

Competitive Programmer's Handbook

Antti Laaksonen

Draft December 14, 2021

Contents

Preface	v
I Basic techniques	1
1 Introducció	3
1.1 Llenguatges de programació	3
1.2 Entrada i sortida	4
1.3 Treballar amb nombres	6
1.4 Escurçar el codi	8
1.5 Matemàtiques	10
1.6 Concursos i recursos	15
2 Complexitat temporal	19
2.1 Regles de càlcul	19
2.2 Clases de complexitat	22
2.3 Estimació de l'eficiència	23
2.4 Suma màxima d'un subvector	24
3 Ordenació	27
3.1 Teoria de l'ordenació	27
3.2 Ordenació en C++	35
3.3 Cerca binària	37
4 Estructures de dades	41
4.1 Vectors dinàmics	41
4.2 Estructures conjunt	43
4.3 Estructures mapa	44
4.4 Iteradors i intervals	45
4.5 Altres estructures	47
4.6 Comparació amb l'ordenació	51
5 Cerca completa	53
5.1 Generar subconjunts	53
5.2 Generar permutacions	55
5.3 Backtracking	56
5.4 Podar la cerca	58
5.5 Trobar-se al mig	61

6	Algorismes greedy	63
6.1	Problema de les monedes	63
6.2	Scheduling	64
6.3	Tasques i terminis	66
6.4	Minimitzar sumes	67
6.5	Compressió de dades	68
7	Programació dinàmica	71
7.1	Problema de les monedes	71
7.2	Subseqüència creixent més llarga	76
7.3	Camins en una quadrícula	77
7.4	Problemes de motxilla	79
7.5	Distància d'edició	80
7.6	Comptar rajoles	82
II	Graph algorithms	85
III	Advanced topics	87
	Bibliography	89

Preface

The purpose of this book is to give you a thorough introduction to competitive programming. It is assumed that you already know the basics of programming, but no previous background in competitive programming is needed.

The book is especially intended for students who want to learn algorithms and possibly participate in the International Olympiad in Informatics (IOI) or in the International Collegiate Programming Contest (ICPC). Of course, the book is also suitable for anybody else interested in competitive programming.

It takes a long time to become a good competitive programmer, but it is also an opportunity to learn a lot. You can be sure that you will get a good general understanding of algorithms if you spend time reading the book, solving problems and taking part in contests.

The book is under continuous development. You can always send feedback on the book to `ahslaaks@cs.helsinki.fi`.

Helsinki, August 2019
Antti Laaksonen

Part I

Basic techniques

Chapter 1

Introducció

La programació competitiva combina dos temes: (1) el disseny d'algorismes i (2) la implementació d'algorismes.

El **disseny d'algorismes** consisteix en la resolució de problemes i el pensament matemàtic. Fan falta habilitats per analitzar problemes i resoldre'ls creativament. Un algorisme per resoldre un problema ha de ser correcte i eficient, i la dificultat consisteix sovint sobre inventar un algorisme eficient.

Els coneixements teòrics d'algorismes són important per als programadors competitius. Normalment, una solució a un problema és una combinació de tècniques conegudes i noves idees. Les tècniques que apareixen en la programació competitiva també constitueixen la base per a la investigació científica d'algorismes.

La **implementació d'algorismes** requereix bones habilitats de programació. En la programació competitiva, les solucions es classifiquen provant un algorisme implementat fent servir un conjunt de casos de prova. Per tant, no n'hi ha prou que la idea del l'algoritme sigui correcte, la implementació també ha de ser correcte.

L'estil correcte de programació en els concursos és ser directe i concís. Els programes s'han d'escriure ràpidament, perquè no hi ha gaire temps disponible. A diferència de l'enginyeria de software tradicional, els programes són curts (normalment com a molt uns pocs centenars de línies de codi) i no cal mantenir el codi un cop acabat el concurs.

1.1 Llenguatges de programació

En l'actualitat, els llenguatges de programació que es fan servir més als concursos són el C++, el Python i el Java. Per exemple, a Google Code Jam 2017, entre els 3.000 millors participants, el 79 % va fer servir C++, el 16 % Python i el 8 % Java [29]. Alguns participants també utilitzaven varis llenguatges.

Molta gent pensa que el C++ és la millor opció per a un programador competitiu, i el C++ gairebé sempre està disponible en els sistemes de concurs. Els avantatges d'utilitzar C++ són que és un llenguatge de programació molt eficient i que la seva biblioteca estàndard conté un gran col·lecció d'estructures de dades i algorismes.

D'altra banda, és bo dominar diversos llenguatges de programació i comprendre els seus punts forts. Per exemple, si es necessiten nombres enters grans en el problema, Python pot ser una bona opció, perquè aquest llenguatge conté operacions integrades per càlculs amb nombres enters grans. Tot i així, la majoria dels problemes en els concursos de programació s'intenten preparar per a que fer servir un llenguatge de programació específic no sigui un avantatge injust.

Tots els programes d'exemple d'aquest llibre estan escrits en C++, i sovint es fa servir les estructures de dades i algorismes de la llibreria estàndard. Els programes segueixen l'estàndard C++11, que es pot fer servir en la majoria dels concursos actuals. Si encara no podeu programar en C++, ara és un bon moment per començar a aprendre.

plantilla de codi C++

Aquesta és una plantilla de codi C++ típica per a la programació competitiva:

```
#include <bits/stdc++.h>

using namespace std;

int main() {
    // Aquí va el codi.
}
```

La línia `#include` al principi del codi és una característica del compilador `g++` que ens permet incloure tota la biblioteca estàndard. Per tant, no cal incloure per separat biblioteques com ara `iostream`, `vector` i `algorithm`, sinó que estan disponibles automàticament.

La línia `using` declara que les classes i funcions de la biblioteca estàndard es poden fer servir directament al codi. Sense la línia `using` tindríem que escriure, per exemple, `std::cout`, però ara n'hi ha prou amb escriure `cout`.

El codi es pot compilar mitjançant l'ordre següent:

```
g++ -std=c++11 -O2 -Wall test.cpp -o test
```

Aquesta ordre produeix un fitxer binari `test` a partir del codi font `test.cpp`. El compilador segueix l'estàndard C++11 (`-std=c++11`), optimitza el codi (`-O2`) i mostra avisos sobre possibles errors (`-Wall`).

1.2 Entrada i sortida

A la majoria de concursos es fan servir els canals estàndard per a la lectura d'entrada i l'escriptura de sortida. En C++, els canals estàndard són cin per a l'entrada i `cout` per a la sortida. També es poden fer servir les funcions de C `scanf` i `printf`.

L'entrada per al programa normalment consisteix en nombres i cadenes de text que es separen amb espais i salts de línia. Es poden llegir des del canal cin

com segueix:

```
int a, b;  
string x;  
cin >> a >> b >> x;
```

Aquest tipus de codi sempre funciona, suposant que hi ha almenys un espai o salt de línia entre cada element de l'entrada. Per exemple, el codi anterior pot llegir les dues entrades següents:

```
123 456 monkey
```

```
123 456  
monkey
```

El canal cout es fa servir per a la sortida:

```
int a = 123, b = 456;  
string x = "monkey";  
cout << a << " " << b << " " << x << "\n";
```

L'entrada i la sortida són de vegades un coll d'ampolla en el programa. Les línies següents al principi del codi fan que l'entrada i la sortida siguin més eficients:

```
ios::sync_with_stdio(0);  
cin.tie(0);
```

Tingueu en compte que el salt de línia "\n" funciona més ràpid que endl, perquè endl sempre provoca una operació de buidat del buffer.

Les funcions C scanf i printf són una alternativa als canals estàndard de C++. Normalment són una mica més ràpides, però també són més difícils d'utilitzar. El codi següent llegeix dos nombres enters de l'entrada:

```
int a, b;  
scanf("%d %d", &a, &b);
```

El codi següent imprimeix dos nombres enters:

```
int a = 123, b = 456;  
printf("%d %d\n", a, b);
```

De vegades, el programa hauria de llegir una línia sencera de l'entrada, possiblement amb espais. Això es pot aconseguir mitjançant l'ús de la funció getline:

```
string s;  
getline(cin, s);
```

Si es desconeix la quantitat de dades, podem fer servir el següent bucle:

```
while (cin >> x) {  
    // codi  
}
```

Aquest bucle llegeix elements de l'entrada un rere l'altre, fins que no n'hi ha hagut més dades disponibles.

En alguns sistemes de concurs es fa servir fitxers per a l'entrada i la sortida. Una solució fàcil per a això és escriure el codi com de costum utilitzant canals estàndard, però afegint les línies següents al començament del codi:

```
freopen("entrada.txt", "r", stdin);  
freopen("output.txt", "w", stdout);
```

Després d'això, el programa llegeix l'entrada del fitxer "input.txt" i escriu la sortida al fitxer "output.txt".

1.3 Treballar amb nombres

Nombres enters

El tipus enter més utilitzat en la programació competitiva és el tipus `int`, que és un tipus de 32 bits amb un rang de valors de $-2^{31} \dots 2^{31} - 1$ o aproximadament $-2 \cdot 10^9 \dots 2 \cdot 10^9$. Si el tipus `int` no és suficient, es pot fer servir el tipus de 64 bits `long long`. Té un rang de valors de $-2^{63} \dots 2^{63} - 1$ o aproximadament $-9 \cdot 10^{18} \dots 9 \cdot 10^{18}$.

El codi següent defineix una variable de tipus `long long`:

```
long long x = 123456789123456789LL;
```

El sufix `LL` significa que el tipus del nombre és `long long`.

Un error comú quan es fa servir el tipus `long long` és fer servir algun tipus `int` en algun lloc al codi. Per exemple, el codi següent conté un error subtil:

```
int a = 123456789;  
long long b = a*a;  
cout << b << "\n"; // -1757895751
```

Tot i que la variable `b` és del tipus `long long`, els dos nombres de l'expressió `a*a` són del tipus `int` i el resultat és també del tipus `int`. Per això, la variable `b` tindrà un resultat incorrecte. El problema es pot resoldre fent que el tipus de `a` sigui `long long` o canviant l'expressió a `(long long)a*a`.

Normalment els problemes de concurs es plantegen de manera que amb el tipus `long long` n'hi ha prou. Tot i així, és bo saber que el compilador `g++` també proporciona un tipus de 128 bits `__int128_t` amb un rang de valors de $-2^{127} \dots 2^{127} - 1$ o aproximadament $-10^{38} \dots 10^{38}$. Tanmateix, aquest tipus no està disponible en tots els sistemes de concurs.

Aritmètica modular

Denotem per $x \bmod m$ el residu de dividir x per m . Per exemple, $17 \bmod 5 = 2$, perquè $17 = 3 \cdot 5 + 2$.

De vegades, la resposta a un problema és a nombre molt gran però es demana que s'escrigui la solució "mòdul m ", és a dir, el residu quan es divideix la resposta per m (per exemple, "mòdul $10^9 + 7$ "). D'aquesta manera, encara que la resposta real sigui molt gran, n'hi ha prou amb utilitzar els tipus `int` i `long long`.

Una propietat important del residu és que en la suma, la resta i la multiplicació, el residu es pot prendre abans de l'operació:

$$\begin{aligned} rcr(a + b) \bmod m &= (a \bmod m + b \bmod m) \bmod m \\ (a - b) \bmod m &= (a \bmod m - b \bmod m) \bmod m \\ (a \cdot b) \bmod m &= (a \bmod m \cdot b \bmod m) \bmod m \end{aligned}$$

Així, podem agafar el residu després de cada operació i les xifres mai seran massa grans.

Per exemple, el codi següent calcula $n!$, el factorial de n , mòdul m :

```
long long x = 1;
per (int i = 2; i <= n; i++) {
    x = (x*i)%m;
}
cout << x%m << "\n";
```

Normalment volem que el residu estigui sempre en $0 \dots m - 1$. Tanmateix, en el C++ i altres llenguatges, el residu d'un nombre negatiu és zero o negatiu. Una manera fàcil d'assegurar-s'hi que no tenim residus negatius es cal calcular primer el residu com de costum i després afegeix m si el resultat és negatiu:

```
x = x%m;
if (x < 0) x += m;
```

Això només és necessari quan hi ha restes en el codi i el residu pot arribar a ser negatiu.

Nombres de coma flotant

Els tipus de coma flotant en la programació competitiva són el `double` de 64 bits i, com a extensió al compilador `g++`, el `long double` de 80 bits. En la majoria dels casos, `double` és suficient, però `long double` és més precís.

La precisió requerida de la resposta normalment es dona a l'enunciat del problema. Una manera fàcil d'emetre la resposta és fer servir la funció `printf` i donar el nombre de decimals a la cadena de text que especifica el format. Per exemple, el codi següent escriu el valor de x amb 9 decimals:

```
printf("%.9f\n", x);
```

Una dificultat quan s'utilitzen nombres de coma flotant és que alguns nombres no es poden representar amb precisió com a nombres de coma flotant, i hi haurà errors d'arrodoniment. Per exemple, el resultat del codi següent és sorprenent:

```
double x = 0.3*3+0.1;
printf("%.20f\n", x); // 0.99999999999999988898
```

El valor de x és una mica més petit que 1 degut als errors d'arrodoniment, quan el valor correcte seria 1.

És arriscat comparar nombres de coma flotant amb l'operador `==`, perquè és possible que, encara els valors haurien de ser iguals, en realitat no ho són degut a errors de precisió. Una millor manera de comparar nombres de coma flotant és suposar que dos nombres són iguals si la diferència entre ells és menor que ε , on ε és un nombre petit.

A la pràctica, els nombres es poden comparar de la següent manera ($\varepsilon = 10^{-9}$):

```
if (abs(a-b) < 1e-9) {
    // a i b son iguals
}
```

Tingueu en compte que, tot i que els nombres de coma flotant són inexactes, els enters fins a un cert límit encara es poden representar amb precisió. Per exemple, fent servir `double`, és possible representar amb precisió nombres enters el valor absolut dels quals és com a màxim 2^{53} .

1.4 Escurçar el codi

El codi curt és ideal en programació competitiva, perquè els programes s'han d'escriure el més ràpid possible. Per això, els programadors competitius sovint defineixen noms més curts per a tipus de dades i altres parts del codi.

Noms dels tipus

Fent servir l'ordre `typedef` és possible donar un nom més curt a un tipus de dades. Per exemple, com que el nom `long long` és llarg, podem definir un nom més curt `ll` d'aquesta manera:

```
typedef long long ll;
```

Després d'això, el codi

```
long long a = 123456789;
long long b = 987654321;
cout << a*b << "\n";
```

es pot escurçar de la següent manera:

```
ll a = 123456789;
```

```
ll b = 987654321;
cout << a*b << "\n";
```

L'ordre typedef també es pot fer servir amb tipus més complexos. Per exemple, el codi següent dona el nom vi per a un vector de nombres enters i el nom pi per a una parella que conté dos nombres enters.

```
typedef vector<int> vi;
typedef pair<int,int> pi;
```

Macros

Una altra manera d'escurçar el codi és definir **macros**. Una macro significa que hi ha determinades cadenes de text que el codi es canviarà abans de la compilació. En C++, les macros es defineixen mitjançant la paraula clau #define.

Per exemple, podem definir les macros següents:

```
#define F primer
#define S segon
#define PB push_back
#define MP make_pair
```

Després d'això, el codi

```
v.push_back(make_pair(y1,x1));
v.push_back(make_pair(y2,x2));
int d = v[i].primer+v[i].segon;
```

esdevé:

```
v.PB(MP(y1,x1));
v.PB(MP(y2,x2));
int d = v[i].F+v[i].S;
```

Una macro també pot tenir paràmetres, la qual cosa fa possible escurçar bucles i altres estructures. Per exemple, podem definir la macro següent:

```
#definir REP(i,a,b) for (int i = a; i <= b; i++)
```

Després d'això, el codi

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    cerca(i);
}
```

esdevé:

```
REP(i,1,n) {
    cerca(i);
}
```

```
}
```

De vegades, les macros provoquen errors que poden ser difícils per detectar. Per exemple, considereu la macro següent que calcula el quadrat d'un nombre:

```
#define SQ(a) a*a
```

Aquesta macro *no* sempre funciona com s'esperava. Per exemple, el codi

```
cout << SQ(3+3) << "\n";
```

correspon al codi

```
cout << 3+3*3+3 << "\n"; // 15
```

Una versió millor de la macro és la següent:

```
#definir SQ(a) (a)*(a)
```

Ara el codi

```
cout << SQ(3+3) << "\n";
```

correspon al codi

```
cout << (3+3)*(3+3) << "\n"; // 36
```

1.5 Matemàtiques

Les matemàtiques tenen un paper important en la competició programació, i no és possible arribar a ser un programador competitiu exitós sense tenir bones habilitats matemàtiques. En aquesta secció es discuteixen alguns conceptes i fórmules matemàtiques que són necessàries més endavant al llibre.

Fórmules de suma

Cada suma de la forma

$$\sum_{x=1}^n x^k = 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k,$$

on k és un nombre enter positiu, té una fórmula tancada que és un polinomi de grau $k + 1$. Per exemple¹,

$$\sum_{x=1}^n x = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

¹ Fins i tot hi ha una fórmula general per a aquestes sumes, anomenada **fórmula de Faulhaber**, però és massa complexa per a presentar-la aquí.

i

$$\sum_{x=1}^n x^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Una **progressió aritmètica** és una seqüència de nombres on la diferència entre dos nombres consecutius és una constant. Per exemple,

$$3, 7, 11, 15$$

és una progressió aritmètica amb constant 4. Es pot calcular la suma d'una progressió aritmètica fent servir la fórmula

$$\underbrace{a + \dots + b}_{n \text{ nombres}} = \frac{n(a+b)}{2}$$

on a és el primer nombre, b és l'últim nombre i n és la quantitat de nombres. Per exemple,

$$3 + 7 + 11 + 15 = \frac{4 \cdot (3 + 15)}{2} = 36.$$

La fórmula es basa en el fet que la suma consta de n nombres i el valor de cada nombre és $(a+b)/2$ de mitjana.

Una **progressió geomètrica** és una seqüència de nombres on el rati entre dos consecutius qualsevol nombres és una constant. Per exemple,

$$3, 6, 12, 24$$

és una progressió geomètrica amb constant 2. Es pot calcular la suma d'una progressió geomètrica fent servir la fórmula

$$a + ak + ak^2 + \dots + b = \frac{bk - a}{k - 1}$$

on a és el primer nombre, b és l'últim nombre i el la rati entre nombres consecutius és k . Per exemple,

$$3 + 6 + 12 + 24 = \frac{24 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = 45.$$

Aquesta fórmula es pot derivar de la següent manera. Sigui

$$S = a + ak + ak^2 + \dots + b.$$

Quan multipliquem els dos costats per k , obtenim

$$kS = ak + ak^2 + ak^3 + \dots + bk,$$

i resolent l'equació

$$kS - S = bk - a$$

ens dona la fórmula.

Un cas especial de la suma d'una progressió geomètrica és la fórmula

$$1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

Una **suma harmònica** és una suma de la forma

$$\sum_{x=1}^n \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Un límit superior per a una suma harmònica és $\log_2(n) + 1$. En concret, podem modificar cada terme $1/k$ de manera que es converteixi en la potència més propera de dos que no superi k . Per exemple, quan $n = 6$, podem estimar la suma de la següent manera:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}.$$

Aquest límit superior consta de $\log_2(n) + 1$ parts ($1, 2 \cdot 1/2, 4 \cdot 1/4$, etc.), i el valor de cada part és com a màxim 1.

Teoria de conjunts

Un **conjunt** és una col·lecció d'elements. Per exemple, el conjunt

$$X = \{2, 4, 7\}$$

conté els elements 2, 4 i 7. El símbol \emptyset denota un conjunt buit, i $|S|$ denota la mida d'un conjunt S , és a dir, el nombre d'elements del conjunt. Per exemple, en el conjunt anterior, $|X| = 3$.

Si un conjunt S conté un element x , escrivim $x \in S$, i en cas contrari escrivim $x \notin S$. Per exemple, en el conjunt anterior

$$4 \in X \quad \text{i} \quad 5 \notin X.$$

Es poden construir nous conjunts mitjançant operacions de conjunts:

- La **intersecció** $A \cap B$ és el conjunt dels elements que estan tant en A i en B . Per exemple, si $A = \{1, 2, 5\}$ i $B = \{2, 4\}$, llavors $A \cap B = \{2\}$.
- La **unión** $A \cup B$ és el conjunt dels elements que estan en A o en B o en tots dos. Per exemple, si $A = \{3, 7\}$ i $B = \{2, 3, 8\}$, llavors $A \cup B = \{2, 3, 7, 8\}$.
- El **complement** \bar{A} és el conjunt dels elements que no estan en A . La interpretació d'un complement depèn de el **conjunt universal**, que és el conjunt que conté tots els elements possibles. Per exemple, si $A = \{1, 2, 5, 7\}$ i el conjunt universal és $\{1, 2, \dots, 10\}$, aleshores $\bar{A} = \{3, 4, 6, 8, 9, 10\}$.
- La **diferència** $A \setminus B = A \cap \bar{B}$ és el conjunt dels elements que estan en A però no en B . Tingueu en compte que B pot contenir elements que no es troben a A . Per exemple, si $A = \{2, 3, 7, 8\}$ i $B = \{3, 5, 8\}$, aleshores $A \setminus B = \{2, 7\}$.

Si cada element de A també pertany a S , diem que A és un **subconjunt** de S , i ho denotem $A \subset S$. Un conjunt S sempre té $2^{|S|}$ subconjunts, inclòs el conjunt buit. Per exemple, els subconjunts del conjunt $\{2, 4, 7\}$ són $\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{7\}, \{2, 4\}, \{2, 7\}, \{4, 7\}$ i $\{2, 4, 7\}$.

Alguns conjunts fets servir sovint són \mathbb{N} (nombres naturals), \mathbb{Z} (nombres enters), \mathbb{Q} (nombres racionals) i \mathbb{R} (nombres reals). El conjunt \mathbb{N} es pot definir de dues maneres, segons la situació: o $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ o $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

També podem construir un conjunt utilitzant una expressió de la forma

$$\{f(n) : n \in S\},$$

on $f(n)$ és una funció. Aquest conjunt conté tots els elements de la forma $f(n)$, on n és un element de S . Per exemple, el conjunt

$$X = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$$

conté tots els nombres enters parells.

Lògica

El valor d'una expressió lògica és **cert** (1) o **fals** (0). Les operacions lògiques més importants són \neg (**negació**), \wedge (**conjunció**), \vee (**disjunció**), \Rightarrow (**implicació**) i \Leftrightarrow (**equivalència**). La taula següent mostra el significat d'aquestes operacions:

	A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
	0	0	1	1	0	0	1	1
\oplus	0	1	1	0	0	1	1	0
	1	0	0	1	0	1	0	0
	1	1	0	0	1	1	1	1

L'expressió $\neg A$ té el valor oposat de A . L'expressió $A \wedge B$ és certa si A i B són certes, i l'expressió $A \vee B$ és certa si A o B o tots dos són certes. L'expressió $A \Rightarrow B$ és certa si sempre que A és cert, B també ho és. L'expressió $A \Leftrightarrow B$ és certa quan A i B són les dues certes o les dues falses.

Un **predicat** és una expressió que és certa o falsa en funció dels seus paràmetres. Els predicats solen indicar-se amb majúscules. Per exemple, considerem el predicat $P(x)$ que és cert exactament quan x és un nombre primer. Amb aquesta definició, $P(7)$ és cert però $P(8)$ és fals.

Un **quantificador** connecta una expressió lògica als elements d'un conjunt. Els quantificadors més importants són \forall (**per a tots**) i \exists (**existeix un**). Per exemple,

$$\forall x(\exists y(y < x))$$

significa que per a cada element x del conjunt, existeix un element y al conjunt que compleix que y és més petit que x . Això és cert en el conjunt de nombres enters, però fals en el conjunt dels nombres naturals.

Utilitzant la notació descrita anteriorment, podem expressar molts tipus de proposicions lògiques. Per exemple,

$$\forall x((x > 1 \wedge \neg P(x)) \Rightarrow (\exists a(\exists b(a > 1 \wedge b > 1 \wedge x = ab))))$$

significa que si un nombre x és més gran que 1 i no és un nombre primer, aleshores hi ha els nombres a i b que són més grans que 1 i el producte dels quals és x . Aquesta proposició és certa en el conjunt dels nombres enters.

Funcions

La funció $\lfloor x \rfloor$ arrodoneix (cap avall) el nombre x fins a un nombre enter, i la funció $\lceil x \rceil$ arrodoneix (cap amunt) el nombre x fins a un nombre enter. Per exemple,

$$\lfloor 3/2 \rfloor = 1 \quad \text{i} \quad \lceil 3/2 \rceil = 2.$$

Les funcions $\min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $\max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ donen el valor més petit i més gran dels valors x_1, x_2, \dots, x_n . Per exemple,

$$\min(1, 2, 3) = 1 \quad \text{i} \quad \max(1, 2, 3) = 3.$$

El **factorial** $n!$ es pot definir

$$\prod_{x=1}^n x = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$$

o, recursivament,

$$\begin{aligned} 1! &= 1 \\ n! &= n \cdot (n-1)! \end{aligned}$$

Els **nombres de Fibonacci** sorgeixen en moltes situacions. Es poden definir recursivament de la següent manera:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(1) &= 1 \\ f(n) &= f(n-1) + f(n-2) \end{aligned}$$

Els primers nombres de Fibonacci són

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

També hi ha una fórmula tancada per calcular els nombres de Fibonacci, que de vegades s'anomena **fórmula de Binet**:

$$f(n) = \frac{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}.$$

Logaritmes

El **logaritme** d'un nombre x es denota per $\log_k(x)$, on k és la base del logaritme. Segons la definició, $\log_k(x) = a$ exactament quan $k^a = x$.

Una propietat útil dels logaritmes és que $\log_k(x)$ és igual al nombre de vegades hem de dividir x per k abans d'arribar el nombre 1. Per exemple, $\log_2(32) = 5$ perquè calen 5 divisions per 2:

$$32 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

Els logaritmes s'utilitzen sovint en l'anàlisi de algorismes, perquè molts algorismes eficients redueixen alguna cosa a la meitat a cada pas. Per tant, podem estimar l'eficiència d'aquests algorismes fent servir logaritmes.

El logaritme d'un producte és

$$\log_k(ab) = \log_k(a) + \log_k(b),$$

i en conseqüència,

$$\log_k(x^n) = n \cdot \log_k(x).$$

A més, el logaritme d'un quocient és

$$\log_k\left(\frac{a}{b}\right) = \log_k(a) - \log_k(b).$$

Una altra fórmula útil és

$$\log_u(x) = \frac{\log_k(x)}{\log_k(u)},$$

i amb això, és possible calcular logaritmes a qualsevol base si hi ha una manera de calcular logaritmes en una base fixa.

El **logaritme natural** $\ln(x)$ d'un nombre x és el logaritme la base del qual és $e \approx 2.71828$. Una altra propietat dels logaritmes és que el nombre de dígitos d'un enter x en base b és $\lfloor \log_b(x) + 1 \rfloor$. Per exemple, la representació de 123 en base 2 és 1111011 i $\lfloor \log_2(123) + 1 \rfloor = 7$.

1.6 Concursos i recursos

IOI

L'Olimpíada Internacional d'Informàtica (IOI, International Olympiad in Informatics) és un concurs de programació anual per a alumnes de secundària. Cada país pot enviar un equip de quatre alumnes al concurs. Normalment hi ha uns 300 participants de 80 països.

L'IOI consta de dos concursos de cinc hores de durada. En ambdós concursos, es demana als participants resoldre tres tasques algorísmiques de diferent dificultat. Les tasques es divideixen en subtasques, cadascuna dels quals té una puntuació assignada. Encara que els concursants estiguin dividits en equips, competeixen com a individus.

El pla d'estudis de l'IOI [41] regula els temes que poden aparèixer a les tasques IOI. Gairebé tots els temes del temari de l'IOI són coberts per aquest llibre.

Els participants de l'IOI es seleccionen mitjançant concursos nacionals. Abans de l'IOI, s'organitzen molts concursos regionals, com l'Olimpíada Bàltica d'Informàtica (BOI), Olimpíada Centro-Europea d'Informàtica (CEOI) i l'Olimpíada d'Informàtica Àsia-Pacífic (APIO).

Alguns països organitzen concursos de pràctiques on-line per als futurs participants de l'IOI, com el Concurs Obert d'Informàtica de Croàcia [11] i l'Olimpíada d'Informàtica dels EUA [68]. A més, hi ha una gran col·lecció de problemes dels concursos polonesos disponibles on-line línia [60].

ICPC

El Concurs Internacional de Programació Col·legial (ICPC, International Collegiate Programming Contest) és un concurs de programació anual per a estudiants universitaris. Cada equip del concurs està format per tres estudiants, i a diferència de l'IOI, els alumnes treballen conjuntament; només hi ha un ordinador disponible per a cada equip.

L'ICPC consta de diverses fases, i només els millors equips estan convidats a la fase final (World Finals). Tot i que hi ha desenes de milers de participants al concurs, només hi ha un petit nombre² d'espais per equips, de manera que fins i tot avançar a la final ja és un gran èxit en algunes regions.

En cada concurs de l'ICPC, els equips disposen de cinc hores de temps per a resoldre uns deu problemes algorísmics. La solució d'un problema només s'accepta si es resolen tots els casos de prova de manera eficient. Durant el concurs, els competidors poden veure els resultats d'altres equips, però durant l'última hora el marcador està congelat i no és possible veure els resultats dels últims enviaments.

Els temes que poden aparèixer a l'ICPC no estan tan bé especificats com els de l'IOI. En tot cas, és evident que calen més coneixements a l'ICPC, sobretot més habilitats matemàtiques.

Concursos on-line

També hi ha molts concursos on-line oberts a tothom. En l'actualitat, la pàgina web amb més concursos actius és Codeforces, que organitza concursos de forma setmanal. A Codeforces, els participants es divideixen en dues divisions: els principiants competeixen a la Div2 i els programadors més experimentats a la Div1. Altres llocs de concurs inclouen AtCoder, CS Academy, HackerRank i Topcoder.

Algunes empreses organitzen concursos on-line amb finals presencials. Exemples d'aquests concursos són Facebook Hacker Cup, Google Code Jam i Yandex.Algorithm. Per descomptat, les empreses també utilitzen aquests concursos per a reclutar programadors: tenir un bon resultat en un concurs és una bona manera de demostrar les teves habilitats.

Llibres

Existeixen alguns llibres (a més d'aquest llibre) que es centren en la programació competitiva i la resolució de problemes algorísmics:

- S. S. Skiena i M. A. Revilla: *Programming Challenges: The Programming Contest Training Manual* [59]
- S. Halim i F. Halim: *Competitive Programming 3: The New Lower Bound of Programming Contests* [33]

²El nombre exacte d'equips a la fase final varia d'un any a un altre; el 2017, hi havia 133 equips.

- K. Diks et al.: *Looking for a Challenge? The Ultimate Problem Set from the University of Warsaw Programming Competitions* [15]

Els dos primers llibres estan pensats per a principiants, mentre que l'últim llibre conté material avançat.

Per descomptat, els llibres generals d'algorismia també són adequats per als programadors competitius. Alguns llibres populars són:

- T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest i C. Stein: *Introduction to Algorithms* [13]
- J. Kleinberg i É. Tardes: *Algorithm Design* [45]
- S. S. Skiena: *The Algorithm Design Manual* [58]

Chapter 2

Complexitat temporal

L'eficiència dels algorismes és important en la programació competitiva. Normalment, és fàcil dissenyar un algorisme que resol el problema lentament, però el veritable repte és inventar un algorisme que sigui ràpid. Si l'algorisme és massa lent només obtindrem punts parcials o cap punt.

La **complexitat temporal** d'un algorisme és el temps, o nombre d'operacions, que l'algorisme necessita per a resoldre entrades. La idea és representar l'eficiència com a una funció de la mida de l'entrada. Quan calculem el cost d'un algorisme podem esbrinar si serà prou ràpid sense implementar-lo.

2.1 Regles de càlcul

La complexitat temporal d'un algorisme es denota per $O(\dots)$ on els punts suspensius representen alguna funció.¹ Normalment, la variable n denota la mida de l'entrada. Per exemple, si l'entrada és una matriu de nombres, és usual prendre n com la mida de la matriu, i si l'entrada és una cadena de text, n serà la mida de la cadena.

Bucles

Sovint els algorismes són lents perquè contenen molts bucles que treballen amb l'entrada. Com més bucles niats (bucles dintre d'altres bucles) contingui l'algorisme, més lent és. Si hi ha k bucles niats, i cadascun d'ells fa n iteracions, la complexitat temporal és $O(n^k)$.

Per exemple, la complexitat temporal del codi següent és $O(n)$:

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {  
    // codi O(1)  
}
```

¹Afegit: la complexitat temporal d'un algorisme mesura com de ràpid creix el nombre d'operacions que l'algorisme executa com més fem créixer la mida de l'entrada. Formalment, la notació $O(f(n))$ és el conjunt de funcions que creixen com a molt tan ràpid com $f(n)$, llevat de factors constants: $O(f(n)) = \{g(n) | \exists n_0, c \forall n \geq n_0 \ g(n) \leq c \cdot f(n)\}$.

I la complexitat temporal del codi següent és $O(n^2)$:

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {  
    for (int j = 1; j <= n; j++) {  
        // codi  $O(1)$   
    }  
}
```

Ordre de magnitud

La complexitat temporal no ens diu el nombre exacte de vegades que s'executa el codi dintre d'el bucle, sinó l'ordre de magnitud. En els exemples següents, el codi dins del bucle s'executa $3n$, $n + 5$ i $\lceil n/2 \rceil$ vegades, però tots ells tenen complexitat de $O(n)$.

```
for (int i = 1; i <= 3*n; i++) {  
    // codi  
}
```

```
for (int i = 1; i <= n+5; i++) {  
    // codi  
}
```

```
for (int i = 1; i <= n; i += 2) {  
    // codi  
}
```

En aquest altre exemple, la complexitat temporal del codi següent és $O(n^2)$:

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {  
    for (int j = i+1; j <= n; j++) {  
        // codi  
    }  
}
```

Fases

Si l'algorisme consta de fases consecutives, la complexitat temporal és la complexitat temporal més gran de les fases. El motiu d'això és que la fase més lenta esdevé el coll d'ampolla del codi.

Per exemple, el següent codi consta de tres fases amb complexitats temporals $O(n)$, $O(n^2)$ i $O(n)$. Així, la complexitat total del temps és $O(n^2)$.

```
for (int i = 1; i <= n; i++) {  
    // codi
```

```

}
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    for (int j = 1; j <= n; j++) {
        // codi
    }
}
for (int i = 1; i <= n; i++) {
    // codi
}

```

Diverses variables

De vegades, la complexitat temporal depèn de varis factors. En aquest cas, podem expressar la complexitat temporal com una fórmula de vàries variables.

Per exemple, la complexitat temporal del el codi següent és $O(nm)$:

```

for (int i = 1; i <= n; i++) {
    for (int j = 1; j <= m; j++) {
        // codi
    }
}

```

Recursió

La complexitat temporal d'una funció recursiva depèn del nombre de vegades que es crida la funció multiplicat per la complexitat temporal d'una única crida.

Per exemple, considereu la funció següent:

```

void f(int n) {
    if (n == 1) return;
    f(n-1);
}

```

La crida $f(n)$ provoca n crides a funcions, i la complexitat temporal de cadascuna d'aquestes crides (sense comptar la crida recursiva) és $O(1)$. Així, la complexitat total del temps és $O(n)$.

Com a altre exemple, considereu la funció següent:

```

void g(int n) {
    if (n == 1) return;
    g(n-1);
    g(n-1);
}

```

En aquest cas, cada crida a la funció genera dues altres crides, excepte quan $n = 1$. Vegem què passa quan es crida g amb el paràmetre n . La taula següent mostra el nombre de crides produït per aquesta crida original:

	crida de funció	nombre de crides
⊕	$g(n)$	1
	$g(n-1)$	2
	$g(n-2)$	4

	$g(1)$	2^{n-1}

En base a això, la complexitat temporal és

$$1 + 2 + 4 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1 = O(2^n).$$

2.2 Clases de complexitat

El llistat següent conté les complexitats temporals més comuns dels algorismes:

$O(1)$ El temps d'execució d'un algorisme de **temps constant** no depèn de la mida d'entrada. Un algorisme típic de temps constant és una fórmula que calcula la resposta directament.

$O(\log n)$ Un algorisme **logarítmic** sovint divideix cada entrada per la meitat a cada pas. El seu cost és logarítmic, perquè $\log_2 n$ és igual al nombre de vegades que és necessari dividir n per 2 fins obtenir 1.

$O(\sqrt{n})$ Un **algorisme d'arrel quadrada** és més lent que $O(\log n)$ però més ràpid que $O(n)$. Una propietat especial de les arrels quadrades és que $\sqrt{n} = n/\sqrt{n}$, de manera que l'arrel quadrada \sqrt{n} està, en certa manera, a la meitat (geomètrica) de l'entrada.

$O(n)$ Un algorisme **linial** és aquell que recorre l'entrada un nombre constant de vegades. Sovint aquesta és la millor complexitat temporal possible en els concursos, perquè normalment cal accedir a cada element de l'entrada com a mínim una vegada abans de produir la resposta.

$O(n \log n)$ Aquest cost sovint indica que l'algorisme ordena l'entrada, perquè aquest és el cost dels algorismes d'ordenació eficients. Una altra possibilitat és que l'algorisme utilitzi una estructura de dades on cada operació triga $O(\log n)$ temps.

$O(n^2)$ Un algorisme **quadràtic** sovint conté dos bucles niats un dintre de l'altre. És possible passar per totes les parelles d'elements de l'entrada en temps $O(n^2)$.

$O(n^3)$ Un algorisme **cúbic** sovint conté tres bucles niats. És possible passar per totes les tripletes d'elements de l'entrada en temps $O(n^3)$.

$O(2^n)$ Aquesta complexitat de temps sovint indica que l'algorisme itera per tot els subconjunts dels elements d'entrada. Per exemple, els subconjunts de $\{1, 2, 3\}$ són \emptyset , $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ i $\{1, 2, 3\}$.

$O(n!)$ Aquesta complexitat de temps sovint indica l'algorisme itera per totes les permutacions dels elements d'entrada. Per exemple, les permutacions de $\{1, 2, 3\}$ són $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ i $(3, 2, 1)$.

Un algorisme és **polinòmic** quan el seu cost és $O(n^k)$ per alguna constant k . Tots els costos anteriors, exceptuant $O(2^n)$ i $O(n!)$, són polinòmics. A la pràctica, la constant k sol ser petita, i sovint s'associen costos polinòmics amb que l'algorisme és *eficient*.

La majoria dels algorismes d'aquest llibre són polinòmics. Tot i així, hi ha molts problemes importants per als quals no es coneix cap algorisme polinòmic, és a dir, ningú sap com resoldre'ls de manera eficient. Els problemes **NP-hard** són un conjunt important de problemes, per als quals no hi ha cap algorisme polinòmic conegut².

2.3 Estimació de l'eficiència

Quan calculem la complexitat temporal d'un algorisme podem comprovar, abans d'implementar-lo, si és prou eficient per al problema. El punt de partida per les estimacions és el fet que un ordinador modern pot realitzar alguns centenars de milions d'operacions en un segon.

Per exemple, considerem un problema on el límit de temps és d'un segon i la mida d'entrada és $n = 10^5$. Si la complexitat temporal és $O(n^2)$, l'algorisme realitzarà unes $(10^5)^2 = 10^{10}$ operacions. Això hauria de trigar almenys unes desenes de segons, de manera que l'algorisme probablement sigui massa lent per resoldre el problema.

D'altra banda, donada la mida de l'entrada, podem intentar *endevinar* la complexitat de l'algorisme que hem de programar per a resoldre el problema. La taula següent conté algunes estimacions útils suposant un límit de temps d'un segon.³

	mida d'entrada	complexitat esperada
	$n \leq 10$	$O(n!)$
	$n \leq 20$	$O(2^n)$
⊕	$n \leq 500$	$O(n^3)$
	$n \leq 5000$	$O(n^2)$
	$n \leq 10^6$	$O(n \log n)$ o $O(n)$
	n és gran	$O(1)$ o $O(\log n)$

Per exemple, si la mida de l'entrada és $n = 10^5$, segurament la solució del problema sigui un algorisme $O(n)$ o $O(n \log n)$. Aquesta informació facilita el disseny de l'algorisme, perquè descarta enfocaments que donarien un algorisme amb un cost massa gran.

Tot i així, és important recordar que la complexitat temporal és només una estimació de l'eficiència, perquè amaga els *factors constants*. Per exemple, un

²Un llibre clàssic sobre el tema és de M. R. Garey i D. S. Johnson *Informàtica i intractabilitat: una guia per a la teoria de NP-Compleitud* [28].

³No totes les operacions costen el mateix: per exemple, les operacions d'entrada i sortida són més costoses que les operacions aritmètiques.

algorisme que s'executa en $O(n)$ temps potser fa $n/2$ o $5n$ operacions. Això és un factor important de cara al temps real que farà servir l'algorisme.

2.4 Suma màxima d'un subvector

Sovint hi ha diversos algorismes que poden resoldre un problema i que tenen distintes complexitats temporals. Aquesta secció tracta d'un problema clàssic que té una solució $O(n^3)$ senzilla. Tanmateix, dissenyant un algorisme millor, és possible resoldre el problema en temps $O(n^2)$ temps o fins i tot en temps $O(n)$.

Donat un vector de n nombres, la nostra tasca és calcular el **suma màxima d'un subvector**, és a dir, la suma més gran possible d'una seqüència de valors consecutius del vector⁴. El problema és interessant quan hi ha valors negatius

en el vector. Per exemple, en el vector \oplus

-1	2	4	-3	5	2	-5	2
----	---	---	----	---	---	----	---

 el subvector següent té suma màxima 10: \oplus

-1	2	4	-3	5	2	-5	2
----	---	---	----	---	---	----	---

Suposem que es permet triar un subvector buit, de manera que la suma màxima és sempre com a mínim 0.

Algorisme 1

Una manera senzilla de resoldre el problema és passar per tots els subvectors possibles, calcular la suma de valors de cada subvector i mantenir la suma màxima. El codi següent implementa aquest algorisme:

```
int millor = 0;
for (int a = 0; a < n; a++) {
    for (int b = a; b < n; b++) {
        int suma = 0;
        for (int k = a; k <= b; k++) {
            suma += v[k];
        }
        millor = max(millor, suma);
    }
}
cout << millor << "\n";
```

Les variables a i b contenen el primer i el darrer índex del subvector, i la suma de valors es calcula a la variable $suma$. La variable $millor$ conté la suma màxima trobada durant la cerca.

La complexitat temporal de l'algorisme és $O(n^3)$, perquè consta de tres bucles niats que recorren l'entrada.

⁴El llibre *Programming Pearls* [8] de J. Bentley va popularitzar aquest problema.

Algorisme 2

És fàcil fer que l'algorisme 1 sigui més eficient eliminant-ne un bucle. Això és possible si calculem la suma a la vegada que moguem el darrer índex del subvector. El resultat és el codi següent:

```
int millor = 0;
for (int a = 0; a < n; a++) {
    int suma = 0;
    for (int b = a; b < n; b++) {
        suma += v[b];
        millor = max(millor, suma);
    }
}
cout << millor << "\n";
```

Després d'aquest canvi, la complexitat temporal és $O(n^2)$.

Algorisme 3

Sorprenentment, és possible⁵ resoldre el problema en temps $O(n)$, que significa que n'hi ha prou amb un sol bucle. La idea és calcular, per a cada posició del vector, la suma màxima d'un subvector que acaba en aquesta posició. Després d'això, la resposta al problema és el màxim d'aquestes sumes.

Considereu el subproblema de trobar la suma màxima del subvector que acaba a la posició k . Hi ha dues possibilitats:

1. El subvector només conté l'element a la posició k .
2. El subvector consisteix en un subvector que acaba a la posició $k - 1$, seguit de l'element a la posició k .

En aquest darrer cas, ja que volem trobar un subvector amb suma màxima, el subvector que acaba a la posició $k - 1$ també ha de tenir suma màxima. Així, podem resoldre el problema de manera eficient calculant la suma màxima del subvector per a cada posició final d'esquerra a dreta.

El codi següent implementa l'algorisme:

```
int millor = 0, suma = 0;
for (int k = 0; k < n; k++) {
    suma = max(v[k], suma+v[k]);
    millor = max(millor, suma);
}
cout << millor << "\n";
```

L'algorisme només conté un bucle que passa per l'entrada, per tant, la complexitat temporal és $O(n)$. Aquesta és també la millor complexitat temporal

⁵En [8], aquest algorisme de temps lineal s'atribueix a J. B. Kadane, i l'algorisme de vegades s'anomena **algorisme de Kadane**.

possible, perquè qualsevol algorisme per aquest problema ha d'examinar tots els elements del vector almenys una vegada.

Comparació d'eficiència

És interessant estudiar com d'eficients són els algorismes a la pràctica. La taula següent mostra els temps de funcionament dels algorismes anteriors per a diferents valors de n en un ordinador modern.

En cada prova, vam generar l'entrada aleatòriament, i no vam mesurar el temps necessari per llegir l'entrada.

	mida del vector n	algorisme 1	algorisme 2	algorisme 3
⊕	10^2	0.0 s	0.0 s	0.0 s
	10^3	0.1 s	0.0 s	0.0 s
	10^4	> 10.0 s	0.1 s	0.0 s
	10^5	> 10.0 s	5.3 s	0.0 s
	10^6	> 10.0 s	> 10.0 s	0.0 s
	10^7	> 10.0 s	> 10.0 s	0.0 s

La comparació mostra que tots els algorismes són eficients quan la mida de l'entrada és petita, però les entrades més grans mostren diferències notables entre els temps d'execució dels algorismes. L'algorisme 1 es torna lent quan $n = 10^4$, i l'algorisme 2 es torna lent quan $n = 10^5$. Només l'algorisme 3 pot processar fins i tot les entrades més grans instantàniament.

Chapter 3

Ordenació

El problema de l'**ordenació** és un problema fonamental del disseny d'algoritmes. Molts algorismes eficients fan servir l'ordenació com a subrutina, perquè sovint és més fàcil de processar dades si els elements estan ordenats.

Per exemple, el problema de "té un vector dos elements iguals?" és fàcil de resoldre mitjançant l'ordenació. Si el vector matriu conté dos elements iguals, després d'ordenar-los estaran l'un al costat de l'altre, de manera que és fàcil trobar-los. Tanmateix, el problema "quin és l'element més freqüent d'un vector?" es pot resoldre de la mateixa manera.

Hi ha molts algorismes per ordenar, i aquests són també bons exemples de com aplicar diferents tècniques del disseny d'algoritmes. Els algorismes d'ordenació general eficients treballen en $O(n \log n)$ temps, i molts algorismes que utilitzen l'ordenació també com a subrutina tenen aquesta complexitat temporal.

3.1 Teoria de l'ordenació

El problema bàsic de l'ordenació és el següent:

Donat un vector que conté n elements, ordena els elements en ordre creixent.

Per exemple, el vector \boxplus

1	3	8	2	9	2	5	6
---	---	---	---	---	---	---	---

 queda de la manera següent després d'ordenar-lo: \boxplus

1	2	2	3	5	6	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---

Algorismes $O(n^2)$

Alguns algorismes senzills per ordenar un vector treballen en $O(n^2)$ temps. Aquests algorismes són curts i generalment consten de dos bucles niats. Un algorisme famós amb complexitat $O(n^2)$ és l'**ordenació amb bombolla (bubble sort)** on els elements del vector es mouen com si fossin "bombolles".

L'ordenació amb bombolla consta de n rondes. A cada ronda, l'algoritme itera els elements del vector. Sempre que es troben dos elements consecutius

que no estan en ordre correcte, l'algoritme els intercanvia. L'algorisme es pot implementar de la següent manera:

```
for (int i = 0; i < n; i++) {  
    for (int j = 0; j < n-1; j++) {  
        if (vector[j] > vector[j+1]) {  
            swap(vector[j], vector[j+1]);  
        }  
    }  
}
```

Després de la primera ronda de l'algorisme, l'element més gran estarà en la posició correcta, i en general, després de k rondes, els k elements més grans estaran en les posicions correctes. Així, després de n rondes, el vector quedarà ordenat.

Per exemple, en el vector

⊕	1	3	8	2	9	2	5	6
---	---	---	---	---	---	---	---	---

la primera ronda d'ordenació amb bombolla intercanvia els elements com segueix:







Inversions

L'ordenació amb bombolla és un exemple d'algorisme d'ordenació que sempre intercanvia elements *consecutius* del vector. La complexitat temporal d'aquest algorisme és $O(n^2)$, donat que aquest és el nombre de comparacions que es fan. (I, en el pitjor cas, és el nombre de swaps).

Un concepte útil a l'hora d'analitzar l'ordenació algorismes és el concepte d'**inversió**: un parell d'elements de vector ($\text{vector}[a], \text{vector}[b]$) tal que $a < b$ i $\text{vector}[a] > \text{vector}[b]$. És a dir, un parell d'elements en l'ordre incorrecte. Per

exemple, el vector \oplus

1	2	2	6	3	5	9	8
---	---	---	---	---	---	---	---

 té tres inversions: (6,3), (6,5) i (9,8). El nombre d'inversions indica quanta feina es necessita per ordenar el vector. Un vector està completament ordenat quan no hi ha inversions. D'altra banda, si tots els elements del vector estan en ordre invers, el nombre d'inversions és el més gran possible:

$$1 + 2 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2} = O(n^2)$$

Intercanviar un parell d'elements consecutius en ordre incorrecte elimina exactament una inversió del vector. Per tant, si un algorisme d'ordenació només intercanvia elements consecutius, cada intercanvi elimina com a màxim una inversió i la complexitat temporal de l'algorisme és almenys $O(n^2)$.

Algorismes $O(n \log n)$

És possible ordenar una vector de manera eficient en temps $O(n \log n)$ fent servir algorismes que no es limiten a intercanviar elements consecutius. Un d'aquests algorismes és **merge sort**¹, que es basa en la recursivitat.

El merge sort ordena un subvector $\text{array}[a \dots b]$ de la següent manera:

1. Si $a = b$, no feu res, perquè el subvector ja està ordenat.
2. Calcula la posició de l'element central: $k = \lfloor (a + b)/2 \rfloor$.
3. Ordena recursivament el subvector $\text{array}[a \dots k]$.
4. Ordena recursivament el subvector $\text{array}[k + 1 \dots b]$.
5. Fusiona (*merge*) els subvectors ordenats $\text{array}[a \dots k]$ i $\text{array}[k + 1 \dots b]$ en un subvector ordenat $\text{array}[a \dots b]$.

El merge sort és un algorisme eficient, perquè cada pas redueix a la meitat la mida del subvector. La recursivitat consisteix en $O(\log n)$ nivells, i cada nivell triga temps $O(n)$. És possible fusionar i ordenar els subvectors $\text{array}[a \dots k]$ i $\text{array}[k + 1 \dots b]$ en temps linial perquè ja estan ordenats.

Per exemple, considerem el vector següent: \oplus

1	3	6	2	8	2	5	9
---	---	---	---	---	---	---	---

¹Segons [47], merge sort va ser inventat per J. von Neumann el 1945.

Dividim el vector en dos subvectors: \oplus

1	3	6	2
---	---	---	---

8	2	5	9
---	---	---	---

Ordenem els subvectors de manera recursiva: \oplus

1	2	3	6
---	---	---	---

2	5	8	9
---	---	---	---

Finalment, l'algorisme fusiona els subvectors ordenats i crea el vector final:

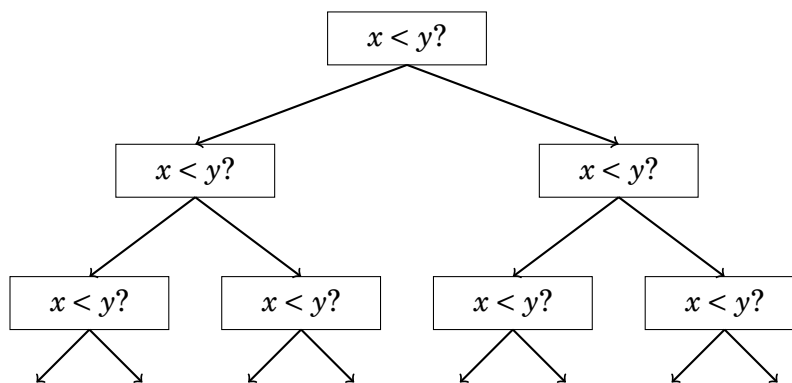
\oplus

1	2	2	3	5	6	8	9
---	---	---	---	---	---	---	---

Límit inferior per l'ordenació

És possible ordenar més ràpidament que en $O(n \log n)$ temps? Resulta que això *no* és possible quan fem servir algorismes d'ordenació que es basen en comparar elements d'un vector.

Aquest límit inferior $O(n \log n)$ es demostra si hom considera l'ordenació com un procés on cada comparació de dos elements proporciona més informació sobre el contingut del vector original. El procés crea el següent arbre:



Aquí " $x < y$?" significa que comparem alguns elements x i y . Si $x < y$, el procés continua cap a l'esquerra, i en cas contrari cap a la dreta. Els resultats d'aquest procés són les $n!$ maneres en que els n elements poden aparèixer en el vector. Per aquest motiu, l'alçada de l'arbre ha de ser almenys

$$\log_2(n!) = \log_2(1) + \log_2(2) + \dots + \log_2(n).$$

Obtenim un límit inferior per a aquesta suma escollint els últims $n/2$ elements i canviant el valor de cada element per $\log_2(n/2)$. Això dona una estimació

$$\log_2(n!) \geq (n/2) \cdot \log_2(n/2),$$

de manera que l'alçada de l'arbre i el mínim nombre possible de passos en un algorisme d'ordenació és $O(n \log n)$.

Ordenació per comptatge

El límit inferior $n \log n$ no s'aplica a algorismes que no comparen els elements del vector però que utilitzen altra informació. Un exemple d'aquests algorismes és l'ordenació per comptatge (**counting sort**) que ordena un vector en temps $O(n)$ assumint que tots els elements del vector són enters entre $0 \dots c$ i $c = O(n)$.

L'algorisme crea un vector adicional de mida c , els índexs del qual són els elements del vector original. L'algoritme itera a través del vector original i calcula quantes vegades cada element apareix al vector.

Per exemple, el vector \oplus

1	3	6	9	9	3	5	9
---	---	---	---	---	---	---	---

 li correspon el

1 2 3 4 5 6 7 8 9

següent vector de comptatge: \oplus

1	0	2	0	1	1	0	0	3
---	---	---	---	---	---	---	---	---

Per exemple, el valor a la posició 3 del vector de comptatge és 2, perquè l'element 3 apareix 2 vegades al vector original.

La construcció del vector de comptatge triga temps $O(n)$. Després d'això, el vector ordenat es crea en temps $O(n)$ perquè recuperem el nombre d'ocurrències de cada element en el vector de comptatge. Per tant, la complexitat temporal total és $O(n)$.

L'ordenació per comptatge és un algorisme molt eficient però només es pot fer servir quan el valor c és prou petit, de manera que els elements del vector es puguin fer servir com a índexs al vector de comptatge.

3.2 Ordenació en C++

Gairebé mai és bona idea fer servir algorismes d'ordenació casolans en un concurs, perquè els llenguatges de programació ja tenen bones implementacions. Per exemple, la biblioteca estàndard de C++ conté la funció `sort` que es pot fer servir per a ordenar vectors i altres estructures de dades.

Hi ha molts avantatges en fer servir les funcions de les biblioteques. Primer, estalvia temps perquè no cal implementar la funció. Segon, la implementació de la biblioteca és certament correcta i eficient: no és probable que la teva funció de classificació casolana sigui millor.

En aquesta secció veurem com fer servir la funció C++ `sort`. El codi següent ordena un vector en ordre creixent:

```
vector<int> v = {4,2,5,3,5,8,3};
sort(v.begin(),v.end());
```

Després de l'ordenació, el contingut del vector és `[2,3,3,4,5,5,8]`. Els elements s'ordenen per defecte en ordre creixent, però també és possible ordenar-los en ordre invers:

```
sort(v.rbegin(),v.rend());
```

També és possible ordenar un array ordinari de C:

```
int n = 7; // mida del array
int a[] = {4,2,5,3,5,8,3};
sort(a,a+n);
```

El codi següent ordena la cadena `s`:

```
string s = "monkey";
sort(s.begin(), s.end());
```

Ordenar una cadena significa que ordenem tots els seus caràcters. Per exemple, la cadena "monkey" es converteix en "ekmnoy".

Operadors de comparació

La funció `sort` requereix que es defineix un **operador de comparació** per al tipus de dades dels elements a ordenar. Quan ordenem, es farà servir aquest operador sempre que sigui necessari esbrinar l'ordre de dos elements.

La majoria dels tipus de dades C++ tenen un operador de comparació definit per defecte, i els elements d'aquests tipus es poden ordenar automàticament. Per exemple, els nombres s'ordenen segons els seus valors i les cadenes estan ordenades per ordre alfabètic.

Els parells (`pair`) s'ordenen en funció dels seus primers elements (`first`). Si els primers elements dels dos parells són iguals, aleshores s'ordenen segons els segons elements (`second`):

```
vector<pair<int,int>> v;
v.push_back({1,5});
v.push_back({2,3});
v.push_back({1,2});
sort(v.begin(), v.end());
```

Després d'això, l'ordre dels parelles és (1,2), (1,5) i (2,3).

De manera semblant, les tuples (`tuple`) s'ordenen pel primer element, seguit pel segon element en cas d'empat, el tercer, etc.²:

```
vector<tuple<int,int,int>> v;
v.push_back({2,1,4});
v.push_back({1,5,3});
v.push_back({2,1,3});
sort(v.begin(), v.end());
```

Després d'això, l'ordre de les tuples és (1,5,3), (2,1,3) i (2,1,4).

Aquesta idea de les tuples també s'extén als vectors.

Estructures definides per l'usuari

Les estructures definides per l'usuari no tenen un operador de comparació definit per defecte. Una manera de fer-ho és definir l'operador a dintre de la estructura de dades com a funció `operator<`, el paràmetre del qual és un altre element del mateix tipus. L'operador hauria de retornar `true` si l'element és més petit que el paràmetre, i `false` en cas contrari.

²Tingueu en compte que en alguns compiladors antics, és necessari fer servir la funció `make_tuple` en lloc de les claus (per exemple, `make_tuple(2,1,4)` en lloc de `{2,1,4}`).

Per exemple, l'estructura `P` següent conté les coordenades x i y d'un punt. L'operador de comparació es defineix de manera que els punts s'ordenen per la coordenada x i, en cas d'empat, per la coordenada y .

```
struct P {
    int x, y;
    operador bool<(const P &p) {
        if (x != p.x) return x < p.x;
        else return y < p.y;
    }
};
```

Funcions de comparació

També és possible donar una **funció de comparació** externa (callback) a la funció `sort`. Per exemple, la següent funció de comparació `comp` ordena les cadenes primer per longitud i segon per ordre alfabètic:

```
bool comp(string a, string b) {
    if (a.size() != b.size()) retorna a.size() < b.size();
    return a < b;
}
```

Ara podem ordenar un vector de cadenes així:

```
sort(v.begin(), v.end(), comp);
```

3.3 Cerca binària

Un mètode general per cercar un element en una vector és fer servir un bucle `for` que iteri pels elements del vector. Per exemple, el codi següent cerca un element x en el vector v :

```
for (int i = 0; i < n; i++) {
    if (v[i] == x) {
        // trobem x a la posicio i
    }
}
```

La complexitat temporal d'aquest codi és $O(n)$, perquè en el pitjor dels casos, cal comprovar tots els elements del vector. Si l'ordre dels elements és arbitrari, aquesta és també la millor solució, perquè no tenim informació addicional per saber en quin lloc del vector hem de cercar l'element x .

Tanmateix, si la vector està *ordenat*, la situació és diferent. En aquest cas és possible realitzar el cerca molt més ràpid, perquè l'ordre dels elements del

vector guia la cerca. El següent algorisme de **cerca binària** cerca eficientment un element en un vector ordenat en temps $O(\log n)$.

Mètode 1

La forma habitual d'implementar la cerca binària s'assembla a buscar una paraula en un diccionari. La cerca manté una regió activa al vector, que inicialment conté tots els elements del vector. Aleshores, es fa una sèrie de passos, cadascun dels quals redueix a la meitat la mida de la regió activa.

A cada pas, la cerca comprova l'element central de la regió activa. Si l'element central és l'element objectiu, la cerca acaba. En cas contrari, la cerca continua de forma recursiva a la meitat esquerra o dreta de la regió, en funció del valor de l'element mitjà.

La idea anterior es pot implementar de la següent manera:

```
int a = 0, b = n-1;
while (a <= b) {
    int k = (a+b)/2;
    if (v[k] == x) {
        // trobem x a la posicio k
    }
    if (v[k] > x) b = k-1;
    else a = k+1;
}
```

En aquesta implementació, la regió activa és $a \dots b$, i la regió inicial és $0 \dots n-1$. L'algorisme redueix a la meitat la mida de la regió a cada pas, per tant, la complexitat temporal és $O(\log n)$.

Mètode 2

Un mètode alternatiu per implementar la cerca binària es basa en una manera eficient d'iterar els elements de la vector. La idea és fer salts i reduir la velocitat quan ens acostem a l'element objectiu.

La cerca passa per la vector d'esquerra a dreta, i la longitud inicial del salt és $n/2$. A cada pas, la longitud del salt es reduirà a la meitat: primer $n/4$, després $n/8$, $n/16$, etc., fins que finalment la longitud és 1. Després dels salts, l'element objectiu o bé s'ha trobat o bé sabem que no apareix al vector.

El codi següent implementa la idea anterior:

```
int k = 0;
for (int b = n/2; b >= 1; b /= 2) {
    while (k+b < n && v[k+b] <= x) k += b;
}
if (v[k] == x) {
    // trobem x a la posicio x
}
```

Durant la cerca, la variable b conté la longitud actual del salt. La complexitat temporal és també $O(\log n)$, perquè el codi del bucle `while` es realitza com a màxim dues vegades per a cada llargada de salt.

Funcions C++

La biblioteca estàndard de C++ conté les funcions següents que es basen en cerca binària i triguen temps logarítmic:

- `lower_bound` retorna un punter al primer element del vector el valor del qual és almenys x .
- `upper_bound` retorna un punter a primer element del vector el valor del qual és més gran que x .
- `equal_range` retorna els dos punters anteriors.

Les funcions assumeixen que el vector està ordenat. Si aquest primer element no existeix, les funcions retornen un punter a una posició més enllà de l'últim element del vector³. Per exemple, el codi següent esbrina si un vector ordenat conté un element amb el valor x :

```
int k = lower_bound(v.begin(), v.end(), x) - v.begin();
if (k < n && v[k] == x) {
    // trobem x a la posicio k
}
```

El codi següent compta el nombre d'elements amb valor x :

```
auto a = lower_bound(v.begin(), v.end(), x);
auto b = upper_bound(v.begin(), v.end(), x);
cout << b-a << "\n";
```

Utilitzant `equal_range`, el codi queda més curt:

```
auto r = equal_range(v.begin(), v.end(), x);
cout << r.second-r.first << "\n";
```

Trobar la solució més petita

Un ús important de la cerca binària és trobar la posició on canvia el valor d'una funció. Suposem que volem trobar el valor més petit k que és una solució vàlida per a un problema. Ens donen una funció `ok(x)` que retorna `true` si x és vàlida i `false` en cas contrari. A més, sabem que `ok(x)` és fals quan $x < k$ i `true` quan $x \geq k$. És a dir:

³N. del T.: Dit d'altra manera: l'interval semi-obert `[lower_bound(x), upper_bound(x))` assenyalava en quin lloc són, o haurien de ser, els elements amb valor x .

\oplus	x	0	1	...	$k-1$	k	$k+1$...
	$ok(x)$	f	f	...	f	t	t	...

Ara, el valor de k es pot trobar mitjançant la cerca binària:

```
int x = -1;
for (int b = z; b >= 1; b /= 2) {
    while (!ok(x+b)) x += b;
}
int k = x+1;
```

< La cerca troba el valor més gran de x per al qual $ok(x)$ és false. Així, el següent valor $k = x + 1$ és necessàriament el valor més petit possible per al qual $ok(k)$ és true. La longitud inicial del salt z ha de ser prou gran, per exemple algun valor per al qual sabem per endavant que $ok(z)$ és true.

L'algorisme crida a la funció ok $O(\log z)$ vegades, per tant la complexitat total depèn de la funció ok . Per exemple, si aquesta funció triga temps $O(n)$, la complexitat total és $O(n \log z)$.

Trobar el valor màxim

La cerca binària també es pot fer servir per trobar el valor màxim d'una funció que primer creix i després decreix. La nostra tasca és trobar una posició k tal que

- $f(x) < f(x+1)$ quan $x < k$, i
- $f(x) > f(x+1)$ quan $x \geq k$.

La idea és fer servir la cerca binària per trobar el valor més gran de x tal que $f(x) < f(x+1)$. Això implica que $k = x + 1$ perquè $f(x+1) > f(x+2)$. El codi següent implementa la cerca:

```
int x = -1;
for (int b = z; b >= 1; b /= 2) {
    while (f(x+b) < f(x+b+1)) x += b;
}
int k = x+1;
```

Tingueu en compte que, a diferència de la cerca binària ordinària, en aquest cas no permetem que els valors consecutius de la funció siguin iguals, donat que no sabríem en quina direcció continuar la cerca.

Chapter 4

Estructures de dades

Una **estructura de dades** és una manera d'emmagatzemar dades a la memòria d'un ordinador. És important escollir l'estructura de dades adequada per a un problema, perquè cada estructura de dades té els seus avantatges i inconvenients. La pregunta crucial és: quines operacions són eficients en l'estructura de dades escollida?

Aquest capítol presenta les estructures de dades més importants a la biblioteca estàndard de C++. És molt bona idea fer servir la biblioteca estàndard sempre que sigui possible, perquè ens estalviarà molt de temps. Més endavant parlarem d'estructures de dades més sofisticades no estan disponibles a la biblioteca estàndard.

4.1 Vectors dinàmics

Un **vector dinàmic** és un vector la mida del qual pot canviar durant l'execució del programa. El vector dinàmic més popular en C++ és l'estructura `vector`, que també pot fer-se servir gairebé com un array de C normal.

El codi següent crea un vector buit i hi afegeix tres elements:

```
vector<int> v;  
v.push_back(3); // [3]  
v.push_back(2); // [3,2]  
v.push_back(5); // [3,2,5]
```

Després d'això, podem accedir als elements com si fos un array de C normal:

```
cout << v[0] << "\n"; // 3  
cout << v[1] << "\n"; // 2  
cout << v[2] << "\n"; // 5
```

La funció `size` retorna el nombre d'elements del vector. El codi següent itera el vector i escriu tots els elements:

```
for (int i = 0; i < v.size(); i++) {  
    cout << v[i] << "\n";  
}
```

```
}
```

Una manera més concisa d'iterar un vector és la següent:

```
for (auto x : v) {  
    cout << x << "\n";  
}
```

La funció `back` retorna l'últim element en el vector, i la funció `pop_back` elimina l'últim element:

```
vector<int> v;  
v.push_back(5);  
v.push_back(2);  
cout << v.back() << "\n"; // 2  
v.pop_back();  
cout << v.back() << "\n"; // 5
```

El codi següent crea un vector de cinc elements:

```
vector<int> v = {2,4,2,5,1};
```

Una altra manera de crear un vector és donar el nombre d'elements i el valor inicial de cada element:

```
// mida 10, valor inicial 0  
vector<int> v(10);
```

```
// mida 10, valor inicial 5  
vector<int> v(10, 5);
```

La implementació interna d'un vector fa servir un array ordinari. Si la mida del vector augmenta i l'espai reservat es massa petit, es crea un nou array i tot els elements es mouen al nou espai. Però això no passa sovint, i la complexitat temporal promig de fer un `push_back` és $O(1)$.

L'estructura cadena (`string`) és un vector dinàmic de caràcters. A més, hi ha una sintaxi especial per a les cadenes que no està disponible en les altres estructures de dades. Les cadenes es poden concatenar fent servir el símbol `+`. La funció `substr(k,x)` retorna la subcadena que comença a la posició *k* i té longitud *x*, i la funció `find(t)` troba la posició de la primera ocurrència d'una subcadena *t*.

El codi següent presenta algunes operacions de cadenes:

```
string a = "hatti";  
string b = a+a;  
cout << b << "\n"; // hattihatti  
b[5] = 'v';  
cout << b << "\n"; // hattivatti  
string c = b.substr(3,4);
```



```
cout << c << "\n"; // tiva
```

4.2 Estructures conjunt

Un **conjunt** és una estructura de dades que manté una col·lecció d'elements. Les operacions bàsiques dels conjunts són inserir, cercar i eliminar.

La biblioteca estàndard de C++ conté dues implementacions: L'estructura `set` es basa en arbres binari equilibrats i les seves operacions triguen $O(\log n)$ en cas pitjor. L'estructura `unordered_set` fa serving hashing, i les seves operacions triguen $O(1)$ en mitjana.

Quina implementació triar és sovint qüestió de gustos. El benefici de l'estructura `set` és que manté l'ordre dels elements i ofereix funcions que no estan disponibles a `unordered_set`. D'altra banda, `unordered_set` pot ser més eficient.

El codi següent crea un conjunt que conté nombres enters, i mostra algunes de les operacions. La funció `insert` afegeix un element al conjunt, la funció `count` retorna el nombre d'ocurrències d'un element del conjunt, i la funció `erase` elimina un element del conjunt.

```
set<int> s;  
s.insert(3);  
s.insert(2);  
s.insert(5);  
cout << s.count(3) << "\n"; // 1  
cout << s.count(4) << "\n"; // 0  
s.erase(3);  
s.insert(4);  
cout << s.count(3) << "\n"; // 0  
cout << s.count(4) << "\n"; // 1
```

Un conjunt es pot fer servir com un vector, però no es pot accedir als elements fent servir la notació `[]`. El codi següent crea un conjunt, escriu el nombre d'elements, i itera per tots els elements:

```
set<int> s = {2,5,6,8};  
cout << s.size() << "\n"; // 4  
for (auto x : s) {  
    cout << x << "\n";  
}
```

Una propietat important dels conjunts és que tots els seus elements són *diferents*. Així, la funció `count` sempre retorna 0 (l'element no està al conjunt) o 1 (l'element és al conjunt), i la funció `insert` no s'afegeix mai un element al conjunt si ja hi és. Això es pot veure al codi següent:

```
set<int> s;  
s.insert(5);  
s.insert(5);
```

```
s.insert(5);  
cout << s.count(5) << "\n"; // 1
```

C++ també conté les estructures `multiset` i `unordered_multiset`, que funcionen com `set` i `unordered_set` excepte que poden contenir vàries instàncies d'un element. Per exemple, al codi següent afegeix tres instàncies del número 5 a un multiconjunt:

```
multiset<int> s;  
s.insert(5);  
s.insert(5);  
s.insert(5);  
cout << s.count(5) << "\n"; // 3
```

La funció `erase` elimina totes les instàncies d'un element d'un multiconjunt:

```
s.erase(5);  
cout << s.count(5) << "\n"; // 0
```

Sovint només volem eliminar una instància, que podem fer de la següent manera:

```
s.erase(s.find(5));  
cout << s.count(5) << "\n"; // 2
```

4.3 Estructures mapa

Un **mapa** és un vector que consisteix de parells clau-valor. Mentre que les claus d'un vector normal sempre són els nombres enters consecutius $0, 1, \dots, n-1$, on n és la mida del vector, les claus d'un mapa poden ser de qualsevol tipus de dades i no tenen perquè ser consecutius.

La biblioteca estàndard de C++ conté dos implementacions de mapa que es corresponen amb les implmentacions de conjunts: l'estructura `map` es basa en un arbre binari equilibrat i accedir als elements triga $O(\log n)$, mentre que l'estructura `unordered_map` fa servir hashing i accedir als elements triga $O(1)$ de mitjana.

El codi següent crea un mapa on les claus són cadenes i els valors són nombres enters:

```
map<string,int> m;  
m["monkey"] = 4;  
m["banana"] = 3;  
m["harpsichord"] = 9;  
cout << m["banana"] << "\n"; // 3
```

Si es demana el valor d'una clau però el mapa no la conté, la clau s'afegeix automàticament al mapa amb un valor per defecte. Per exemple, en el codi següent, la clau "aybaltu" s'afegeix al mapa amb valor 0.

```
map<string,int> m;  
cout << m["aybabbu"] << "\n"; // 0
```

La funció `count` comprova si el mapa conté una clau:

```
if (m.count("aybabbu")) {  
    // la clau existeix  
}
```

El codi següent escriu totes les claus i valors d'un mapa:

```
for (auto x : m) {  
    cout << x.first << " " << x.second << "\n";  
}
```

4.4 Iteradors i intervals

Moltes funcions de la biblioteca estàndard de C++ operen amb iteradors. Un **iterador** (iterator) és una variable que apunta a un element d'una estructura de dades.

Els iteradors `begin` i `end` defineixen un interval que conté tots els elements d'una estructura de dades. L'iterador `begin` apunta al primer element de l'estructura de dades, i l'iterador `end` apunta a la posició *després de* l'últim element. Per exemple:

```
    { 3, 4, 6, 8, 12, 13, 14, 17 }  
      ↑                               ↑  
    s.begin()                       s.end()
```

Observeu l'asimetria dels iteradors: `s.begin()` apunta a un element de l'estructura de dades, mentre que `s.end()` apunta fora de l'estructura de dades. És a dir, l'interval definit pels iteradors és *semi-obert*.

Treballar amb intervals

Els iteradors es fan servir en la biblioteca estàndard de C++ per a passar intervals d'elements en una estructura de dades. Normalment, volem processar tots els elements d'una estructura de dades, i per tant fem servir els iteradors `begin` i `end`.

Per exemple, el codi següent ordena un vector fent servir la funció `sort`, després inverteix l'ordre dels elements fent servir la funció `reverse`, i finalment barreja l'ordre de els elements fent servir la funció `random_shuffle`.

```
sort(v.begin(), v.end());  
reverse(v.begin(), v.end());  
random_shuffle(v.begin(), v.end());
```

Aquestes funcions també es poden fer servir amb arrays ordinaris de C. En aquest cas, les funcions reben punters a l'array en lloc d'iteradors:

```
sort(a, a+n);  
reverse(a, a+n);  
random_shuffle(a, a+n);
```

Iteradors de conjunts

Els iteradors es fan servir sovint per a accedir als elements d'un conjunt. El codi següent crea un iterador `it` que assenyalava a l'element més petit d'un conjunt:

```
set<int>::iterator it = s.begin();
```

També es pot escriure així:

```
auto it = s.begin();
```

Per a accedir a l'element que l'iterador assenyalava es fa servir el símbol `*`. Per exemple, el següent codi imprimeix el primer element del conjunt:

```
auto it = s.begin();  
cout << *it << "\n";
```

Els iteradors es poden moure mitjançant els operadors `++` (endavant) i `--` (enrere), és a dir, moure l'iterador a l'element següent o l'element anterior.

El codi següent escriu tots els elements en ordre creixent:

```
for (auto it = s.begin(); it != s.end(); it++) {  
    cout << *it << "\n";  
}
```

El codi següent escriu l'element més gran del conjunt:

```
auto it = s.end(); it--;  
cout << *it << "\n";
```

La funció `find(x)` retorna un iterador que apunta a un element el valor del qual és `x`. Si el conjunt no conté `x`, l'iterador retornat serà `end`.

```
auto it = s.find(x);  
if (it == s.end()) {  
    // no trobem x  
}
```

La funció `lower_bound(x)` retorna un iterador al primer element del conjunt el valor del qual és *almenys* `x`, i la funció `upper_bound(x)` retorna un iterador al primer element del conjunt el valor del qual és *més gran que* `x`. En ambdós

casos, si aquest primer element del conjunt no existeix, retornen end.¹ Aquestes funcions no són compatibles amb l'estructura `unordered_set` perquè aquesta no manté l'ordre dels elements.

Per exemple, el codi següent troba l'element més proper a x :

```
auto it = s.lower_bound(x);
if (it == s.begin()) {
    cout << *it << "\n";
} else if (it == s.end()) {
    it--;
    cout << *it << "\n";
} else {
    int a = *it; it--;
    int b = *it;
    if (x-b < a-x) cout << b << "\n";
    else cout << a << "\n";
}
```

El codi suposa que el conjunt no està buit, i repassa tots els casos possibles utilitzant un iterador `it`. L'iterador apunta al valor més petit el valor del qual és almenys x . Si `it` és igual a `begin`, l'element corresponent és el més proper a x . Si `it` és igual a `end`, l'element més gran del conjunt és el més proper a x . Si no es compleix cap dels dos casos anteriors, l'element més proper a x és o bé l'element assenyalat per `it` o bé l'element anterior.

4.5 Altres estructures

Conjunt de bits

Un conjunt de bits, o **bitset**, és un vector on cada valor és 0 o 1. El codi següent crea un conjunt de bits amb 10 elements:

```
bitset<10> s;
s[1] = 1;
s[3] = 1;
s[4] = 1;
s[7] = 1;
cout << s[4] << "\n"; // 1
cout << s[5] << "\n"; // 0
```

L'avantatge de fer servir conjunts de bits és que requereixen menys memòria que els vectors normals, perquè cada element només fa servir un únic bit de memòria. Per exemple, si emmagatzemèssim n bits en un vector de tipus `int`, necessitaríem $32n$ bits de memòria, però en un conjunt de bits només fan falta n bits de memòria. A més, els valors d'un conjunt de bits es poden manipular de

¹N. del T: És a dir, `[lower_bound(x),upper_bound(x))` és l'interval semi-obert que assenyalava als elements amb valor x .

manera eficient fent servir operadors de bits, amb la qual cosa encara és possible optimitzar més alguns algorismes.

El codi següent mostra una altra manera de crear el conjunt de bits anterior:

```
bitset<10> s(string("0010011010")); // de dreta a esquerra
cout << s[4] << "\n"; // 1
cout << s[5] << "\n"; // 0
```

La funció count retorna el nombre d'uns en el conjunt de bits:

```
bitset<10> s(string("0010011010"));
cout << s.count() << "\n"; // 4
```

El codi següent mostra exemples d'operacions de bits:

```
bitset<10> a(string("0010110110"));
bitset<10> b(string("1011011000"));
cout << (a&b) << "\n"; // 0010010000
cout << (a|b) << "\n"; // 1011111110
cout << (a^b) << "\n"; // 1001101110
```

Deque

Una **deque** és un vector dinàmic la mida del qual es pot canviar eficientment a ambdós extrems del vector. Al igual que els vectors, un deque proporciona les funcions push_back i pop_back, però també inclou les funcions push_front i pop_front que no estan disponibles en un vector normal.

Un deque es pot fer servir de la manera següent:

```
deque<int> d;
d.push_back(5); // [5]
d.push_back(2); // [5,2]
d.push_front(3); // [3,5,2]
d.pop_back(); // [3,5]
d.pop_front(); // [5]
```

La implementació interna d'un deque és més complexa que el d'un vector, i per aquest motiu, un deque és més lent que un vector. Tot i així, afegir o eliminar elements per qualsevol dels dos extrems triga $O(1)$ de mitjana.

Pila

Una **pila** (stack) és una estructura de dades que proporciona dos operacions que triguen $O(1)$: afegint un element a la part superior, i retirar l'element de la part superior.

El codi següent mostra com fer servir una pila:

```
stack<int> s;
```

```
s.push(3);
s.push(2);
s.push(5);
cout << s.top(); // 5
s.pop();
cout << s.top(); // 2
```

Queue

Una **queue** també ofereix dos operacions de temps $O(1)$: afegir un element al final de la cua, i treure el primer element de la cua. Només és possible accedir al primer i al darrer element de la cua.

El codi següent mostra com fer servir una cua:

```
queue<int> q;
q.push(3);
q.push(2);
q.push(5);
cout << q.front(); // 3
q.pop();
cout << q.front(); // 2
```

Cua de prioritats

Una **cua de prioritats** manté un conjunt d'elements. S'ofereixen les operacions d'inserció i, depenent del tipus de cua, recuperar o eliminar l'element mínim o màxim (només un dels dos). Inserir i eliminar elements triga $O(\log n)$, mentre que obtenir l'element mínim o màxim triga $O(1)$.

En principi, es podria fer servir un conjunt ordenat per a implementar una cua de prioritats, però l'avantatge de fer servir una cua de prioritats és que els factors constants són més petits. Les cues de prioritats s'implementen fent servir una estructura de heap que és molt més senzilla que els arbres binaris balancejats dels conjunts ordenats.

Per defecte, els elements en una cua de prioritats de C++ s'ordenen en ordre decreixent, i només podem trobar i eliminar l'element més gran de la cua. Per exemple:

```
priority_queue<int> q;
q.push(3);
q.push(5);
q.push(7);
q.push(2);
cout << q.top() << "\n"; // 7
q.pop();
cout << q.top() << "\n"; // 5
q.pop();
```

```
q.push(6);
cout << q.top() << "\n"; // 6
q.pop();
```

Si volem crear una cua de prioritat que permeti trobar i eliminar l'element més petit, podem fer el següent:

```
priority_queue<int, vector<int>, greater<int>> q;
```

Estructures de dades “policy-based”

El compilador g++ també ofereix algunes estructures de dades que no formen part de la biblioteca estàndard C++. Aquestes estructures s'anomenen *policy-based*. Per a fer-les servir, hem d'afegir les línies següents:

```
#include <ext/pb_ds/assoc_container.hpp>
using namespace __gnu_pbds;
```

Després d'això, podem fer servir una estructura de dades `indexed_set` que és un set que es pot indexar com un vector. La definició per a valors de tipus `int` és la següent:

```
typedef tree<int, null_type, less<int>, rb_tree_tag,
            tree_order_statistics_node_update> indexed_set;
```

Ara podem crear un conjunt de la manera següent:

```
indexed_set s;
s.insert(2);
s.insert(3);
s.insert(7);
s.insert(9);
```

L'especialitat d'aquest conjunt és que tenim accés als índexs que tindrien els elements en un vector ordenat. La funció `find_by_order` retorna un iterador a l'element que ocupa una posició determinada:

```
auto x = s.find_by_order(2);
cout << *x << "\n"; // 7
```

I la funció `order_of_key` retorna la posició d'un element donat:

```
cout << s.order_of_key(7) << "\n"; // 2
```

Si l'element no apareix al conjunt, obtenim la posició que tindria l'element al conjunt:

```
cout << s.order_of_key(6) << "\n"; // 2
cout << s.order_of_key(8) << "\n"; // 3
```

Ambdues funcions funcionen en temps logarítmic.

4.6 Comparació amb l'ordenació

Sovint és possible resoldre un problema fent servir estructures de dades o ordenació. De vegades hi ha diferències notables en l'eficiència real d'aquests enfocaments, que poden quedar amagats en les seves complexitats temporals.

Considerem un problema on se'ns donen dues llistes A i B , ambdues de n elements. La nostra tasca és calcular el nombre d'elements que pertanyen a les dues llistes. Per exemple, per a les llistes

$$A = [5, 2, 8, 9] \quad \text{i} \quad B = [3, 2, 9, 5],$$

la resposta és 3 perquè els números 2, 5 i 9 pertanyen a les dues llistes.

La solució directa al problema és recórrer tots els parells d'elements en temps $O(n^2)$, però a continuació ens centrarem en els algorismes més eficients.

Algorisme 1

Construïm un conjunt amb els elements que apareixen a A , i després d'això, iterem a través dels elements de B i comprovem si cadascun dels elements també pertanyen a A . Això és eficient perquè els elements de A estan en un conjunt. Utilitzant l'estructura set, la complexitat temporal de l'algorisme és $O(n \log n)$.

Algorisme 2

No necessitem mantenir un conjunt ordenat per a A , per tant, en lloc d'un set fem servir un `unordered_set`. Aquesta és una manera fàcil de fer l'algorisme més eficient, perquè només hem de canviar l'estructura de dades, sense canviar l'algorisme. La complexitat temporal del nou algorisme és $O(n)$.

Algorisme 3

Ordenem en lloc de fer servir estructures de dades. Primer, ordenem les dues llistes A i B . Després d'això, recorrem les dues llistes alhora i trobem els elements comuns. El cost de l'ordenació és $O(n \log n)$, i la resta de l'algorisme triga $O(n)$, per tant, la complexitat total és $O(n \log n)$.

Comparació d'eficiència

La taula següent mostra l'eficiència els algorismes anteriors quan n varia i els elements de les llistes són nombres enters aleatoris entre $1 \dots 10^9$:

	n	Algorisme 1	Algorisme 2	Algorisme 3
	10^6	1,5 s	0,3 s	0,2 s
⊕	$2 \cdot 10^6$	3,7 s	0,8 s	0,3 s
	$3 \cdot 10^6$	5,7 s	1,3 s	0,5 s
	$4 \cdot 10^6$	7,7 s	1,7 s	0,7 s
	$5 \cdot 10^6$	10.0 s	2.3 s	0.9 s

Els Algorismes 1 i 2 són iguals excepte que fem servir diferents estructures de conjunt. En aquest problema, aquesta elecció té un efecte important en el temps d'execució, perquè l'Algorisme 2 és de 4 a 5 vegades més ràpid que l'Algorisme 1.

Tanmateix, l'algorisme més eficient és el que fa servir l'ordenació, l'Algorisme 3. Només triga la meitat del temps que triga l'Algorisme 2. Curiosament, la complexitat temporal tant de l'Algorisme 1 com de l'Algorisme 3 és $O(n \log n)$ però, malgrat això, l'Algorisme 3 és deu vegades més ràpid. Això es pot explicar pel fet que ordenar és un procediment senzill i només s'executa una vegada al començament de l'Algorisme 3, i la resta de l'algorisme triga temps lineal. Per altra banda, l'Algorisme 1 manté un arbre binari equilibrat complex durant tot l'algorisme.²

²N. del T.: L'Algorisme 2 triga $O(n)$, però també és més lent a la pràctica que l'Algorisme 3, que triga temps $O(n \log n)$. En principi, valors cada cops més grans de n haurien d'afavorir l'Algorisme 2, fins a ser un nombre arbitràriament gran de vegades més ràpid que l'Algorisme 3. A la pràctica, $O(\log n)$ creix molt lentament; a més a més, algunes operacions, com ara fer servir memòria addicional, poden ser més costoses com més gran sigui la n i això pot negar l'avantatge teòric de ser $O(\log n)$ cops més ràpid.

Chapter 5

Cerca completa

Cerca completa és un mètode general que es pot fer servir per a resoldre gairebé qualsevol problema d'algorísmic. La idea és generar totes les possibles solucions del problema amb força bruta i, a continuació, seleccionar la millor solució, o comptar el nombre de solucions, segons el problema.

La cerca completa és una bona tècnica si hi ha prou temps per a generar totes les solucions, ja que la cerca sol ser fàcil d'implementar i sempre dona la resposta correcta. Si la cerca completa és massa lenta haurem de fer servir altres tècniques, com els algorismes *greedy* o la programació dinàmica.

5.1 Generar subconjunts

Considerem el problema de generar tots els subconjunts d'un conjunt de n elements. Per exemple, els subconjunts de $\{0, 1, 2\}$ són \emptyset , $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{1, 2\}$ i $\{0, 1, 2\}$. Hi ha dos mètodes comuns per a generar subconjunts: fer una cerca recursiva o aprofitar la representació binària dels nombres enters.

Mètode 1

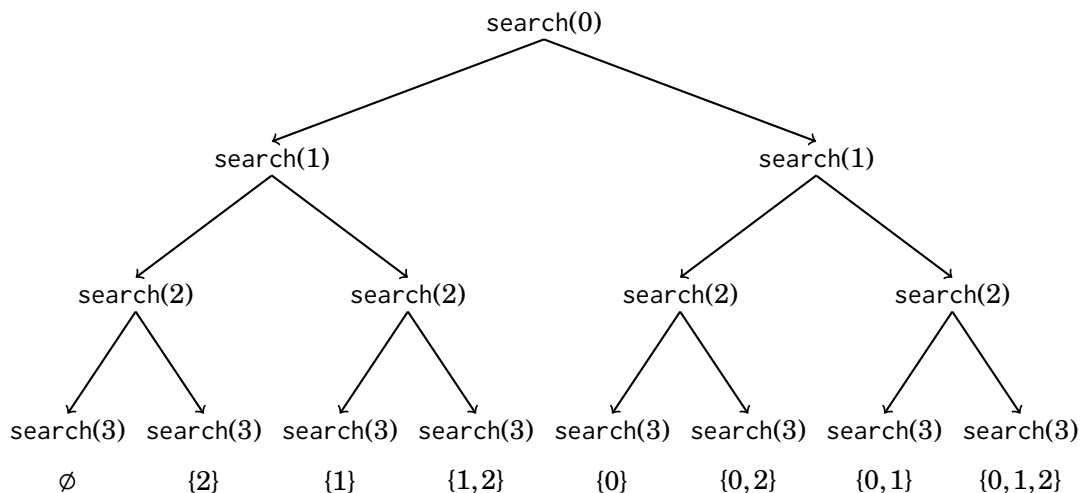
La recursivitat és una manera elegant de passar per tots els subconjunts d'un conjunt. La següent funció `search` genera els subconjunts de $\{0, 1, \dots, n-1\}$. La funció manté un vector global `v` que anirà contenint els elements de cada subconjunt. La cerca comença quan es crida la funció amb el paràmetre 0.

```
vector<int> v;  
  
void cerca(int k) {  
    if (k == n) {  
        // tracta el subconjunt v;  
    } altrament {  
        cerca(k+1);  
        v.push_back(k);  
        cerca(k+1);  
        v.pop_back();  
    }  
}
```

}

Quan la funció cerca es crida amb el paràmetre k , aquesta decideix si inclou o no l'element k al subconjunt i , en ambdós casos, es crida recursivament a ella mateixa amb paràmetre $k + 1$. Tanmateix, si $k = n$, la funció s'adona que ha processat tots els elements i , per tant, s'ha generat un nou subconjunt v .

L'arbre següent il·lustra les crides de funció quan $n = 3$. Sempre podem triar la branca esquerra (k no s'inclou al subconjunt) o la branca dreta (k s'inclou al subconjunt).



Mètode 2

Una altra manera de generar subconjunts es fer servir la representació en binari dels nombres enters. Cada subconjunt d'un conjunt de n elements es pot representar com una seqüència de n bits, que correspon a un nombre enter entre $0 \dots 2^n - 1$. Els uns en la seqüència de bits indiquen quins elements formen part del subconjunt.

La convenció habitual és que l'últim bit correspon a l'element 0, el penúltim bit és l'element 1, etcètera. Per exemple, la representació binària de 25 és 11001, que correspon al subconjunt $\{0, 3, 4\}$.

El codi següent¹ tracta tots els subconjunts d'un conjunt de n elements

```
for (int b = 0; b < (1<<n); b++) {
    // tracta el subconjunt b
}
```

El codi següent mostra com trobar el subconjunt que conté els elements corresponents a una seqüència de bits. Quan tractem cada subconjunt b , el codi construeix el vector v amb els elements del subconjunt.

```
for (int b = 0; b < (1<<n); b++) {
```

¹N. del T: La notació $1 \ll n$ és l'operador *shift*, i indica que el nombre 1 es desplaça n posicions a l'esquerra, és a dir, 2^n

```

vector<int> v;
for (int i = 0; i < n; i++) {
    if (b&(1<<i)) v.push_back(i);
}
}

```

5.2 Generar permutacions

A continuació considerem el problema de generar totes les permutacions d'un conjunt de n elements. Per exemple, les permutacions de $\{0, 1, 2\}$ són $(0, 1, 2)$, $(0, 2, 1)$, $(1, 0, 2)$, $(1, 2, 0)$, $(2, 0, 1)$ i $(2, 1, 0)$. De nou, hi ha dos enfocaments: fer servir la recursivitat o recórrer les permutacions iterativament.

Mètode 1

A l'igual que amb els subconjunts, podem generar permutacions fent servir recursivitat. La següent funció cerca recorre les permutacions del conjunt $\{0, 1, \dots, n-1\}$. La funció construeix un vector global `perm` que conté la permutació, i la cerca comença quan la funció és crida sense paràmetres.

```

vector<int> perm;
vector<bool> triat(n);

void cerca() {
    if (permutacio.size() == n) {
        // tracta la permutacio perm
    } else {
        for (int i = 0; i < n; i++) {
            if (triat[i]) continue;
            triat[i] = true;
            perm.push_back(i);
            cerca();
            triat[i] = false;
            perm.pop_back();
        }
    }
}

```

Cada crida a la funció afegeix un nou element al vector `perm`. El vector `triat` indica quins elements ja han estat inclosos a la permutació. Cada cop que la mida del vector `perm` coincideix amb la mida del conjunt vol dir que hem generat una permutació nova.

Mètode 2

Un altre mètode per generar permutacions és començar amb la permutació $\{0, 1, \dots, n-1\}$ i fer servir repetidament una funció que construeix la següent

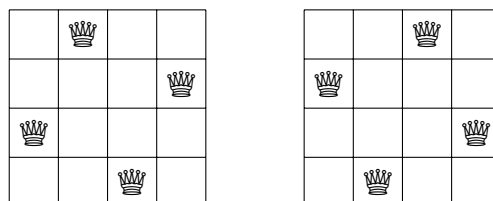
permutació en ordre creixent. La biblioteca estàndard de C++ conté la funció `next_permutation` que es pot fer servir per a això:

```
vector<int> perm;
per (int i = 0; i < n; i++) {
    perm.push_back(i);
}
do {
    // tractar la permutacio perm
} while (next_permutation(perm.begin(), perm.end()));
```

5.3 Backtracking

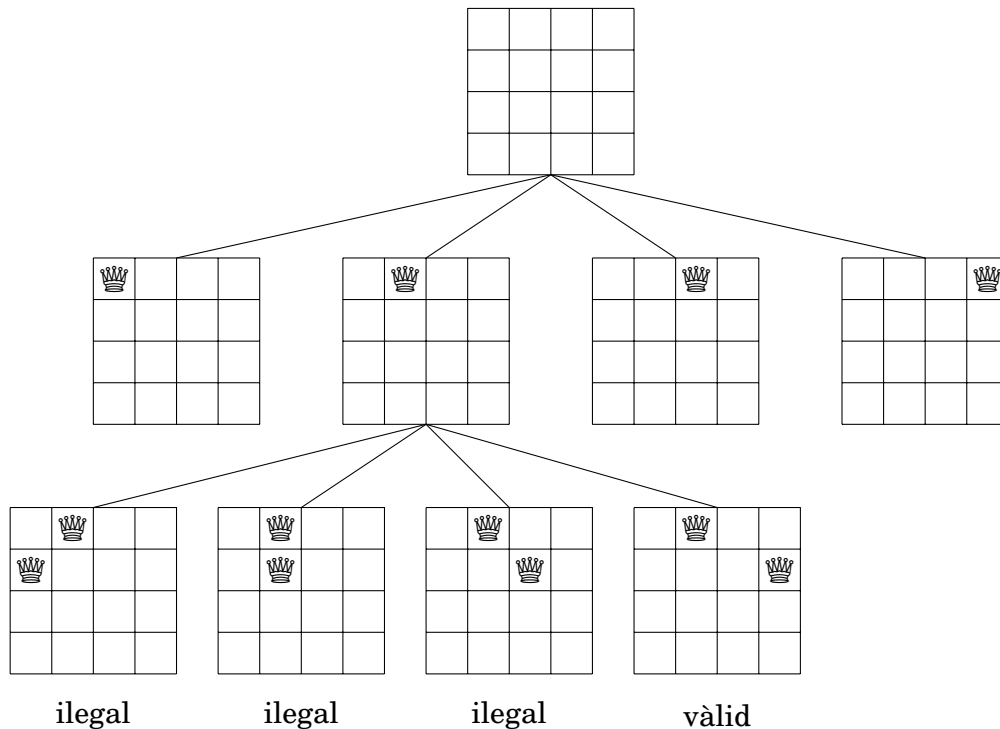
Un algorisme de **backtracking** comença amb una solució buida i amplia la solució pas a pas. La cerca passa recursivament per les diferents maneres en que es pot construir una solució.

Com a exemple, considerem el problema de calcular el nombre de maneres en què es poden col·locar n reines en un taulell d'escacs de mida $n \times n$ sense que dues reines s'amenacin. Per exemple, quan $n = 4$, hi ha dues solucions possibles:



El problema es pot resoldre fent servir backtracking, col·locant les reines al taulell fila per fila. Més precisament, per a cada fila, col·locarem una sola reina i de manera que cap de les reines anteriors l'ataqui. Quan col·loquem n reines haurem trobat una solució al problema.

Per exemple, quan $n = 4$, aquestes són algunes solucions parcials generades per l'algorisme de backtracking:



Al nivell inferior, els tres primers taulells són il·legals, perquè les reines s'ataquen entre elles. Tanmateix, el quart taulell és vàlid, i es pot estendre a una solució completa posant dues reines més al tauler. Només hi ha una manera de col·locar aquestes dues reines.

L'algorisme es pot implementar de la següent manera:

```
int compte = 0;
vector<bool> columna(n), diag1(2*n), diag2(2*n);

void cerca(int y) {
    if (y == n) {
        compte++;
        return;
    }
    for (int x = 0; x < n; x++) {
        if (columna[x] || diag1[x+y] || diag2[x-y+n-1]) continue;
        columna[x] = diag1[x+y] = diag2[x-y+n-1] = 1;
        cerca(y+1);
        columna[x] = diag1[x+y] = diag2[x-y+n-1] = 0;
    }
}
```

La cerca comença cridant `cerca(0)`. La mida del tauler és $n \times n$, i el codi calcula el nombre de solucions a compte.

El codi assumeix que les files i columnes del tauler estan numerats de 0 a $n - 1$. Quan la funció `cerca` és crida amb el paràmetre y , col·loca una dama a la fila y i després es crida recursivament amb el paràmetre $y + 1$. Quan $y = n$ s'ha trobat una solució i la variable `compte` s'incrementa en un.

El vector columna porta el compte de les columnes que tenen una reina, i els vectors diag1 i diag2 porten el compte de les diagonals amb reina. No està permès afegir una altra reina a una columna o diagonal que ja en conté una. Per exemple, les columnes i diagonals de el tauler 4×4 es numeren de la manera següent:

0	1	2	3
0	1	2	3
0	1	2	3
0	1	2	3

column

0	1	2	3
1	2	3	4
2	3	4	5
3	4	5	6

diag1

3	4	5	6
2	3	4	5
1	2	3	4
0	1	2	3

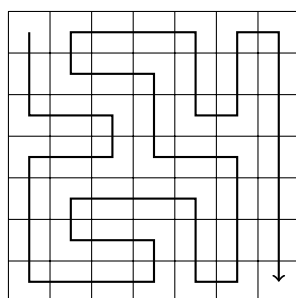
diag2

Sigui $q(n)$ el nombre de maneres per posar n reines en un tauler d'escacs $n \times n$. El procés de backtracking anterior ens diu que, per exemple, $q(8) = 92$. Quan n augmenta, la cerca es torna lenta ràpidament, perquè el nombre de solucions augmenta exponencialment. Per exemple, calcular $q(16) = 14772512$ fent servir l'algorisme anterior triga aproximadament un minut en un ordinador modern².

5.4 Podar la cerca

Sovint podem optimitzar el backtracking podant l'arbre de cerca. La idea és afegir "intel·ligència" a l'algorisme perquè es doni compte com més aviat possible que una solució parcial no es pot ampliar a una solució completa. Aquestes optimitzacions poden tenir un gran impacte sobre l'eficiència de la cerca.

Considerem el problema de calcular el nombre de camins en un taulell $n \times n$ des de la cantonada superior esquerra a la cantonada inferior dreta de manera que el camí visiti cada casella exactament una vegada. Per exemple, en un taulell 7×7 , hi ha 111712 camins d'aquest tipus. Un dels camins és el següent:



Ens centrem en el cas de 7×7 , perquè el seu nivell de dificultat és adequat a les nostres necessitats. Començarem amb un algorisme de backtracking senzill, i després l'optimitzarem pas a pas fent servir observacions de com podem podar la cerca. Després de cada optimització, mesurarem el temps d'execució de l'algorisme i el nombre de crides recursives, per a veure clarament l'efecte de cadascuna d'aquestes optimitzacions.

²No es coneix cap manera de calcular eficientment valors més grans de $q(n)$. El rècord actual és $q(27) = 234907967154122528$, calculat el 2016 [55].

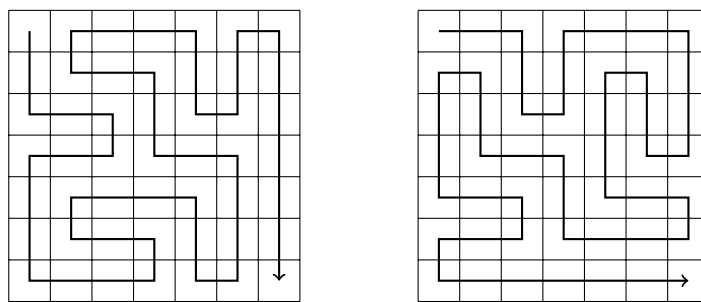
Algorisme bàsic

La primera versió de l'algorisme no conté cap optimització. Simplement fem servir el backtracking per generar tots els camins possibles des de la cantonada superior esquerra fins a la cantonada inferior dreta i comptar el nombre d'aquests camins.

- temps de funcionament: 483 segons
- nombre de crides recursives: 76 mil milions

Optimització 1

En tota solució, primer avancem un pas cap avall o cap a la dreta. Sempre hi ha dos camins que són simètrics sobre la diagonal del taulell que passa pel primer pas. Per exemple, els camins següents són simètrics:

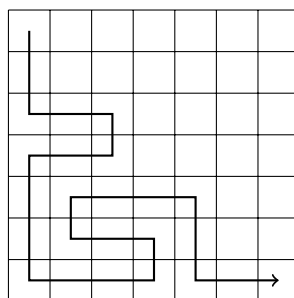


Per tant, podem decidir que el primer pas és sempre cap avall (o cap a la dreta), i multiplicar per dos el nombre de solucions.

- temps de funcionament: 244 segons
- nombre de crides recursives: 38 mil milions

Optimització 2

Si el camí arriba al quadrat inferior dret abans d'haver visitat tots els altres quadrats de la quadrícula, està clar que no serà possible completar la solució. Un exemple d'això és el camí següent:

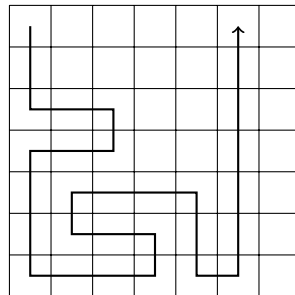


Amb aquesta observació, podem acabar la cerca immediatament si arribem massa aviat a la casella inferior dreta.

- temps de funcionament: 119 segons
- nombre de crides recursives: 20 mil milions

Optimització 3

Si el camí toca una paret i pot girar a l'esquerra o a la dreta, la graella es divideix en dues parts que contenen caselles no visitades. Per exemple, en la situació següent, el camí pot girar a l'esquerra o a la dreta:

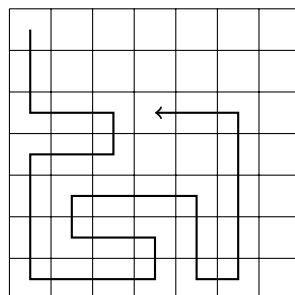


En aquest cas, ja no podem visitar totes les caselles, i podem acabar la cerca. Aquesta optimització és molt útil:

- temps de funcionament: 1.8 segons
- nombre de crides recursives: 221 milions

Optimització 4

La idea de l'optimització 3 es pot generalitzar: si el camí no pot continuar endavant però pot girar a l'esquerra o a la dreta, el taulell es divideix en dues parts que contenen caselles no visitades. Per exemple, considerem el camí següent:



Està clar que ja no podem visitar totes les caselles, de manera que acabem la cerca. Després d'aquesta optimització, la cerca és molt eficient:

- temps de funcionament: 0.6 segons
- nombre de crides recursives: 69 milions

Ara és un bon moment per deixar d'optimitzar l'algorisme i veure què hem aconseguit. El temps d'execució de l'algorisme original era 483 segons i, després de les optimitzacions, el temps ha baixat a només 0.6 segons. Les optimitzacions han fet que l'algorisme sigui gairebé 1000 vegades més ràpid.

Aquest és un fenomen habitual en el backtracking, perquè els arbres de cerca solen ser molt grans i fins i tot observacions simples poden podar eficaçment la cerca. Les optimitzacions que es produeixen durant els primers passos de l'algorisme, és a dir, a la part superior de l'arbre de cerca, són especialment útils.

5.5 Trobar-se al mig

Trobar-se al mig és una tècnica on es divideix l'espai de cerca en dues parts d'aproximadament la mateixa mida. Es realitzen cerques independents per a cada part, i finalment es combinen els resultats de les cerques.

La tècnica es pot fer servir si hi ha una manera eficient de combinar el resultat de les cerques. En aquesta situació, les dues cerques poden requerir menys temps que una cerca gran. Típicament, fent servir la tècnica de trobar-se al mig podem transformar un factor 2^n en un factor $2^{n/2}$.

Com a exemple, considerem el problema on se'ns dona una llista de n nombres i un nombre x , i volem saber si és possible triar alguns números de la llista de manera que la seva suma sigui x . Per exemple, donada la llista $[2, 4, 5, 9]$ i $x = 15$, podem triar els números $[2, 4, 9]$ per obtenir $2 + 4 + 9 = 15$. Tanmateix, fent servir la mateixa llista i $x = 10$, ja no és possible obtenir la suma.

Un algorisme senzill que resol el problema és iterar tots els subconjunts dels elements i comprovar si la suma d'algun dels subconjunts és x . El temps d'execució d'aquest algorisme és $O(2^n)$, perquè hi ha 2^n subconjunts. No obstant això, fent servir la tècnica de trobar-se al mig, podem aconseguir un algorisme de temps $O(2^{n/2})$ més eficient³. Tingueu en compte que $O(2^n)$ i $O(2^{n/2})$ són diferents complexitats perquè $2^{n/2}$ és igual a $\sqrt{2^n}$.

La idea és dividir la llista en dues llistes A i B de manera que cada llista contingui aproximadament la meitat dels números. La primera cerca genera tots els subconjunts de A i emmagatzema les seves sumes en una llista S_A . De manera semblant, la segona cerca crea una llista S_B a partir de B . Després d'això, n'hi ha prou comprovant si és possible triar un element de S_A i un altre de S_B de manera que la seva suma sigui x . Això només és possible si hi ha alguna manera de formar la suma x amb els números de la llista original.

Per exemple, suposem que la llista és $[2, 4, 5, 9]$ i $x = 15$. Primer, dividim la llista en $A = [2, 4]$ i $B = [5, 9]$. Després d'això, creem llistes $S_A = [0, 2, 4, 6]$ i $S_B = [0, 5, 9, 14]$. En aquest cas, podem formar la suma $x = 15$, perquè S_A conté la suma 6, S_B conté la suma 9 i $6 + 9 = 15$. Això correspon a la solució $[2, 4, 9]$.

Podem implementar l'algorisme de manera que la seva complexitat temporal és $O(2^{n/2})$. Primer, generem llistes ordenades S_A i S_B , que es pot fer en $O(2^{n/2})$, fent servir una tècnica semblant a la fusió (merge). Després, donat que les llistes

³Aquesta idea va ser introduïda l'any 1974 per E. Horowitz i S. Sahni [39].

estan ordenades, podem comprovar en temps $O(2^{n/2})$ si la suma x es pot crear a partir de S_A i S_B .

Chapter 6

Algorismes greedy

Un **algorisme greedy** (cobdiciós) es aquell que construeix una solució al problema fent sempre la tria que sembla millor en aquell moment. Un algorisme greedy mai desfà una opció ja triada, sinó que construeix la solució final directament. Per aquest motiu, els algorismes greedy solen ser molt eficients.

La dificultat de dissenyar algorismes greedy és trobar una estratègia que sempre produeixi una solució òptima al problema. En un algorisme greedy ha de passar que les eleccions que són localment òptimes siguin també globalment òptimes. Sovint no és fàcil d'argumentar perquè un algorisme greedy concret funciona.

6.1 Problema de les monedes

Com a primer exemple, considerem un problema on se'ns dona un conjunt de monedes i la nostra feina és formar una quantitat de diners n fent servir les monedes. Els valors de les monedes són $\text{monedes} = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$, i cada moneda es pot utilitzar tantes vegades com vulguem. Quin és el nombre mínim de monedes necessàries?

Per exemple, si les monedes són les monedes d'euro (en cèntims)

$$\{1, 2, 5, 10, 20, 50, 100, 200\}$$

i $n = 520$, necessitem almenys quatre monedes. La solució òptima és seleccionar monedes $200 + 200 + 100 + 20$ la suma dels quals és 520.

Algorisme greedy

Un algorisme greedy senzill que resol el problema consisteix en seleccionar sempre la moneda més gran possible, fins que s'hagi construït la suma de diners requerida. Aquest algorisme funciona en el cas d'exemple, perquè primer seleccionem dues monedes de 200 cèntims, després una moneda de 100 cèntims i finalment una moneda de 20 cèntims. Però, com sabem que aquest algorisme sempre funciona?

Resulta que si les monedes són les monedes d'euro, l'algorisme greedy *sempre* funciona, és a dir, sempre produeix una solució amb el mínim nombre possible de monedes. Això es pot argumentar de la manera següent:

En primer lloc, cada moneda 1, 5, 10, 50 i 100 pot aparèixer com a màxim una vegada en una solució òptima, perquè si la solució contingués dues d'aquestes monedes, podríem canviar-les per una sola moneda i obtenir una solució millor. Per exemple, si la solució contingués les monedes $5 + 5$, podríem substituir-les per una moneda 10.

De la mateixa manera, les monedes 2 i 20 només poden aparèixer com a màxim dues vegades en una solució òptima, perquè d'altra forma podríem reemplaçar les monedes $2 + 2 + 2$ per monedes $5 + 1$ i les monedes $20 + 20 + 20$ per monedes $50 + 10$. A més, una solució òptima no pot contenir les monedes $2 + 2 + 1$ o $20 + 20 + 10$, perquè podríem substituir-les per monedes 5 i 50.

Fent servir aquestes observacions, hem de veure que per cada moneda x no és possible construir de manera òptima una suma x o qualsevol suma més gran utilitzant només monedes que són més petits que x . Per exemple, si $x = 100$, la suma òptima més gran fent servir només monedes més petites és $50 + 20 + 20 + 5 + 2 + 2 = 99$. Així, l'algorisme greedy que sempre selecciona la moneda més gran produeix la solució òptima.

Aquest exemple mostra que pot ser difícil argumentar perquè un algorisme greedy funciona, fins i tot si l'algorisme mateix és simple.

Cas general

En el cas general, el conjunt de monedes pot contenir qualsevol moneda i l'algorisme greedy ja *no* produeix necessàriament una solució òptima.

Podem demostrar que un algorisme greedy no funciona mostrant un contraexemple on l'algorisme ens dona una resposta incorrecta. En aquest problema és fàcil trobar-ne un: si les monedes són $\{1, 3, 4\}$ i la suma objectiu és 6, l'algorisme greedy produeix la solució $4 + 1 + 1$ mentre que la solució òptima és $3 + 3$.

No se sap si el problema generalitzat de la moneda es pot resoldre fent servir algun algorisme greedy¹. Tanmateix, com veurem al capítol 7, en alguns casos el problema generalitzat pot ser resolt eficientment fent servir un algorisme de programació dinàmica que sempre dona la resposta correcta.

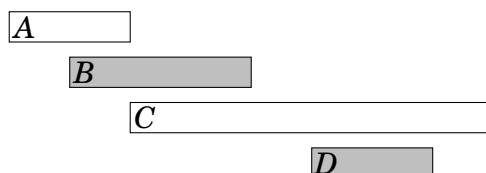
6.2 Scheduling

Molts problemes de *scheduling* (planificació horària) es poden resoldre fent servir algorismes greedy. Un problema clàssic és el següent: donats n esdeveniments amb els corresponents temps d'inici i de final, troba un scheduling que inclogui tants esdeveniments com sigui possible. No és permet seleccionar un esdeveniment parcialment. Per exemple, considerem els esdeveniments següents:

¹No obstant això, és possible *comprovar* en temps polinòmic si l'algorisme greedy que s'ha presentat en aquest capítol funciona amb un conjunt determinat de monedes [53].

	esdeveniment	hora d'inici	hora final	
	A	1	3	
⊕	B	2	5	En aquest cas, el nombre màxim
	C	3	9	
	D	6	8	

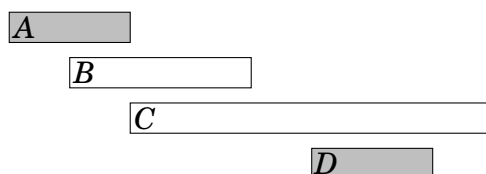
d'esdeveniments és dos. Per exemple, podem seleccionar els esdeveniments *B* i *D* com segueix:



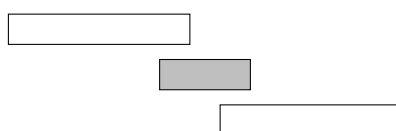
És possible inventar diversos algorismes greedy per al problema, però quin d'ells funciona en tots els casos?

Algorisme 1

La primera idea és començar seleccionant els esdeveniments més *curts* possibles. En l'exemple anterior l'algorisme selecciona els següent esdeveniments:



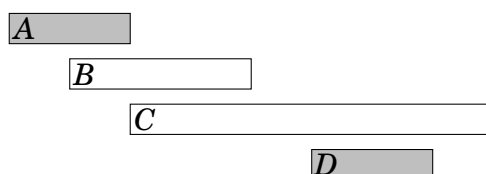
Tanmateix, seleccionar esdeveniments curts no sempre és una estratègia correcta. Per exemple, l'algorisme falla en el cas següent:



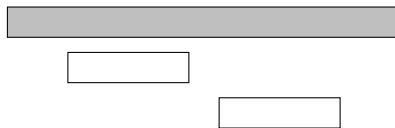
Si seleccionem l'esdeveniment més curt, només podem seleccionar un, quan en realitat seria possible seleccionar-ne dos.

Algorisme 2

Una altra idea és seleccionar sempre l'esdeveniment que *comença* tan d'hora com sigui possible. Aquest algorisme selecciona els esdeveniments següents:



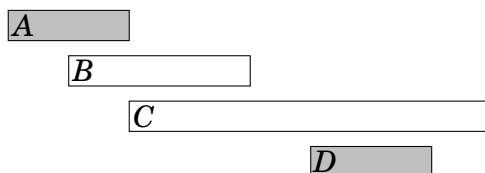
Tanmateix, també podem trobar un contraexemple per a aquest algorisme. Per exemple, en el cas següent, l'algorisme només selecciona un esdeveniment:



Si seleccionem el primer esdeveniment, ja no és possible seleccionar-ne cap d'altre, quan en realitat hauríem pogut seleccionar dos esdeveniments

Algorisme 3

La tercera idea és seleccionar l'esdeveniment que *acabi* tan *d'hora* com sigui possible. Aquest algorisme selecciona els esdeveniments següents:



Resulta que aquest algorisme *sempre* produeix una solució òptima. La raó d'això és que triar l'esdeveniment que acabi tan aviat com sigui possible sempre és una elecció òptima. Després d'aquesta tria, també és una elecció òptima triar el següent esdeveniment fent servir la mateixa estratègia, etc., fins que no puguem seleccionar-ne més.

Perquè l'algorisme funciona? Sigui X l'esdeveniment que acaba primer, i considerem una solució (òptima o no) que no tingui X . Sigui Y el primer esdeveniment d'aquesta solució. Com que X acaba abans (o igual) que Y , podem reemplaçar Y per X en la solució sense causar cap conflicte amb els esdeveniments posteriors. Així doncs, per a qualsevol solució òptima sense X , n'existeix una altra solució òptima amb X , la qual cosa demostra que triar l'esdeveniment que acaba abans mai ens pot portar a error.

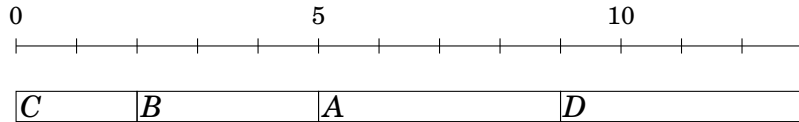
6.3 Tasques i terminis

Considerem ara un problema on se'ns dona n tasques amb durades i terminis i la nostra feina és triar en quin ordre s'han de fer les tasques. Per a cada tasca, guanyem $d - x$ punts on d és la data límit de la tasca i x és el moment en què acabem la tasca. Quina és la puntuació total més gran que podem obtenir?

Per exemple, suposem que les tasques són les següents: \oplus

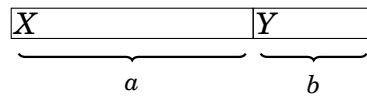
tasca	durada	termini
A	4	2
B	3	5
C	2	7
D	4	5

En aquest cas, aquesta és una assignació òptima:

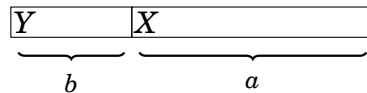


En aquesta solució, C ens dóna 5 punts, B ens dóna 0 punts, A ens dóna -7 punts i D ens dóna -8 punts, per tant, la puntuació total és de -10.

Sorprenentment, la solució òptima a aquest problema no depèn en absolut dels terminis. Una estratègia greedy correcta és simplement realitzar les tasques ordenades per la seva durada en ordre creixent. La raó d'això és que si mai fem dues tasques una darrere l'altra de manera que la primera tasca triga més que la segona tasca, podem millorar la solució intercanviant les tasques. Per exemple, considerem l'assignació següent:



Com que es dóna $a > b$, hauríem d'intercanviar les tasques:



Ara X ens dóna b punts menys però Y ens dóna a punts més, de manera que la puntuació total augmenta en $a - b > 0$. En una solució òptima, per cada dues tasques consecutives qualsevol, la tasca més curta s'ha de fer abans que la tasca més llarga. Per tant, les tasques s'han de fer ordenades en funció de la seva durada.

6.4 Minimitzar sumes

Considerem el problema on se'ns donen n nombres a_1, a_2, \dots, a_n i la nostra tasca és trobar un valor x que minimitzi la suma

$$|a_1 - x|^c + |a_2 - x|^c + \dots + |a_n - x|^c.$$

Ens centrem en els casos $c = 1$ i $c = 2$.

Cas $c = 1$

En aquest cas hem de minimitzar la suma

$$|a_1 - x| + |a_2 - x| + \dots + |a_n - x|.$$

Per exemple, si els números són $[1, 2, 9, 2, 6]$, la millor solució és seleccionar $x = 2$ que produeix la suma

$$|1 - 2| + |2 - 2| + |9 - 2| + |2 - 2| + |6 - 2| = 12.$$

En el cas general, la millor opció per x és la *mediana* dels nombres, és a dir, el nombre del mig després d'ordenar-los. Per exemple, la llista $[1, 2, 9, 2, 6]$ es converteix en $[1, 2, 2, 6, 9]$ després d'ordenar, i la mediana és 2.

La mediana és una opció òptima, perquè si x és més petit que la mediana, la suma es fa més petita en augmentar x , i si x és més gran que la mediana, la suma es fa més petita en disminuir x . Per tant, la solució òptima és que x sigui la mediana. Si n és parell i hi ha dues medianes, qualsevol de les medianes o els valors entre les dues són òptimes.

Cas $c = 2$

En aquest cas, hem de minimitzar la suma

$$(a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \dots + (a_n - x)^2.$$

Per exemple, si els nombres són $[1, 2, 9, 2, 6]$, la millor solució és seleccionar $x = 4$ que dona lloc a la suma

$$(1 - 4)^2 + (2 - 4)^2 + (9 - 4)^2 + (2 - 4)^2 + (6 - 4)^2 = 46.$$

En el cas general, la millor opció per x és la *mitjana* dels nombres. A l'exemple, la mitjana és $(1 + 2 + 9 + 2 + 6)/5 = 4$. Aquest resultat s'obté presentant la suma de la següent manera:

$$nx^2 - 2x(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)$$

Podem ignorar l'última part perquè no depèn de x . Les parts restants formen una funció $nx^2 - 2xs$ on $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Aquesta és una paràbola que s'obre cap amunt amb arrels $x = 0$ i $x = 2s/n$. El valor mínim és la mitjana de les arrels $x = s/n$, és a dir, la mitjana dels nombres a_1, a_2, \dots, a_n .

6.5 Compressió de dades

Un **codificació binària** assigna a cada caràcter d'una cadena un **codi** format per bits. Podem *comprimir* la cadena fent servir la codificació que reemplaça cada caràcter pel seu codi corresponent. Per exemple, la següent codificació

	caràcter	codi	
	A	00	
assigna aquests codis als caràcters: A–D: ☐	B	01	Aquesta codificació
	C	10	
	D	11	

té **longitud constant** perquè cada codi té la mateixa mida. Fent servir aquesta codificació, la cadena AABACDACA es transforma en

000001001011001000

i la cadena queda comprimida a 18 bits. Tanmateix, podem comprimir encara més la cadena si fem servir codificacions de **longitud variable**, on cada codi pot

tenir longituds diferents. D'aquesta manera podem fer servir codis curts per a caràcters que apareixen sovint i codis llargs per a caràcters que apareixen poques vegades. Es dona que la següent codificació és **òptima** per a la cadena anterior:

	caràcter	codi	
	A	0	
⊕	B	110	Una codificació òptima comprimeix la cadena en el mínim
	C	10	
	D	111	

espai possible. En aquest cas, es genera la cadena comprimida

001100101110100,

i només calen 15 bits en lloc de 18 bits. D'aquesta manera, la millor codificació ens permet estalviar-nos 3 bits.

Exigim també que no hi hagi cap codi que sigui prefix d'un altre codi. Per exemple, està prohibit que la codificació contingui els codis 10 i 1011. El motiu és que volem poder recuperar la cadena original a partir de la cadena comprimida. Si un codi pogués ser prefix d'un altre això no sempre seria possible. Per exemple,

	caràcter	codi	
	A	10	
la codificació següent <i>no</i> és vàlida: ⊕	B	11	Amb aquesta codificació,
	C	1011	
	D	111	

no sabem si 1011 és la compressió de AB o de C.

Codificació Huffman

La **codificació Huffman**² és un algorisme greedy que construeix una codificació òptima per a comprimir una cadena determinada. L'algorisme construeix un arbre binari en funció de les freqüències dels caràcters de la cadena, i trobem el codi que assignem a cada caràcter recorrent un camí des de l'arrel fins al node corresponent. Quan cop que ens movem a l'esquerra escribim un bit 0, i quan ens movem a la dreta escribim un bit 1.

Inicialment, cada caràcter és un node el pes del qual és el nombre de vegades que el caràcter apareix a la cadena. A continuació, combinem els dos nodes de pes mínim per a crear un nou node el pes del qual és la suma dels pesos dels nodes originals. El procés continua fins que combinem tots els nodes.

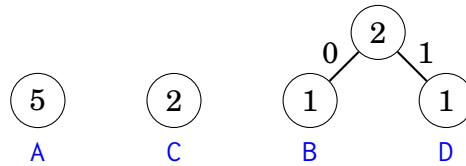
A continuació mostrem com es crea el codi Huffman per a la cadena AABACDACA. Al principi, hi ha quatre nodes, un per cada caràcter de la cadena:



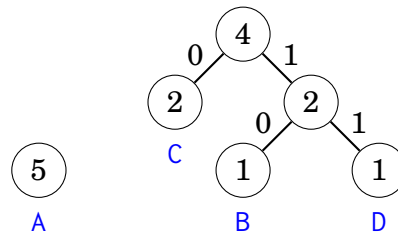
El node que representa el caràcter A té pes 5 perquè el caràcter A apareix 5 vegades a la cadena, i el mateix per la resta de pesos.

²D. A. Huffman va descobrir aquest mètode en un treball de final de curs a l'universitat i va publicar l'algorisme el 1952 [40].

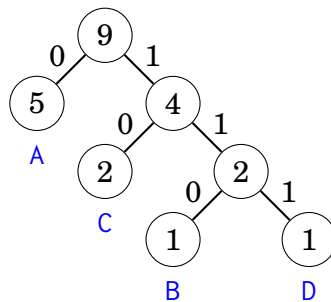
El primer pas és combinar els nodes dels caràcters B i D, tots dos amb pes 1. El resultat és:



Després d'això, combinen els nodes amb pes 2:



Finalment, combinen els dos nodes restants:



Ara tenim tots els nodes estan connectats en un arbre, i podem recuperar la

	caràcter	codi
codificació llegint l'arbre: \oplus	A	0
	B	110
	C	10
	D	111

Mostrem perquè la codificació de Huffman és òptima. Primer, en tota solució òptima passa que com més freqüent és un caràcter més curt és el seu codi. Altrament, intercanviariem els codis corresponents i obtindríem una codificació millor. Per tant, els dos caràcters que apareixen amb menor freqüència han de tenir els codis més llargs. A més, aquestes dos codis han de ser de la mateixa mida. Si no és així, escurcem el codi més llarga fins la mida del codi més curt i obtindríem una codificació. Per exemple, si els codis són 0110 i 010101, reemplacem 010101 per 0101. El nou codi no és part de la codificació perquè és un prefix d'un codi existent, i com que aquests dos són els codis més llargs, el nou codi escurçat no és prefix de cap altre. L'algorisme greedy anterior surgeix d'aplicar repetidament aquesta propietat, i fer servir l'arbre com a manera de trobar una codificació arbitrària que compleix les restriccions de llargada.

Chapter 7

Programació dinàmica

La **programació dinàmica** (*dynamic programming* o *DP*) és una tècnica que combina la correcció de la cerca completa amb l'eficiència dels algorismes greedy. La programació dinàmica es pot aplicar si el problema es pot dividir en sub-problemes superposats però que es poden resoldre independentment.

La programació dinàmica té dos usos:

- **Trobar una solució òptima:** Volem trobar una solució que sigui tan gran (o tan petita) com sigui possible.
- **Comptar el nombre de solucions:** Volem calcular el nombre total de solucions.

Primer veurem com la programació dinàmica es pot fer servir per trobar una solució òptima, i després la farem servir per comptar les solucions.

Entendre la programació dinàmica és una fita en la carrera de qualsevol programador competitiu. Tot i que la idea bàsica és senzilla, el repte és com aplicar programació dinàmica als diferents problemes. Aquest capítol presenta un conjunt de problemes clàssics que són un bon punt de partida.

7.1 Problema de les monedes

Primer ens centrem en un problema que ja vam veure al capítol 6: Donat un conjunt de valors de monedes $\text{monedes} = \{c_1, c_2, \dots, c_k\}$ i una suma objectiu de diners n , la nostra feina és obtenir suma n fent servir el menor nombre de monedes possible.

Al capítol 6, vam resoldre el problema amb un algorisme greedy que sempre triava la moneda amb valor més gran possible. L'algorisme greedy funciona, per exemple, quan les monedes són les monedes d'euro, però en el cas general l'algorisme greedy no produeix necessàriament una solució òptima.

Ara és el moment de resoldre el problema de manera eficient fent servir la programació dinàmica, i fer que l'algorisme funcioni per qualsevol conjunt de monedes. L'algorisme de programació dinàmica es basa en una funció recursiva que passa per totes les possibles maneres de formar la suma, com si fos un algorisme de força bruta. No obstant això, l'algorisme de programació dinàmica perquè fa

servir *memoization* (escriure notes) i calcula la resposta a cada subproblema un sol cop.

Formulació recursiva

La idea en la programació dinàmica és formular el problema de manera recursiva de manera que la solució al problema pugui ser calculada a partir de solucions a subproblemes més petits. En el problema de la moneda, un problema natural recursiu és el següent: quin és el menor nombre de monedes necessari per a obtenir una suma x qualsevol?

Sigui $\text{resol}(x)$ el mínim nombre de monedes necessàries per a obtenir x . El resultat de la funció depèn dels valors de les monedes. Per exemple, si $\text{monedes} = \{1, 3, 4\}$, els primers valors de la funció són els següents:

$\text{resol}(0)$	$=$	0
$\text{resol}(1)$	$=$	1
$\text{resol}(2)$	$=$	2
$\text{resol}(3)$	$=$	1
$\text{resol}(4)$	$=$	1
$\text{resol}(5)$	$=$	2
$\text{resol}(6)$	$=$	2
$\text{resol}(7)$	$=$	2
$\text{resol}(8)$	$=$	2
$\text{resol}(9)$	$=$	3
$\text{resol}(10)$	$=$	3

Per exemple, $\text{resol}(10) = 3$, perquè calen almenys 3 monedes per formar la suma 10. La solució òptima és $3 + 3 + 4 = 10$.

La propietat essencial de resol és que els seus valors poden ser calculada recursivament a partir dels seus valors més petits. La idea és centrar-se en la *primera* moneda que triem per la suma. Per exemple, en l'escenari anterior, la primera moneda pot ser 1, 3 o 4. Si primer triem la moneda 1, la feina restant és obtenir la suma 9 fent servir el nombre mínim de monedes, que és un subproblema del problema original. Per descomptat, el mateix s'aplica si triem les monedes 3 o 4. Per tant, podem calcular el nombre mínim de monedes amb la següent fórmula recursiva:

$$\begin{aligned}\text{resol}(x) = \min(&\text{resol}(x - 1) + 1, \\ &\text{resol}(x - 3) + 1, \\ &\text{resol}(x - 4) + 1).\end{aligned}$$

El cas base de la recursivitat és $\text{resol}(0) = 0$, perquè no calen monedes per formar una suma buida. Per exemple,

$$\text{resol}(10) = \text{resol}(7) + 1 = \text{resol}(4) + 2 = \text{resol}(0) + 3 = 3.$$

Ara estem llestos per donar una fórmula recursiva general que calcula el

nombre mínim de monedes necessàries per obtenir una suma x :

$$\text{resol}(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \min_{c \in \text{monedes}} \text{resol}(x - c) + 1 & x > 0 \end{cases}$$

Primer, si $x < 0$, el valor és ∞ , perquè és impossible formar una quantitat negativa de diners. Després, si $x = 0$, el valor és 0, perquè no fan falta monedes per obtenir una suma buida. Finalment, si $x > 0$, la variable c recorre totes les maneres de triar la primera moneda de la suma.

Una vegada hem trobat una fórmula recursiva, podem implementar directament la solució en C++ (la constant INF denota infinit):

```
int resol(int x) {
    if (x < 0) return INF;
    if (x == 0) return 0;
    int millor = INF;
    for (auto c : monedes) {
        millor = min(millor, resol(x-c)+1);
    }
    return millor;
}
```

Amb tot i això, aquesta funció no és eficient, perquè hi ha un nombre exponencial de maneres de construir la suma. A continuació, veurem com podem fer que aquesta funció sigui eficient fent servir una tècnica anomenada memoization.

Memoization

La idea de la programació dinàmica és fer servir **memoization** per calcular de manera eficient els valors d'una funció recursiva. Això vol dir que els valors de la funció s'emmagatzemen en un vector un cop calculats. Per a cada paràmetre, el valor de la funció es calcula recursivament només una vegada, i després d'això, el valor es pot obtenir directament consultant el vector.

En aquest problema, fem servir un vector

```
vector<int> valor(N, 0);
```

on $\text{valor}[x]$ indica el valor de $\text{resol}(x)$ o 0 si encara no l'hem calculat. La constant N ha estat triada per a que tots els valors necessaris capiguin als vectors.

Ara podem implementar la funció eficientment de la manera següent:

```
int resol(int x) {
    if (x < 0) return INF;
    if (x == 0) return 0;
    if (valor[x]) return valor[x];
    int millor = INF;
    for (auto c : monedes) {
```

```

        millor = min(millor, resol(x-c)+1);
    }
    valor[x] = millor;
    return millor;
}

```

La funció gestiona els casos bàsics $x < 0$ i $x = 0$ com abans. A continuació, la funció comprova si el valor ja s'ha desat anteriorment a `valor[x]` i, si és així, el la retorna directament. En cas contrari, la funció calcula el valor `resol(x)` recursivament i l'emmagatzema en `valor[x]`.

Aquest codi és eficient perquè la resposta per a cada entrada x només es calcula una vegada. Un cop emmagatzemem el valor `resol(x)` a `valor[x]` el podem recuperar eficientment quan la funció es torna a cridar amb el paràmetre x . La complexitat de l'algorisme és $O(nk)$, on n és la suma objectiu i k és el nombre de monedes.

Tingueu en compte que també podem contruir el vector `valor` de manera *iterativa* amb un bucle que calculi tots els valors de `resol` per als paràmetres $0 \dots n$:

```

valor[0] = 0;
for (int x = 1; x <= n; x++) {
    valor[x] = INF;
    for (auto c : monedes) {
        if (x-c >= 0) {
            valor[x] = min(valor[x], valor[x-c]+1);
        }
    }
}

```

De fet, la majoria dels programadors competitius prefereixen aquesta implementació, perquè és més curta i té factors constants més petits. A partir d'ara, també farem servir implementacions iteratives en els nostres exemples. Tot i això, sovint és més fàcil pensar en les solucions de programació dinàmica en termes de funcions recursives.

Construir una solució

De vegades se'ns demana trobar tant el valor d'una solució òptima com donar un exemple un exemple de solució. En el problema de les monedes, per exemple, podem declarar un altre vector que es guardi per cada suma de diners la primera moneda d'una solució òptima:

```

vector<int> primera(N);

```

Podem modificar l'algorisme de la següent manera:

```

valor[0] = 0;
for (int x = 1; x <= n; x++) {

```



```

    valor[x] = INF;
    per (auto c : monedas) {
        if (x-c >= 0 && valor[x-c]+1 < valor[x]) {
            valor[x] = valor[x-c]+1;
            primera[x] = c;
        }
    }
}

```

Després d'això, podem fer servir el codi següent per a imprimir les monedes que apareixen en una solució òptima amb suma n :

```

while (n > 0) {
    cout << primera[n] << "\n";
    n -= primera[n];
}

```

Comptar el nombre de solucions

Considerem ara una altra versió del problema de les monedes on la nostra feina és calcular el nombre de maneres de produir la suma x fent servir les monedes. Per exemple, si $\text{monedes} = \{1, 3, 4\}$ i $x = 5$, hi ha un total de 6 maneres:

- $1 + 1 + 1 + 1 + 1$
- $1 + 1 + 3$
- $1 + 3 + 1$
- $3 + 1 + 1$
- $1 + 4$
- $4 + 1$

De nou, podem resoldre el problema de manera recursiva. Sigui $\text{solve}(x)$ el nombre de maneres d'obtenir formar la suma x . Per exemple, si $\text{monedes} = \{1, 3, 4\}$, aleshores $\text{solve}(5) = 6$ i la fórmula recursiva és

$$\begin{aligned} \text{resol}(x) = & \text{resol}(x-1) + \\ & \text{resol}(x-3) + \\ & \text{resol}(x-4). \end{aligned} \quad (7.1)$$

La funció recursiva general és la següent:

$$\text{resol}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \sum_{c \in \text{monedes}} \text{resol}(x-c) & x > 0 \end{cases} \quad (7.2)$$

Si $x < 0$, el valor és 0, perquè no hi ha solucions. Si $x = 0$, el valor és 1, perquè només hi ha manera d'obtenir la suma buida. En cas contrari calculem la suma de tots els valors de la forma $\text{resol}(x-c)$ on c pertany a monedes .

El codi següent construeix un vector num tal que $\text{num}[x]$ és igual el valor de $\text{solve}(x)$ per a $0 \leq x \leq n$:

```

num[0] = 1;
for (int x = 1; x <= n; x++) {
    for (auto c : monedes) {
        if (x-c >= 0) {
            num[x] += num[x-c];
        }
    }
}

```

Sovint el nombre de solucions és tan gran que no se'ns demana calcular el nombre exacte sinó la resposta mòdul m on, per exemple, $m = 10^9 + 7$. Això es pot fer fent que tots els càlculs es fàcil mòdul m . En el codi anterior, n'hi ha prou afegint la línia

```
num[x] %= m;
```

després de

```
num[x] += num[x-c];
```

Amb això ja hem discutit totes les idees bàsiques de la programació dinàmica. Com que la programació dinàmica es pot fer servir en moltes situacions diferents, presentarem ara un conjunt de problemes que mostren més exemples sobre les possibilitats de la programació dinàmica.


7.2 Subseqüència creixent més llarga

El nostre primer problema és trobar la **subseqüència creixent més llarga** en un vector v de n elements. Aquesta és una longitud màxima d'una seqüència d'elements del vector, triats d'esquerra a dreta, i que cada element de la seqüència és més gran que l'element anterior. Per exemple, al vector

0	1	2	3	4	5	6	7
6	2	5	1	7	4	8	3

es té que la subseqüència creixent més llarga conté 4 elements:

0	1	2	3	4	5	6	7
6	2	5	1	7	4	8	3



Sigui $\text{longitud}(k)$ la longitud de la subseqüència creixent més llarga que acaba a la posició k . Si calculèssim tots els valors de $\text{longitud}(k)$ on $0 \leq k \leq n-1$, descobriríem quina és la longitud de la subseqüència creixent més llarga. Per

exemple, els valors de la funció per al vector anterior són els següents:

```
longitud(0) = 1
longitud(1) = 1
longitud(2) = 2
longitud(3) = 1
longitud(4) = 3
longitud(5) = 2
longitud(6) = 4
longitud(7) = 2
```

Per exemple, $\text{longitud}(6) = 4$, perquè la subseqüència creixent més llarga que acaba a la posició 6 consta de 4 elements.

Per calcular un valor de $\text{longitud}(k)$, hauríem de trobar una posició $i < k$ per a la qual $v[i] < v[k]$ i $\text{longitud}(i)$ és tan gran com sigui possible. D'aquí deduïm que $\text{longitud}(k) = \text{longitud}(i) + 1$, perquè aquesta és una manera òptima d'afegir $v[k]$ a una subseqüència. Tanmateix, si no existeix aquesta posició i , llavors $\text{longitud}(k) = 1$, és a dir, l'única subseqüència possible es aquella que només conté l'element $v[k]$.

Podem fer servir programació dinàmica perquè tots els valors de la funció es poden calcular a partir de valors més petits. En el codi següent emmagatzemem els valors de la funció en el vector `longitud`.

```
for (int k = 0; k < n; k++) {
    longitud[k] = 1;
    for (int i = 0; i < k; i++) {
        if (v[i] < v[k]) {
            longitud[k] = max(longitud[k], longitud[i]+1);
        }
    }
}
```

Aquest codi funciona en temps $O(n^2)$ perquè consta de dos bucles niats. Tanmateix, també és possible implementar el càlcul anterior de programació dinàmica de manera més eficient en temps $O(n \log n)$. Pots trobar una manera de fer-ho?

7.3 Camins en una quadrícula

El problem següent és trobar un camí que vagi de la cantonada superior esquerra a la cantonada inferior dreta d'una quadrícula $n \times n$, moguent-nos únicament cap avall i cap a la dreta. Cada quadrat conté un nombre enter positiu, i el camí s'ha de construir de tal manera que la suma dels valors al llarg el camí sigui la més gran possible.

La imatge següent mostra un camí òptim en una quadrícula:

3	7	9	2	7
9	8	3	5	5
1	7	9	8	5
3	8	6	4	10
6	3	9	7	8

La suma dels valors del camí és 67, i aquesta és la suma més gran possible per a qualsevol camí des del cantonada superior esquerra a la cantonada inferior dreta.

Suposem que les files i columnes de la quadrícula estan numerades de l'1 al n , i que $\text{valor}[y][x]$ és el valor de la casella (y, x) . Sigui $\text{suma}(y, x)$ la suma màxima de camins que van des de la cantonada superior esquerra a la casella (y, x) . Aleshores, $\text{suma}(n, n)$ ens diu la suma màxima de la cantonada superior esquerra a la cantonada inferior dreta. Per exemple, a la quadrícula anterior, $\text{suma}(5, 5) = 67$.

Les sumes màximes es poden calcular de manera recursiva com segueix:

$$\text{suma}(y, x) = \max(\text{suma}(y, x - 1), \text{suma}(y - 1, x)) + \text{valor}[y][x]$$

La fórmula recursiva es basa en l'observació que un camí que acaba a la casella (y, x) ha de passar per la casella $(y, x - 1)$ o la casella $(y - 1, x)$:



Per tant, només hem de triar la direcció que maximitzi la suma. Si definim $\text{suma}(y, x) = 0$ per $y = 0$ o $x = 0$ (els camins no poden sortir de la quadrícula), tenim que la fórmula recursiva també funciona quan $y = 1$ o $x = 1$.

Com que la funció suma té dos paràmetres, el vector de la programació dinàmica també té dues dimensions. Per exemple, podem fer servir la matriu

```
vector<vector<int>> suma(N, vector<int>(N));
```

i calcula les sumes de la següent manera:

```
for (int y = 1; y <= n; y++) {
    for (int x = 1; x <= n; x++) {
        suma[y][x] = max(suma[y][x-1], suma[y-1][x]) + valor[y][x];
    }
}
```

La complexitat temporal de l'algorisme és $O(n^2)$.

7.4 Problemes de motxilla

El terme **motxilla** (*knapsack*) es refereix a problemes on es dóna un conjunt d'objectes, i volem buscar subconjunts amb algunes propietats. Els problemes de motxilla sovint es poden resoldre fent servir programació dinàmica.

En aquest apartat, ens centrem en el següent problema: donada una llista de pesos $[w_1, w_2, \dots, w_n]$, determinar totes les sumes que es poden construir fent servir els pesos. Per exemple, donats els pesos $[1, 3, 3, 5]$, podem obtenir les següents sumes:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X	X		X	X	X	X	X	X	X		X	X

En aquest cas, totes les sumes entre $0 \dots 12$ són possibles, excepte 2 i 10. Per exemple, la suma 7 és possible perquè podem seleccionar els pesos $[1, 3, 3]$.

Per resoldre el problema, ens centrem en els subproblemes on només fem servir els primers k pesos per construir sumes. Sigui $\text{possible}(x, k) = \text{true}$ si podem construir una suma x fent servir els primers k pesos, i $\text{possible}(x, k) = \text{false}$ en cas contrari. Els valors de la funció es poden calcular recursivament de la següent manera:

$$\text{possible}(x, k) = \text{possible}(x - w_k, k - 1) \vee \text{possible}(x, k - 1)$$

La fórmula es basa en el fet que podem fer servir o no fer servir el pes w_k a la suma. Si fem servir w_k , la tasca restant és trobar la suma $x - w_k$ fent servir els primers $k - 1$ pesos, i si no fem servir w_k , la tasca restant és formar la suma x fent servir els primers pesos $k - 1$. Els casos bàsics són

$$\text{possible}(x, 0) = \begin{cases} \text{true} & x = 0 \\ \text{false} & x \neq 0 \end{cases}$$

perquè si no fem servir pesos, només podem formar la suma 0.

La taula següent mostra tots els valors de la funció per als pesos $[1, 3, 3, 5]$ (el símbol "X" indica els valors reals):

$k \backslash x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	X												
1	X	X											
2	X	X		X	X								
3	X	X		X	X		X	X					
4	X	X		X	X	X	X	X	X	X		X	X

Després de calcular aquests valors, $\text{possible}(x, n)$ ens diu si podem construir la suma x fent servir *tots* pesos.

Sigui W la suma total dels pesos. El codi següent es correspon a la funció recursiva anterior i troba la solució en temps $O(nW)$.

```
possible[0][0] = true;
for (int k = 1; k <= n; k++) {
    for (int x = 0; x <= W; x++) {
```

```

        if (x-w[k] >= 0) possible[x][k] |= possible[x-w[k]][k-1];
        possible[x][k] |= possible[x][k-1];
    }
}

```

No obstant això, en aquest cas hi ha una millor implementació que només fa servir un vector unidimensional `possible[x]` que indica si podem construir un subconjunt amb la suma x . El truc és actualitzar el vector de dreta a esquerra per cada nou pes¹:

```

possible[0] = cert;
for (int k = 1; k <= n; k++) {
    for (int x = W; x >= 0; x--) {
        if (possible[x]) possible[x+w[k]] = true;
    }
}

```

Tingueu en compte que la idea presentada aquí es pot fer servir per molts problemes de motxilla. Per exemple, si ens donen objectes amb pesos i valors, podríem determinar quin subconjunt d'objectes ens donarien valor màxim per a cadascun dels pesos possibles.

7.5 Distància d'edició

La **distància d'edició** o **distància de Levenshtein**² és el nombre mínim d'operacions d'edició que fan falta per transformar una cadena en una altra cadena. Les operacions d'edició permeses són les següents:

- inserir un caràcter (per exemple, $ABC \rightarrow ABCA$)
- eliminar un caràcter (per exemple, $ABC \rightarrow AC$)
- modificar un caràcter (per exemple, $ABC \rightarrow ADC$)

Per exemple, la distància d'edició entre LOVE i MOVIE és 2, perquè primer podem realitzar l'operació $LOVE \rightarrow MOVE$ (modificar) i després l'operació $MOVE \rightarrow MOVIE$ (inserir). Aquest és el nombre més petit possible d'operacions, perquè és evident que una sola operació no és suficient.

Suposem que se'ns dona una cadena x de longitud n i una cadena y de longitud m , i volem calcular la distància d'edició entre x i y . Per resoldre el problema, definim una funció $\text{dist}(a, b)$ que dona la distància d'edició entre prefixos $x[0 \dots a]$ i $y[0 \dots b]$. Així, utilitzant aquesta funció, la distància d'edició entre x i y és igual a $\text{dist}(n-1, m-1)$.

¹N. del T.: Una solució alternativa i general consisteix en fer servir dos vectors unidimensionals, un per la fila actual (k) i un per la fila anterior ($k-1$).

²La distància rep el nom de V. I. Levenshtein, que la va estudiar per la seva relació amb les codificacions binàries [49].

Podem calcular valors de dist com segueix:

$$\begin{aligned} \text{dist}(a, b) = \min(&\text{dist}(a, b-1) + 1, \\ &\text{dist}(a-1, b) + 1, \\ &\text{dist}(a-1, b-1) + \text{cost}(a, b)). \end{aligned}$$

Aquí $\text{cost}(a, b) = 0$ si $x[a] = y[b]$, i en cas contrari $\text{cost}(a, b) = 1$. La fórmula considera les següents maneres d'editar la cadena x :

- $\text{dist}(a, b-1)$: inserir un caràcter al final de x
- $\text{dist}(a-1, b)$: eliminar l'últim caràcter de x
- $\text{dist}(a-1, b-1)$: modificar, si és necessari, l'últim caràcter de x

En els dos primers casos, fa falta una sola operació d'edició (inserir o eliminar). En el darrer cas, si $x[a] = y[b]$, no fa falta gastar cap operació, pero en cas contrari necessitem una operació d'edició (modificar).

La taula següent mostra els valors de dist en el cas exemple:

		M	O	V	I	E
L O V E	0	1	2	3	4	5
	1	1	2	3	4	5
	2	2	1	2	3	4
	3	3	2	1	2	3
	4	4	3	2	2	2

La cantonada inferior esquerra de la taula ens diu que la distància d'edició entre LOVE i MOVIE és 2. La taula també mostra com construir una seqüència mínima d'operacions d'edició. En aquest trobem el camí següent:

		M	O	V	I	E	
		0	1	2	3	4	5
L		1	1	2	3	4	5
O		2	2	1	2	3	4
V		3	3	2	1	2	3
E		4	4	3	2	2	2

Els últims caràcters de AMOR i MOVIE són iguals, de manera que la distància d'edició entre ells és igual a la distància d'edició entre LOV i MOV. Podem fer servir una operació d'edició per eliminar l'últim caràcter I de MOV. Per tant, la distància d'edició és un més gran que la distància d'edició entre LOV i MOV, etc.

7.6 Comptar rajoles

De vegades, els estats d'una solució de programació dinàmica són més complexes que les combinacions fixes de nombres. Per exemple, considerem el problema de calcular el nombre de maneres diferents d'omplir una quadrícula $n \times m$ fent servir fitxes de mida 1×2 i 2×1 . Una solució vàlida per a la quadrícula 4×7 és



i el nombre total de solucions és 781.

El problema es pot resoldre amb programació dinàmica si passem per la quadrícula fila per fila. Cada fila d'una solució es pot representar com una cadena que conté m caràcters del conjunt $\{\sqcap, \sqcup, \sqsubset, \sqsupset\}$. Per exemple, la solució anterior consta de quatre files que es corresponen amb les següents cadenes:

- $\sqcap \sqsubset \sqcap \sqsubset \sqsubset \sqcap$
- $\sqcup \sqsubset \sqcup \sqcap \sqcap \sqcup$
- $\sqsubset \sqsubset \sqsubset \sqcup \sqcup \sqcap$
- $\sqsubset \sqsubset \sqsubset \sqsubset \sqsubset \sqcup$

Sigui $\text{count}(k, x)$ el nombre de maneres de construir una solució per a les files $1 \dots k$ de la graella de manera que la cadena x correspon a la fila k . Aquí és possible utilitzar la programació dinàmica, perquè l'estat d'una fila està restringit només per l'estat de la fila anterior.

Una solució és vàlida si la fila 1 no conté el caràcter \sqcup , la fila n no conté el caràcter \sqcap , i totes les files consecutives són *compatibles*. Per exemple, les files $\sqcup \sqsubset \sqcup \sqcap \sqcap \sqcup$ i $\sqsubset \sqsubset \sqsubset \sqcup \sqcup \sqcap$ són compatibles, mentre que les files $\sqcap \sqsubset \sqcap \sqsubset \sqsubset \sqcap$ i $\sqsubset \sqsubset \sqsubset \sqsubset \sqsubset \sqcup$ no són compatibles.

Com que una fila consta de m caràcters i n'hi ha quatre opcions per a cada caràcter, el nombre de files diferents és com a màxim 4^m . Per tant, la complexitat temporal de la solució és $O(n4^{2m})$ perquè podem passar pels $O(4^m)$ estats possibles de cada fila i, per a cada estat, hi ha $O(4^m)$ estats possibles de la fila anterior. A la pràctica, és una bona idea girar la quadrícula per a que el costat més curt tingui longitud m , donat que el factor 4^{2m} domina la complexitat temporal.

És possible millorar la solució amb una representació més compacta de les files. Resulta que n'hi ha prou amb saber quines de les columnes de la fila anterior contenen el quadrat superior d'una rajola vertical. Així, podem representar una fila utilitzant només caràcters \sqcap i \square , on \square és una combinació de caràcters \sqcup , \sqsubset i \sqsupset . Fent servir aquesta representació, només n'hi ha 2^m files diferents, i la complexitat temporal és $O(n2^{2m})$.

Com a nota final, també hi ha una fórmula directa sorprenent per calcular el nombre de rajoles³:

$$\prod_{a=1}^{\lceil n/2 \rceil} \prod_{b=1}^{\lceil m/2 \rceil} 4 \cdot \left(\cos^2 \frac{\pi a}{n+1} + \cos^2 \frac{\pi b}{m+1} \right)$$

Aquesta fórmula és molt eficient, perquè calcula el nombre de mosaics en $O(nm)$ temps, però com que la resposta és un producte de nombres reals, fer servir la fórmula requereix emmagatzemar els resultats intermedis amb precisió.

³Sorprenentment, aquesta fórmula va ser descoberta l'any 1961 per dos equips de recerca [43, 67] que funcionaven de manera independent.

Part II

Graph algorithms

Part III

Advanced topics

Bibliography

- [1] A. V. Aho, J. E. Hopcroft and J. Ullman. *Data Structures and Algorithms*, Addison-Wesley, 1983.
- [2] R. K. Ahuja and J. B. Orlin. Distance directed augmenting path algorithms for maximum flow and parametric maximum flow problems. *Naval Research Logistics*, 38(3):413–430, 1991.
- [3] A. M. Andrew. Another efficient algorithm for convex hulls in two dimensions. *Information Processing Letters*, 9(5):216–219, 1979.
- [4] B. Aspvall, M. F. Plass and R. E. Tarjan. A linear-time algorithm for testing the truth of certain quantified boolean formulas. *Information Processing Letters*, 8(3):121–123, 1979.
- [5] R. Bellman. On a routing problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 16(1):87–90, 1958.
- [6] M. Beck, E. Pine, W. Tarrat and K. Y. Jensen. New integer representations as the sum of three cubes. *Mathematics of Computation*, 76(259):1683–1690, 2007.
- [7] M. A. Bender and M. Farach-Colton. The LCA problem revisited. In *Latin American Symposium on Theoretical Informatics*, 88–94, 2000.
- [8] J. Bentley. *Programming Pearls*. Addison-Wesley, 1999 (2nd edition).
- [9] J. Bentley and D. Wood. An optimal worst case algorithm for reporting intersections of rectangles. *IEEE Transactions on Computers*, C-29(7):571–577, 1980.
- [10] C. L. Bouton. Nim, a game with a complete mathematical theory. *Annals of Mathematics*, 3(1/4):35–39, 1901.
- [11] Croatian Open Competition in Informatics, <http://hsin.hr/coci/>
- [12] Codeforces: On "Mo's algorithm", <http://codeforces.com/blog/entry/20032>
- [13] T. H. Cormen, C. E. Leiserson, R. L. Rivest and C. Stein. *Introduction to Algorithms*, MIT Press, 2009 (3rd edition).

- [14] E. W. Dijkstra. A note on two problems in connexion with graphs. *Numerische Mathematik*, 1(1):269–271, 1959.
- [15] K. Diks et al. *Looking for a Challenge? The Ultimate Problem Set from the University of Warsaw Programming Competitions*, University of Warsaw, 2012.
- [16] M. Dima and R. Ceterchi. Efficient range minimum queries using binary indexed trees. *Olympiad in Informatics*, 9(1):39–44, 2015.
- [17] J. Edmonds. Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of Mathematics*, 17(3):449–467, 1965.
- [18] J. Edmonds and R. M. Karp. Theoretical improvements in algorithmic efficiency for network flow problems. *Journal of the ACM*, 19(2):248–264, 1972.
- [19] S. Even, A. Itai and A. Shamir. On the complexity of time table and multi-commodity flow problems. *16th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 184–193, 1975.
- [20] D. Fanding. A faster algorithm for shortest-path – SPFA. *Journal of Southwest Jiaotong University*, 2, 1994.
- [21] P. M. Fenwick. A new data structure for cumulative frequency tables. *Software: Practice and Experience*, 24(3):327–336, 1994.
- [22] J. Fischer and V. Heun. Theoretical and practical improvements on the RMQ-problem, with applications to LCA and LCE. In *Annual Symposium on Combinatorial Pattern Matching*, 36–48, 2006.
- [23] R. W. Floyd Algorithm 97: shortest path. *Communications of the ACM*, 5(6):345, 1962.
- [24] L. R. Ford. Network flow theory. RAND Corporation, Santa Monica, California, 1956.
- [25] L. R. Ford and D. R. Fulkerson. Maximal flow through a network. *Canadian Journal of Mathematics*, 8(3):399–404, 1956.
- [26] R. Freivalds. Probabilistic machines can use less running time. In *IFIP congress*, 839–842, 1977.
- [27] F. Le Gall. Powers of tensors and fast matrix multiplication. In *Proceedings of the 39th International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, 296–303, 2014.
- [28] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman and Company, 1979.
- [29] Google Code Jam Statistics (2017), <https://www.go-hero.net/jam/17>

- [30] A. Grønlund and S. Pettie. Threesomes, degenerates, and love triangles. In *Proceedings of the 55th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 621–630, 2014.
- [31] P. M. Grundy. Mathematics and games. *Eureka*, 2(5):6–8, 1939.
- [32] D. Gusfield. *Algorithms on Strings, Trees and Sequences: Computer Science and Computational Biology*, Cambridge University Press, 1997.
- [33] S. Halim and F. Halim. *Competitive Programming 3: The New Lower Bound of Programming Contests*, 2013.
- [34] M. Held and R. M. Karp. A dynamic programming approach to sequencing problems. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 10(1):196–210, 1962.
- [35] C. Hierholzer and C. Wiener. Über die Möglichkeit, einen Linienzug ohne Wiederholung und ohne Unterbrechung zu umfahren. *Mathematische Annalen*, 6(1), 30–32, 1873.
- [36] C. A. R. Hoare. Algorithm 64: Quicksort. *Communications of the ACM*, 4(7):321, 1961.
- [37] C. A. R. Hoare. Algorithm 65: Find. *Communications of the ACM*, 4(7):321–322, 1961.
- [38] J. E. Hopcroft and J. D. Ullman. A linear list merging algorithm. Technical report, Cornell University, 1971.
- [39] E. Horowitz and S. Sahni. Computing partitions with applications to the knapsack problem. *Journal of the ACM*, 21(2):277–292, 1974.
- [40] D. A. Huffman. A method for the construction of minimum-redundancy codes. *Proceedings of the IRE*, 40(9):1098–1101, 1952.
- [41] The International Olympiad in Informatics Syllabus, <https://people.ksp.sk/~misof/ioi-syllabus/>
- [42] R. M. Karp and M. O. Rabin. Efficient randomized pattern-matching algorithms. *IBM Journal of Research and Development*, 31(2):249–260, 1987.
- [43] P. W. Kasteleyn. The statistics of dimers on a lattice: I. The number of dimer arrangements on a quadratic lattice. *Physica*, 27(12):1209–1225, 1961.
- [44] C. Kent, G. M. Landau and M. Ziv-Ukelson. On the complexity of sparse exon assembly. *Journal of Computational Biology*, 13(5):1013–1027, 2006.
- [45] J. Kleinberg and É. Tardos. *Algorithm Design*, Pearson, 2005.
- [46] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming. Volume 2: Seminumerical Algorithms*, Addison–Wesley, 1998 (3rd edition).

- [47] D. E. Knuth. *The Art of Computer Programming. Volume 3: Sorting and Searching*, Addison–Wesley, 1998 (2nd edition).
- [48] J. B. Kruskal. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7(1):48–50, 1956.
- [49] V. I. Levenshtein. Binary codes capable of correcting deletions, insertions, and reversals. *Soviet physics doklady*, 10(8):707–710, 1966.
- [50] M. G. Main and R. J. Lorentz. An $O(n \log n)$ algorithm for finding all repetitions in a string. *Journal of Algorithms*, 5(3):422–432, 1984.
- [51] J. Pachocki and J. Radoszewski. Where to use and how not to use polynomial string hashing. *Olympiads in Informatics*, 7(1):90–100, 2013.
- [52] I. Parberry. An efficient algorithm for the Knight’s tour problem. *Discrete Applied Mathematics*, 73(3):251–260, 1997.
- [53] D. Pearson. A polynomial-time algorithm for the change-making problem. *Operations Research Letters*, 33(3):231–234, 2005.
- [54] R. C. Prim. Shortest connection networks and some generalizations. *Bell System Technical Journal*, 36(6):1389–1401, 1957.
- [55] 27-Queens Puzzle: Massively Parallel Enumeration and Solution Counting. <https://github.com/preusser/q27>
- [56] M. I. Shamos and D. Hoey. Closest-point problems. In *Proceedings of the 16th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 151–162, 1975.
- [57] M. Sharir. A strong-connectivity algorithm and its applications in data flow analysis. *Computers & Mathematics with Applications*, 7(1):67–72, 1981.
- [58] S. S. Skiena. *The Algorithm Design Manual*, Springer, 2008 (2nd edition).
- [59] S. S. Skiena and M. A. Revilla. *Programming Challenges: The Programming Contest Training Manual*, Springer, 2003.
- [60] SZKOpuł, <https://szkopul.edu.pl/>
- [61] R. Sprague. Über mathematische Kampfspiele. *Tohoku Mathematical Journal*, 41:438–444, 1935.
- [62] P. Stańczyk. *Algorytmika praktyczna w konkursach Informatycznych*, MSc thesis, University of Warsaw, 2006.
- [63] V. Strassen. Gaussian elimination is not optimal. *Numerische Mathematik*, 13(4):354–356, 1969.
- [64] R. E. Tarjan. Efficiency of a good but not linear set union algorithm. *Journal of the ACM*, 22(2):215–225, 1975.

- [65] R. E. Tarjan. Applications of path compression on balanced trees. *Journal of the ACM*, 26(4):690–715, 1979.
- [66] R. E. Tarjan and U. Vishkin. Finding biconnected components and computing tree functions in logarithmic parallel time. In *Proceedings of the 25th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, 12–20, 1984.
- [67] H. N. V. Temperley and M. E. Fisher. Dimer problem in statistical mechanics – an exact result. *Philosophical Magazine*, 6(68):1061–1063, 1961.
- [68] USA Computing Olympiad, <http://www.usaco.org/>
- [69] H. C. von Warnsdorf. *Des Rösselsprunges einfachste und allgemeinste Lösung*. Schmalkalden, 1823.
- [70] S. Warshall. A theorem on boolean matrices. *Journal of the ACM*, 9(1):11–12, 1962.

