Группа 14136, Обороский Д.В.

Задание 1.1

Решение задачи Коши на отрезке [1;12] :

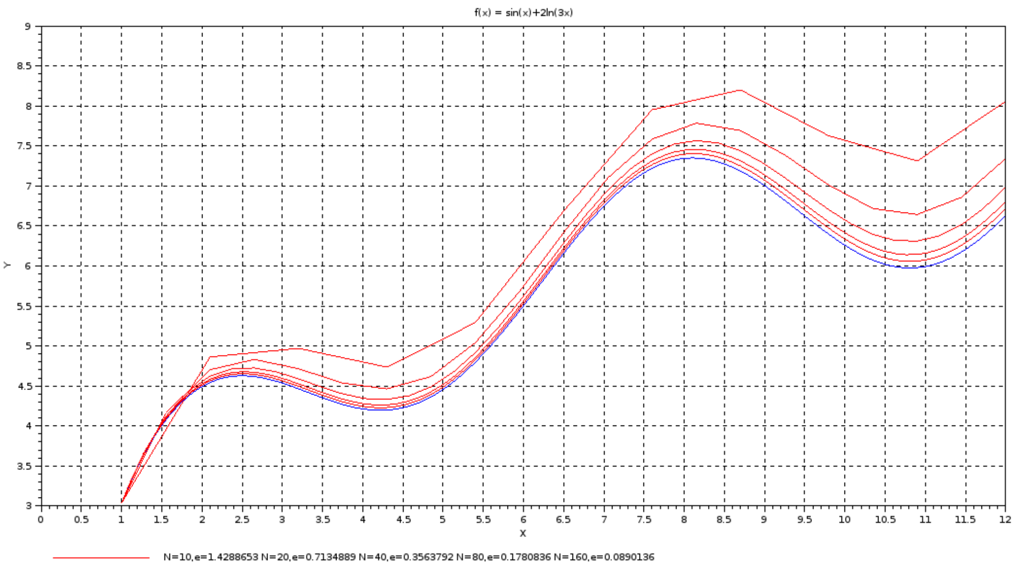
$$\frac{dy}{dx}=\sin(x)+2\ln(3x),$$
$$y(1)=\sin(1)+2\ln(3).$$

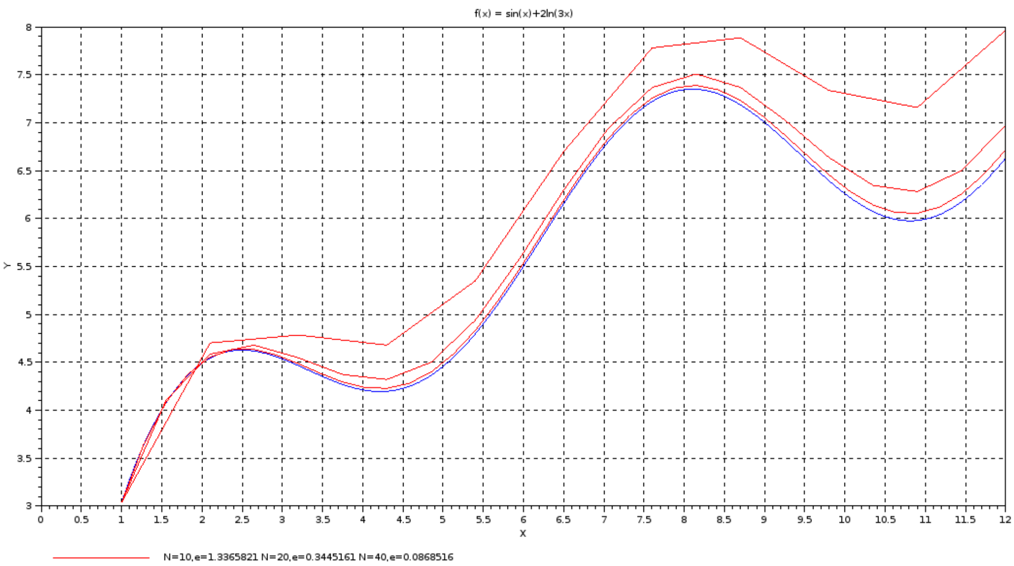
где $k\in[0;10]$.

с точным решением : $y(x)=\sin(x)+2\ln(3x)$.

С помощью явного метода Эйлера и метода предиктор-корректор с итерационной обработкой.

В методе Эйлера при большир h точность очень мала, но при уменьшении шага итерирования точность повышается :





Видно, что во втором методе сходимость к решению более быстрая, уже при N = 40 его точность сравнима с точностью метода Эйлера при N = 160. Таким образом, второй метод экономичен в вычислениях и представляется более предпочтительным.

Оценка порядка точности метода

1) при вычислении порядка точности по формулам :

$$\mathring{p}=\log_2\left(\frac{e_{2h}}{e_h}\right), \tilde{p}=\log_2\left(\frac{e_{4h}-e_{2h}}{e_{2h}-e_h}\right).$$

наблюдается совпадение с теоретическим для м.Эйлера:

N=10
h=1.1 hh=0.55
p*=0.999237504607027, p=0.996570082465496

N=20
h=0.550000000000000 hh=0.275000000000000
p*=1.001907041054298, p=1.002335301967779

N=40
h=0.275000000000000 hh=0.137500000000000
p*=1.001477774785405, p=1.002096024991283

и для 2-го метода:

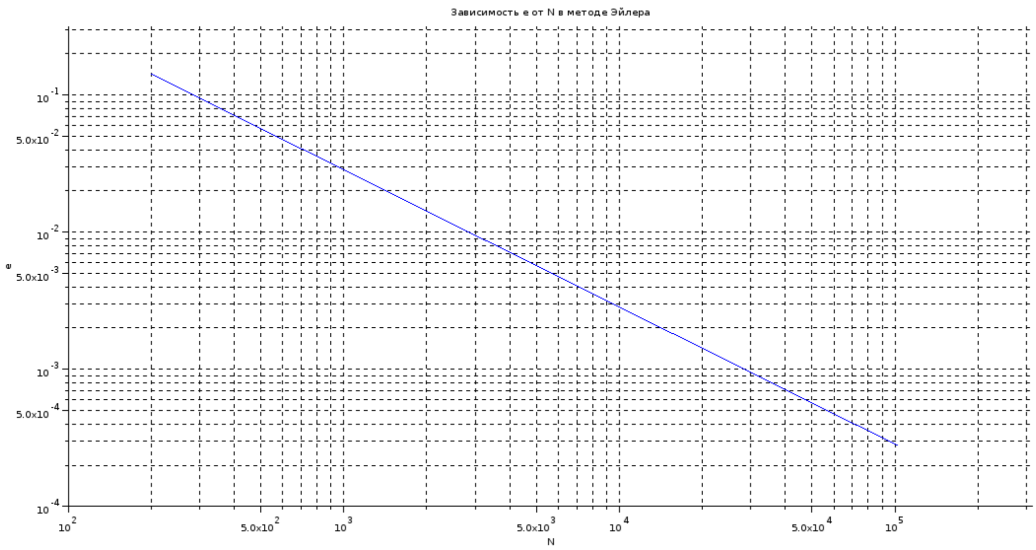
N=10
h=1.100000000000000 hh=0.550000000000000
p*=1.987946346415628, p=1.984295946446882

N=20
h=0.550000000000000 hh=0.275000000000000
p*=1.998830726817781, p=1.998136621445072

N=40
h=0.275000000000000 hh=0.137500000000000
p*=2.000912795751860, p=2.000932388652800

N=80
h=0.137500000000000 hh=0.068750000000000
p*=2.000853969056946, p=2.000962556156757

2) если же представить графически зависимость прогрешности от h, то в методе Эйлера линейность прослеживается, а вот во 2-м методе квадратичность у меня не очевидна:



При использовании правила Рунге в оценке главного члена локальной погрешности , видно, что оно может быть использовано для достоверной оценки глобальной погрешности :

N=400, h= 0.0275
e=0.071206232729412 и e* = 0.071242795173887
N=800, h=0.01375
e=0.035598440080617 e*=0.035607792648795

в методе Эйлера и во 2-м методе:

N=400, h=0.0275
e=0.000216942693226 e*=0.000217030649443
N=800 ,h=0.01375
e=0.000054226818766 e*=0.000054238624819

<u>На примере метода Эйлера посмотрим возможность уточнения решения, пользуясь правилом Рунге.</u>

Пуст h = 0.006875 , N=1600
тогда уточнённое решение, вычисленное по формуле :

$$\tilde{y}(x_i)=y_{h/2}(x_i)+\delta_i;\delta_i=\frac{y_{h/2}(x_i)-y_h(x_i)}{2^p-1}$$

имеет порядок точности p = 1.999159297883992 , что убеждает в возможности применения правила Рунге для уточнения решения.