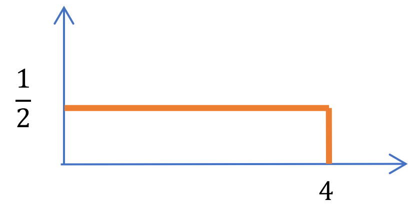
امید بنکدار ۴۰۱۷۲۲۰۳۷

۱-

$V_j = V_{j-2} \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1}$

برای ساختن ویولت گسسته باید از توابع آن نمونه برداری کنیم. برای V_{j-2} از تابع آن چهار نمونه برمیداریم.

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \varphi(y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



برای 2D wavelet روابط زیر را داریم:

$\varphi(x،y) = \varphi(x)\varphi(y)$ = تقریب
$\psi^H(x,y) = \psi(x)\varphi(y)$ = جزییات افقی
$\psi^V(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ = جزییات عمودی
$\psi^D(x,y) = \psi(x)\psi(y)$ = جزییات قطری

با توجه به رابطه $\varphi(x،y) = \varphi(x)\varphi(y)$ ابتدا ماتریس ورودی را $\varphi(x)$ میگیریم:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

در مرحله بعد نتیجه را $\varphi(y)$ میگیریم:

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 10 \end{bmatrix}$$

ماتریس به دست آمده، تقریب (approximation) ماتریس ورودی در فضای j-2 یا همان V_{j-2} است.

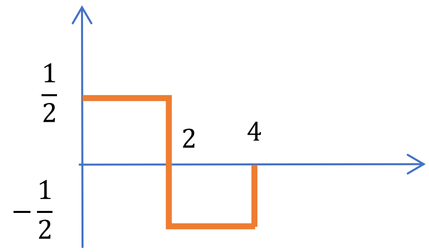
برای محاسبه W_{j-2} از سه رابطه بعدی کمک میگیریم:

$\psi^H(x,y) = \psi(x)\varphi(y)$ = جزییات افقی
$\psi^V(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ = جزییات عمودی
$\psi^D(x,y) = \psi(x)\psi(y)$ = جزییات قطری

این سه رابطه سه مولفه W_{j-2} را محاسبه میکنند.

از تابع ψ در فضای j-2 چهار نمونه برمیداریم.

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \psi(y) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$



برای یافتن $\psi^H(x,y)$ از ماتریس ورودی ابتدا $\varphi(y)$ و سپس $\psi(x)$ میگیریم.

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 4 \\ 7 & 5 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 7 & 4 \\ 7 & 5 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \end{bmatrix}$$

برای یافتن $\psi^V(x,y)$ از ماتریس ورودی ابتدا $\varphi(x)$ و سپس $\psi(y)$ میگیریم.

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 8 & 8 & 4 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \end{bmatrix}$$

برای یافتن $\psi^D(x,y)$ از ماتریس ورودی ابتدا $\psi(x)$ و سپس $\psi(y)$ میگیریم.

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1] \odot \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = [0 \quad 0]$$

با ترکیب نتایج به دست آمده، ماتریس تبدیل شده در فضای j-2 را داریم:

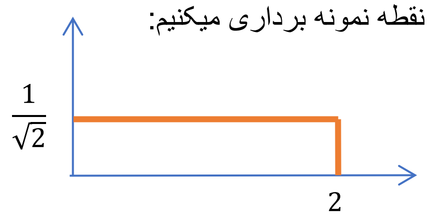
$$\begin{bmatrix} \varphi(x،y) & \psi^{V}(x,y) \\ \psi^{H}(x,y) & \psi^{D}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [14 \quad 10] & [2 \quad 0] \\ [0 \quad -2] & [0 \quad 0] \end{bmatrix}$$

حال باید W_{j-1} را بیابیم، همانند قبل از سه رابطه زیر کمک میگیریم:

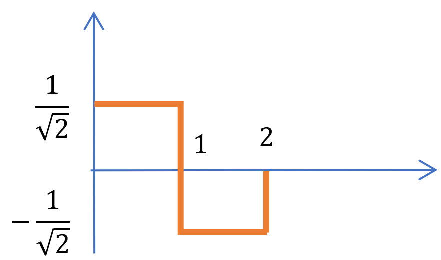
$\psi^{H}(x,y) = \psi(x)\varphi(y)$ = جزییات افقی
$\psi^{V}(x,y) = \varphi(x)\psi(y)$ = جزییات عمودی
$\psi^{D}(x,y) = \psi(x)\psi(y)$ = جزییات قطری

از توابع پیوسته φ و ψ در فضای j-1 در دو نقطه نمونه برداری میکنیم:

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \varphi(y) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$



$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \quad \psi(y) = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$



برای یافتن $\psi^{H}(x,y)$ از ماتریس ورودی ابتدا $\varphi(y)$ و سپس $\psi(x)$ میگیریم.

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

برای یافتن $\psi^{V}(x,y)$ از ماتریس ورودی ابتدا $\varphi(x)$ و سپس $\psi(y)$ میگیریم.

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 4\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برای یافتن $\psi^D(x,y)$ از ماتریس ورودی ابتدا $\psi(x)$ و سپس $\psi(y)$ میگیریم.

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 4 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

حال اگر نتایج حاصل از مرحله قبل و این مرحله را درکنار هم قرار دهیم ماتریس زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi(x،y) & \psi^V(x,y) \\ \psi^H(x,y) & \psi^D(x,y) \end{bmatrix} & \psi^V(x,y) \\ \psi^H(x,y) & \psi^D(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [14 & 10] & [2 & 0] \\ [0 & -2] & [0 & 0] \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 10 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ب)

پس از حذف جزییات افقی از W_{j-1} تبدیل معکوس میگیریم، برای تبدیل معکوس، مولفه های به دست آمده را در توابع پایه شان ضرب میکنیم:

برای تبدیل معکوس V_{j-2} ماتریس آن را ابتدا در $\varphi(x)$ و سپس در $\varphi(y)$ ضرب میکنیم.

$$[14 \quad 10] * \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 5 \\ 7 & 5 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 7 & 5 \\ 7 & 5 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 \\ 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 \\ 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 \\ 3.5 & 3.5 & 3.5 & 3.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 & 2.5 \end{bmatrix}$$

برای تبدیل معکوس W_{j-2} باید سه مولفه آن را تبدیل معکوس بگیریم .
برای تبدیل معکوس مولفه $\psi^H(x,y)$ ماتریس آن را ابتدا در $\psi(x)$ و سپس در $\varphi(y)$ ضرب میکنیم.

$$[0 \quad -2] * \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & -0.5 & -0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

برای تبدیل معکوس مولفه $\psi^V(x,y)$ ماتریس آن را ابتدا در $\psi(y)$ و سپس در $\varphi(x)$ ضرب میکنیم.

$$[2 \quad 0] * \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = [1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$[1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] * \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

برای تبدیل معکوس مولفه $\psi^D(x,y)$ ماتریس آن را ابتدا در $\psi(y)$ و سپس در $\psi(x)$ ضرب میکنیم.
اما چون ماتریس آن صفر است، نتیجه صفر خواهد شد.

برای تبدیل معکوس W_{j-1} باید سه مولفه آن را تبدیل معکوس بگیریم .

مولفه $\psi^H(x,y)$ را حذف می کنیم

برای تبدیل معکوس مولفه $\psi^V(x,y)$ ماتریس آن را ابتدا در $\psi(y)$ و سپس در $\varphi(x)$ ضرب میکنیم.

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تبدیل معکوس مولفه $\psi^D(x,y)$ ماتریس آن را ابتدا در $\psi(y)$ و سپس در $\psi(x)$ ضرب میکنیم.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

پس از جمع ماتریس های حاصل، ماتریس زیر به دست می آید:

$$\begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 2 & 3 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

در اثر حذف جزییات افقی W_{j-1} مقادیر $\begin{matrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \end{matrix}$ به $\begin{matrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{matrix}$ تبدیل شده اند.

ج)

$$f(x) = \begin{cases} 3, & 0 \le x < \frac{1}{2} \\ x+1, & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \sum_k C_{j0}(k)\varphi_{j0,k}(x) + \sum_{j=j_0}^{\infty} \sum_k d_j(k)\psi_{j,k}(x)$$

با توجه به این که تابع f در بازه ۰ و ۱ قرار دارد، فقط با $\varphi_{0,0}$ اشتراک دارد، پس فقط این مولفه را در محاسبات لحاظ میکنیم.
برای محاسبه c از ضرب داخلی زیر استفاده میکنیم.

$$c = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 * 3\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1 * (x+1)\,dx = 3x|_0^{\frac{1}{2}} + (\frac{x^2}{2} + x)|_{1/2}^{1} = \frac{19}{8}$$

با توجه به این که تابع f در بازه ۰ و ۱ قرار دارد، فقط با $\psi_{0,0}$ اشتراک دارد، پس فقط این مولفه را در محاسبات لحاظ میکنیم.
برای محاسبه $d_{0,0}$ از ضرب داخلی زیر استفاده میکنیم.

$$d_0(0) = \int_0^{\frac{1}{2}} 1 * 3\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} -1 * (x+1)\,dx = 3x|_0^{\frac{1}{2}} - (\frac{x^2}{2} + x)|_{1/2}^{1} = \frac{3}{8}$$

در فضای j=1 نیز با توجه به این که تابع f در بازه ۰ و ۱ قرار دارد، فقط با $\psi_{1,0}$ و $\psi_{1,1}$ اشتراک دارد، پس فقط این مولفه را در محاسبات لحاظ میکنیم.

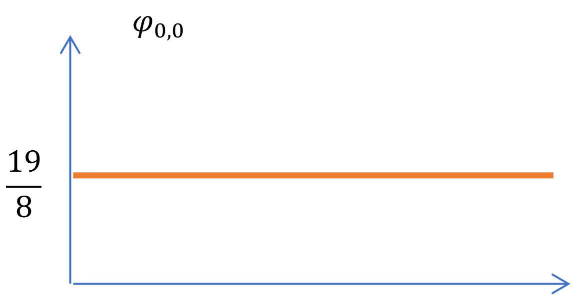
$$d_1(0) = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{2} * 3\, dx + \int_{1/4}^{1/2} -\sqrt{2} * 3\, dx = 0$$

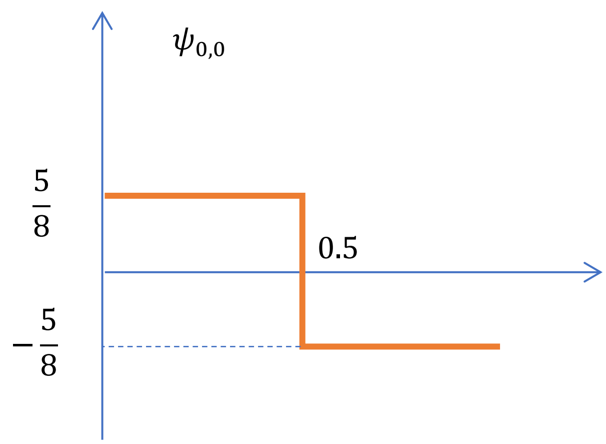
$$d_1(1) = \int_{1/2}^{3/4} \sqrt{2} * (X+1)\, dx + \int_{3/4}^{1} -\sqrt{2} * (x+1)\, dx = \frac{-\sqrt{2}}{16}$$

در نتیجه:

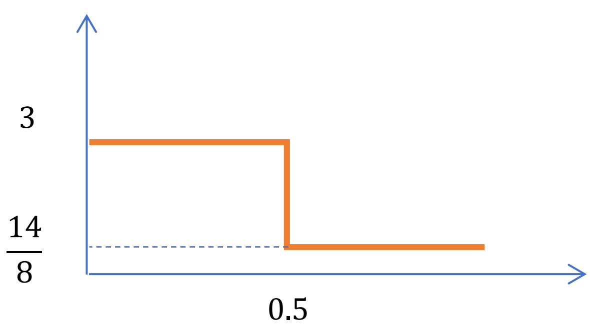
$$f(x) = \frac{19}{8}\varphi_{0,0}(x) + \frac{5}{8}\psi_{0,0}(x) + \frac{-\sqrt{2}}{16}\psi_{1,1}(x)$$

حال توابع را رسم میکنیم:

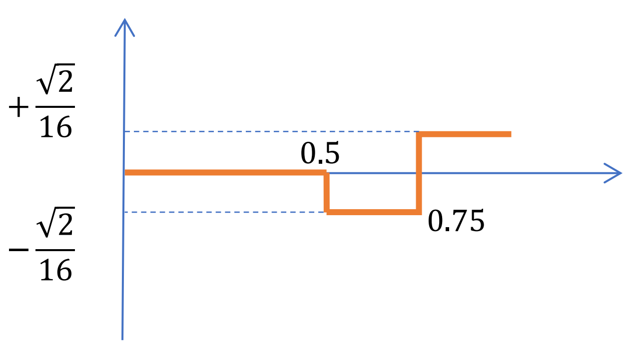




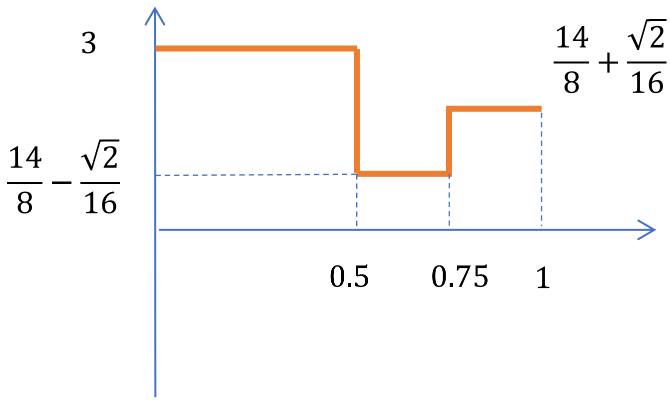
از ترکیب توابع بالا میتوان V_1 را ساخت:



برای رسم با W_1 توابع با $\psi_{1,0}$ و با $\psi_{1,1}$ را ترکیب میکنیم:



و در آخر با ترکیب همه این نمودار ها داریم:



۲-
تصاویر نویزی و اصلی را خوانده و نمایش میدهیم

```
image = cv2.imread('noisyImg.jpg', cv2.IMREAD_GRAYSCALE)
real = cv2.imread('realImg.jpg', cv2.IMREAD_GRAYSCALE)

fig, axes = plt.subplots(2, 3, figsize=(30, 25))
axes[1, 0].set_axis_off()

# show main image
axes[0, 0].imshow(real, cmap='gray')
axes[0, 0].set_title('main Image')
axes[0, 0].set_axis_off()

# show noisy image
axes[0, 1].imshow(image, cmap='gray')
axes[0, 1].set_title('Noisy Image')
axes[0, 1].set_axis_off()
```

با استفاده از کتابخانه pywt و متد wavedec2، از تصویر تبدیل wavelet میگیریم.
نوع ویولت را haar و تعداد مراحل را ۲ قرار میدهیم.

```
# image decomposition by haar wavelet transform
decomposited_image = pywt.wavedec2(image, 'haar', level=2)
```

تصویر تبدیل شده را نمایش میدهیم:

```
# show decomposited components
arr, slices = pywt.coeffs_to_array(decomposited_image)
axes[1, 1].imshow(arr, cmap='gray')
axes[1, 1].set_title('decomposited Image')
axes[1, 1].set_axis_off()
```

مؤلفه های تقریب، جزییات افقی، جزییات عمودی و جزییات قطری دو مرحله تبدیل را استخراج میکنیم:

```
# extract coefficients list from decomposited image
[cA2, (cH2, cV2, cD2),(cH1, cV1, cD1)] = decomposited_image
```

میخواهیم برخی از مؤلفه های تصویر تبدیل شده را حذف کنیم، بنابراین ماتریس هایی با مقدار صفر و ابعاد آن مولفه ها میسازیم تا جایگزین آن ها کنیم:

```
# define zero matrices to replace with some coefficients
Level2_zero=np.zeros_like(cH2)
Level1_zero=np.zeros_like(cH1)
```

مؤلفه های جزییات سطح یک و جزییات قطری سطح دو را حذف و ماتریس های صفر را جایگزین آنها میکنیم:

```
# rebuild decomposited image with new coefficients
rebuilded_image = [cA2, (cH2, cV2, Level2_zero),(Level1_zero, Level1_zero, Level1_zero)]
```

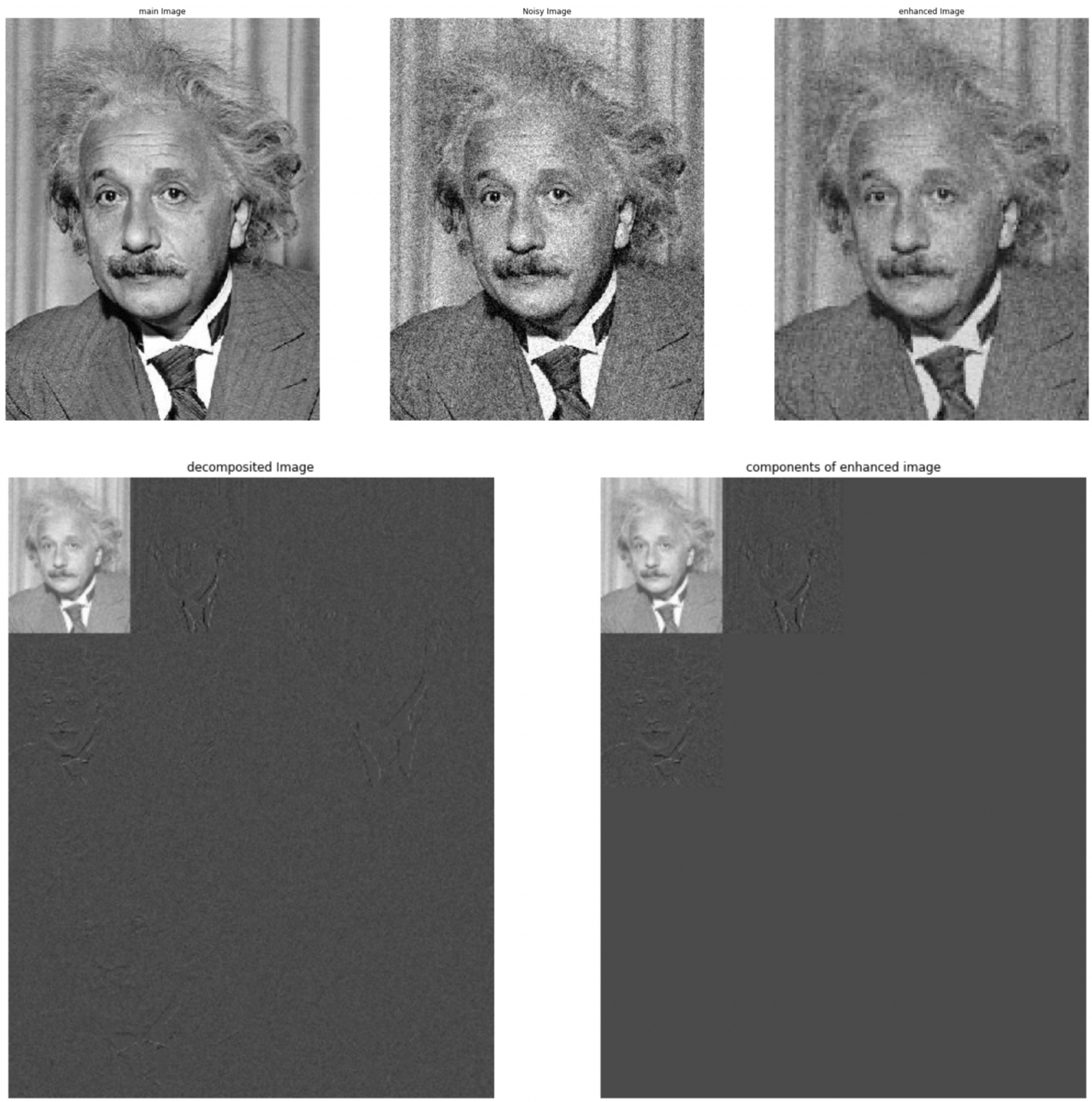
با استفاده از متد waverec2 تصویر را بازسازی میکنیم:

```
# reconstruct enhanced image
enhanced_image = pywt.waverec2(rebuilded_image, 'haar')
```

تصویر بازسازی شده و مولفه های آن قبل از بازسازی را نمایش میدهیم:

```
# show enhanced image
axes[0, 2].imshow(enhanced_image, cmap='gray')
axes[0, 2].set_title('enhanced Image')
axes[0, 2].set_axis_off()

# show enhanced image components
arr, slices = pywt.coeffs_to_array(rebuilded_image)
axes[1, 2].imshow(arr, cmap='gray')
axes[1, 2].set_title('components of enhanced image')
axes[1, 2].set_axis_off()
```



ارزیابی نتایج:

```
# evaluate by criteries #
mse_noisy = skimage.metrics.mean_squared_error(image,real)
psnr_noisy = skimage.metrics.peak_signal_noise_ratio(real,image)
ssim_noisy = skimage.metrics.structural_similarity(image,real)

mse_enhanced = skimage.metrics.mean_squared_error(enhanced_image,real)
psnr_enhanced = skimage.metrics.peak_signal_noise_ratio(real,enhanced_image)
ssim_enhanced = skimage.metrics.structural_similarity(enhanced_image,real)

print("\n")
print("metrics for noisy image")
print("mse={}".format(mse_noisy))
print("psnr={}".format(psnr_noisy))
print("ssim={}".format(ssim_noisy))

print("\n")
print("metrics for enhanced image")
print("mse={}".format(mse_enhanced))
print("psnr={}".format(psnr_enhanced))
print("ssim={}".format(ssim_enhanced))
```

```
metrics for noisy image
mse=788.2502101723413
psnr=19.164162656513607
ssim=0.36013344320420454


metrics for enhanced image
mse=338.1450201096719
psnr=22.83977364951042
ssim=0.43571100884402153
```

معیار ها نشان میدهند تصویر بهبود یافته و از لحاظ پارامتر های مختلف به تصویر اصلی نزدیک تر است.
(در مقایسه با تصویر نویزی)

از لحاظ بصری نیز میتوان مشاهده کرد تصویر بهبود چشمگیری داشته.

۳-
احتمال هر شدت روشنایی از رابطه زیر محاسبه میشود:

$$P_r(r_k) = \frac{n_k}{MN}$$

در این رابطه n_k تعداد تکرار آن شدت روشنایی در تصویر و MN ابعاد تصویر (تعداد کل پیکسل های تصویر) است.

تعداد بیت میانگین مود نیاز برای ذخیره اطلاعات تصویر از رابطه زیر محاسبه میشود:

$$L_{avg} = \sum_{k=0}^{L-1} l(r_k)P_r(r_k)$$

در این رابطه $l(r_k)$ تعداد بیت مورد نیاز برای بیان شدت روشنایی r_k و $P_r(r_k)$ احتمال آن شدت روشنایی است.

اگر از روش کد گذاری کلاسیک استفاده کنیم برای هر شدت روشنایی یک کد هشت بیتی لازم داریم.

r_k	$P_r(r_k)$	Classical coding	$l(r_k)$	Huffman coding	$l(r_k)$
10	$\frac{12}{30}$	00001010	8	0	1
40	$\frac{8}{30}$	00101000	8	00	2
75	$\frac{3}{30}$	01001011	8	0100	4
120	$\frac{1}{30}$	01111000	8	0101	4
250	$\frac{6}{30}$	11111010	8	011	3

$$L_{avg}(classic) = 8$$

$$L_{avg}(huffman) = \frac{1}{30}(12*1+8*2+3*4+1*4+6*3) = 2.06$$

ج) حال نرخ فشرده سازی را محاسبه میکنیم:

$$C = \frac{8}{2.06} = 3.88$$

د) با استفاده از نرخ فشرده سازی به دست آمده از مرحله قبل، میزان افزونگی نسبی را محاسبه میکنیم:

$$R = 1 - \frac{1}{3.88} = 0.74$$