Расчетное задание по математической статистике
Выборка №13

группа 14136, Оборовский Дмитрий

Часть1 .

Для выборки объёма 50, предполагая что она взята из нормального распределиния N_{α,σ^2}

0.159	-0.085	0.067	2.318	1.636	0.336	1.652	0.552	1.188	0.364
0.395	-0.076	0.653	1.223	1.501	0.739	0.642	0.77	0.987	0.243
0.545	1.148	0.693	1.496	0.973	2.051	1.23	1.743	0.7	1.03
0.761	2.822	0.953	0.534	1.43	0.751	0.813	1.788	0.48	0.43
1.81	0.811	1.28	1.859	0.882	0.665	1.381	1.67	0.173	0.432

$\alpha=1,\sigma^2=0.5,\varepsilon=0.13$

1. Построить точный доверительный интервал уровня доверия $1-\varepsilon$

a) для параметра α при известном σ^2 :

$\sqrt{n}\cdot\frac{(\overline{X}-\alpha)}{\sigma}\in N_{0,1}$ $\quad P(\overline{X}-\frac{\tau\cdot\sigma}{\sqrt{n}}<\alpha<\overline{X}+\frac{\tau\cdot\sigma}{\sqrt{n}})=1-\varepsilon\,,\text{где}\,N_{0,1}(\tau)=1-\frac{\varepsilon}{2}$

$\overline{X}=0.972 \quad \tau=1.5141$

$\alpha\in(0.8205,1.1234)$

b) для параметра α при неизвестном σ^2 :

$\sqrt{n}\cdot\frac{(\overline{X}-\alpha)}{S_0}\in T_{n-1}$, где $S_0^2=\frac{1}{(n-1)}\cdot\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2, S_0=\sqrt{S_0^2}$

$P=(\overline{X}-\frac{\tau\cdot S_0}{\sqrt{n}}<\alpha<\overline{X}+\frac{\tau\cdot S_0}{\sqrt{n}})=1-\varepsilon\,,\text{где}\,T_{n-1}(\tau)=1-\varepsilon/2$

$S_0=0.6362,\tau=1.54$

$\alpha\in(0.8334,1.1105)$

c) для параметра σ^2 при известном α :

$\frac{n\cdot S_1^2}{\sigma^2}\in H_n\,,\text{где}\,S_1^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\alpha)^2$

$\text{Пусть}\,g_1\,\text{и}\,g_2\,\text{квантили распределиния}\,H_n\,\text{уровней}\,\varepsilon/2\,\text{и}\,1-\varepsilon/2$, тогда

$1-\varepsilon=P(g_1<\frac{n\cdot S_1^2}{\sigma^2}<g_2)=P(\frac{n\cdot S_1^2}{g_2}<\sigma^2<\frac{n\cdot S_1^2}{g_1})$

$S_1^2=0.3966, g_1=35.7981, g_2=65.922$

$\sigma^2\in(0.3008,0.554)$

d) для параметра σ^2 при неизвестном α :

$\frac{(n-1)\cdot S_0^2}{\sigma^2}\in H_{n-1}\,,\text{где}\,S_0^2=\frac{1}{(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$

$1-\varepsilon=P(g_1<\frac{(n-1)\cdot S_0^2}{\sigma^2}<g_2)=P(\frac{(n-1)\cdot S_0^2}{g_2}<\sigma^2<\frac{(n-1)\cdot S_0^2}{g_1})$

$S_0^2=0.4047, g_1=34.9511, g_2=64.769$

$\sigma^2\in(0.3062,0.5674)$

2.Проверить гипотезу однородности по критериям Фишера и Стьюдента, считая что перые 20 чисел и следующие 30 чисел двумя независимыми выборками.

a) По критерию Фишера проверим гипотезу $H_1=\{\sigma_1=\sigma_2\}$:

$$\rho(\vec{X},\vec{Y})=\frac{S_0^2(\vec{X})}{S_0^2(\vec{Y})}\in F_{n-1,m-1}$$, где $\vec{X}=(X_1,X_2,\dots,X_n);\vec{Y}=(Y_1,Y_2,\dots,Y_m)$

$f_{1-\varepsilon}=\tau, m.e\, F_{n-1,m-1}(\tau)=1-\varepsilon$

Получим критерий

$\delta(\vec{X},\vec{Y})=\{H_1 if |\rho(\vec{X},\vec{Y})|<\tau, H_2 if |\rho(\vec{X},\vec{Y})|\geqslant\tau\}$

$\tau=1.5801>\rho=1.1894;$

Принимаем гипотезу $H_1:\sigma_1=\sigma_2$

b) По критерию Стьюдента проверим гипотезу $H_1=\{\alpha_1=\alpha_2\}$:

$$\rho(\vec{X},\vec{Y})=\sqrt{\frac{n\cdot m}{n+m}}\cdot\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{(n-1)\cdot S_0^2(\vec{X})+(m-1)\cdot S_0^2(\vec{Y})}{n+m-2}}}\in T_{n+m-2} if\ \alpha_1=\alpha_2$$

Пусть $T_{n+m-2}(\tau)=1-\frac{\varepsilon}{2}, \tau=1.5405$

$\delta(\vec{X},\vec{Y})=\{H_1 if |\rho(\vec{X},\vec{Y})|<\tau, H_2 if |\rho(\vec{X},\vec{Y})|\geqslant\tau\}$

$|\rho|=1.9479>\tau=1.5405$

Гипотезу H_1 отвергаем.

Часть2.

0.196	0.004	0.891	0.431	0.248	0.141	0.079	0.503	0.361	0.99
0.274	0.792	0.241	0.881	0.837	0.42	0.829	0.968	0.554	0.137
0.733	0.345	0.896	0.069	0.16	0.627	0.616	0.116	0.068	0.666

Выборка из U[0,1]

1.Построить эмпирическую функцию распределения и гистограмму.

2.Проверить по критерию Колмогорова гипотезу о том, что выборка взята из равномерного распределения. Найти реально достигнутый уровень значимости.

$H_1=\{F=U_{[0,1]}\}$

$\rho(\vec{X})=\sqrt{n}\cdot\sup_y |F_n^{\cdot}(y)-F_1(y)|\Rightarrow\eta\in K(y)$

Пусть C такое, что $\varepsilon=P(\eta\geqslant C)$

Тогда критерий Колмогорава выглядит так:

$\delta(\vec{X})=\{H_1 if\ \rho(\vec{X})<C, H_2 if\ \rho(\vec{X})\geqslant C\}$

C = 1.17, $\rho^{\cdot}=0.6901\Rightarrow\rho<C$ принимаем гипотезу H_1

реально достигнутый уровень значимости $\varepsilon^{\cdot}=0.2722$

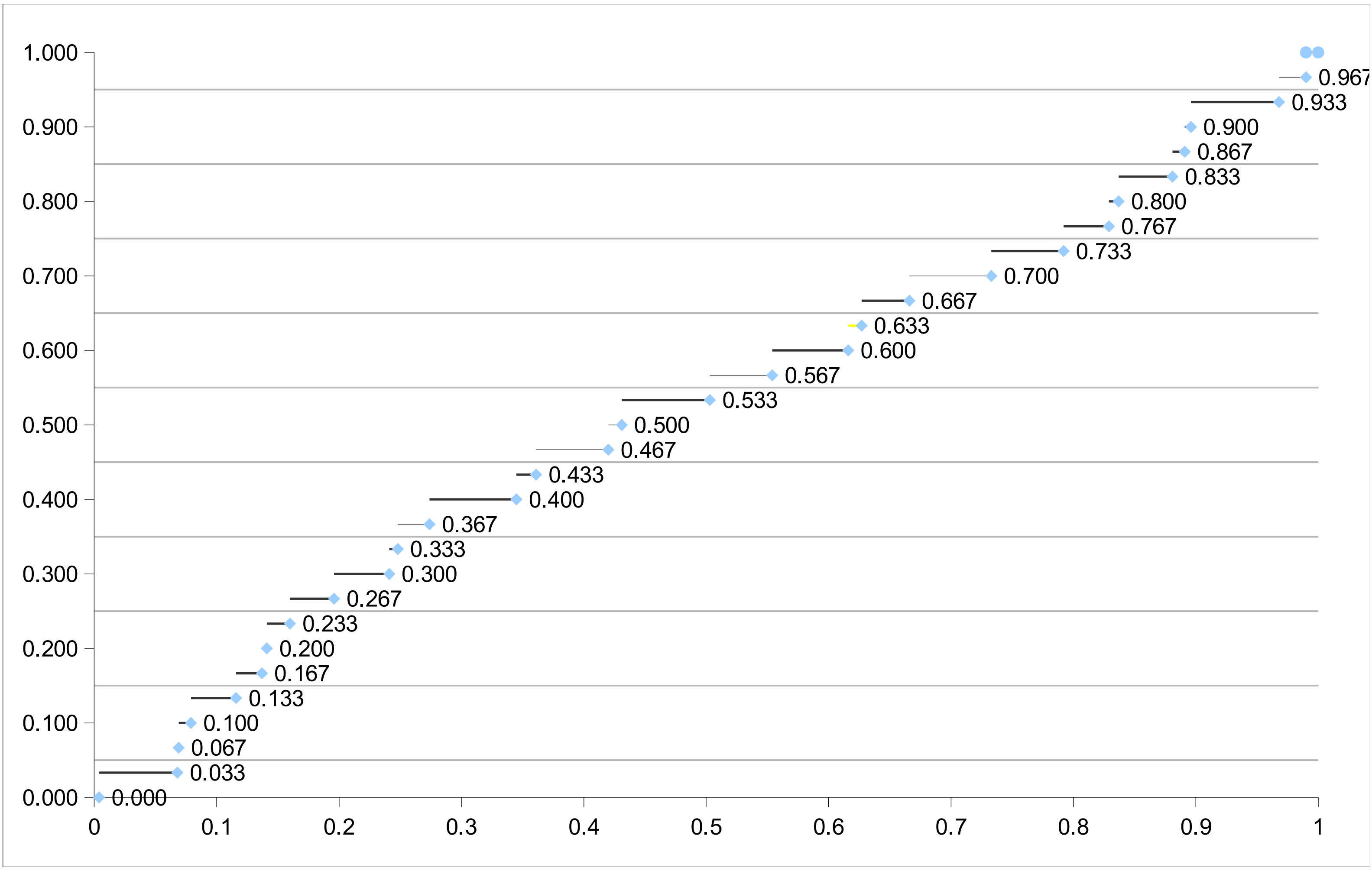
3. Проверить ту же гипотезу по критерию χ^2 и найти реально достигнутый уровень занчимости.

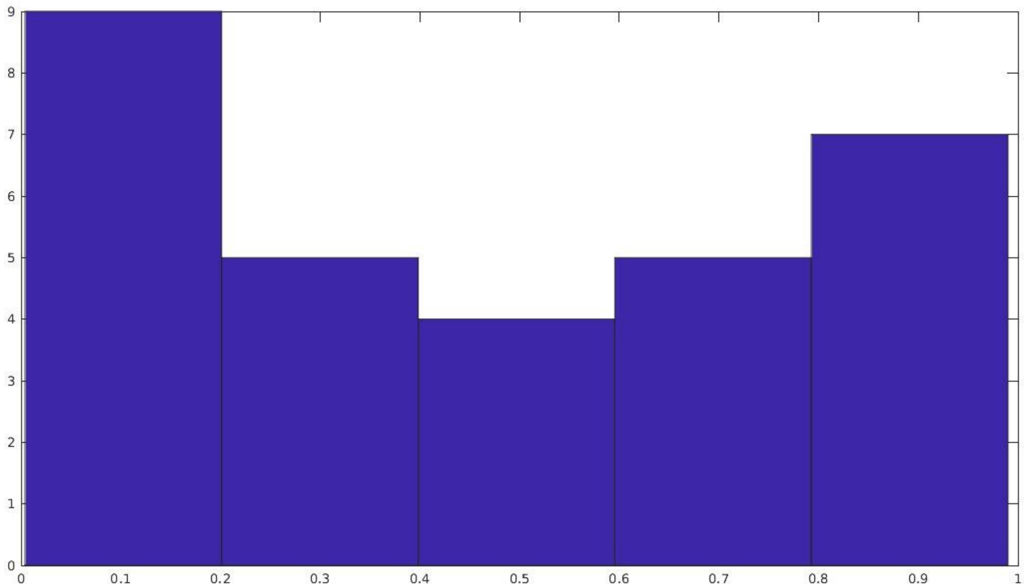
$$\rho(\vec{X})=\sum_{i=1}^{k}\frac{(v_i-n\cdot p_i)^2}{n\cdot p_i}\Rightarrow H_{k-1}$$

$\delta(\vec{X})=\{H_1 if\ \rho(\vec{X})<C, H_2 if\ \rho(\vec{X})\geqslant C\}$

$\rho^{\cdot}=2.6667, C=7.1137\Rightarrow\rho<C$ принимаем гипотезу H_1

реально достигнутый уровень значимости $\varepsilon^{\cdot}=0.3849$


1.000
0.900
0.800
0.700
0.600
0.500
0.400
0.300
0.200
0.100
0.000
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1
0.000 0.033 0.067 0.100 0.133 0.167 0.200 0.233 0.267 0.300 0.333 0.367 0.400 0.433 0.467 0.500 0.533 0.567 0.600 0.633 0.667 0.700 0.733 0.767 0.800 0.833 0.867 0.900 0.933 0.967


0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1