Группа 14136 Оборовский Д.

Задача 2.5

Найти решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона:

$$u_{xx} + u_{yy} = f(x, y), \qquad x \in [a, b], \quad y \in [c, d]$$

$$u(a, y) = \varphi_1(y), \quad u(b, y) = \varphi_2(y),$$

$$u(x, c) = \varphi_3(x), \quad u(x, d) = \varphi_4(x),$$

методом установления соответствующего нестационарного уравнения

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} - f(x, y)$$

При $t = 0$ положить $u^0(x, y) = C = const.$

Входные параметры: шаг по времени, число узлов в направлении x – N_x, число узлов в направлении y – N_y, точность установления ε .

Критерием установления решения считать выполнение условия

$$\max_{\substack{1 \le i \le N_x \\ 1 \le j \le N_y}} \left| \frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\tau} \right| \le \varepsilon.$$

<u>**Схема**</u> :Попеременно - треугольный метод.

$$\left(1 - \tau\Lambda_1^- - \tau\Lambda_2^-\right) \xi_{ij}^{n+1/2} = \tau\left[\left(\Lambda_{11} + \Lambda_{22}\right) u_{ij}^n - f_{ij}\right],$$

$$\left(1 - \tau\Lambda_1^+ - \tau\Lambda_2^+\right) \xi_{ij}^{n+1} = \xi_{ij}^{n+1/2},$$

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n + \xi_{ij}^{n+1}.$$

где

$$\Lambda_{11} u_{ij} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{ij} + u_{i+1,j}}{h_1^2}, \qquad \Lambda_{22} u_{ij} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{ij} + u_{i,j+1}}{h_2^2},$$

$$\Lambda_1^- u_{ij} = \frac{-u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_1^2} \qquad \Lambda_1^+ u_{ij} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_1^2}$$

$$\Lambda_2^- u_{ij} = \frac{-u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_2^2} \qquad \Lambda_2^+ u_{ij} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_2^2}$$

Точное решение 1.

$$u(x, y) = \cos(x + y)\sin(xy)$$

$a = \pi/2$, $b = 3\pi/2$, $c = \pi/2$, $d = 3\pi/2$.

$f(x, y) = -\cos(x + y)\sin(xy)(2 + x^2 + y^2) - 2\sin(x + y)\cos(xy)(x + y)$.

Граничные условия φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 найти из точного решения.

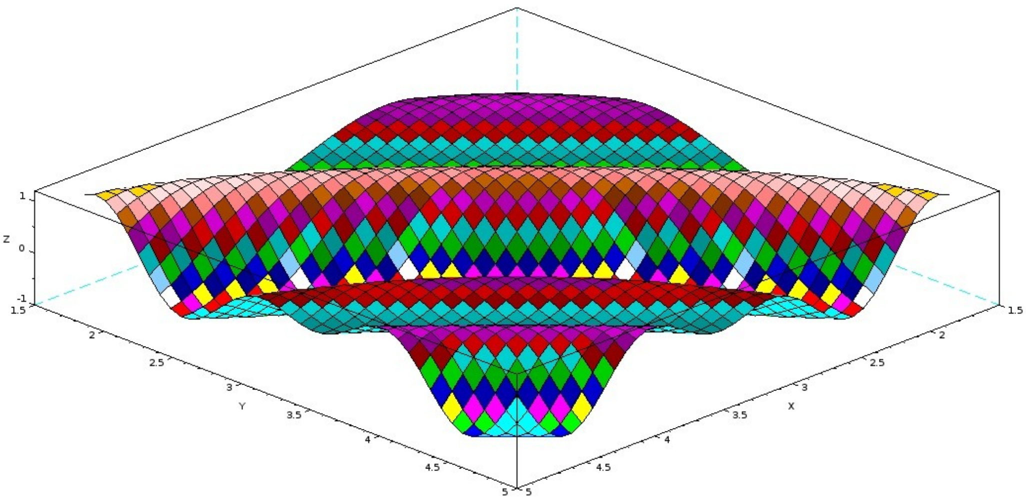
$$\phi_1 = -\sin(y)\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)$$

$$\phi_2 = \sin(y)\sin\left(\frac{3\pi y}{2}\right)$$

$$\phi_3 = -\sin(x)\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$\phi_4 = \sin(x)\sin\left(\frac{3\pi x}{2}\right)$$

1.График решения



2 . Порядок схемы p и отклонение $\delta_{abs} = \max_{i,j} \left| u_{ij} - u_{ex}(x_i, y_j) \right|$:

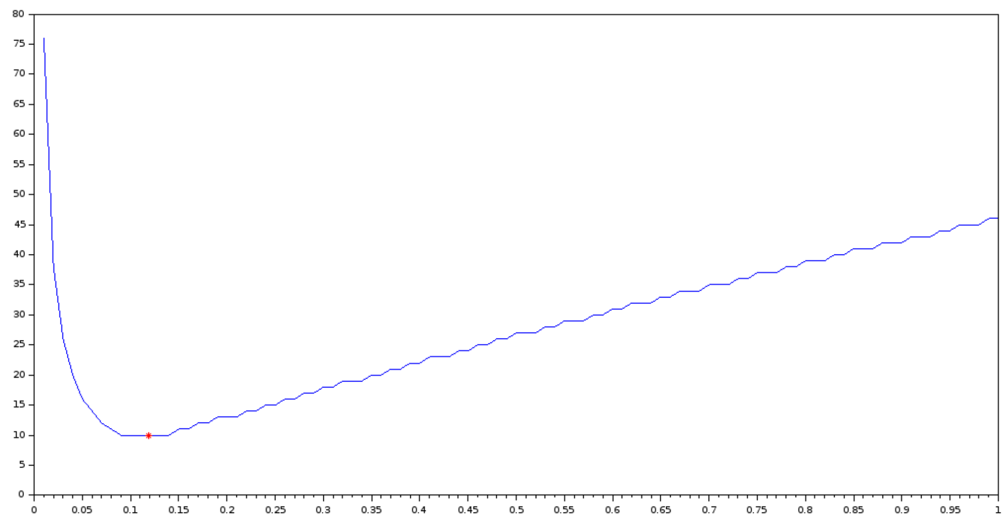
e = δ , $p = \log 2\left(\frac{e_n}{e_{n+1}}\right)$ k = количество шагов до установления

N	10	20	40	80
e	.150612506777344	.035993039920407	.008386952150622	.001828381852029
k	15	27	53	106
p		2.0650517151	2.101499425	2.1975792208

3.Влияние шага по времени на скорость сходимости и точность решения:

N = 10 , e = 0.01 , 0.01 < t < 1 с шагом 0.01 , Top =0.118290322068988 , где

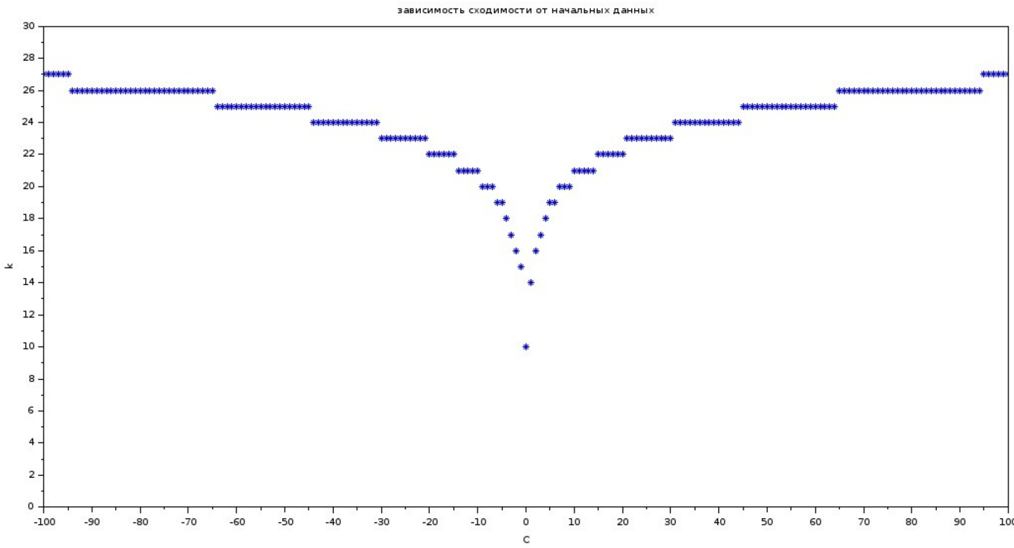
$$t_{opt} = \frac{h^2}{\sin(\pi h)}$$



t	0.06	0.07	0.08	0.09	0.1	0.11	0.12	0.13	0.14	0.15	0.16	0.17	0.18	0.19	0.2	0.21	0.22	0.23
k	14	12	11	10	10	10	10	10	10	11	11	12	12	13	13	13	14	14
e	0.150184	0.150219	0.150305	0.150362	0.150464	0.150533	0.150578	0.150606	0.150618	0.150648	0.150641	0.150657	0.150641	0.150652	0.150631	0.1506	0.150617	0.150583

3. Влияние начальных данных на сходимость.

N=10 , e = 0.01, t = 0.118290322068988, -100 < C < 100 k = количество шагов до установления



C	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
k	20	19	19	18	17	16	15	10	14	16	17	18
e	0.1503801691	0.1503002443	0.1503654321	0.1503086597	0.1502694951	0.1502759929	0.1503782221	0.1505716943	0.151091895	0.151084046	0.1511008814	0.1510689921