

20. Метод установления решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона. Схема переменных направлений

20.1. Постановка задачи

Рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения

$$-Lu = f(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad (1)$$

$$u = \mu(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma. \quad (2)$$

Пусть $\overline{G} = G + \Gamma = \{0 \leq x \leq l_x, 0 \leq y \leq l_y\}$ — прямоугольник, а

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (3)$$

$p(x, y), q(x, y)$ — достаточно гладкие функции,

$0 < c_1 \leq p(x, y) \leq c_2, 0 < d_1 \leq q(x, y) \leq d_2$, где c_1, c_2, d_1, d_2 — постоянные.

Обозначим $A = \max(c_2, d_2)$.

20.2. Построение сетки, равномерной по каждому из направлений. Аппроксимация дифференциального оператора L разностным

Разобьем отрезок $[0, l_x]$ на N_x равных частей. Обозначим $h_x = l_x/N_x, x_i = ih_x, 0 \leq i \leq N_x$.

Разобьем отрезок $[0, l_y]$ на N_y равных частей. Обозначим $h_y = l_y/N_y, y_i = ih_y, 0 \leq i \leq N_y$.

Построим сетку узлов (рис. 1):

$$\overline{\omega_{h_x h_y}} = \{(x_i, y_j), \quad 0 \leq i \leq N_x, 0 \leq j \leq N_y\}.$$

Узлы $(x_i, y_j), 1 \leq i \leq N_x - 1; 1 \leq j \leq N_y - 1$ — внутренние, остальные, лежащие на границе прямоугольника, — граничные.

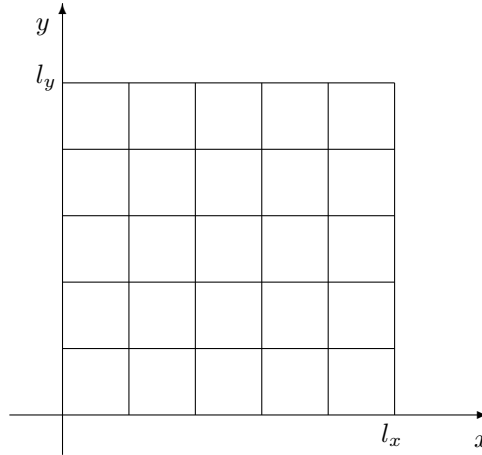


Рис. 1

Решение отыскивается в виде таблицы значений в точках сетки $\overline{\omega_{h_x h_y}}$. Обозначим $u_{ij} \approx u(x_i, y_j)$.

Пусть

$$L_1 u = \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad L_2 u = \frac{\partial}{\partial y} \left(q(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (4)$$

так что

$$Lu = L_1u + L_2u.$$

Операторы L_1 и L_2 заменим разностными операторами Λ_1 и Λ_2

$$\Lambda_1 u_{ij} = p_{i+\frac{1}{2}j} \frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_x^2} - p_{i-\frac{1}{2}j} \frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h_x^2}, \quad (5)$$

$$\Lambda_2 u_{ij} = q_{ij+\frac{1}{2}} \frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{h_y^2} - q_{ij-\frac{1}{2}} \frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{h_y^2}. \quad (6)$$

Здесь

$$p_{i+\frac{1}{2}j} = p(x_i + h_x/2, y_j), \quad p_{i-\frac{1}{2}j} = p(x_i - h_x/2, y_j), \\ q_{ij+\frac{1}{2}} = q(x_i, y_j + h_y/2), \quad q_{ij-\frac{1}{2}} = q(x_i, y_j - h_y/2).$$

Обозначим

$$\Lambda u_{ij} = \Lambda_1 u_{ij} + \Lambda_2 u_{ij}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1.$$

Если $u(x, y)$ имеет не менее четырех непрерывных ограниченных в рассматриваемой области G производных по x и по y , а $p(x, y)$ и $q(x, y)$ — не менее трех, то разностный оператор Λ аппроксимирует дифференциальный L со вторым порядком, т. е.

$$Lu - \Lambda u = O(|h|^2), \quad |h|^2 = h_x^2 + h_y^2.$$

Итак, решение задачи (1)-(2) свелось к решению разностной задачи Дирихле

$$-(\Lambda_1 u_{ij} + \Lambda_2 u_{ij}) = f_{ij}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1 \quad (7)$$

при граничных условиях

$$\begin{cases} u_{i0} &= \mu(x_i, 0), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{iN_y} &= \mu(x_i, l_y), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{0j} &= \mu(0, y_j), & 0 \leq j \leq N_y - 1, \\ u_{N_x j} &= \mu(l_x, y_j), & 0 \leq j \leq N_y - 1. \end{cases} \quad (8)$$

20.3. Метод установления решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона

Для вычисления решений многих стационарных задач математической физики, описывающих равновесные состояния, рассматриваются последние как результат установления развивающегося во времени процесса, расчет которого оказывается проще, чем прямой расчет равновесного состояния. Рассмотрим вспомогательную нестационарную задачу о распространении тепла

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= L_1 u + L_2 u + f(x, y), \\ u|_{\Gamma} &= \mu(x, y), \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y), \end{cases} \quad (9)$$

где $f(x, y)$ имеет прежний смысл, а $u_0(x, y)$ — произвольно. Поскольку источники тепла $f(x, y)$ и температура на границе $\mu(x, y)$ не зависят от времени, то естественно ожидать, что и решение $u(x, y, t)$ с течением времени будет меняться все медленнее, распределение температур в пределе при $t \rightarrow \infty$ превратится в равновесное распределение температуры $u(x, y)$, описываемое исходной задачей (1)-(2). Надо решать задачу до тех пор, пока ее решение не перестанет меняться в пределах интересующей нас точности.

Рассмотрим вначале разностную схему, с помощью которой могла бы решаться задача (7)-(8), но на практике ее не применяют по указанным в п. 20.4 причинам.

20.4. Двухслойная схема с весами

Аппроксимируем задачу (9) разностной схемой

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^k}{\tau} = \Lambda(\sigma u_{ij}^{k+1} + (1 - \sigma)u_{ij}^k) + f(x_i, y_j),^1 \quad (10)$$

¹При решении стационарных задач методом установления k — номер итерации, а τ — итерационный параметр, который выбирается из соображений точности аппроксимации и быстроты сходимости.

$$i = 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_y - 1, \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

$$\begin{cases} u_{i0}^{k+1} = \mu(x_i, 0), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{iN_y}^{k+1} = \mu(x_i, l_y), & 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{0j}^{k+1} = \mu(0, y_j), & 1 \leq j \leq N_y - 1, \\ u_{N_x j}^{k+1} = \mu(l_x, y_j), & 1 \leq j \leq N_y - 1. \end{cases} \quad (11)$$

Решение при $k = 0$ находится из начального условия в (9)

$$u_{ij}^0 = u_0(x_i, y_j), \quad i = 0, 1, \dots, N_x, \quad j = 0, 1, \dots, N_y.$$

Рассмотрим два варианта значений параметра σ .

а) При $\sigma = 0$ получаем явную схему и решение во внутренних узлах сетки вычисляется по формуле

$$u_{ij}^{k+1} = u_{ij}^k + \tau(\Lambda_1 u_{ij}^k + \Lambda_2 u_{ij}^k) + \tau f(x_i, y_j), \quad (12)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_y - 1, \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

Схема (12) условно устойчива при $\tau \leq \frac{Ah^2}{4}$. Общее число действий при переходе со слоя на слой пропорционально числу узлов сетки, т.е. $O(N_x N_y)$ — схема экономичная.

б) При $\sigma = 1$ получаем неявную схему. Она устойчива при любых h и τ . Для определения u_{ij}^{k+1} получаем на каждом слое линейную систему

$$u_{ij}^{k+1} - \tau(\Lambda_1 u_{ij}^{k+1} + \Lambda_2 u_{ij}^{k+1}) = u_{ij}^k + \tau f(x_i, y_j), \quad (13)$$

$$i = 1, 2, \dots, N_x - 1, \quad j = 1, 2, \dots, N_y - 1, \quad k = 0, 1, 2 \dots$$

Матрица этой системы пятидиагональная и решать систему можно методом матричной прогонки или методом исключения Гаусса, который при учете специального вида матрицы требует $O(N_x^2 N_y^2)$ действий, т.е. схема не является экономичной.

20.5. Схема переменных направлений

Эта схема сочетает лучшие качества явной схемы — экономичность и неявной — устойчивость. Наряду с основными значениями u_{ij}^k и u_{ij}^{k+1} вводится промежуточное значение $u_{ij}^{k+1/2}$, которое формально можно рассматривать как значение при $t = t_{k+1/2} = t_k + \frac{\tau}{2}$. Решение задачи в этом случае сводится к решению двух систем вида (14)-(15) с трехдиагональными матрицами.

$$\frac{u_{ij}^{k+1/2} - u_{ij}^k}{\tau/2} = \Lambda_1 u_{ij}^{k+1/2} + \Lambda_2 u_{ij}^k + f(x_i, y_j), \quad (14)$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1.$$

$$\frac{u_{ij}^{k+1} - u_{ij}^{k+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = \Lambda_1 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \Lambda_2 u_{ij}^{k+1} + f(x_i, y_j), \quad (15)$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1.$$

$$k = 0, 1, \dots$$

В граничных узлах решение должно принимать заданные в (11) значения.

Схема (14) неявна по направлению x и явна по направлению y , а схема (15) явна по направлению x и неявна по направлению y , что позволяет использовать для нахождения решения одномерные прогонки.

Система (14) с учетом граничных условий (11) может быть записана в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_{0j}^{k+\frac{1}{2}} & = & \mu(0, y_j), \\ \overline{A}_{ij} u_{i-1j}^{k+\frac{1}{2}} - \overline{B}_{ij} u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + \overline{C}_{ij} u_{i+1j}^{k+\frac{1}{2}} & = & \overline{G}_{ij}^{k+\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq i \leq N_x - 1, \\ u_{N_x j}^{k+\frac{1}{2}} & = & \mu(l_x, y_j) \end{array} \right. \quad (16)$$

где

$$\overline{G}_{ij}^{k+\frac{1}{2}} = -u_{ij}^k - \frac{\tau}{2}(\Lambda_2 u_{ij}^k + f(x_i, y_j)), \quad (17)$$

$$1 \leq j \leq N_y - 1.$$

В итоге при каждом $1 \leq j \leq N_y - 1$ получили линейную замкнутую систему $(N_x + 1)$ -го порядка относительно $u_{0j}^{k+\frac{1}{2}}, u_{1j}^{k+\frac{1}{2}}, \dots, u_{N_x j}^{k+\frac{1}{2}}$.

Матрица системы 3-х диагональная и решать систему следует методом прогонки.

Прогонки осуществляются вдоль строк (рис. 2).

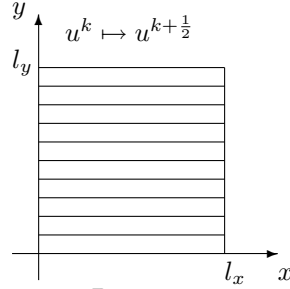


Рис. 2

При $j = 0, j = N_y$ решения находятся из (11):

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_{i0}^{k+\frac{1}{2}} & = & \mu(x_i, 0, t_{k+\frac{1}{2}}), \quad 0 \leq i \leq N_x, \\ u_{iN_y}^{k+\frac{1}{2}} & = & \mu(x_i, l_y, t_{k+\frac{1}{2}}), \quad 0 \leq i \leq N_x. \end{array} \right. \quad (18)$$

Система (15) с учетом граничных условий (11) может быть записана в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_{i0}^{k+1} & = & \mu(x_i, 0), \\ \overline{\overline{A}}_{ij} u_{ij-1}^{k+1} - \overline{\overline{B}}_{ij} u_{ij}^{k+1} + \overline{\overline{C}}_{ij} u_{ij+1}^{k+1} & = & \overline{\overline{G}}_{ij}^{k+1}, \quad 1 \leq j \leq N_y - 1, \\ u_{iN_y}^{k+1} & = & \mu(x_i, l_y), \end{array} \right. \quad (19)$$

где

$$\overline{\overline{G}}_{ij}^{k+1} = -u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} - \frac{\tau}{2}(\Lambda_1 u_{ij}^{k+\frac{1}{2}} + f(x_i, y_j)), \quad (20)$$

$$1 \leq i \leq N_x - 1,$$

В итоге при каждом $1 \leq i \leq N_x - 1$ получили линейную замкнутую систему $(N_y + 1)$ -го порядка относительно $u_{i0}^{k+1}, u_{i1}^{k+1}, \dots, u_{iN_y}^{k+1}$. Матрица системы 3-х диагональная и решать систему следует методом прогонки.

Прогонки осуществляются вдоль столбцов (рис. 3).

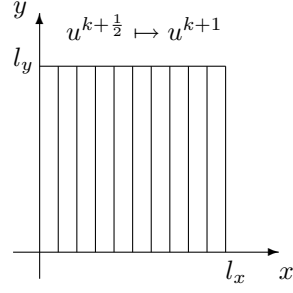


Рис. 3

При $i = 0, i = N_x$ решения находятся из (11):

$$\begin{cases} u_{0j}^{k+1} = \mu(0, y_j), & 0 \leq j \leq N_y, \\ u_{N_x j}^{k+1} = \mu(l_x, y_j), & 0 \leq j \leq N_y. \end{cases} \quad (21)$$

Очевидно, что в простейшей задаче $(p(x, y) \equiv 1, q(x, y) \equiv 1, hx = hy = h)$

$$\bar{A}_{ij} = \bar{\bar{A}}_{ij} = \frac{\tau}{2h^2}, \quad \bar{B}_{ij} = \bar{\bar{B}}_{ij} = \frac{\tau}{h^2} + 1, \quad \bar{C}_{ij} = \bar{\bar{C}}_{ij} = \frac{\tau}{2h^2}. \quad (22)$$

Итак, рассмотрим алгоритм метода переменных направлений.

1. Из начального условия получаем решение при $k = 0$ во всех точках сетки

$$u_{ij}^0 = u_0(x_i, y_j), \quad 0 \leq i \leq N_x, \quad 0 \leq j \leq N_y.$$

2. Полагая $k = 0$, решаем методом прогонки при каждом $1 \leq j \leq N_y - 1$ систему (16).

Решение при $j = 0$ и $j = N_y$ находится из (18). Тем самым найдено решение $u_{ij}^{\frac{1}{2}}$ на промежуточном слое $\frac{1}{2}$ во всех точках сетки.

3. Полагая $k = 0$ решаем методом прогонки при каждом $1 \leq i \leq N_x - 1$ систему (19).

Решение при $i = 0$ и $i = N_x$ находится из (21). Тем самым найдено решение u_{ij}^1 на слое $k = 1$ во всех точках сетки.

4. Вычислив характеристики полученного решения, увеличиваем номер слоя на единицу ($k = k + 1$) и повторяем пункты 2 и 3 пока не будет выполнен критерий окончания счета.

Указание к выбору параметра τ

В методе переменных направлений, если известны границы спектра разностных операторов $-\Lambda_1, -\Lambda_2$

$$\delta_1 = c_1 \frac{4}{h_x^2} \sin^2 \frac{\pi h_x}{2l_x}, \quad \Delta_1 = c_2 \frac{4}{h_x^2} \cos^2 \frac{\pi h_x}{2l_x}, \quad \delta_2 = d_1 \frac{4}{h_y^2} \sin^2 \frac{\pi h_y}{2l_y}, \quad \Delta_2 = d_2 \frac{4}{h_y^2} \cos^2 \frac{\pi h_y}{2l_y}$$

и $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, $\Delta = \max(\Delta_1, \Delta_2)$, то в качестве оптимального τ берется $\tau_{opt.} \approx \frac{4}{\sqrt{\delta \Delta}}$.

В модельной задаче $\tau_{opt.} \approx \frac{2h^2}{\sin(\pi h)}$. Количество итераций, необходимое для уменьшения первоначальной нормы погрешности в ε раз $n \approx \frac{N}{2\pi} \ln \frac{1}{\varepsilon}$.

Эти рекомендации являются лишь ориентировочными и следует их испытать, т. е. проверить скорость сходимости при τ больших и меньших $\tau_{опт}$, указанного выше.

20.6. Выбор точности

Разностная схема (7)-(8) аппроксимирует исходную задачу (1)-(2) со вторым порядком относительно шага сетки.

Заданная точность приближенного решения должна быть согласована с порядком аппроксимации.

Часто отлаживают задачу на известном точном решении u^* , тогда судят о точности решения по его фактической абсолютной погрешности $\|u^k - u^*\|^2$ или по относительной погрешности $\|u^k - u^*\|/\|u^0 - u^*\|$. Если точное решение неизвестно и неизвестны оценки для погрешностей, то судят по величине невязки $\|\Lambda u^k + F\|$. Здесь F — вектор значений правой части системы (7) во внутренних точках сетки.

Для получения невязки подставляем значения u^k в точках сетки в разностное уравнение (7) и вычисляем

$$\|\Lambda u^k + F\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1, \\ 1 \leq j \leq N_y - 1}} |\Lambda u_{ij}^k + f_{ij}|.$$

Также можно судить по величине относительной невязки $\|\Lambda u^{(k)} + F\|/\|\Lambda u^0 + F\|$.

Итак, в качестве критерия конца вычислений может быть выбран один из следующих:

- а) $\|u^k - u^*\| < \varepsilon$,
- б) $\|\Lambda u^k + F\| < \varepsilon$,
- в) $\frac{\|u^k - u^*\|}{\|u^0 - u^*\|} < \varepsilon$,
- г) $\frac{\|\Lambda u^k + F\|}{\|\Lambda u^0 + F\|} < \varepsilon$.
- д) выполнить вычисленное заранее количество итераций n , требуемое для уменьшения первоначальной погрешности в заданное число раз.

20.7. Формулировка задания

Алгоритмы решения задачи численно реализовать по программе на алгоритмическом языке.

Желательно отлаживать программу на модельной задаче, т. е. такой, точное решение которой известно.

Требуется получить приближенное решение задачи на сгущающихся сетках при $N_x = 5, 10, 20$. Ввиду того, что в некоторых случаях может оказаться проблематичным получить решение с заданной точностью ε , независимо от используемого критерия конца вычислений, во избежание закликивания следует поставить ограничение на количество выполняемых итераций. Обозначим его, например, k_{\max} .

k_{\max} рекомендуется выбирать самостоятельно с учетом скорости сходимости метода.

В качестве нулевого приближения u^0 можно взять, например, вектор с нулевыми компонентами значений решения во внутренних узлах сетки и принимающий заданные значения в граничных.

На печать должны выводиться следующие характеристики:

1. Мера аппроксимации дифференциального уравнения разностной схемой на точном решении³. Для получения меры аппроксимации подставляем значения точного решения в разностное уравнение (7) и вычисляем

$$\gamma(u^*) = \|\Lambda u^* + F\| = \max_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1, \\ 1 \leq j \leq N_y - 1}} |\Lambda u_{ij}^* + f_{ij}|.$$

²Здесь и в дальнейшем используется сеточный аналог нормы в C

$$\|V\|_C = \max_{\substack{1 \leq i \leq N_x - 1, \\ 1 \leq j \leq N_y - 1}} |v_{ij}|.$$

³Если точное решение неизвестно, характеристики, зависящие от точного решения, опускаются.

2. Норма невязки нулевого приближения $\|\Lambda u^0 + F\|$.
3. Характеристики вычисленного в цикле с параметром k приближенного решения u^k (Таблица 1)

Таблица 1

5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6
k	$\ \Lambda u^k + F\ $	rel.d.	$\ u^k - u^*\ $	rel.error	$\ u^k - u^{k-1}\ $
0					—

Здесь

- 5.1 — номер итерации;
 - 5.2 — норма невязки k -го приближения;
 - 5.3 — относительная невязка k -го приближения $\frac{\|\Lambda u^k + F\|}{\|\Lambda u^0 + F\|}$;
 - 5.4 — норма абсолютной погрешности k -го приближения;
 - 5.5 — относительная погрешность k -го приближения $\frac{\|u^k - u^*\|}{\|u^0 - u^*\|}$;
 - 5.6 — норма разности двух соседних приближений.
4. Решение, удовлетворяющее заданной точности ε , или $u^{k_{\max}}$ на “крупной” сетке. “Крупной” будем называть сетку при $N_x = 5$, $N_y = 5$ и, независимо от значений N_x и N_y , приближенное решение должно печататься только в точках этой сетки, например при $l_x = l_y = 1$ должна быть выведена таблица со значениями решения следующего вида:

Таблица 2

$y \setminus x$	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
0						
0.2						
0.4						
0.6						
0.8						
1						

5. Таблица точного решения на “крупной” сетке.

Проанализировать полученные результаты.

Рекомендации по составлению программы можно посмотреть [здесь](#).

Разностные схемы других методов установления изложены в [2] и [3].

Список литературы

- [1] Самарский А.А. Теория разностных схем. М., 1983.
- [2] Марчук Г.И. Методы расщепления. М., 1988.
- [3] Практикум по численным методам/ А.И. Воронкова, И.К. Даугавет, А.А. Марданов и др. – СПб., 2003.

Варианты заданий