ЗАДАНИЕ 1
КОМПАКТНАЯ СХЕМА НА КОСЫХ ШАБЛОНАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

А. Б. Паасонен[1,2]

[1]*Институт вычислительных технологий СО РАН, 630090, Новосибирск*

[2]*Новосибирский государственный университет, 630090, Новосибирск*

Задание состоит в тестировании схемы третьего порядка точности на косых шаблонах для уравнения теплопроводности. Краевая задача ставится для области с переменными во времени границами, на которых заданы значения функции

Ключевые слова: компактная схема, неравномерная сетка, косой шаблон

Введение

Обычно разностные схемы для решения динамических задач записываются на прямых шаблонах, когда на обоих слоях двухслойной схемы используется одна и та же сетка. Схемой на косом шаблоне будем называть схемы, использующие различные сетки на разных временных слоях. Такие схемы могут найти применение, например, в адаптивных методах для исключения интерполяции решения с сетки на сетку, при решении краевых задач с подвижными внешними границами, а также для построения частных случаев схем на регулярных сетках с сотовым или шахматным расположением узлов.

1 Разностные схемы для уравнения теплопроводности

Будем аппроксимировать безграничную задачу Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial U}{\partial t} = c\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f.$$

с помощью двухслойной неявной схемы с разными пространственными сетками на разных временных слоях.

На неподвижной прямоугольной сетке (т. е. на прямом шаблоне) схему можно было бы отыскивать в основной канонической форме

$$A\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = Bu^n + F^n,$$

однако для косого шаблона, при котором на верхнем и нижнем слоях сетки x^{n+1} и x^n различны, указанная каноническая форма не подходит, так как оператор A определен не на обеих сетках. Поэтому будем строить схему во второй канонической форме

$$Au^{n+1} = Bu^n + \tau F^n,$$

где операторы A и B действуют на различных сетках:

$$Au_i^{n+1} = \sum_{j=-1}^{1} a_j u_{i+j}^{n+1}, \quad Bu_i^n = \sum_{j=-1}^{1} b_j u_{i+j}^n, \quad i = ..., 0, 1, ...,$$

а наборы их коэффициентов a_j и b_J (j=-1,0,1), зависящие от узла i, в котором схема записана, являются искомыми, удовлетворяющими условиям аппроксимации уравнения с максимально возможным порядком.

Зафиксируем произвольно внутренний узел сетки нижнего слоя $x = x_i^n$, запишем в нем схему и обозначим через β_j и α_j местные смещения относительно x координат узлов нижнего и верхнего слоя, принадлежащих шаблону схемы:

$$x_{i+j}^n = x + \beta_j, \quad x_{i+j}^{n+1} = x + \alpha_j, \quad j = -1, 0, 1.$$

Поскольку сетки считаются заданными, то все смещения α_j и β_j представляют собой известные величины. Заметим, что смещение $\beta_0 = 0$ благодаря специальному выбору точки x. Разностные операторы будем обозначать прописными латинскими буквами, их коэффициенты — соответствующими строчными буквами, а смещения координат узлов в шаблоне относительно выбранной точки — соответствующими греческими, например, A, a_j, α_j соответственно.

Предположим, что при стремлении шагов сетки к нулю реализуется естественный для параболических уравнений предельный переход $\tau = O(h^2)$, где h — глобальная норма пространственного шага. Смещения α_j и β_j, естественно, имеют порядок шага h.

В указанных обозначениях невязка схемы на достаточно гладких решениях уравнения формально имеет вид

$$\psi = \sum_{j=-1}^{1} \left(a_j U(x + \alpha_j, t + \tau) - b_j U(x + \beta_j, t) \right) - \tau F(t),$$

где t и $t+\tau$ — времена на нижнем и верхнем слоях. Ввиду записи схемы во второй канонической форме, а не в первой, невязка не совпадает с погрешностью, она равна погрешности аппроксимации схемы, умноженной на τ)

Разложим ψ по формуле Тейлора в окрестности точки (x, t), отбрасывая слагаемые порядка $O(h^5 + \tau h^3 + \tau^2 h)$ и выше, а затем выразим производные по времени через пространственные производные с помощью продолженной системы уравнений. В результате получим:

$$\psi \simeq \sum_{l=0}^{4} \frac{A_l - B_l}{l!} \frac{\partial^l U}{\partial x^l} + \tau \sum_{l=0}^{2} \frac{A_l}{l!} \frac{\partial^l}{\partial x^l} \left(c \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f \right) +$$

$$\frac{\tau^2}{2} A_0 \left(c^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + c \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \tau F^n ...,$$

где

$$A_l = \sum_{j=-1}^{1} a_j \alpha_j^l, \quad B_l = \sum_{j=-1}^{1} b_j \beta_j^l, \quad l = 0, 1, ...$$

Отсюда с учетом естественного условия нормировки $A_0 = 1$ определяется вид нескольких первых членов разложения правой части разностной схемы на косом шаблоне:

$$F^n = f + \frac{\tau}{2} \frac{\partial f}{\partial t} + A_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(A_2 + \frac{r}{2} \right) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + ...,$$

где $r = 2c\tau$, и, после приведения подобных, формулируются условия аппроксимации:

$$A_0 = B_0 = 1, \quad A_1 - B_1 = 0, \quad A_2 - B_2 = -r,$$

$$A_3 - B_3 + 3rA_1 = 0, \quad A_4 - B_4 + 6rA_2 = -3r^2.$$

Таким образом, если правая часть F разностной схемы имеет выписанное выше разложение и если шесть коэффициентов $a_j, b_j (j = -1, 0, 1)$ схемы удовлетворяют сформулированным условиям аппроксимации, то погрешность аппроксимации схемы на произвольном косом шаблоне на достаточно гладких решениях уравнения теплопроводности составляет величину $O(h^3 + \tau h + \tau^2/h)$. Очевидно, при $\tau = O(h^2)$ схема имеет погрешность $O(h^3)$.

Заметим, что система условий аппроксимации в действительности является СЛАУ для коэффициентов схемы, так как все A_l, B_l представляют собой линейные функции от коэффициентов $a_j, b_j (j = -1, 0, 1)$, поэтому после подстановки линейных выражений A_l, B_l в систему получится система шести уравнений с шестью неизвестными коэффициентами схемы.

Любопытно отметить, что на прямом шаблоне неравномерной сетки с тремя узлами на нижнем и тремя на верхнем слое максимально возможный порядок точности по пространственной переменной тоже третий [1].

Следовательно, независимое смещение узлов верхнего слоя и превращение прямого шаблона в произвольный косой не понижает порядка точности, что представляется довольно неожиданным результатом.

Следует отметить, что если из системы удалить последнее уравнение, получатся условия аппроксимации с порядком $O(h^4/\tau + h^2 + \tau)$, а если удалить два последних уравнения, то аппроксимация падает до порядка $O(h^3/\tau + h)$. При специальном соотношении шагов это будет второй и соответственно первый порядок относительно h. В первом случае необходимо иметь шаблон из пяти узлов, во втором — из четырех. Определения A_l, B_l остаются при этом в силе, только становятся короче суммы в определении операторов A, B в зависимости от того, какие узлы будут удалены из шаблона. Это, например, явная схема с одним узлом на верхнем слое и тремя на нижнем или, наоборот, неявная с одним узлом внизу (порядок точности схемы в обоих случаях первый).

Заметим, что решение в общем виде системы шести линейных уравнений с шестью неизвестными коэффициентами схемы приводит к выражениям, выписывать которые здесь по причине громоздкости не имеет смысла. Однако можно утверждать, что для малых искажений прямого шаблона корректность имеет место по той простой причине, что для прямого шаблона схема третьего порядка существует и имеет однозначно определяемые коэффициенты, и поэтому по непрерывности для почти прямых шаблонов коэффициенты также определяются однозначно. Что касается практической стороны, то при вычислении коэффициентов схемы в операционной среде MATLAB в широком диапазоне перекосов шаблонов системных предупреждений о возможности ошибки в связи с критичностью чисел обусловленности не поступало.

Алгоритм решения полученных разностных уравнений на каждом временном слое основан на прогонке с вычислением в каждом узле коэффициентов разностной схемы из представленной системы шести линейных уравнений. Вопрос о том, что эффективнее, непосредственное численное решение системы уравнений для коэффициентов в каждом узле или однократное символьное их вычисление с дальнейшей подстановкой локальных смещений в процессе счета, решается практикой и, надо полагать, зависит от операционной среды, в которой решается задача. В среде Matlab предварительное символьное вычисление представляется более выгодным.

После нахождения коэффициентов схемы становится вполне определенным выражение правой части F^n, и если входящие в него производные правой части f не известны (а такая ситуация является типичной), то следует озаботиться осреднением функции f по узлам существующего косого шаблона так, чтобы с достаточной точностью получить именно требуемое разложение F. С этой целью будем искать F^n в виде линейной комбинации значений функции f по трем узлам с нижнего слоя и одному центральному с верхнего слоя:

$$F^n = \frac{1}{2} f(x + \alpha_0, t + \tau) + \sum_{j=-1}^{1} \delta_j f(x + \beta_j, t)$$

с неопределенными коэффициентами $\delta_j, j = -1, 0, 1$. Разложим ее по формуле Тейлора в окрестности точки (x, t) и сравним результат с исходным выражением. В результате для искомых коэффициентов получим систему линейных уравнений

$$\sum_{j=-1}^{1} \delta_j = \frac{1}{2},$$

$$\sum_{j=-1}^{1} \delta_j \beta_j = A_1 - \frac{1}{2}\alpha_0,$$

$$\sum_{j=-1}^{1} \delta_j \beta_j^2 = A_2 + \frac{r}{2} - \frac{1}{2}\alpha_0^2,$$

из которой однозначно определяются искомые коэффициенты:

$$\delta_{-1} = \frac{A_1 - A_2 + r/2 + \alpha_0(\alpha_0 - \beta_1)/2}{\beta_{-1}(\beta_1 - \beta_{-1})},$$

$$\delta_1 = \frac{A_1 - A_2 + r/2 + \alpha_0(\alpha_0 - \beta_{-1})/2}{\beta_1(\beta_{-1} - \beta_1)},$$

$$\delta_0 = \frac{1}{2} - \delta_{-1} - \delta_1.$$

2 Численный эксперимент

Пусть $X_0(t)$ и $X_1(t)$ — законы перемещения левой и правой границ. Введем сетку, равномерную по времени с шагом $\tau = T/m$ и равномерную по x с шагом, зависящим от номера временного слоя:

$$h^n = \frac{X_1(t^n) - X_1(t^n)}{N}.$$

Таким образом, число шагов сетки на каждом слое одинаково (равно N), а узлы сетки на $n-$ом слое определяются формулой

$$x_i^n = X_0(\tau n) + ih^n, i = 0, ..., N$$

Тестовая задача строится обычным образом — назначается функция $U(x,t)$ в качестве точного решения, по ней определяется начальное данное $U_0(x) = U(x,0)$, граничные условия слева $U_l(t) = U(X_0(t),t)$ и справа $U_r(t) = U(X_1(t),t)$, а также правая часть $f = U_t - cU_{xx}$. Задача решается на сгущающихся сетках с удвоением числа шагов по пространству и учетверением числа шагов по времени. Анализируется поведение ошибки в решении при дроблении сетки. При правильно работающей программе коэффициент гашения ошибки должен стремиться к $2^3 = 8$.

Движение границ в тесте не должно быть резким по времени. Это может быть, например, спокойная синусоида с небольшой амплитудой, линейная функция с небольшим наклоном....

Алгоритм реализации схемы предполагает решение системы уравнений для коэффициентов схемы в каждом узле. В Матлабе есть пакет символьных вычислений, поэтому можно вычислить выражения коэффициентов через смещения в общем виде, а затем оценивать символьные выражения коэффициентов для каждого узла.

Задачу следует решать в Матлабе....

Список литературы

[1] **Паасонен В.И.** Компактные схемы третьего порядка точности на неравномерных адаптивных сетках // Вычисл. технологии. 2015. Т. 20, № 2. С. 56–64.