\cdot$	$x_1=1$	x_2	x_3	$\dots$	x_m
$x_1=1$	1	x_2	x_3	$\dots$	x_m
x_2	x_2	x_2^2	x_2x_3	$\dots$	x_2x_m
x_3	x_3	x_3x_2	x_3^2	$\dots$	x_3x_m
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
x_m	x_m	x_mx_2	x_mx_3	$\dots$	x_m^2

V prvi vrstici in stolpcu naštejemo elemente grupe.

V i-to vrstico in j-ti stolpec tabele zapišemo x_ix_j, kjer je x_i i-ti element 1. stolpca in x_j j-ti element 1. vrstice.

PRIMER: $(\mathbb{Z}_3,+)$

$+$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Grupa G je komutativna natanko takrat, ko je njena tabela množenja simetrična glede na glavno diagonalo.

Če sta v i-ti vrstici dva elementa enaka, je $x_i x_j = x_i x_k$ za neka različna j in k. Po trditvi lahko krajšamo in dobimo $x_j = x_k$, kar pa ni res.

V vsaki vrstici se vsak element grupe torej pojavi natanko enkrat. Isto velja za stolpce.

Primeri grupe majhnih moči:

$m=1$: Edina grupa moči 1 je trivialna grupa: $G=\{1\}$.

$m=2$:

$\cdot$	1	a
1	1	a
a	a	1

$G=\{1,a\}$

To je grupa $(\mathbb{Z}_2,+)$:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$+ \rightsquigarrow \cdot$
$0 \rightsquigarrow 1$
$1 \rightsquigarrow a$

Edina grupa z 2 elementoma je $(\mathbb{Z}_2,+)$.

$m=3$:

$\cdot$	1	a	b
1	1	a	b
a	a	b	1
b	b	1	a

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$G\{1,a,b\}$

Edina grupa s 3 elementi je $\mathbb{Z}_3$.

$m=4$:

$\cdot$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	b	c	1
b	b	c	1	a
c	c	1	a	b

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

$G=\{1,a,b,c\}$

$(\mathbb{Z}_4,+)$

1. Primer: obstaja $x \in G$, da je $x^2 \neq 1$. Elemente lahko preimenujemo, zato lahko predpostavimo, da je $x = a$ in $a^2 = b$. Dobimo grupo $(\mathbb{Z}_4, +)$.

2. Primer: za vsak $x \in G$ je $x^2 = 1$.

$\cdot$	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

+	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(1,0)	(1,1)
(0,1)	(0,1)	(0,0)	(1,1)	(1,0)
(1,0)	(1,0)	(1,1)	(0,0)	(0,1)
(1,1)	(1,1)	(1,0)	(0,1)	(0,0)

$(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ seštevanje po komponentah modulo 2.

Edini grupi moči 4 sta $(\mathbb{Z}_4, +)$ in $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$.

$(1,0) + (1,0) = (1+1$ po modulu $2, 0+0$ po modulu $2) = (0,0)$.

Če sta $(G, \circ)$, $(H, *)$ dve grupi, je tudi $G \times H$ grupa za operacijo $(a,b) \cdot (c,d) = (a \circ c, b * d)$. D.N. dokaži

$n=5$:

$\cdot$	1	a	b	c	d
1	1	a	b	c	d
a	a	1	c	d	b
b	b	d	1	a	c
c	c	b	d	1	a
d	d	c	a	b	1

$G=\{1,a,b,c,d\}$

Recimo, da je $x^2=1$ za vsak $x\in G$. $ab\neq 1,a,b$.

Preimenujemo elemente, da predpostavimo $ab=c$.

Preveriti moramo asociativnosti:

$$(ab)d = cd = a$$
$$\neq \Rightarrow \text{To ni grupa}$$
$$a(bd) = ac = d$$

$\Rightarrow$ Obstaja $x\in G$, da je $x^2\neq 1$. Predpostavimo lahko, da je $a^2=b$.

$\cdot$	1	a	b	c	d
1	1	a	b	c	d
a	a	b	1	d	c
b	b	1		a	?
c	c	d			
d	d	c			

Recimo, da je $ab=1$.

$\Rightarrow$ b je desni inverz od a. Ker je G grupa ima a inverz.

$\Rightarrow$ Desni inverz b je enak a^{-1} zaradi enoličnosti inverza.

$\Rightarrow b\cdot a = 1$

$\Rightarrow ab\neq 1$. c in d lahko preimenujemo, zato lahko predpostavimo, da je $ab=c$.

$\cdot$	1	a	b	c	d
1	1	a	b	c	d
a	a	b	c	d	1
b	b	c	d	1	a
c	c	d	1	a	b
d	d	1	a	b	c

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

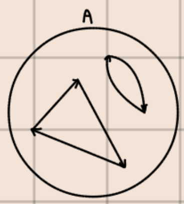
$(\mathbb{Z}_5,+)$

Edina grupa moči 5 je $(\mathbb{Z}_5,+)$.

Ugotovili smo tudi, da so vse grupe moči ≤ 5 komutativne.

GRUPE PERMUTACIJ

Spomnimo se, da je množica $S(A)$ vseh bijektivnih preslikav $A \longrightarrow A$ grupa za kompozitum. Naj bo A končna množica. Permutacija na množici A je bijektivna preslikava $A \longrightarrow A$. Struktura permutacij se ne spremeni, če elemente množice A preimenujemo.



Pomembna je le moč množice A. Zato bomo za A vzeli kar $\{1, \dots, n\}$. Grupo permutacij $S(\{1, \dots, n\})$ množice $\{1, \dots, n\}$ označimo s S_n in jo imenujemo simetrična grupa reda n.

Operacija je kompozitum: če sta $\pi_1, \pi_2 \in S_n$, je $\pi_1 \pi_2 := \pi_1 \circ \pi_2$ permutacija definirana s predpisom $(\pi_1 \pi_2)(x) = \pi_1(\pi_2(x))$ za vsak $x \in \{1, \dots, n\}$.

Grupa S_n ima $n!$ elementov. Če je $n \geq 3$, ni komutativna. π_1, π_2 sta elementa S_n, torej permutaciji množice $\{1, \dots, n\}$, torej bijektivni preslikavi $\{1, \dots, n\} \longrightarrow \{1, \dots, n\}$

Permutacijo π pogosto podamo v obliki $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \pi(4) & \dots & \pi(n) \end{pmatrix}$

Primer: $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ je permutacija

$\pi(1) = 1$
$\pi(2) = 4$
$\pi(3) = 2$
$\pi(4) = 3$

Primer: Grupa $(S_3, \circ)$ ima sledeće elemente:

$$id = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$a \circ b = ?$

$(a \circ b)(1) = a(b(1)) = a(2) = 3$

$\Rightarrow a \circ b = d$

$(a \circ b)(2) = a(b(2)) = a(1) = 1$

$(a \circ b)(3) = a(b(3)) = a(3) = 2$

$c \circ a : 1 \longmapsto 2$

$2 \longmapsto 1$

$3 \longmapsto 3$

$c \circ a = b$

	id	a	b	c	d	f
id	id	a	b	c	d	f
a	a	id	d	f	b	c
b	b	c	id	a	f	d
c	c	b	f	d	id	a
d	d	f	a	id	c	b
f	f	d	c	b	a	id