Отчет по заданию №3
Оборовского Дмитрия
Группа 14136

1) Постановка задачи:
Найти приближенное решение краевой задачи

$$\frac{-d^2u}{dx^2}+100\frac{du}{dx}=0, 0<x<1$$
$$u(0)=0;$$
$$u(1)=1.$$

($u=\frac{1}{e^{100}-1}e^{100x}-\frac{1}{e^{100}-1}$ - точное решение.)

а) Методом конечных разностей, используя две разностные аппроксимации:

$$-y_{\bar{x}x}+100y_{\mathring{x}}=0 \qquad (1)$$
$$y_0=0$$
$$y_N=1,$$

где

$$y_{\bar{x}x}=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2};$$
$$y_{\mathring{x}}=\frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h};$$

$y_i=y(x_i)$ - приближенное решение в i-ом узле;
Аппроксимирует данную краевую задачу со 2-ым порядком.

$$-y_{\bar{x}x}+100y_{\bar{x}}=0 \qquad (2)$$
$$y_0=0$$
$$y_N=1,$$

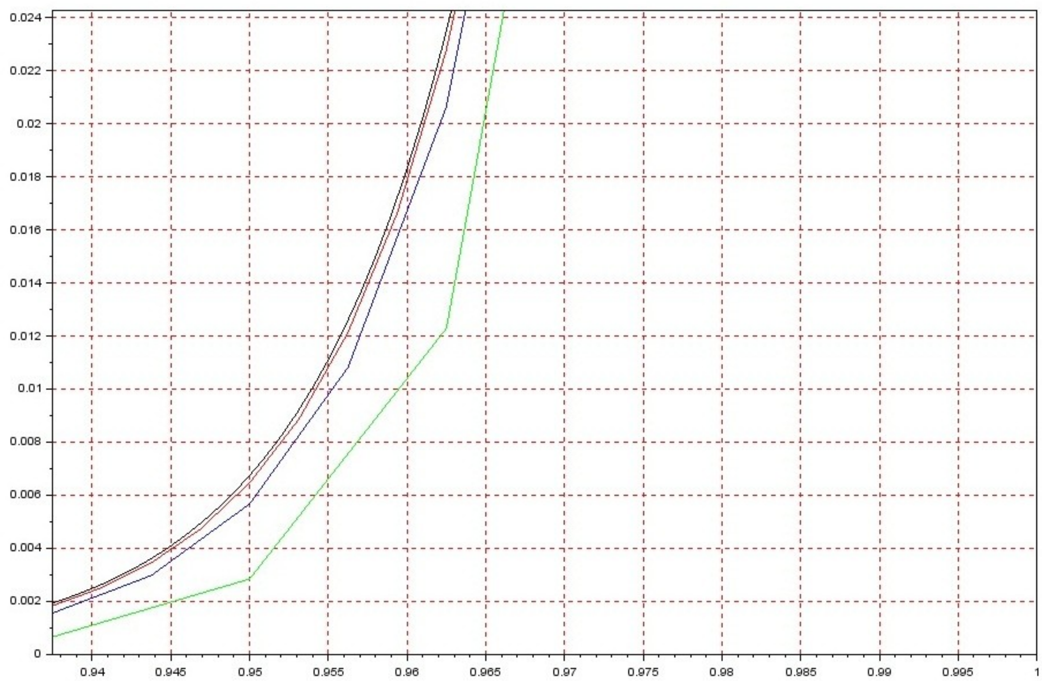
где

$$y_{\bar{x}x}=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2};$$
$$y_{\bar{x}}=\frac{y_i-y_{i-1}}{h};$$

$y_i=y(x_i)$ - приближенное решение в i-ом узле;
Аппроксимирует данную краевую задачу с 1-ым порядком.

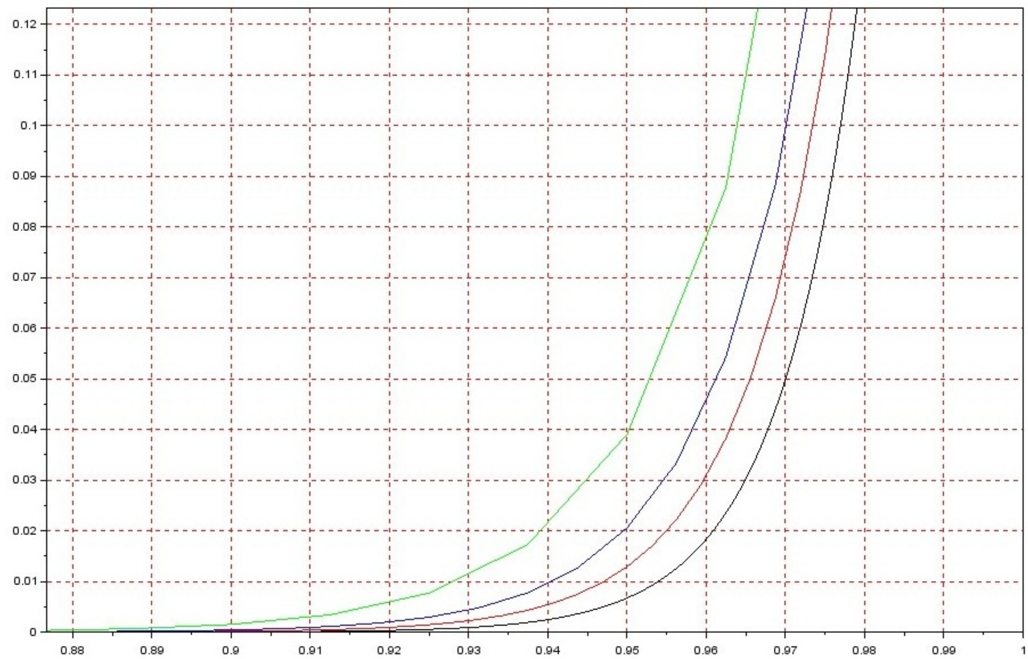
2) Работа с разностными уравнениями:
Для каждого уравнения был проведен на последовательности сеток $\{\omega_p\}$ (где p = 1, 2, ...), каждый раз уменьшая шаг сетки h вдвое.
На графиках ниже можно наглядно показать, как приближенное решение сходится к точному.

Приближенное решение, полученное разностной аппроксимацией (1):



- Черным - точное решение
- Зеленым - N=80
- Синим - N=160
- Красным - N=320

Приближенное решение, полученное разностной аппроксимацией (2):



- Черным - точное решение
- Зеленым - N=80
- Синим - N=160

- Красным - N=320

На графиках выше отчетливо видно, что решение, полученное с помощью разностного уравнения (1), приближается к точному решению "снизу". А решение, полученное разностной аппроксимацией (2), - "сверху". Так же видно, что первое решение приближается "быстрее".

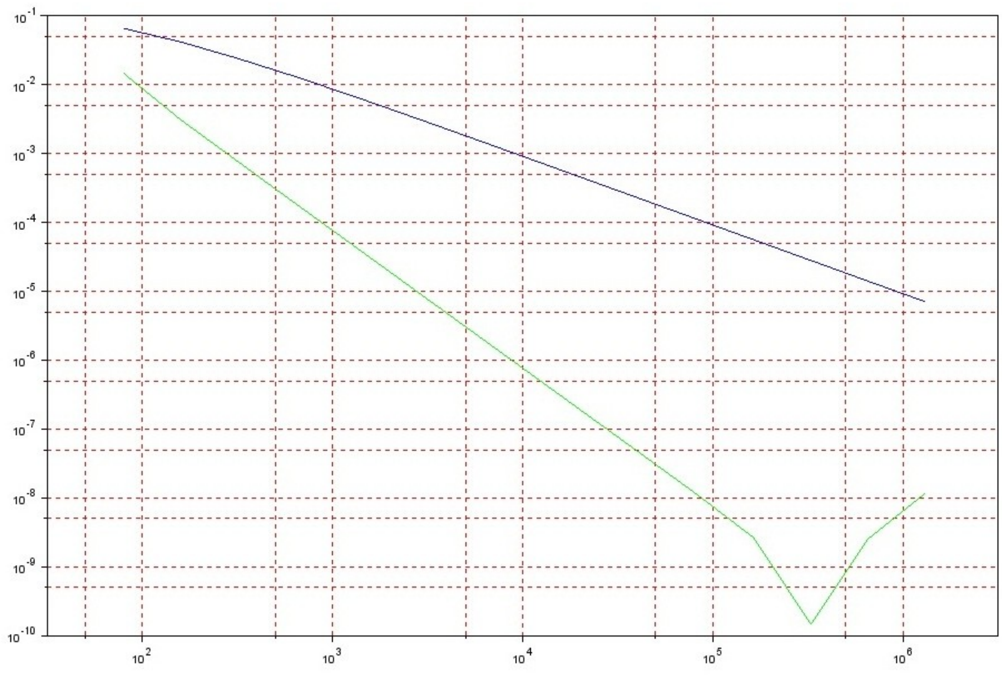
Ниже приведена таблица максимальных погрешностей в зависимости от шага сетки и разностной аппроксимации, полученная с помощью правила Рунге.

N	**(1)** $-y_{\acute{x}x}+100\,y_{\hat{x}}=0$	**(2)** $-y_{\acute{x}x}+100\,y_{\acute{x}}=0$
80	0.014535728821443	0.065746219592374
160	0.003061889115740	0.041719291177316
320	0.000757196384339	0.023948881200396
640	0.000187366663234	0.013096108345289
1280	0.000046811099909	0.006851762280422
2560	0.000011695561841	0.003507178533077
5120	0.000002923771842	0.001774592503098
10240	0.000000730914046	0.000892696173294
20480	0.000000182725578	0.000447705613504
40960	0.000000045673084	0.000224193797943
81920	0.000000011376857	0.000112182425395
163840	0.000000002644479	0.000056113109450
327680	0.000000000145945	0.000028064049933
655360	0.000000002533903	0.000014040185185
1310720	0.000000011694154	0.000007054047021

Зеленым цветом выделена ячейка, в которой значение погрешности минимально. Желтым - минимальное значение погрешности для решения, полученного разностной схемой (2). Критерием остановки расчетов служили либо резкое увеличение времени работы программы, либо появление машинной погрешности.

Явно видно, что разностная схема (1) аппроксимирует решение данной краевой задачи точнее, нежели разностная схема (2).

График погрешностей:



По оси абсцисс откладываются значения N. По оси ординат - значения погрешности.

- Зеленым - погрешность при использовании разностной схемы (1)
- Синим - погрешность при использовании разностной схемы (2)

Практический порядок точности разностных схем:

N	(1) $-y_{\acute{x}x}+100y_{\hat{x}}=0$, p_1	(1) $-y_{\acute{x}x}+100y_{\hat{x}}=0$, p_2	(2) $-y_{\acute{x}x}+100y_{\acute{x}}=0$, p_1	(2) $-y_{\acute{x}x}+100y_{\acute{x}}=0$, p_2
160	2.247109467353638	-	0.656193295560246	-
320	2.015682610340833	2.315701944069670	0.800756385891648	0.435175261351472
640	2.014803234336626	2.015971642374755	0.870820097852417	0.711413271246302
1280	2.000941718546310	2.019390313413811	0.934591158934969	0.797441295035379
2560	2.000889495378036	2.000959111546433	0.966164225558702	0.900723824076015
5120	2.000058529358301	2.001166362749677	0.982823094073415	0.948899680508420
10240	2.000057070979692	2.000059015458537	0.991246632161932	0.974246013156325
20480	2.000023161026373	2.000068373878404	0.995618834149986	0.986834341091794
40960	2.000262483402396	1.999943397429806	0.997804039177762	0.993423631513434
81920	2.005242158601666	1.998606805383972	0.998899688561324	0.996705881996904
163840	2.105046626026166	1.973603384224724	0.999436914086022	0.998361843072037
327680	4.179486828062870	1.805292731505047	0.999614640663898	0.999259070610223
655360	-	-	0.999161255417327	1.000068410856846
1310720	-	-	0.993038866744671	1.005316907193638

$$p_1=\log_2\left|\frac{\varepsilon_{h_{q-1}}}{\varepsilon_{h_q}}\right| \qquad p_2=\log_2\left|\frac{\varepsilon_{h_{q-2}}-\varepsilon_{h_{q-1}}}{\varepsilon_{h_{q-1}}-\varepsilon_{h_q}}\right|$$

По таблице видно, что практический порядок точности сходиться к теоретическому.

3) Итоги сравнения данных разностных схем.

Из всего представленного выше видно, что для данной задачи лучше подходить разностная аппроксимация (1). На одинаковых сетках она дает более меньшую погрешность, нежели разностная схема (2). Быстрее сходиться.

Например, чтобы получить погрешность, не превышающую 1%, для разностной схемы (1) надо взять N=160, вместо N=1280, необходимого для получения того же результата схемой (2).

б) Методом коллокации.

Полагаем, что решение данной краевой задачи приближается некоторой функцией

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k(x)$$

где c_k - неопределенные коэффициенты, $\varphi_0(x)$, $\varphi_k(x)$ - базисные функции, причем $\varphi_0(x)$ удовлетворяет краевым условиям рассматриваемой задачи, а остальные $\varphi_k(x)$ - однородным краевым условиям.

Значения коэффициентов c_k вычисляются из условия равенства нулю невязки

$$\psi(c_1, c_2, \ldots, c_n) \equiv -\frac{d^2 y_n}{d x^2} + 100 \frac{d y_n}{dx}$$

в произвольных n точках x_k (k = 1,2,...,n), лежащих строго внутри расчетного отрезка.

4) Работа с методом коллокаций.

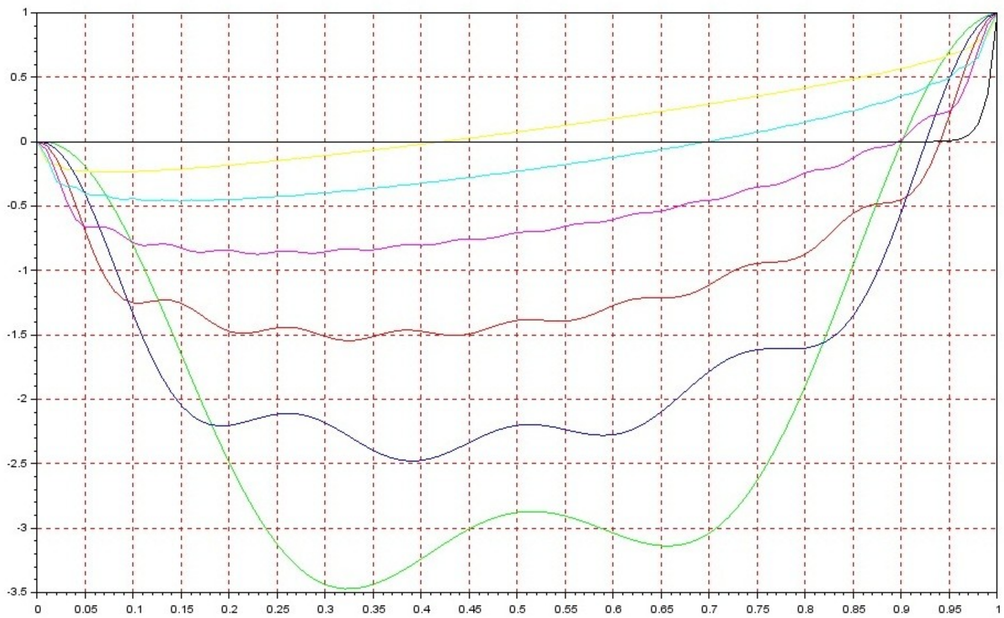
В качестве базисных функций были выбраны:

$\varphi_0(x) = x$

$\varphi_k(x) = 1 - \cos(2k\pi x)$

Легко увидеть, что они удовлетворяют всем условиям.

На графике ниже наглядно представлено как полученное приближенное решение сходиться к точному.



- Черным - точное решение
- Зеленым - n=2
- Синим - n=4
- Красным - n=8
- Розовым - n=16
- Голубым - n=32
- Желтым - n=64

На графике видно, что полученное решение сходится к точному. Но изначально имеет достаточно большую погрешность.

В таблице ниже приведены значения глобальной погрешности для разных значений n.

n	Погрешность
2	3.470241896949238
4	2.479431607554436
8	1.542810775047693
16	0.873996365332639
32	0.549161986195015
64	0.677736131353927

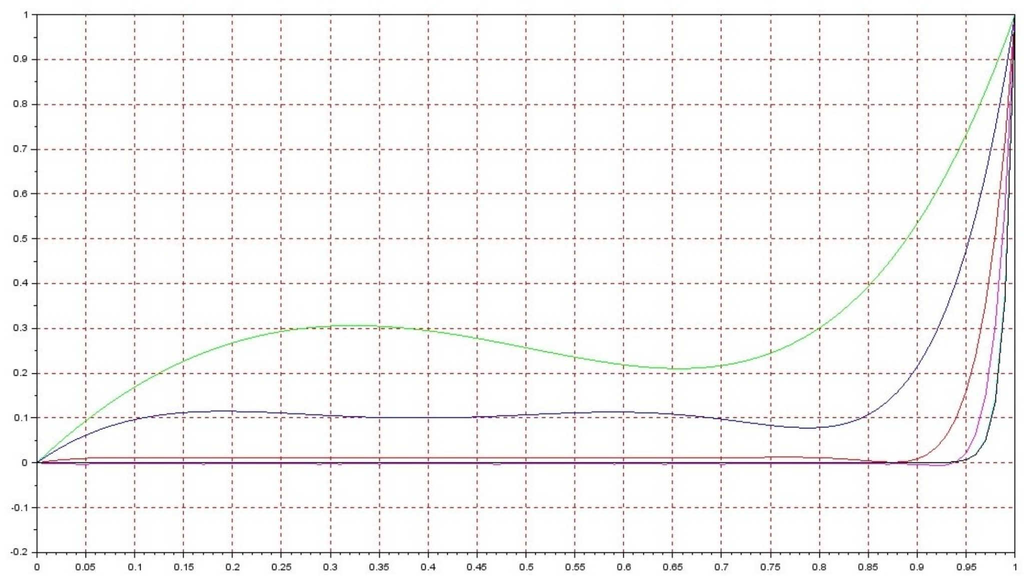
Видно, что погрешность сначала убывает, а потом начинает возрастать. Что говорит о возможной расходимости метода.

5) Попробуем подобрать более подходящие базисные функции.
В качестве базисных функций были выбраны:

$$\varphi_0(x)=x$$

$$\varphi_k(x)=\frac{e^{kx}-e^{k}}{1-e^{k}}-(1-x)$$

Легко увидеть, что они удовлетворяют всем условиям.
На графике ниже наглядно представлено как полученное приближенное решение сходиться к точному.



- Черным - точное решение
- Зеленым - n=2
- Синим - n=4
- Красным - n=8
- Розовым - n=16
- Голубым - n=32

На графике видно, что полученное решение сходится к точному гораздо быстрее, чем с предыдущим набором базисных полиномов.

В таблице ниже приведены значения глобальной погрешности для разных значений n.

n	Погрешность
2	0.780183333308511
4	0.612305920837262
8	0.375674147826081
16	0.206954357865683
32	0.013189459841882
64	0.000015617585617
128	0.000000000000044
256	0.000000000000167
512	0.000000000000006

Видно, что погрешность сначала убывает так же гораздо быстрее, чем с предыдущим набором.

6) Заключение по методу коллокаций.

Метод коллокаций хорошо использовать при верно подобранных базисных функциях. Он может давать быструю сходимость и высокий порядок точности, но, если базисные функции подобрать не получилось, то использовать этот метод не имеет смысла. Что и было продемонстрировано .