

## Misura della diffusione Compton in un esperimento a scopo didattico.

A. Alessandrello, G. Gervasio, L. Zanotti, D. Belluzzo (\*) e S. Donati Guerrieri (\*)

Dipartimento di Fisica dell'Università - Milano

INFN, Sezione di Milano

### 1. Introduzione.

Si presenta in questo lavoro un esperimento a scopo didattico sulla diffusione Compton di fotoni di bassa energia (511 keV) realizzato per un Laboratorio di Fisica I, presso il Dipartimento di Fisica dell'Università di Milano.

L'interazione tra radiazione e materia è certamente uno degli argomenti di fisica moderna più interessanti per le applicazioni cui si presta nei corsi di laboratorio del secondo biennio.

Per tale ragione si è pensato di realizzare in laboratorio un'esperienza su quello che è forse l'esempio più diretto del comportamento corpuscolare della radiazione elettromagnetica nell'interazione con la materia, e cioè l'effetto Compton, che, come è noto, consiste nella diffusione di un fotone di energia  $E$  da parte di un elettrone; l'energia del fotone dopo la diffusione è  $E'$  <  $E$  e dipende dall'angolo  $\theta$  di diffusione. La quantità di energia  $E - E'$  è ceduta all'elettrone, che rincula in una direzione che consente di conservare la quantità di moto; il bilancio energia-quantità di moto si calcola con le equazioni della cinematica relativistica (si veda l'eq. (1)).

(\*) Laboratorio di Fisica I, Dipartimento di Fisica dell'Università, Milano.

Una prima prova dell'esistenza di un processo di degradazione dell'energia dei fotoni nella loro interazione con la materia viene dalla spettroscopia  $\gamma$ , in cui l'esame degli spettri ottenuti con deboli sorgenti radioattive, o addirittura con una semplice misura dell'attività ambientale, consente di verificare la presenza di una componente di fondo continuo, oltre ai picchi dovuti alla totale deposizione dell'energia dei fotoni nel rivelatore. Da una simile osservazione è tuttavia arduo estrarre informazioni quantitative sulla probabilità d'interazione (sezione d'urto) e sulla cinematica del processo di diffusione.

Quando si passa a progettare un esperimento di rivelazione diretta dell'effetto Compton, semplici calcoli mostrano subito che, a meno di ricorrere a sorgenti radioattive molto intense, l'effetto di diffusione su un bersaglio sufficientemente piccolo e sottile da consentire un'analisi cinematica del processo è cancellato dal fondo dovuto alla radioattività ambientale; in appendice A vengono svolte alcune considerazioni in merito.

In questo lavoro si propone un metodo d'indagine che consente di operare con sorgenti deboli ( $\approx 1 \mu\text{Ci}$ ) pur ottenendo tutte le informazioni desiderate; in particolare si mostra come sia possibile misurare simultaneamente la massa del

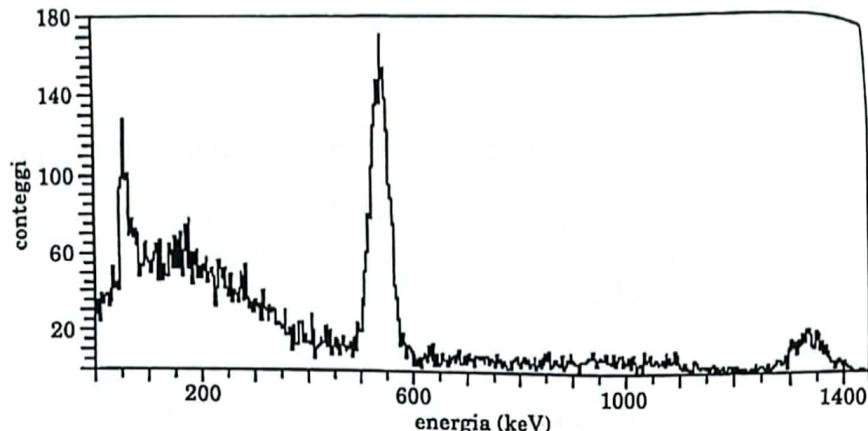


Fig. 1 - Spettro di calibrazione di NaI (2 pollici  $\times$  2 pollici) con sorgente di  $^{22}\text{Na}$ .

bersaglio elementare (elettrone) e il raggio classico dell'elettrone attraverso la misura dell'energia del fotone diffuso e della sezione d'urto (formula di Klein-Nishina [1] del 1929) in funzione dell'angolo di diffusione:

$$(1) \quad \frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos\theta),$$

$$(2) \quad d\sigma = \frac{r_c^2}{2} \left( \frac{E'}{E} \right)^2 \left( \frac{E}{E'} + \frac{E'}{E} - \sin^2\theta \right) d\Omega,$$

ove  $m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$  rappresenta la massa dell'elettrone in unità di energia, e  $r_c = e^2/m_e c^2 = 2.8179 \cdot 10^{-13} \text{ cm}$  è il cosiddetto «raggio classico dell'elettrone» (1).

Dalle formule suddette risulta quindi che indirettamente si misura anche la carica dell'elettrone.

## 2. Il metodo.

L'esperimento è stato effettuato con due rivelatori NaI, cilindrici, rispettivamente

(1) È la distanza cui corrisponde un'energia, dovuta all'interazione elettrostatica fra due cariche di valore  $e$ , pari alla massa a riposo dell'elettrone  $m_e$ .

da 2.54 cm (diametro)  $\times$  2.54 cm (spessore) e da 5.08 cm (diametro)  $\times$  5.08 cm (spessore), la cui risoluzione in energia FWHM (full width at half maximum) è 11% a 511 keV.

La sorgente è  $^{22}\text{Na}$  ( $0.42 \mu\text{Ci}$ ) che è un emettitore  $\beta^+$  (90.5%) con tempo di dimezzamento  $\tau_{1/2} = 2.6 \text{ y}$ . Al decadimento è anche associata l'emissione di un fotone con  $E = 1274.6 \text{ keV}$ , che è utilizzato per la calibrazione in energia della catena elettronica di lettura dei segnali, insieme con i fotoni ( $E = 511 \text{ keV}$ ) provenienti dall'annichilazione del positone nel materiale che incapsula la sorgente (la fig. 1 mostra uno spettro di calibrazione ottenuto col rilevatore più grande). Poiché l'annichilazione del positone avviene a riposo, essa dà luogo a due fotoni con  $E = 511 \text{ keV}$  che godono della proprietà di essere emessi lungo la stessa direzione ma in verso opposto, per conservare la quantità di moto. Questa proprietà viene sfruttata per progettare l'esperimento: infatti l'identificazione di un fotone con  $E = 511 \text{ keV}$  da parte di uno dei rivelatori (lo chiameremo A) ci garantisce che l'altro fotone è stato emesso in direzione opposta, e quindi entro un cono ben preci-

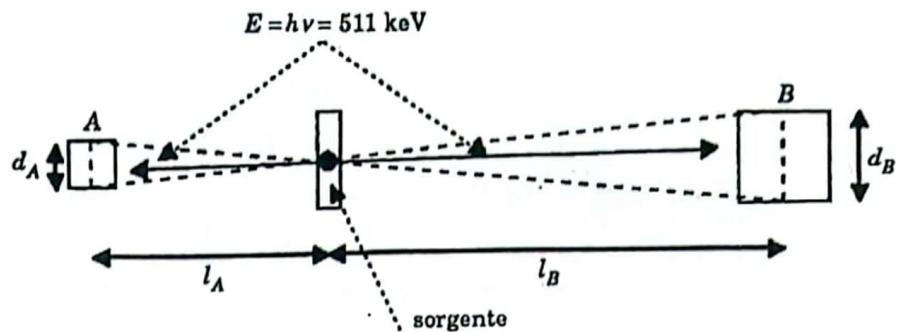


Fig. 2.

so, opposto al vertice di quello definito dalla sorgente (vertice) e dalla sezione mediana del rivelatore *A* (base).

Se quindi poniamo il secondo rivelatore (identificato con *B*) in modo tale che la sua sezione mediana intercetti il cono di cui sopra, siamo certi che il secondo fotone attraverserà il secondo rivelatore, e possiamo coglierne l'eventuale interazione in quest'ultimo attraverso una misura di coincidenza (si veda appendice B) col segnale rilasciato al fotopicco nel primo (fig. 2).

Questa tecnica consente di misurare:

- a) le efficienze intrinseche e geometriche dei rivelatori,
- b) energia e distribuzione angolare dei fotoni diffusi da un bersaglio interposto fra la sorgente ed il rivelatore *B* (se *A* è il rivelatore con cui identifichiamo una annichilazione).

a) Supponiamo di effettuare tre misure:

misura dei fotoni con  $E = 511 \text{ KeV}$  al fotopicco nel rivelatore *A*,

misura dei fotoni con  $E = 511 \text{ keV}$  al fotopicco nel rivelatore *B*,

misura di coincidenza dei fotoni nel fotopicco di *A* con quelli nel fotopicco di *B*.

Il numero di eventi rivelati nei tre casi è descritto dalle seguenti formule:

$$(3) \begin{cases} n(A) = 2S\varepsilon(A, E)\Delta\Omega/4\pi, \\ n(B) = 2S\varepsilon(B, E)\Delta\Omega/4\pi, \\ n(B:A) = 2S\varepsilon(A, E)\varepsilon(B, E)\Delta\Omega/4\pi, \end{cases}$$

in cui  $S$  è l'attività della sorgente in Bq (1 becquerel = 1 disintegrazione al secondo = 27 pCi) ed è moltiplicata per due perché ad ogni disintegrazione corrispondono due fotoni di uguale energia,  $\varepsilon(A, E)$  e  $\varepsilon(B, E)$  sono le efficienze intrinseche dei due rivelatori e rappresentano la probabilità che un fotone di una data energia  $E$  che attraversa il rivelatore vi deponga tutta l'energia,  $\Delta\Omega/4\pi$  è la frazione di angolo solido sottesa dai rivelatori (uguale per entrambi per le considerazioni svolte in relazione alla fig. 2).

Si noti che nella terza delle (3) tale termine dovrebbe apparire al quadrato se le direzioni di emissione dei fotoni non fossero correlate. Quindi

$$\frac{n(B:A)}{n(A)} = \varepsilon(B, E),$$

$$\frac{n(B:A)}{n(B)} = \varepsilon(A, E),$$

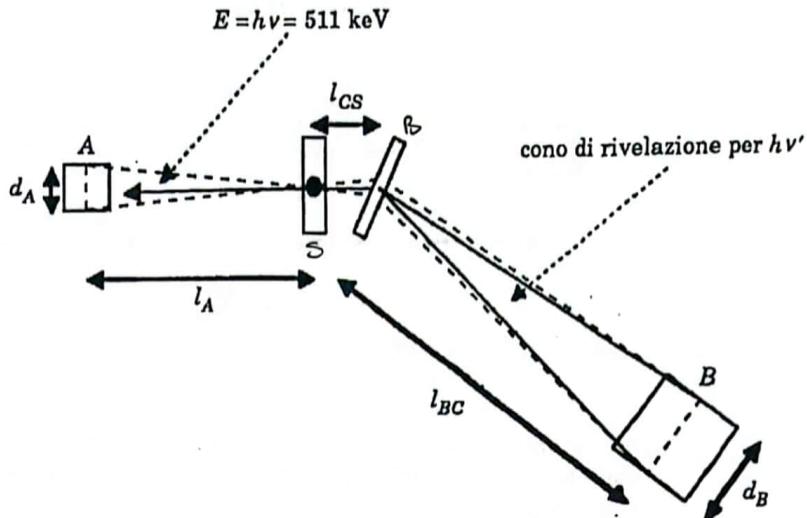


Fig. 3.

e, una volta note le efficienze (2), dalla terza delle (3)

$$(4) \quad \frac{\Delta\Omega}{4\pi} = \frac{n(B:A)}{2S\varepsilon(A, E)\varepsilon(B, E)}.$$

Prima di procedere a quest'ultima determinazione occorre però definire a quali distanze vanno posti i rivelatori rispetto alla sorgente; per fare ciò occorre prima di tutto considerare che nella misura dell'effetto Compton è importante che tutti i fotoni emessi antiparallelamente a quelli che intercettano il rivelatore *A* attraversino anche il bersaglio, e che il fascio sia quasi parallelo.

(2) La determinazione dell'efficienza con questo metodo deve essere effettuata avvicinando la sorgente al rivelatore di cui si vuole misurare l'efficienza, in modo che il cono di angolo solido corrispondente ai fotoni che hanno interagito nell'altro rivelatore investa solo la porzione centrale del rivelatore stesso. In questo modo si rende massima la probabilità di totale contenimento di un'eventuale interazione. Quando poi si passa alla geometria descritta nel testo per la misura dell'angolo solido utile per la sperimentazione successiva, si otterrà una misura di un *angolo solido efficace* dall'eq. (4) che includerà anche le eventuali perdite di efficienza.

Per non compromettere la qualità della misura occorre che  $\Delta\Omega/4\pi$ , che compare nella (4), non sia superiore al valore definito al successivo punto *b*; in caso contrario il picco dei fotoni diffusi risulterebbe troppo largo rispetto alla risoluzione del rivelatore *B* per consentire una misura precisa dell'energia del fotone diffuso.

Dobbiamo quindi definire prima di tutto, in base alla sezione del bersaglio, le distanze  $l_A$  e  $l_{CS}$  (si veda fig. 3), anche se il bersaglio non sarà collocato nella sua posizione durante le misure di efficienza e angolo solido. Si è scelta come bersaglio una lastra di Pb di sezione  $(2 \times 2) \text{ cm}^2$  (lo spessore sarà definito in seguito), per cui le distanze scelte in base al  $\Delta\Omega/4\pi$  massimo definito al punto *b*) sono  $l_A = 18 \text{ cm}$  e  $l_{CS} = 14 \text{ cm}$ . Poiché il rivelatore *B* deve intercettare tutti i fotoni emessi antiparallelamente a quelli che intercettano il rivelatore *A*, ne consegue che, per effettuare la misura di angolo solido (eq. (4)), occorre porre il secondo rivelatore (*B*) a  $l_B = 36 \text{ cm}$ .

SB  
C

b) Supponiamo ora di disporre i due rivelatori come in fig. 3, interponendo tra la sorgente e il rivelatore *B* la lastra di Pb che funge da bersaglio per i fotoni, in modo che il bersaglio sia al centro della circonferenza su cui ruota il rivelatore *B*. In questo caso i fotoni diffusi dal bersaglio e diretti sul rivelatore *B* mantengono la coerenza temporale con il fotone eventualmente interagente in *A*, e che ivi deposita tutta la sua energia (per cui è identificato). Quindi la tecnica della coincidenza consente d'isolare gli eventi dovuti a diffusione Compton da quelli di fondo.

Occorre ora definire a che distanza  $l_{BC}$  va posto il rivelatore *B* rispetto al bersaglio *C*. Le considerazioni qui svolte servono anche a definire le distanze tra rivelatore *A*, sorgente e bersaglio introdotte al punto *a*.

Due fattori concorrono alla scelta: l'esigenza di avere un alto tasso di conteggio, che porta ad avvicinare il rivelatore al bersaglio, e l'esigenza di misurare con precisione l'energia corrispondente ad un dato angolo  $\theta$  (si veda l'eq. (1)), che porta ad allontanarli. Se però si tiene conto che la risoluzione del rivelatore è limitata ( $\Delta E \geq 11\%$  per  $E \leq 511 \text{ keV}$ ), si vede subito che la distanza ottimale è quella per cui la dispersione in energia dovuta all'apertura finita del cono individuato dalla sezione del rivelatore rispetto ad un qualsivoglia punto del bersaglio è dello stesso ordine della risoluzione. Dalla (1) si ha

$$(5) \quad d\theta = \frac{1 + \epsilon(1 - \cos\theta)}{\epsilon \sin\theta} \frac{d\epsilon'}{\epsilon'}$$

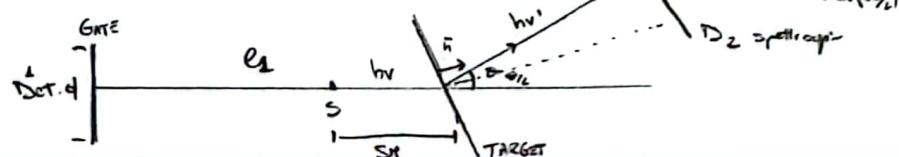
con  $\epsilon = E/m_e c^2$  e  $\epsilon' = E'/m_e c^2$ . Poiché nel nostro caso  $E = m_e c^2$ , la (5) si riduce a

$$d\theta = \frac{2 - \cos\theta}{\sin\theta} \frac{d\epsilon'}{\epsilon'^2}$$

$$\therefore E' = \frac{E^0}{1 + \frac{E^0}{mc^2}(1 - \cos\theta)} \Rightarrow \epsilon' = \frac{E^0}{2 - \cos\theta} \Rightarrow \frac{d\epsilon'}{\epsilon} = \frac{\sin\theta}{(2 - \cos\theta)^2} d\theta$$

La dispersione  $d\epsilon' < F_N H^2$  non deve essere

$$\Rightarrow \frac{d\epsilon'}{\epsilon} < R_E \Rightarrow \frac{\sin\theta}{(2 - \cos\theta)^2} d\theta < R_E \Rightarrow \text{considerando il minimo} \Rightarrow d\theta < R_E \min \frac{(2 - \cos\theta)^2}{\sin\theta} = 8\theta$$



che ha un minimo per  $\theta = \pi/3$ , dove vale  $d\theta = \sqrt{3} d\epsilon'/\epsilon'$ . Poiché  $d\epsilon'/\epsilon' \geq 11\%$ , possiamo prendere per  $d\theta$  il valore minimo, ossia  $d\theta = 0.191 (\approx 11^\circ)$ , cui corrisponde una distanza tra bersaglio (*C*) e rivelatore grande (*B*)  $l_{BC} = 26 \text{ cm}$

Anche lo spessore del bersaglio va valutato accuratamente. Si presentano, al variare di  $\theta$ , due configurazioni (fig. 4):

1) per  $0^\circ < \theta < 90^\circ$  i fotoni diffusi arrivano sul rivelatore *B* per trasmissione attraverso la lastrina di Pb (bersaglio),

2) per  $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  i fotoni diffusi arrivano sul rivelatore *B* per riflessione sulla lastrina di Pb.

Le due situazioni devono essere trattate in modo differente; infatti nel primo caso esiste uno spessore ideale, che tiene conto dell'attenuazione prodotta dal materiale del bersaglio sia sul fascio di foto-

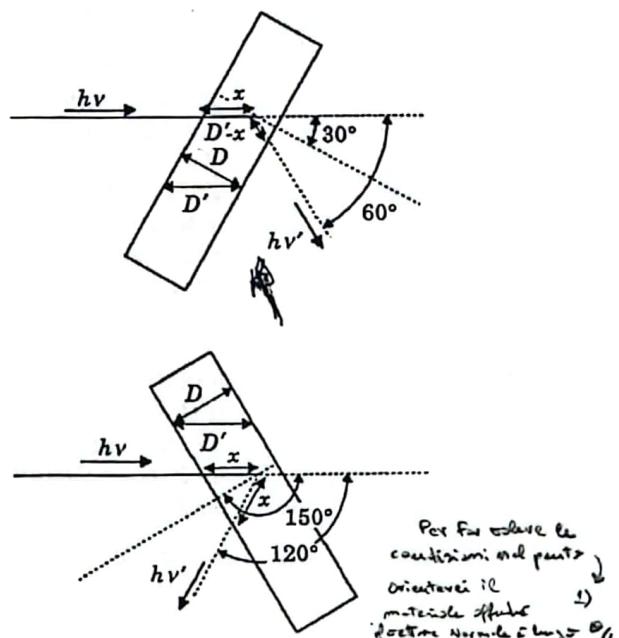


Fig. 4.

ni incidente sia su quello uscente, mentre nel secondo caso, come si vedrà, lo spessore può essere arbitrariamente grande.

Cominciamo a scrivere la relazione completa che esiste fra il numero di fotoni incidenti e il numero di fotoni diffusi. Per avere il massimo numero possibile di fotoni diffusi bisogna ricorrere ad un bersaglio spesso; la successiva equazione (6) descrive l'interazione su uno spessore infinitesimo  $dx$  immerso a profondità  $x$  nel bersaglio, tenendo conto delle attenuazioni del fascio incidente e uscente, e andrà poi integrata:

$$(6) \quad dn = nN \frac{d\sigma}{d\Omega_B} d\Omega_B \epsilon(B, E') \cdot$$

$$\cdot f(x, D, \theta) dx.$$

Qui  $n = n(A) = 2S\epsilon(A, E)(\Delta\Omega_A/4\pi)$  è il numero di fotoni incidenti sulla lastrina corrispondenti ai fotoni con  $E = 511 \text{ keV}$  identificati nel rivelatore  $A$ ,  $N = \rho(N_A Z/A)$  è il numero di elettroni per  $\text{cm}^3$  del bersaglio, mentre  $D$  è lo spessore del bersaglio stesso e  $f(x, D, \theta)$  è il fattore di attenuazione per gli eventi di diffusione che avvengono a distanza  $x$  dalla superficie entro il bersaglio con angolo  $\theta$  ( $d\sigma/d\Omega_B$  è la sezione d'urto di diffusione). Facendo ricorso alla fig. 4 si nota che la configurazione più semplice da utilizzare per calcolare l'espressione di  $f(x, D, \theta)$  è quella in cui il bersaglio giace secondo la bisettrice dell'angolo di diffusione per il caso 1) ( $D' = D/\cos(\theta/2)$ ), o secondo la bisettrice dell'angolo complementare per il caso 2) ( $D' = D/\cos((\pi - \theta)/2)$ ). Calcoliamo  $f(x, D, \theta) = f(x, D')$ .

Caso 1):

$$f(x, D') = P(x, \lambda) P(D' - x, \lambda'),$$

$P(x, \lambda) = \exp[-x/\lambda]$  rappresenta la pro-

babilità che un fotone del fascio incidente sopravviva all'attraversamento dello spessore  $x$  di materiale del bersaglio, con  $\lambda$  coefficiente di attenuazione per fotoni di energia  $E$  in Pb, mentre  $P(D' - x, \lambda') = \exp[-(D' - x)/\lambda']$  rappresenta la probabilità che un fotone del fascio diffuso sopravviva all'attraversamento dello spessore  $D' - x$  di materiale del bersaglio, con  $\lambda'$  coefficiente di attenuazione per fotoni di energia  $E'$  (definita in base all'eq. (1)) in Pb.

Definendo con  $\lambda_C = (N(d\sigma/d\Omega_B)d\Omega_B)^{-1}$  il coefficiente di attenuazione Compton, poiché  $dx/\lambda_C$  è la probabilità d'interazione di un fotone del fascio tra  $x$  e  $x + dx$ , la (6) diviene

$$dn = n\epsilon(B, E') \cdot$$

$$\cdot \exp[-x/\lambda] \frac{dx}{\lambda_C} \exp[-(D' - x)/\lambda']$$

che deve essere integrata fra 0 e  $D'$  per avere il numero  $\Delta n$  di fotoni effettivamente raccolti dal rivelatore  $B$ .

Moltiplicando e dividendo per  $\lambda$  si ottiene

$$(7) \quad \Delta n = nN \frac{d\sigma}{d\Omega_B} d\Omega_B \epsilon(B, E') \cdot$$

$$\cdot \lambda \int_0^{D'} \exp[-x/\lambda] \frac{dx}{\lambda} \exp[-(D' - x)/\lambda'].$$

La stessa procedura va ripetuta per il caso 2), tenendo conto che per simmetria (fig. 4)  $P(D' - x, \lambda')$  va sostituita da  $P(x, \lambda') = \exp[-x/\lambda']$ , e si ottiene

$$(8) \quad \Delta n = nN \frac{d\sigma}{d\Omega_B} d\Omega_B \epsilon(B, E') \cdot$$

$$\cdot \lambda \int_0^{D'} \exp[-x/\lambda] \frac{dx}{\lambda} \exp[-x/\lambda'].$$

Definiamo con  $K_1$  e  $K_2$  gli integrali delle (7) e (8), moltiplicati per  $\lambda$ ; dopo qualche manipolazione, integrando si ottiene

$$(9) \quad K_1 = \lambda'' \exp[-D'/\lambda'] \cdot$$

$$\cdot (1 - \exp[-D'/\lambda'']) \quad \text{con } \lambda'' = \frac{\lambda\lambda'}{\lambda' - \lambda},$$

che, nel limite  $\lambda' \rightarrow \lambda$  (ossia  $\theta \rightarrow 0$ ), si riduce a

$$K_1 = D \exp[-D/\lambda]$$

e

$$(10) \quad K_2 = \lambda'' (1 - \exp[-D'/\lambda''])$$

$$\text{con } \lambda'' = \frac{\lambda\lambda'}{\lambda' + \lambda}.$$

Le quantità  $K_1$  e  $K_2$  sono gli *spessori efficaci* del bersaglio. Le due funzioni

hanno un andamento diverso al variare di  $D'$ : mentre  $K_1$  ha un massimo per un valore finito di  $D$ ,  $K_2$  ha un massimo all'infinito.

Caso 1):

$$D_{\max} = \lambda'' \log\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right),$$

$$K_{1\max} = \lambda \left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^{-\left(\lambda/(\lambda' - \lambda)\right)}.$$

Caso 2):

$$D_{\max} = \infty, \quad K_{2\max} = \lambda''.$$

L'altra quantità che dipende dall'angolo di diffusione è l'efficienza intrinseca al fotopicco del rivelatore  $B$ . Infatti l'energia del fotone diffuso dipende da  $\theta$ .

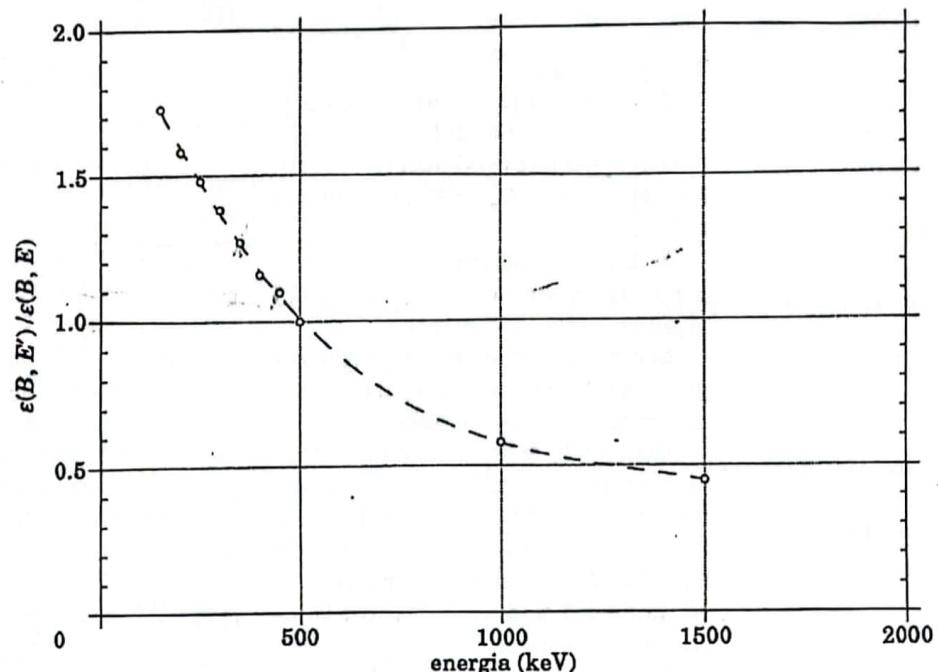


Fig. 5. - Rapporto delle efficienze intrinseche al fotopicco (normalizzate a 511 keV) in funzione dell'energia del fotone incidente.

TABELLA I. - Si riportano i valori della quantità utilizzate per definire lo spessore del bersaglio; le ultime due colonne si riferiscono alla scelta dello spessore di 0.28 cm, mentre le ultime tre righe si riferiscono alla misura per riflessione.

| <i>0</i> | <i>E</i><br>(keV) | $\lambda'$<br>g/cm <sup>2</sup><br>Pb | $\lambda''$<br>g/cm <sup>2</sup><br>Pb | $D_{\max}$<br>(cm) | $K_{\max}$<br>(cm) | $D'$<br>(cm) | $K$<br>(cm) |
|----------|-------------------|---------------------------------------|--|--------------------|--------------------|--------------|-------------|
| 0        | 511.0             | 6.0                                   | $\infty$                               | 0.528              | 0.195              | 0.28         | 0.165       |
| 15       | 494.2             | 6.0                                   | $\infty$                               | 0.528              | 0.195              | 0.28         | 0.165       |
| 30       | 450.6             | 5.0                                   | 30.0                                   | 0.468              | 0.176              | 0.29         | 0.159       |
| 45       | 395.2             | 4.0                                   | 12.0                                   | 0.395              | 0.157              | 0.30         | 0.149       |
| 60       | 340.7             | 3.0                                   | 6.0                                    | 0.317              | 0.132              | 0.33         | 0.131       |
| 75       | 293.5             | 2.3                                   | 3.73                                   | 0.250              | 0.112              | 0.35         | 0.111       |
| 90       | 255.5             | 1.8                                   | 1.385                                  | $\infty$           | 0.122              | 0.40         | 0.117       |
| 120      | 204.4             | 1.0                                   | 0.857                                  | $\infty$           | 0.075              | 0.33         | 0.076       |
| 130      | 193.4             | 1.0                                   | 0.857                                  | $\infty$           | 0.075              | 0.34         | 0.075       |

Le (3) danno i valori delle efficienze intrinseche per  $E = 511$  keV; l'efficienza alle altre energie (minori) [2, 3] si ottiene semplicemente dalla fig. 5, in cui si riporta, in funzione dell'energia, il rapporto delle efficienze  $\epsilon(B, E')/\epsilon(B, E)$ .

### 3. La misura.

In primo luogo occorre definire lo spessore della lastrina di Pb che agisce da diffusore; per fare ciò si sono tabulati (tabella I) i valori di  $D_{\max}$  e  $K_{\max}$  ottenuti con le (9) e (10).

Si è scelto uno spessore di 0.28 cm, per avere un tasso di conteggio ottimale ai grandi angoli ( $60^\circ$  e  $75^\circ$ ).

Si è poi proceduto alla determinazione delle efficienze e angoli solidi da utilizzare nella misura (eq. (3)).

Utilizzando la disposizione geometrica descritta nella fig. 2 e le distanze valutate precedentemente si sono ottenute le frequenze di conteggio di  $(13.4 \pm 0.2)$  Hz e  $(16.2 \pm 0.3)$  Hz rispettivamente per i rivelatori A e B, e  $(5.5 \pm 0.1)$  Hz per la misura in coincidenza.

Si tenga presente che il rivelatore B è stato parzialmente schermato dalla radioattività ambientale per ridurre il tasso del-

le coincidenze accidentali (si veda l'appendice B) con 5 cm di Pb in tutte le direzioni tranne quella d'ingresso dei fotonii provenienti dalla sorgente o dal bersaglio.

Dai dati succitati si deducono i seguenti valori per le efficienze e l'angolo solido  $\Delta\Omega_A$ :

$$\begin{aligned}\epsilon(A, E) &= 0.34 \pm 0.01, & \sim 20^\circ \\ \epsilon(B, E) &= 0.41 \pm 0.01, & \sim 30^\circ \\ \Delta\Omega_A &= (1.60 \pm 0.04) \cdot 10^{-2}.\end{aligned}$$

Noto  $\epsilon(B, E)$ , da una misura effettuata con la sorgente al posto del bersaglio e  $l_{BC} = 26$  cm si ottiene <sup>(3)</sup>  $\Delta\Omega_B = (3.00 \pm 0.04) \cdot 10^{-2}$ .

I risultati della misura vera e propria sulla diffusione Compton, effettuata in base allo schema di fig. 3, sono mostrati in sintesi nella tabella II in cui il valore sperimentale della sezione d'urto è ottenuto servendosi delle (7) e (8) che qui riscriviamo esplicitando  $d\sigma/d\Omega_B$ :

$$(11) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega_B} = \frac{\Delta n}{n N d\Omega_B \epsilon(B, E') K(E')}$$

<sup>(3)</sup> Anche in questo caso si tratta di un «angolo solido efficace» (vedi nota a p. 196).

$$\frac{d\Omega}{d\Omega_B} = \frac{\epsilon(B, E)}{\epsilon \int \epsilon(\theta) \sin \theta d\theta}$$

TABELLA II. - Sintesi delle misure e del risultato.

| $\theta$ | $E$<br>(keV) | $\frac{\epsilon(B, E')}{\epsilon(B, E)}$ | $d\sigma/d\Omega \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$<br>teorico | $\Delta n$<br>$s^{-1} \cdot 10^{-3}$<br>sperimentale | $d\sigma/d\Omega \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$<br>sperimentale |
|----------|--------------|--|--|--|---|
| 15       | 494.2        | 1.00                                     | 7.18   | $5.08 \pm 0.4$                                       | $6.91 \pm 0.54$   |
| 30       | 450.6        | 1.10                                     | 5.45   | $4.13 \pm 0.4$                                       | $5.39 \pm 0.52$   |
| 45       | 395.2        | 1.16                                     | 3.72   | $2.60 \pm 0.3$                                       | $3.40 \pm 0.40$   |
| 60       | 340.7        | 1.27                                     | 2.50   | $1.80 \pm 0.3$                                       | $2.40 \pm 0.40$   |
| 75       | 293.5        | 1.38                                     | 1.81   | $1.38 \pm 0.3$                                       | $1.90 \pm 0.40$   |
| 90       | 255.5        | 1.48                                     | 1.49   | $1.10 \pm 0.3$                                       | $1.27 \pm 0.25$   |
| 120      | 204.4        | 1.58                                     | 1.37   | $1.14 \pm 0.2$                                       | $1.80 \pm 0.30$   |
| 130      | 193.4        | 1.58                                     | 1.38   | $1.12 \pm 0.2$                                       | $1.80 \pm 0.30$   |

TABELLA III. - Dati utilizzati nei calcoli di eq. (11).

| Attività<br>(Bq) | Eff. riv.<br><i>A</i> | Eff. riv.<br><i>B</i> | $\Delta\Omega$ riv.<br><i>A</i> | $\Delta\Omega$ riv.<br><i>B</i> | Pb densità<br>g/cm <sup>3</sup> | Pb <i>Z</i> | Pb <i>A</i> |
|------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------------------|---------------------------------|---------------------------------|-------------|-------------|
| 15 540           | 0.34                  | 0.41                  | 0.016                           | 0.030                           | 11.36                           | 82          | 207.2       |

con  $\mu(A)$ :

$$n = 2S\epsilon(A, E) \frac{\Delta\Omega_A}{4\pi} \quad \text{e} \quad N = \rho \frac{N_A Z}{A}$$

usando i dati di tabella III.

In tabella IV si riportano invece i dati relativi alla relazione  $E(\theta)$ , da cui si può calcolare la massa dell'elettrone  $m_e$ .

I dati pesati per i rispettivi errori della tabella II, colonna 6, e della tabella IV, colonna 3, sono stati interpolati in fun-

zione di  $\theta$  con le equazioni (2) e (1), lasciando liberi i parametri  $r_e^2$  e  $m_e$ . Se ne sono ottenuti i seguenti valori (si vedano le fig. 6 e 7):

$$(12) \quad r_e^2 = (7.644 \pm 0.224) \cdot 10^{-26} \text{ cm}^2$$

e

$$(13) \quad m_e = (510.59 \pm 1.83) \text{ keV}.$$

Dalla (12) si deduce il seguente valore per la carica  $e$  dell'elettrone:

$$(14) \quad e = (4.754 \pm 0.035) \cdot 10^{-10} \text{ e.s.u.}$$

I valori delle equazioni (13) e (14) sono da confrontare coi valori tabulati di 510.999 keV e  $4.803 \cdot 10^{-10}$  e.s.u., come sono riportati in [4].

#### 4. Conclusioni.

Dalle considerazioni e dalle misure svolte nel presente lavoro si deduce che è

TABELLA IV. - Dati relativi alla dipendenza di  $E'$  da  $\theta$ .

| $\theta$ | $E'$ (keV)<br>teorico | $E'$ (keV)<br>sperimentale |
|----------|-----------------------|----------------------------|
| 15       | 494.20                | $494.77 \pm 1.09$          |
| 30       | 450.60                | $446.95 \pm 3.17$          |
| 45       | 395.20                | $391.53 \pm 4.19$          |
| 60       | 340.70                | $333.20 \pm 4.12$          |
| 75       | 293.50                | $292.60 \pm 4.77$          |
| 90       | 255.50                | $251.81 \pm 5.35$          |
| 120      | 204.40                | $197.48 \pm 2.55$          |
| 130      | 193.40                | $202.85 \pm 3.03$          |

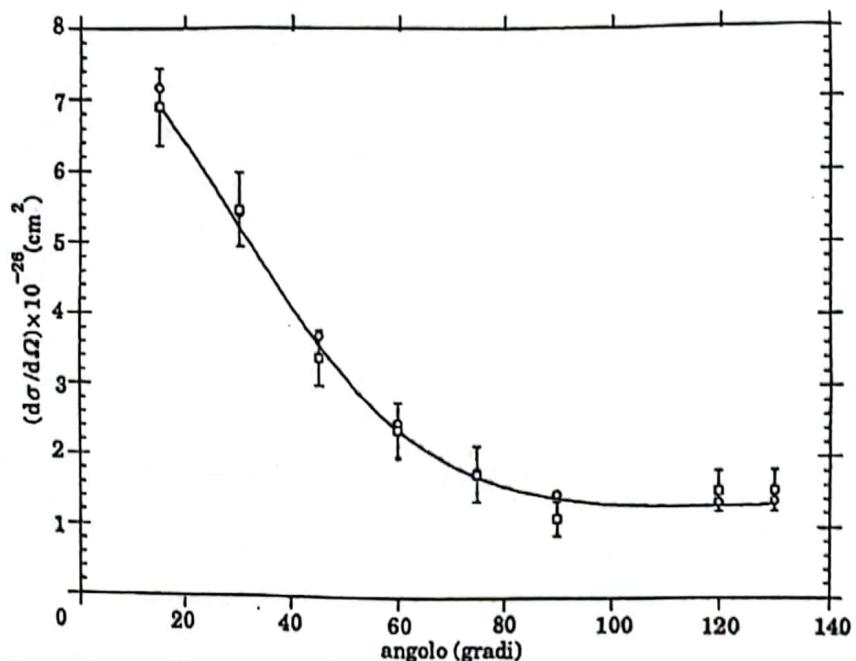


Fig. 6. - Sezione d'urto Compton differenziale  $d\sigma/d\Omega \cdot 10^{-28} \text{ cm}^2$ : o teorica, □ sperimentale; la curva continua è l'interpolazione dei dati da cui si ricava il valore di  $r_e^2$ .

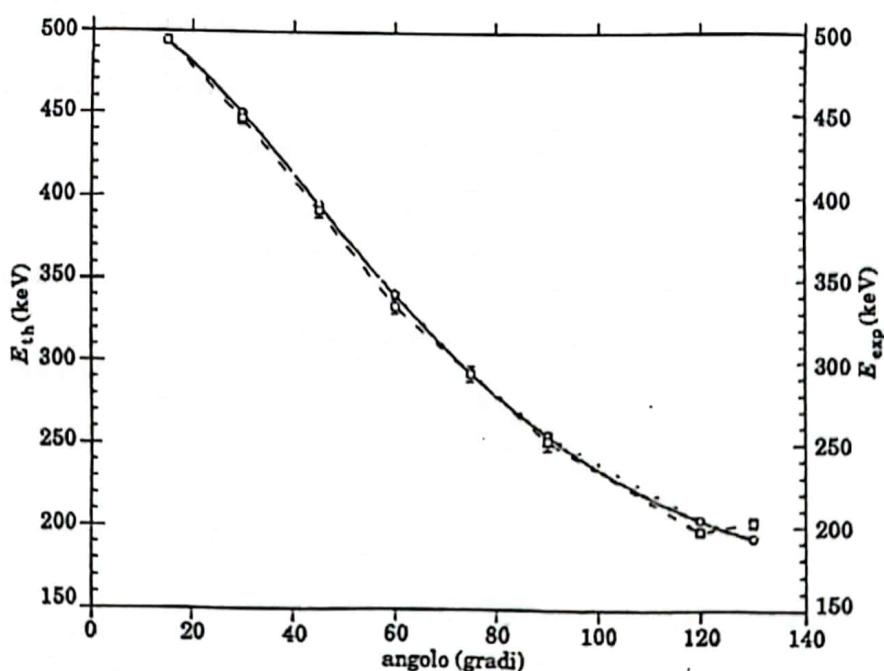


Fig. 7. - Dipendenza dell'energia del fotone diffuso dall'angolo di diffusione: ○ andamento teorico, □ dati sperimentali.

possibile effettuare una misura dell'effetto Compton in un laboratorio didattico, usando deboli ( $\approx 1 \mu\text{Ci}$ ) sorgenti radioattive, purché si sfruttino opportunamente le proprietà geometriche dell'emissione di fotoni a seguito dell'annichilazione di positroni prodotti in decadimenti  $\beta^+$ . Si può quindi misurare sia la massa a riposo dell'elettrone, sia la sua carica con un unico esperimento; è evidente il contenuto didattico di tale sperimentazione, con cui si ottengono buone determinazioni di due grandezze fondamentali della natura.

#### Appendice A.

Cerchiamo di valutare gli effetti della diffusione Compton su un fascio di fotoni con  $E = 511 \text{ keV}$ , senza ricorrere alla tecnica di coincidenza. Poniamo innanzitutto la sorgente  $S$  ad una distanza dal bersaglio  $B$  tale che il fascio di fotoni sia quasi parallelo. Se la massima apertura del cono sotteso da un bersaglio di 1 cm di raggio è  $d\theta = 5^\circ = 8.73 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$ , allora si ottiene  $D_{SB} \approx 11.5 \text{ cm}$  e  $\Delta\Omega/4\pi = 1.9 \cdot 10^{-3}$ . Supponendo di usare la stessa sorgente di  $^{22}\text{Na}$  da  $0.42 \mu\text{Ci}$ , il numero di fotoni incidenti sul bersaglio al secondo è  $n = 60 \text{ s}^{-1}$ . L'ordine di grandezza della sezione d'urto è  $(d\sigma/d\Omega) d\Omega = (r_c^2/2) d\Omega$ , dove  $d\Omega$  è l'angolo solido sotteso dal rivelatore  $R$ , che non potrà essere troppo grande se si vuole che l'energia dei fotoni diffusi sia definita. Prendiamo come  $d\Omega$  lo stesso valore usato per definire il cono sorgente-bersaglio, ossia  $d\Omega = 2.37 \cdot 10^{-2}$ , che implica, per un rivelatore da 5 cm di diametro,  $D_{BR} \approx 28 \text{ cm}$ . Il numero di fotoni diffusi nel rivelatore è quindi dato in prima approssimazione da

$$dn = nN \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \varepsilon dx$$

con

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \approx 10^{-27} \text{ cm}^2.$$

Se il bersaglio è una lastrina di Pb di 0.3 cm di spessore ( $N = \rho N_A Z/A = = 2.6 \cdot 10^{24}$ ), assumendo per  $\varepsilon$  il valore conservativo di 0.2, allora  $dn = 1.4 \cdot 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ , ossia 50 eventi/ora. La frequenza di conteggio di fondo di un rivelatore NaI, anche parzialmente schermato, nella regione di energia tra 100 e 500 keV è tale da mascherare ogni effetto; per esempio, i conteggi di finestre da 100 keV, partendo da un valore centrale di 150 keV ed arrivando a 550 keV, variano da 10 Hz a 1.3 Hz per il rivelatore  $B$ .

#### Appendice B.

Come si è visto nel testo e nell'appendice A, un elemento importante per la buona riuscita dell'esperimento è l'uso della tecnica di coincidenza temporale. Essa si basa sulla contemporaneità di due eventi fisicamente correlati, quali sono la rivelazione del fotone con  $E = 511 \text{ keV}$  nel rivelatore  $A$  e la rivelazione del fotone diffuso per effetto Compton sul bersaglio da parte del rivelatore  $B$ . Alla rivelazione del fotone con  $E = 511 \text{ keV}$  nel rivelatore  $A$  si fa corrispondere la generazione di un segnale logico (cioè di altezza e durata fissi) di sincronizzazione, e s'invia tale segnale all'ingresso di «gate» del convertitore analogico-digitale con cui si genera lo spettro di altezza degli impulsi (ossia di energia) del secondo rivelatore. Di conseguenza tutti e soli i segnali del rivelatore  $B$  che sono in coincidenza, cioè che si sovrappongono temporalmente con il segnale logico suddetto, sono registrati dal sistema di raccolta dei dati (analizza-

tore multicanale). Uno schema logico della catena elettronica di acquisizione dei dati è riportato in fig. 8.

Occorre fare a questo punto alcune osservazioni:

a) La coincidenza è dettata dalla sovrapposizione, totale o parziale, di un segnale logico generato all'interno del convertitore all'arrivo di un impulso del rivelatore *B* (fig. 8), secondo modalità che di-

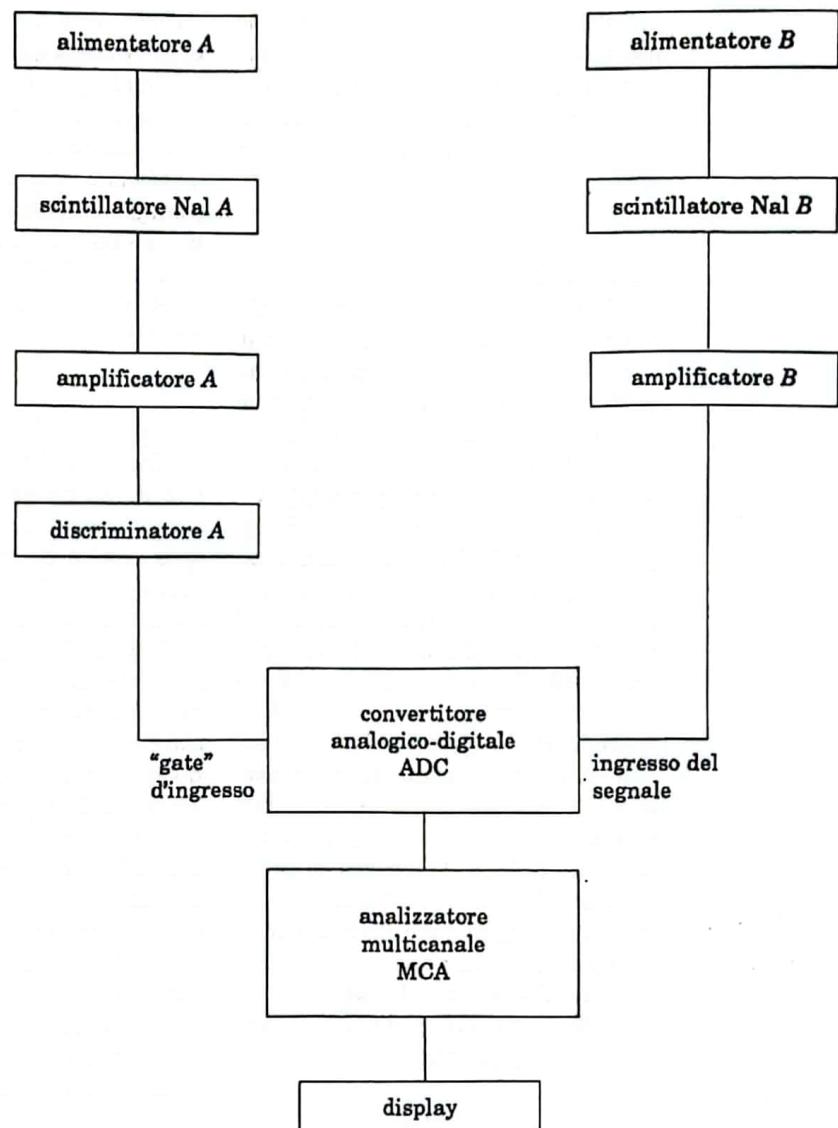


Fig. 8. - Schema della strumentazione elettronica usata nell'esperimento.

pendono dal convertitore stesso, con quello generato dal discriminatore in corrispondenza degli impulsi con  $E = 511 \text{ keV}$  generati dal rivelatore  $A$ , tenendo conto della risoluzione. Il discriminatore deve essere del tipo a finestra, cioè deve accettare solo impulsi con altezza compresa tra due valori ben definiti di tensione, da predisporre in sede di calibrazione in modo da accettare i segnali provenienti da fotoni con  $E = 511 \text{ keV}$ .

b) Esiste una finestra temporale per la coincidenza, in generale data dalla durata degli impulsi logici con cui si realizza la coincidenza stessa; tanto più lunghi sono tali segnali, tanto più grande è la probabilità che si abbia una coincidenza casuale tra impulsi non fisicamente correlati.

Ad esempio, se  $R_A$  è il tasso di conteggio ( $\text{s}^{-1}$ ) del rivelatore  $A$  e  $R_B$  è il tasso di conteggio ( $\text{s}^{-1}$ ) del rivelatore  $B$ , e il tempo utile per la coincidenza è  $\Delta t$ , allora il tasso delle coincidenze causali è dato da

$$R_C = R_A R_B \Delta t.$$

Vediamo cosa accade nel nostro caso se, per esempio, prendiamo per  $R_A$  il tasso di conteggio in una finestra di  $100 \text{ keV}$ , centrata attorno a  $511 \text{ keV}$ ,  $R_A \approx 14 \text{ Hz}$ , mentre per  $R_B$ , come si è detto alla fine dell'appendice A, il tasso di conteggio in finestre di  $100 \text{ keV}$  che coprono l'intervallo da  $150 \text{ keV}$  a  $550 \text{ keV}$  varia tra  $10$  e  $1.3 \text{ Hz}$ . Se prendiamo una finestra temporale di coincidenza  $\Delta t = 5 \mu\text{s}$ , allora  $R_C$  varia da  $2.5$  a  $0.4 \text{ h}^{-1}$ , come si è verificato

sui dati, da confrontare col tasso di coincidenze attese dal processo fisico in esame, dettato nel nostro caso dalla formula (7) o (8). Si vede dalla tabella II che i conteggi di segnale variano, sullo stesso intervallo di energia, da  $4 \text{ h}^{-1}$  a  $18 \text{ h}^{-1}$ .

c) Poiché le catene elettroniche di elaborazione dei segnali introducono ritardi nella propagazione dei segnali stessi dal rivelatore all'analizzatore multicanale, per ottenere una buona efficienza di coincidenza ( $\approx 100\%$ , se le apparecchiature sono di buona qualità) occorre compensare i ritardi differenti per le catene relative ai due rivelatori. Ciò è fattibile misurando la coincidenza di un processo noto, nel nostro caso la coincidenza senza bersaglio a  $0^\circ$  fra i fotoni con  $E = 511 \text{ keV}$  di annichilazione del positrone (fig. 2).

d) La coincidenza fornisce un rapporto segnale/fondo tanto migliore quanto più è breve il tempo di coincidenza e quanto più è «stretta» la finestra di energia sul picco con  $E = 511 \text{ keV}$  misurato dal rivelatore  $A$ , compatibilmente con la forma degli impulsi e la risoluzione energetica.

#### Riferimenti bibliografici.

- [1] L. LANDAU: *Theorie quantique relativiste* (Editions MIR, Moscou, 1972), parte I, p. 410 e seguenti (in particolare eq. (87-8, 87-9)).
- [2] G. F. KNOLL: *Radiation Detection and Measurement* (J. Wiley & Sons, New York, N.Y., 1979).
- [3] W. J. PRICE: *Nuclear Radiation Detection* (McGraw-Hill, New York, N.Y., 1964).
- [4] PARTICLE DATA GROUP: *Review of particle properties*, *Phys. Lett. B*, 239 (1990).

$$10 \text{ kg/m}^3 \quad 1 \text{ m}^3 \Rightarrow \rho = 10^3 \text{ g/cm}^3 \Rightarrow 1.2 \text{ kg/m}^3$$

$$1700 \text{ m}^3/h \cdot 10 \text{ kg/m}^3 = 17000 \text{ kg/h}$$

$1 \text{ m}^3 \text{ av: } \approx$

Particoli 0,5 - 0,7  $\mu\text{m}$   $\text{B}_e$

$10 \text{ kg/m}^3$

$11 \text{ kg/m}^3$