

Расчетное задание по математической статистике

Выборка №13

группа 14136, Оборовский Дмитрий

Часть1.

Для выборки объёма 50, предполагая что она взята из нормального распределения N_{α, σ^2}

0.159	-0.085	0.067	2.318	1.636	0.336	1.652	0.552	1.188	0.364
0.395	-0.076	0.653	1.223	1.501	0.739	0.642	0.77	0.987	0.243
0.545	1.148	0.693	1.496	0.973	2.051	1.23	1.743	0.7	1.03
0.761	2.822	0.953	0.534	1.43	0.751	0.813	1.788	0.48	0.43
1.81	0.811	1.28	1.859	0.882	0.665	1.381	1.67	0.173	0.432

$$\alpha=1, \sigma^2=0.5, \varepsilon=0.13$$

1. Построить точный доверительный интервал уровня доверия $1-\varepsilon$

а) для параметра α при известном σ^2 :

$$\sqrt{n} \cdot \frac{(\bar{X}-\alpha)}{\sigma} \in N_{0,1} \quad P\left(\bar{X}-\frac{\tau \cdot \sigma}{\sqrt{n}} < \alpha < \bar{X} + \frac{\tau \cdot \sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1-\varepsilon, \text{ где } N_{0,1}(\tau) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\bar{X}=0.972 \quad \tau=1.5141$$

$$\alpha \in (0.8205, 1.1234)$$

б) для параметра α при неизвестном σ^2 :

$$\sqrt{n} \cdot \frac{(\bar{X}-\alpha)}{S_0} \in T_{n-1}, \text{ где } S_0^2 = \frac{1}{(n-1)} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, S_0 = \sqrt{S_0^2}$$

$$P\left(\bar{X} - \frac{\tau \cdot S_0}{\sqrt{n}} < \alpha < \bar{X} + \frac{\tau \cdot S_0}{\sqrt{n}}\right) = 1-\varepsilon, \text{ где } T_{n-1}(\tau) = 1 - \varepsilon/2$$

$$S_0=0.6362, \tau=1.54$$

$$\alpha \in (0.8334, 1.1105)$$

в) для параметра σ^2 при известном α :

$$\frac{n \cdot S_1^2}{\sigma^2} \in H_n, \text{ где } S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \alpha)^2$$

Пусть g_1 и g_2 квантили распределения H_n уровней $\varepsilon/2$ и $1-\varepsilon/2$, тогда

$$1-\varepsilon = P\left(g_1 < \frac{n \cdot S_1^2}{\sigma^2} < g_2\right) = P\left(\frac{n \cdot S_1^2}{g_2} < \sigma^2 < \frac{n \cdot S_1^2}{g_1}\right)$$

$$S_1^2=0.3966, g_1=35.7981, g_2=65.922$$

$$\sigma^2 \in (0.3008, 0.554)$$

г) для параметра σ^2 при неизвестном α :

$$\frac{(n-1) \cdot S_0^2}{\sigma^2} \in H_{n-1}, \text{ где } S_0^2 = \frac{1}{(n-1)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$1-\varepsilon = P\left(g_1 < \frac{(n-1) \cdot S_0^2}{\sigma^2} < g_2\right) = P\left(\frac{(n-1) \cdot S_0^2}{g_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1) \cdot S_0^2}{g_1}\right)$$

$$S_0^2=0.4047, g_1=34.9511, g_2=64.769$$

$$\sigma^2 \in (0.3062, 0.5674)$$

2. Проверить гипотезу однородности по критериям Фишера и Стьюдента, считая что первые 20 чисел и следующие 30 чисел двумя независимыми выборками.

а) По критерию Фишера проверим гипотезу $H_1 = \{\sigma_1 = \sigma_2\}$:

$$\rho(\vec{X}, \vec{Y}) = \frac{S_0^2(\vec{X})}{S_0^2(\vec{Y})} \in F_{n-1, m-1}, \text{ где } \vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n); \vec{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$$

$$f_{1-\varepsilon} = \tau, m.e F_{n-1, m-1}(\tau) = 1 - \varepsilon$$

Получим критерий

$$\delta(\vec{X}, \vec{Y}) = \{H_1 \text{ if } |\rho(\vec{X}, \vec{Y})| < \tau, H_2 \text{ if } |\rho(\vec{X}, \vec{Y})| \geq \tau\}$$

$$\tau = 1.5801 > \rho = 1.1894;$$

Принимаем гипотезу $H_1: \sigma_1 = \sigma_2$

b) По критерию Стьюдента проверим гипотезу $H_1 = \{\alpha_1 = \alpha_2\}$:

$$\rho(\vec{X}, \vec{Y}) = \sqrt{\frac{n \cdot m}{n+m}} \cdot \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{(n-1) \cdot S_0^2(\vec{X}) + (m-1) \cdot S_0^2(\vec{Y})}{n+m-2}}} \in T_{n+m-2} \text{ if } \alpha_1 = \alpha_2$$

$$\text{Пусть } T_{n+m-2}(\tau) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \tau = 1.5405$$

$$\delta(\vec{X}, \vec{Y}) = \{H_1 \text{ if } |\rho(\vec{X}, \vec{Y})| < \tau, H_2 \text{ if } |\rho(\vec{X}, \vec{Y})| \geq \tau\}$$

$$|\rho| = 1.9479 > \tau = 1.5405$$

Гипотезу H_1 отвергаем.

Часть 2.

0.196	0.004	0.891	0.431	0.248	0.141	0.079	0.503	0.361	0.99
0.274	0.792	0.241	0.881	0.837	0.42	0.829	0.968	0.554	0.137
0.733	0.345	0.896	0.069	0.16	0.627	0.616	0.116	0.068	0.666

Выборка из $U[0,1]$

1. Построить эмпирическую функцию распределения и гистограмму.

2. Проверить по критерию Колмогорова гипотезу о том, что выборка взята из равномерного распределения. Найти реально достигнутый уровень значимости.

$$H_1 = \{F = U_{[0,1]}\}$$

$$\rho(\vec{X}) = \sqrt{n} \cdot \sup_y |F_n(y) - F_1(y)| \Rightarrow \eta \in K(y)$$

Пусть C такое, что $\varepsilon = P(\eta \geq C)$

Тогда критерий Колмогорова выглядит так:

$$\delta(\vec{X}) = \{H_1 \text{ if } \rho(\vec{X}) < C, H_2 \text{ if } \rho(\vec{X}) \geq C\}$$

Достигнуты уровень значимости :

$$C = 1.17, \rho = 0.6901 \Rightarrow \rho < C \text{ принимаем гипотезу } H_1$$

реально достигнутый уровень значимости $\varepsilon = 0.2722$

3. Проверить ту же гипотезу по критерию χ^2 и найти реально достигнутый уровень значимости.

$$\rho(\vec{X}) = \sum_{i=1}^k \frac{(v_i - n \cdot p_i)^2}{n \cdot p_i} \Rightarrow H_{k-1}$$

$$\delta(\vec{X}) = \{H_1 \text{ if } \rho(\vec{X}) < C, H_2 \text{ if } \rho(\vec{X}) \geq C\}$$

$$\rho = 2.6667, C = 7.1137 \Rightarrow \rho < C \text{ принимаем гипотезу } H_1$$

реально достигнутый уровень значимости $\varepsilon = 0.3849$

