

## Задача 1.5

Найти решение начально-краевой задачи и сравнить его с точным

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in [0, 1],$$

$$t = 0: \quad u(x, 0) = x, \quad x > 0;$$

$$x = 0: \quad u(0, t) = 0, \quad t \geq 0$$

с помощью компактной схемы (перед применением провести верификацию схемы):

$$\frac{1}{6} \left( \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\tau} + 4 \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{\tau} \right) + u_j^n \frac{u_{j+1}^{n+1/2} - u_{j-1}^{n+1/2}}{2h} = 0,$$

где  $u^{n+1/2} = 0.5(u^n + u^{n+1})$ .

**Точное решение :**

$$u(x, t) = \frac{x}{1+t}$$

**Порядок аппроксимации :**

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\tau} = u_t^n + \frac{\tau}{2} u_{tt}^n + o(\tau^2)$$

$$\left( u_t^n + \frac{\tau}{2} u_{tt}^n + o(\tau^2) \right)_{j+1} = u_t^n + h u_{tx}^n + \frac{h^2}{2} u_{txx}^n + \frac{h^3}{6} u_{txxx}^n + \frac{\tau}{2} u_{tt}^n + \frac{\tau h}{2} + \frac{\tau h^2}{4} u_{ttxx}^n + o(\tau^2 + h^4)$$

$$\left( u_t^n + \frac{\tau}{2} u_{tt}^n + o(\tau^2) \right)_{j-1} = u_t^n - h u_{tx}^n + \frac{h^2}{2} u_{txx}^n - \frac{h^3}{6} u_{txxx}^n + \frac{\tau}{2} u_{tt}^n - \frac{\tau h}{2} + \frac{\tau h^2}{4} u_{ttxx}^n + o(\tau^2 + h^4)$$

учитывая, что

$$\tau h^2 \leq \frac{\tau^2 + h^4}{2}$$

то

$$\frac{1}{6} \left( \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\tau} + 4 \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{\tau} \right) = u_t^n + \frac{h^2}{6} u_{txx}^n + \frac{\tau}{2} u_{tt}^n + o(\tau^2 + h^4)$$

$$u_{tt} = 2u u_x^2 + u_{xx}^2$$

$$u_{txx} = -3u_x u_{xx} - 4u_{xxx}$$

тогда

$$\frac{1}{6} \left( \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\tau} + 4 \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{\tau} \right) = u_t^n + \tau u^n u_x^2 + \frac{\tau}{2} u^{n2} u_{xx}^n - \frac{h^2}{2} u_x^n u_{xx}^n - \frac{h^2}{6} u^n u_{xxx}^n + o(\tau^2 + h^4)$$

$$\frac{u_{j+1}^{n+1/2} - u_{j-1}^{n+1/2}}{2h} = u_x^{n+1/2} + \frac{h^2}{6} u_{xxx}^{n+1/2} + o(h^4)$$

$$u^{n+1/2} = \frac{u^n + u^{n+1}}{2} = u^n + \frac{\tau}{2} u_t^n + o(\tau^2)$$

$$\frac{u_{j+1}^{n+1/2} - u_{j-1}^{n+1/2}}{2h} = u_x^n + \frac{\tau}{2} u_{tx}^n + \frac{h^2}{6} u_{xxx}^n + o(\tau^2 + h^4) = u_x^n - \frac{\tau}{2} u_x^{n2} - \frac{\tau}{2} u^n u_{xx}^{nn} + \frac{h^2}{6} u_{xxx}^n + o(\tau^2 + h^4)$$

учитывая

$$u_{tx} = (-u u_x)_x = -u_x^2 - u u_{xx}$$

и окончательно

$$u_t^n + \tau u^n u_x^{n2} + \frac{\tau}{2} u^{n2} u_{xx}^n - \frac{h^2}{2} u_x^n u_{xx}^n - \frac{h^2}{6} u^n u_{xxx}^n + u^n \left( u_x^n - \frac{\tau}{2} u_x^{n2} - \frac{\tau}{2} u^n u_{xx}^{nn} + \frac{h^2}{6} u_{xxx}^n \right) + o(\tau^2 + h^4) = \dot{u}$$

$$= \frac{\tau}{2} u^n u_x^{2n} - \frac{h^2}{2} u_x^n u_{xxx}^n + o(\tau^2 + h^4) \sim o(\tau + h^2)$$

**Устойчивость :**

$$u_j^n = \lambda^n e^{i w j h}$$

$$\frac{1}{6} \left( \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\tau} + 4 \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{\tau} \right) + u_j^n \frac{u_{j+1}^{n+1/2} - u_{j-1}^{n+1/2}}{2h} =$$

$$= \lambda^n e^{i w (j-1) h} \left[ \frac{(\lambda - 1)}{6 \tau} (e^{2 i w h} + 4 e^{i w h} + 1) + \frac{u_j^n}{4 h} (\lambda e^{2 i w h} - \lambda + e^{2 i w h} - 1) \right] = 0$$

$$\Rightarrow \lambda \left( \frac{\cos(wh) + 2}{6 \tau} + i \frac{a \sin(wh)}{4 h} \right) = \frac{\cos(wh) + 2}{6 \tau} - i \frac{a \sin(wh)}{4 h}$$

$$\text{пусть } \bar{z} = \frac{\cos(wh) + 2}{6 \tau} - i \frac{a \sin(wh)}{4 h}, z = \frac{\cos(wh) + 2}{6 \tau} + i \frac{a \sin(wh)}{4 h}$$

где  $a = \max_{j,n} (u_j^n)$

Тогда  $\lambda \cdot z = \bar{z} \Rightarrow \lambda = \frac{\bar{z}}{z}; \Rightarrow |\lambda| \leq 1$

т.е. схема устойчива по спектральному признаку.

**Погрешность :**

$\tau \backslash h$	10	20	40	80	160	320	640	1280	2560	5120
64	0.0038954	0.00185616	0.00154555	0.00147336	0.00145525	0.00145086	0.00144973	0.00144946	0.00144944	0.00144941
128	0.00362592	0.00114067	0.00081888	0.000745634	0.000727574	0.000723083	0.000721959	0.00072168	0.000721612	0.000721595
256	0.00350091	0.000963861	0.000458789	0.000384334	0.000366051	0.00036152	0.000360396	0.000360117	0.000360048	0.00036003
512	0.00344015	0.00093036	0.000283017	0.000204231	0.000185847	0.000181322	0.000180194	0.000179913	0.000179843	0.000179826
1024	0.00341064	0.000914037	0.00024013	0.000114745	9.59E-005	9.14E-005	9.02E-005	9.00E-005	8.99E-005	8.99E-005

## График:

синим – точное решение , красным – приближенное

