ЗАДАНИЕ № 3. РЕШЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДУ 2 ПОРЯДКА

Необходимо решить краевую задачу для уравнения вида

$$Lu(x) \equiv -\frac{d^2u}{dx^2} + v(x)\frac{du}{dx} = f(x), \; 0 < x < l, \tag{1}$$

с граничными условиями:

$$u(0) = \mu_1; \quad u(l) = \mu_2. \tag{2}$$

Отметим, что уравнение (1) является модельным по отношению к уравнению более общего вида, играющему одну из ключевых ролей при исследовании процессов в механике сплошной среды:

$$-\frac{d}{dx}\left(k(x)\frac{du}{dx}\right) + v(x)\frac{du}{dx} + q(x)u = f(x), \; 0 < x < l. \tag{3}$$

1. МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ.

Метод КР состоит в проектировании уравнения (3) на разностную сетку $\omega = \{x \mid x = x_i = ih, \quad i = 0, 1, \ldots, N, \quad Nh = l\}$ путем замены производных конечными разностями и поиске приближенного решения конечно-разностного уравнения в виде функции $\vec{y} = \{y_0, y_1, \ldots, y_N\}$, заданной в узлах сетки ω.

Введем обозначения для конечно-разностных аппроксимаций дифференциальных операторов:

$$y_{\bar{x}} \equiv \frac{y_i - y_{i-1}}{h} = \frac{du}{dx}(x_i) - \frac{h}{2}\frac{d^2u}{dx^2}(x_i) + O\left(h^2\right),$$

$$y_x \equiv \frac{y_{i+1} - y_i}{h} = \frac{du}{dx}(x_i) + \frac{h}{2}\frac{d^2u}{dx^2}(x_i) + O\left(h^2\right),$$

$$y_{\hat{x}} \equiv \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} = \frac{du}{dx}(x_i) + \frac{h^2}{3}\frac{d^3u}{dx^3}(x_i) + O\left(h^3\right),$$

$$y_{\bar{x}x} = \frac{y_x - y_{\bar{x}}}{h} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = \frac{d^2u}{dx^2}(x_i) + O\left(h^2\right).$$

Метод формальной замены дифференциальных операторов разностными может использоваться (в случае необходимости) и при аппроксимации граничных условий. В рамках данной работы полагаем:

$$y_0 = \mu_1; \quad y_N = \mu_2. \tag{4}$$

Простейшая центрально-разностная аппроксимация конвективного слагаемого уравнения (3) (члена уравнения с первой производной) дает разностное уравнение следующего общего вида:

$$-\left(ay_{\bar{x}}\right)_x + by_{\hat{x}} + cy = \varphi, \quad x \in \omega, \qquad b_i = v\left(x_i\right). \tag{5}$$

Разностная схема (4)-(5) аппроксимирует краевую задачу (2)-(3) со вторым порядком. Однако для такой разностной задачи характерно нарушение монотонности решения. Широко известны два пути преодоления этого недостатка: расчеты только при достаточно малых шагах сетки h, либо использование других разностных схем (в том числе – с потерей точности), обладающих свойством монотонности.

Безусловно монотонные разностные схемы для уравнения (3) можно построить, аппроксимируя первые производные направленными против потока односторонними разностями с первым порядком точности. При этом вместо разностного уравнения (5) приходим к уравнению

$$\begin{gathered} -\left(ay_{\bar{x}}\right)_x + b^+ y_{\bar{x}} + b^- y_x + cy = \varphi, \quad x \in \omega, \\ b^+(x) = \frac{1}{2}\Big(b(x) + |b(x)|\Big), \quad b^-(x) = \frac{1}{2}\Big(b(x) - |b(x)|\Big), \quad b_i = v(x_i). \end{gathered} \tag{6}$$

Для вычисления приближенного решения конечно-разностных уравнений (5), (6) с граничными условиями (4) необходимо решить соответствующую систему линейных алгебраических уравнений. Матрица данной СЛАУ является трехдиагональной, и ее можно записать в виде

$$A_i y_{i-1} + C_i y_i + B_i y_{i+1} = F_i, \quad i = 1, \ldots, N-1 \tag{7}$$

с граничными условиями специального вида $y_0 = \kappa_0 y_1 + \nu_0$, $y_N = \tilde{\sigma} y_{N-1} + \hat{\sigma}$, согласованными с (4). Для решения системы (7) используется метод прогонки, в котором κ_i, ν_i играют роль прогоночных коэффициентов, а $\tilde{\sigma}, \hat{\sigma}$ определяются видом аппроксимации граничного условия на правой границе.

2. МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ.

Будем полагать, что решение краевой задачи (1) приближается некоторой функцией

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x) \tag{8}$$

где c_k - неопределенные коэффициенты, $\varphi_0(x)$, $\varphi_k(x)$ - базисные функции, причем $\varphi_0(x)$ удовлетворяет краевым условиям рассматриваемой задачи, а остальные $\varphi_k(x)$ – однородным краевым условиям.

Значения коэффициентов c_k в (8) вычисляются из условия равенства нулю невязки $\psi(c_1, c_2 \ldots, c_n) \equiv L y_n(x) - f(x)$ (здесь $L = r(x)\dfrac{d^2}{dx^2} + p(x)\dfrac{d}{dx} + q(x)$ - дифференциальный оператор) в произвольно выбранных n точках коллокации x_k ($k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$), лежащих строго внутри расчетного отрезка. Таким образом, задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_k

$$\begin{aligned}
&c_1 \cdot L\varphi_1(x_1) + c_2 \cdot L\varphi_2(x_1) + c_3 \cdot L\varphi_3(x_1) + \ \ldots\ + c_n \cdot L\varphi_n(x_1) = f(x_1) - L\varphi_0(x_1),\\
&c_1 \cdot L\varphi_1(x_2) + c_2 \cdot L\varphi_2(x_2) + c_3 \cdot L\varphi_3(x_2) + \ \ldots\ + c_n \cdot L\varphi_n(x_2) = f(x_2) - L\varphi_0(x_2),\\
&\vdots\\
&c_1 \cdot L\varphi_1(x_n) + c_2 \cdot L\varphi_2(x_n) + c_3 \cdot L\varphi_3(x_n) + \ \ldots\ + c_n \cdot L\varphi_n(x_n) = f(x_n) - L\varphi_0(x_n).
\end{aligned} \tag{9}$$

и последующему вычислению приближенного решения по формуле (8).

Примеры базисных функций (константы a_0, b_0 определяются из граничных условий):

$$\varphi_0(x) = a_0 + b_0 x;\ \ \varphi_k(x) = x[x^k - (k+1)];\ \ \varphi_k(x) = x^{k+1} - 1;\ \ \varphi_k(x) = 1 - \cos(k\pi x);\ \ \varphi_k(x) = (-1)^k - \cos(k\pi x); \tag{10}$$

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}[\exp(k(x-1)) - \exp(-k)] - x;\quad \varphi_k(x) = \frac{1}{k}[\exp(kx) - \exp(k)] - (x-1);\ \varphi_k(x) = \frac{1}{k}[\exp(-kx) - \exp(-k)] + (x-1).$$

Задание.

Найдите приближенное решение краевой задачи

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + 100\frac{du}{dx} = 0,\ \ 0 < x < 1, \qquad u(0) = 0; \quad u(1) = 1. \tag{11}$$

1) Решите задачу ***методом конечных разностей***, используя две предложенные разностные аппроксимации (5) и (6). Запишите систему уравнений (5) или (6) с учетом (4) в виде (7), удобном для реализации прогонки. Представьте решение таблично и графически в виде, демонстрирующем достоинства и недостатки предложенных разностных схем. Численно исследуйте сходимость приближенного решения и укажите порядок аппроксимации на интервале с привлечением последовательности сеток $\{h_p\}$.

2) Решите задачу ***методом коллокации***, подобрав базисные функции (возможно, из набора (10)), подходящие для ваших краевых условий, и определив значения констант a_0 и b_0. Напишите программу для получения приближенного решения (8) с помощью метода коллокации при произвольном значении *n* числа базисных функций. Для решения СЛАУ (9) используйте сведения и программы предыдущего семестра.

Проведите расчеты при различных значениях числа n узлов коллокации. Убедитесь, что по мере увеличения *n* значения $|c_k|$ убывают. В противном случае выберите другие базисные функции.

Численно исследуйте сходимость приближенного решения. Исследуйте поведение погрешности решения (8) в зависимости от расположения узлов коллокации.

3) Проанализируйте точность решений задачи (11), полученных с помощью конечно-разностного метода и метода коллокации.