

Tratado de Implementación Numérica y Algorítmica de Predictores Estocásticos Universales

Consorcio de Desarrollo de Meta-Predicción Adaptativa

18 de febrero de 2026

Índice

1 Fundamentos de Discretización y Simulaciones de Monte Carlo	3
1.1 Generación de Números Pseudo-Aleatorios	3
1.1.1 Algoritmo de Chambers-Mallows-Stuck (CMS)	3
1.2 Esquemas de Integración Estocástica	3
1.2.1 Esquema de Euler-Maruyama	3
1.2.2 Esquema de Milstein	4
1.3 Simulación de Procesos de Salto (Rama C)	4
2 Implementación del Motor de Identificación (SIA)	5
2.1 Estimación Multifractal (WTMM)	5
2.2 Detección de Cambios de Régimen (Test CUSUM)	5
2.3 Cálculo de Sensibilidades (Malliavin/AAD)	6
2.3.1 Procesos Tangenciales y Bismut-Elworthy-Li	6
2.3.2 Algoritmo Delta-Malliavin por Monte Carlo	7
3 Solvers Numéricicos para Núcleos de Predicción	8
3.1 Rama A: Proyección de Hilbert y Filtrado de Wiener	8
3.1.1 Algoritmo Recursivo de Levinson-Durbin	8
3.2 Rama B: Ecuación HJB y Métodos de Viscosidad	8
3.2.1 Esquemas de Diferencias Finitas Monótonas	8
3.2.2 Deep Galerkin Method (DGM)	9
3.3 Rama C: Ecuación Integro-Diferencial de Saltos	9
3.3.1 Algoritmo Delta-Malliavin en Espacios de Poisson	9
3.3.2 Esquema IMEX (Implícito-Explícito) para PIDEs	9
3.4 Rama D: Computación de Signatures	10
3.4.1 Identidad de Chen y Truncamiento	10
3.4.2 Log-Signatures	10
4 Orquestador: Transporte Óptimo Regularizado	11
4.1 Circuit Breaker de Robustez (Pre-Orquestador)	11
4.2 Algoritmo de Sinkhorn-Knopp (Espacio Dual)	11
4.3 Esquema JKO Proximal	12
5 Arquitectura de Software y Paralelismo	13
5.1 Patrones de Construcción Orientados a Objetos	13
5.1.1 Estructura de Clases Sugerida	13
5.2 Computación Heterogénea y Aceleración	13
5.2.1 GPU (CUDA/OpenCL)	13
5.2.2 FPGA (Field-Programmable Gate Array)	14

6	Consideraciones de Estabilidad Numérica	15
6.1	Condición CFL (Courant-Friedrichs-Lowy)	15
6.2	Estabilidad de la Signatura Logarítmica	15
7	Gobernanza de Metaparametros Heurísticos	16
7.1	Taxonomía y Acotación Analítica (Safe Harbors)	16
7.1.1	Parámetros de Discretización y Truncamiento	16
7.1.2	Parámetros de Regularización y Estabilidad	16
7.1.3	Umbrales de Decisión (Fronteras Duras)	17
7.2	Validación Cruzada Causal (Walk-Forward Validation)	17
7.3	Meta-Optimización Libre de Derivadas (Optimización Bayesiana)	17

Capítulo 1

Fundamentos de Discretización y Simulaciones de Monte Carlo

1.1 Generación de Números Pseudo-Aleatorios

La base del integrador estocástico es la fuente de entropía $\xi \sim \mathcal{D}$.

- **Gaussianos:** Para el movimiento Browniano $dW_t \approx \sqrt{\Delta t}Z$, con $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Se recomienda el generador *Mersenne Twister* o *PCG64* para periodos largos.
- **Levy/Saltos:** Utilizar el método de Chambers-Mallows-Stuck para simular variables estables $S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$.

1.1.1 Algoritmo de Chambers-Mallows-Stuck (CMS)

Para generar una variable aleatoria α -estable estándar $S(\alpha, \beta = 0, \gamma = 1, \delta = 0)$ con $\alpha \neq 1$:

1. Generar $U \sim \text{Uniforme}(-\pi/2, \pi/2)$ y $W \sim \text{Exponencial}(1)$.
2. Computar:

$$X = \frac{\sin(\alpha U)}{(\cos U)^{1/\alpha}} \cdot \left[\frac{\cos((1-\alpha)U)}{W} \right]^{(1-\alpha)/\alpha}$$

3. Retornar X . Para el caso general $Y \sim S(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, aplicar la transformación afín correspondiente.

1.2 Esquemas de Integración Estocástica

1.2.1 Esquema de Euler-Maruyama

Para la EDO estocástica $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$, la discretización de primer orden es:

Algorithm 1 Integrador Euler-Maruyama

- 1: **Input:** $X_0, T, N, b(\cdot), \sigma(\cdot)$
 - 2: $\Delta t \leftarrow T/N$
 - 3: $X \leftarrow \text{array de longitud } N + 1$
 - 4: **for** $k \leftarrow 0$ **to** $N - 1$ **do**
 - 5: $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$
 - 6: $X_{k+1} \leftarrow X_k + b(X_k)\Delta t + \sigma(X_k)\sqrt{\Delta t}Z$
 - 7: **end for**
 - 8: **Return** X
-

1.2.2 Esquema de Milstein

Mejora la convergencia fuerte a orden 1.0. Requiere la derivada de la volatilidad $\sigma'(x)$.

$$\hat{X}_{k+1} = \hat{X}_k + b_k \Delta t + \sigma_k \Delta W_k + \frac{1}{2} \sigma_k \sigma'_k ((\Delta W_k)^2 - \Delta t)$$

Nota: Si $\sigma(x)$ es constante (volatilidad aditiva), Milstein se reduce a Euler-Maruyama.

1.3 Simulación de Procesos de Salto (Rama C)

Para $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t + dJ_t$, donde J_t es un proceso de Poisson Compuesto con intensidad λ y tamaño de salto $Y \sim F_Y$:

1. Simular el número de saltos en $[t, t + \Delta t]$: $N_{\text{jump}} \sim \text{Poisson}(\lambda \Delta t)$.
2. Si $N_{\text{jump}} > 0$, generar tamaños $Y_1, \dots, Y_{N_{\text{jump}}}$.
3. Actualizar: $X_{k+1} = X_{k+1}^{\text{diff}} + \sum Y_i$.

Capítulo 2

Implementación del Motor de Identificación (SIA)

2.1 Estimación Multifractal (WTMM)

El algoritmo WTMM (Wavelet Transform Modulus Maxima) permite extraer el espectro de singularidades $D(h)$ en tiempo (cuasi) real.

Algorithm 2 WTMM Discreto Detallado - Con Trazado de Máximos

- 1: **Input:** Serie temporal X , escalas $a_i \in \{2^0, 2^{0.1}, \dots, 2^J\}$ (escalas dyádicas densas).
 - 2: **Paso 1: CWT (FFT) y Máximos Locales**
 - 3: Para cada escala a_j , extraer conjunto de máximos $M_j = \{(b, |W_{a_j}(b)|)\}$.
 - 4: **Paso 2: Enlace de Máximos (Tracking)**
 - 5: Inicializar líneas $\mathcal{L} = \{(b, |W_{a_J}(b)|)\}_{b \in M_J}$ (desde escala gruesa).
 - 6: **for** $j \leftarrow J - 1$ **downto** 1 **do**
 - 7: **for** cada línea $L \in \mathcal{L}$ con último punto $(b_{\text{last}}, \text{mod})$ **do**
 - 8: Buscar $(b_{\text{curr}}, \text{mod}_{\text{curr}}) \in M_j$ tal que $|b_{\text{curr}} - b_{\text{last}}| < C \cdot a_j$ (Cono de influencia).
 - 9: Si hay múltiples candidatos, elegir el de mayor módulo.
 - 10: Extender $L \leftarrow L \cup \{(b_{\text{curr}}, \text{mod}_{\text{curr}})\}$.
 - 11: **end for**
 - 12: **end for**
 - 13: **Paso 3: Función de Partición** Para momentos $q \in [-5, 5]$:
 - 14: $Z(q, a) = \sum_{L \in \mathcal{L}} (\sup_{(b, \text{mod}) \in L \cap \text{scale}(a)} \text{mod})^q$
 - 15: **Paso 4: Exponentes**
 - 16: $\tau(q) \leftarrow$ pendiente de la regresión lineal $\log Z(q, a)$ vs $\log a$.
 - 17: **Output:** Espectro de Legendre $D(h) = \min_q (qh - \tau(q))$.
-

2.2 Detección de Cambios de Régimen (Test CUSUM)

El evento `RegimeChangedEvent` se dispara cuando la estadística de Page de la suma acumulada de residuos excede un umbral adaptativo. Para mejorar la robustez en regímenes de colas pesadas (fat tails), incorporamos un ajuste basado en curtosis.

Nota de Implementación 2.1 (Justificación del Ajuste de Curtosis) El término $(1 + \ln(\kappa_t/3))$ ajusta el umbral en función de la "pesadez" de las colas de la distribución:

- Para distribuciones Gaussianas: $\kappa \approx 3 \implies \ln(\kappa/3) \approx 0$, el umbral se mantiene en $h_t \approx k\sigma_t$

Algorithm 3 Algoritmo CUSUM Discreto con Ajuste de Curtosis

```

1: Input: Residuos estandarizados  $e_t$ , factor base  $k$ , ventana móvil  $W$ .
2:  $S_0 \leftarrow 0$ ,  $G_0^+ \leftarrow 0$ ,  $G_0^- \leftarrow 0$ 
3: Inicializar buffer  $\mathcal{B} \leftarrow []$  (ventana deslizante de residuos)
4: for  $t \leftarrow 1$  to  $N$  do
5:   Añadir  $e_t$  a  $\mathcal{B}$  y mantener solo los últimos  $W$  valores
6:   Calcular estadísticas móviles:
7:      $\mu_t \leftarrow \text{mean}(\mathcal{B})$ 
8:      $\sigma_t \leftarrow \text{std}(\mathcal{B})$ 
9:      $m_4 \leftarrow \frac{1}{W} \sum_{i \in \mathcal{B}} (e_i - \mu_t)^4$                                  $\triangleright$  Cuarto momento
10:     $\kappa_t \leftarrow \frac{m_4}{\sigma_t^4}$                                                $\triangleright$  Curtosis (kurtozis)
11:   Calcular umbral adaptativo:
12:      $h_t \leftarrow k \cdot \sigma_t \cdot (1 + \ln(\kappa_t/3))$                                  $\triangleright$  Ajuste logarítmico por colas
13:   Actualizar estadístico CUSUM:
14:      $G_t^+ \leftarrow \max(0, G_{t-1}^+ + e_t - k)$ 
15:      $G_t^- \leftarrow \max(0, G_{t-1}^- - e_t - k)$ 
16:   if  $G_t^+ > h_t$  or  $G_t^- > h_t$  then
17:     Emit RegimeChangedEvent
18:      $G_t^+, G_t^- \leftarrow 0$                                                $\triangleright$  Reset CUSUM
19:   end if
20: end for

```

- Para distribuciones leptocúrticas (colas pesadas): $\kappa > 3 \implies \ln(\kappa/3) > 0$, el umbral se incrementa proporcionalmente, reduciendo falsas alarmas durante períodos de alta volatilidad no-Gaussiana sin cambio estructural
- El ajuste logarítmico evita crecimiento explosivo del umbral incluso para valores extremos de κ

Este mecanismo es consistente con el Lema de Umbral Adaptativo con Curtosis formalizado en el documento de Teoría.

2.3 Cálculo de Sensibilidades (Malliavin/AAD)

En lugar de perturbar entradas (Diferencias Finitas), computamos la derivada exacta del grafo computacional.

2.3.1 Procesos Tangenciales y Bismut-Elworthy-Li

Para una difusión general $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$, la fórmula del peso de Malliavin debe generalizarse:

$$\partial_{X_0} E[f(X_T)] = E \left[f(X_T) \int_0^T (\sigma^{-1}(X_s) Y_s \nabla b(X_s))^{\top} dW_s \right]$$

donde $Y_t = \nabla_{X_0} X_t$ es el **Primer Proceso de Variación**, que satisface la EDO linealizada:

$$dY_t = \nabla b(X_t) Y_t dt + \sum_{k=1}^d \nabla \sigma_k(X_t) Y_t dW_t^k, \quad Y_0 = I$$

Se requiere resolver el sistema acoplado (X_t, Y_t) o utilizar **Diferenciación Automática** (Forward-Mode AD) para propagar la matriz Jacobiana a lo largo de la trayectoria.

2.3.2 Algoritmo Delta-Malliavin por Monte Carlo

Para calcular $\Delta = \partial_{X_0} E[f(X_T)]$ en el caso simplificado:

$$\Delta \approx E \left[f(X_T) \frac{W_T}{\sigma X_0 T} \right]$$

En grafos de computación (TensorFlow/PyTorch):

1. Definir el grafo computacional del payoff $L = f(X_T)$.
2. Simular caminos forward $X_0 \rightarrow X_1 \cdots \rightarrow X_T$.
3. Ejecutar paso backward (Backprop) para obtener $\nabla_{X_0} L$.
4. Promediar $\nabla_{X_0} L$ sobre M caminos.

Capítulo 3

Solvers Numéricos para Núcleos de Predicción

3.1 Rama A: Proyección de Hilbert y Filtrado de Wiener

3.1.1 Algoritmo Recursivo de Levinson-Durbin

Para resolver el sistema de ecuaciones normales discretas de Yule-Walker (equivalente discreto a Wiener-Hopf) y encontrar el predictor lineal óptimo de orden p , $\hat{X}_{t+1} = \sum_{k=1}^p \phi_k X_{t-k+1}$: **Nota:**

Algorithm 4 Recursión de Levinson-Durbin

```
1: Input: Autocorrelaciones  $R_0, R_1, \dots, R_p$ .
2:  $E_0 \leftarrow R_0$ 
3: for  $k \leftarrow 1$  to  $p$  do
4:    $\lambda_k \leftarrow (R_k - \sum_{j=1}^{k-1} \phi_j^{(k-1)} R_{k-j})/E_{k-1}$ 
5:    $\phi_k^{(k)} \leftarrow \lambda_k$ 
6:   for  $j \leftarrow 1$  to  $k-1$  do
7:      $\phi_j^{(k)} \leftarrow \phi_j^{(k-1)} - \lambda_k \phi_{k-j}^{(k-1)}$ 
8:   end for
9:    $E_k \leftarrow E_{k-1}(1 - \lambda_k^2)$ 
10: end for
11: Output: Coeficientes del filtro  $\phi^{(p)}$ .
```

Para eficiencia $O(N \log N)$ en convoluciones largas, utilizar FFT (Teorema de Convolución) en lugar de recursión temporal directa.

3.2 Rama B: Ecuación HJB y Métodos de Viscosidad

3.2.1 Esquemas de Diferencias Finitas Monótonas

El Teorema de Barles-Souganidis (1991) establece condiciones necesarias para la convergencia a soluciones de viscosidad.

Esquema Numérico 3.1 (Esquema Upwind Generalizado) *Para la ecuación $H(u, u_x, u_{xx}) = 0$, utilizamos:*

$$D_x^+ u_i = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}, \quad D_x^- u_i = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}$$
$$D_{xx} u_i = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

El paso de tiempo se actualiza explícitamente:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \Delta t \cdot H_{num}(u_i^n, D_x^+ u_i^n, D_x^- u_i^n, D_{xx} u_i^n)$$

Condición de Monotonidad: El hamiltoniano numérico $H_{num}(u, p, q, r)$ debe ser no decreciente en u , p , q , y r (dependiendo de la dirección del flujo de características).

3.2.2 Deep Galerkin Method (DGM)

Para alta dimensionalidad ($d > 3$), donde las mallas son inviables ("Maldición de la Dimensionalidad").

Algorithm 5 Entrenamiento de Red Neuronal DGM

- 1: **Input:** Red $f_\theta(t, x)$, PDE $\mathcal{L}u = 0$, dominio Ω , pasos M .
 - 2: **for** $i \leftarrow 1$ **to** M **do**
 - 3: Muestrear puntos aleatorios:
 - 4: $\{t_j, x_j\}_j \sim \text{Unif}([0, T] \times \Omega)$ (Interior)
 - 5: $\{\tau_k, \xi_k\}_k \sim \text{Unif}(\{T\} \times \Omega)$ (Condición Final)
 - 6: $\{\zeta_l, \gamma_l\}_l \sim \text{Unif}([0, T] \times \partial\Omega)$ (Frontera)
 - 7: CalcularLoss:
 - 8: $L_1 = \frac{1}{N} \sum (\partial_t f + \mathcal{L}f(t_j, x_j))^2$
 - 9: $L_2 = \frac{1}{K} \sum (f(T, \xi_k) - g(\xi_k))^2$
 - 10: $L_3 = \frac{1}{L} \sum (f(\zeta_l, \gamma_l) - h(\gamma_l))^2$
 - 11: $L(\theta) = L_1 + L_2 + L_3$
 - 12: Actualizar $\theta \leftarrow \theta - \eta \nabla_\theta L(\theta)$ (Adam/SGD)
 - 13: **end for**
-

3.3 Rama C: Ecuación Integro-Diferencial de Saltos

3.3.1 Algoritmo Delta-Malliavin en Espacios de Poisson

Para procesos con componente de salto J_t , la sensibilidad se basa en la Integración por Partes de Malliavin usando pesos de probabilidad:

$$\partial_{X_0} E[f(X_T)] \approx E \left[f(X_T) \left(\frac{W_T}{\sigma T} + \sum_{i=1}^{N_T} \frac{\partial_X \Delta X_{\tau_i}}{\Delta X_{\tau_i}} \right) \right]$$

La implementación requiere rastrear los tiempos de salto τ_i y sus amplitudes ΔX_{τ_i} durante el paso forward de Monte Carlo.

3.3.2 Esquema IMEX (Implícito-Explícito) para PIDEs

Para resolver la ecuación de Fokker-Planck con término integral $\mathcal{I}[p](x) = \int p(y)\nu(dy)$:

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\Delta t} = \underbrace{\mathcal{L}_{\text{diff}} p_i^{n+1}}_{\text{Implícito}} + \underbrace{\mathcal{I}[p^n]_i}_{\text{Explícito}}$$

La parte difusiva se resuelve invirtiendo una matriz tridiagonal (algoritmo Thomas). La integral de convolución se evalúa explícitamente usando FFT en cada paso de tiempo $O(N \log N)$.

3.4 Rama D: Computación de Signatures

3.4.1 Identidad de Chen y Truncamiento

El tensor de signatura $\mathbf{S}(X)_{0,t}$ hasta nivel M vive en $T^{(M)}(\mathbb{R}^d)$. **Algoritmo Iterativo:** Dado un camino discretizado con incrementos $\Delta X_k = X_{t_{k+1}} - X_{t_k}$: 1. Calcular la signatura del segmento lineal $\mathbf{S}(\Delta X_k) = \exp(\Delta X_k)$ en el álgebra tensorial. - Nivel 1: ΔX_k - Nivel 2: $\frac{1}{2}\Delta X_k \otimes \Delta X_k$ 2. Concatenar usando la propiedad multiplicativa de Chen:

$$\mathbf{S}(X)_{0,t_{k+1}} = \mathbf{S}(X)_{0,t_k} \otimes \mathbf{S}(\Delta X_k)$$

Este producto tensorial se implementa eficientemente explotando la estructura triangular de los tensores.

3.4.2 Log-Signatures

Para reducir la dimensión del vector de características, proyectamos la signatura al álgebra de Lie libre mediante la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH). Librería recomendada: `iisignature` (Python/C++) o `signatory` (PyTorch, diferenciable).

Capítulo 4

Orquestador: Transporte Óptimo Regularizado

4.1 Circuit Breaker de Robustez (Pre-Orquestador)

Antes de ejecutar el pesaje de Wasserstein, se aplica una lógica condicional fuerte basada en el Postulado de Robustez ante Singularidades.

1. **Input:** vector V_s del SIA y pesos actuales w_t .
2. Si $\alpha(t) < \alpha_{\text{threshold}}$ (Rugosidad Crítica) o $d > 1.5$:
 - Forzar $w_D \leftarrow 1.0$ (Signature).
 - Cambiar función de costo Wasserstein a métrica Huber $\rho_\delta(x - y)$.
3. Si **RegimeChangedEvent**:
 - Reiniciar entropía: $w_t \leftarrow \text{Softmax}(\mathbf{0})$ (Uniforme).
4. **Output:** Pesos ajustados para inicializar Sinkhorn.

4.2 Algoritmo de Sinkhorn-Knopp (Espacio Dual)

El algoritmo clásico es numéricamente inestable para pequeños ε . Implementar mediante reducción LogSumExp para variables potenciales duales $f = \varepsilon \log u, g = \varepsilon \log v$.

Algorithm 6 Iteraciones de Sinkhorn Estabilizadas (Log-Domain)

- 1: **Input:** Costo C , marginales a, b (en log: $\alpha = \log a, \beta = \log b$), ε .
 - 2: Inicializar duales $f \leftarrow \mathbf{0}_N, g \leftarrow \mathbf{0}_N$
 - 3: **function** SMIN(M, ϵ)
 - 4: **Return** $-\epsilon \cdot \text{LogSumExp}(-M/\epsilon)$ operando por filas.
 - 5: **end function**
 - 6: **while** no convergencia **do**
 - 7: $f \leftarrow \text{Smin}(C - g^\top, \varepsilon) + \alpha$
 - 8: $g \leftarrow \text{Smin}(C - f, \varepsilon) + \beta$
 - 9: **end while**
 - 10: Distancia Sinkhorn $W_\varepsilon \approx \langle \exp(f/\varepsilon), (K \odot C) \exp(g/\varepsilon) \rangle$
-

4.3 Esquema JKO Proximal

La actualización de pesos $w^{(k+1)} = \operatorname{argmin}_w \dots$ requiere diferenciación a través del bucle de Sinkhorn. **Implementación Diferenciable:** Utilizar librerías de autodiff (JAX/PyTorch) con soporte para `custom_vjp` (Vector-Jacobian Product) en el punto fijo de Sinkhorn, evitando desenrollar el bucle para ahorrar memoria:

$$\partial L / \partial C = P^* \quad (\text{Plan de Transporte Óptimo})$$

Esto permite alimentar el gradiente exacto $\nabla_{W_2} \mathcal{F}$ al optimizador L-BFGS. La actualización de pesos $w^{(k)}$ se implementa como un paso de gradiente implícito en la variedad de Wasserstein.

$$w^{(k+1)} = \operatorname{Prox}_{\tau \mathcal{F}}^{W_2}(w^{(k)})$$

Esto se resuelve anidando un bucle de Sinkhorn dentro de un optimizador L-BFGS o mediante descenso de gradiente proyectado si la regularización entrópica es suficiente para suavizar el paisaje de energía.

Capítulo 5

Arquitectura de Software y Parallelismo

5.1 Patrones de Construcción Orientados a Objetos

El sistema se diseña bajo principios SOLID para garantizar modularidad y extensibilidad de los núcleos predictivos.

5.1.1 Estructura de Clases Sugerida

1. **AbstractStochasticProcess:** Clase base que define la interfaz `simulate(dt, steps)`.
2. **ModelIdentifier (SIA):** Singleton que consume flujos de datos y emite eventos `RegimeChangedEvent`. Utiliza el patrón *Strategy* para intercambiar métodos de estimación (WTMM, DFA).
3. **PredictionKernel:** Interfaz abstracta para los predictores (A, B, C, D).
 - `fit(historical_data)`: Calibración de parámetros.
 - `predict(horizon)`: Generación de trayectorias futuras.
 - `compute_risk()`: Cálculo de VaR/ES.
4. **Orchestrator:** Implementa el patrón *Mediator*. Posee una instancia de `WassersteinOptimizer` y coordina la ponderación de los núcleos.

5.2 Computación Heterogénea y Aceleración

5.2.1 GPU (CUDA/OpenCL)

El entrenamiento de redes neuronales (DGM) y las simulaciones de Monte Carlo masivas se delegan a la GPU.

- **Kernels:** Implementación de generadores de números aleatorios (coalesced memory access) y reducción paralela para el cálculo de esperanzas.
- **Sinkhorn:** Las operaciones matriciales ($K \cdot v$) se realizan mediante librerías BLAS optimizadas (cuBLAS).

Nota de Implementación 5.1 (Optimización de Memoria Compartida para Rama D (Signatures))

El cálculo iterativo de signaturas involucra productos tensoriales de la forma $\mathbf{S}_{0,t} \otimes \Delta X_k$ que operan sobre tensores de alta dimensionalidad (d^M componentes para profundidad M). En arquitecturas GPU, la eficiencia depende críticamente de la jerarquía de memoria.

Estrategia de Gestión de Memoria CUDA:

1. *Shared Memory (SMEM) como Cache explícito:*

- *Dividir el camino discretizado en bloques de B incrementos consecutivos*
- *Cargar cada bloque $\{\Delta X_k, \Delta X_{k+1}, \dots, \Delta X_{k+B-1}\}$ en SMEM al inicio del kernel*
- *Computar la concatenación de signaturas $\bigotimes_{i=k}^{k+B-1} \mathbf{S}(\Delta X_i)$ completamente en SMEM*
- *Escribir el resultado parcial a memoria global solo una vez por bloque*

2. Minimización de Transferencias Global \leftrightarrow Shared:

- *Evitar lecturas redundantes de incrementos ΔX desde global memory*
- *Reutilizar componentes tensoriales ya calculados dentro del bloque*
- *Típicamente $B \in [16, 32]$ para balancear ocupancia y tamaño de SMEM (limitado a 48-96 KB por SM según arquitectura)*

3. Patrón de Acceso Coalesced:

- *Organizar tensores en memoria con stride que permita acceso coalesced por warp*
- *Para tensor de rango M , aplanar índices multi-dimensionales según orden row-major o column-major consistente*

Ejemplo de Ganancia: Para $d = 3$, $M = 4$, $B = 32$ en una GPU V100:

- *Sin optimización SMEM: ~ 15 GB/s de ancho de banda efectivo (limitado por latencia de global memory)*
- *Con bloques en SMEM: ~ 120 GB/s (aprovechando > 10 TB/s de ancho de banda interno de SMEM)*
- *Speedup: $\sim 8\times$ en el kernel de concatenación de signaturas*

5.2.2 FPGA (Field-Programmable Gate Array)

Para aplicaciones de ultra-baja latencia (HFT), la Rama D (Signatures) se sintetiza en hardware reconfigurable.

- **Pipeline:** El cálculo iterativo de la signatura $S_{0,t} \otimes \Delta X$ se implementa como un pipeline sistólico.
- **Fixed-Point Arithmetic:** Se utiliza aritmética de punto fijo para maximizar el throughput, analizando previamente el rango dinámico de los tensores.

Capítulo 6

Consideraciones de Estabilidad Numérica

6.1 Condición CFL (Courant-Friedrichs-Lowy)

Para esquemas de diferencias finitas explícitos en la ecuación HJB (Rama B), el paso de tiempo debe satisfacer:

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2 \max \sigma^2}$$

Si la volatilidad es alta, el paso de tiempo se vuelve prohibitivamente pequeño. En tal caso, se debe cambiar a un esquema **Implícito** o **Semi-Lagrangiano**.

6.2 Estabilidad de la Signatura Logarítmica

El cálculo de log-signatures involucra la serie de Baker-Campbell-Hausdorff, que converge solo si los incrementos son pequeños.

Algorithm 7 Control de Paso Adaptativo para Signatures

```
1: Input: Camino  $X$ , tolerancia  $\epsilon$ .
2: function COMPUTESIG( $X$ )
3:   if  $\|\Delta X\| > \epsilon$  then
4:      $X_{\text{mid}} \leftarrow \text{Interpolate}(X)$  (Punto medio)
5:      $S_1 \leftarrow \text{ComputeSig}(X_{\text{left}})$ 
6:      $S_2 \leftarrow \text{ComputeSig}(X_{\text{right}})$ 
7:     Return  $S_1 \otimes S_2$ 
8:   else
9:     Return  $\exp(\Delta X)$ 
10:  end if
11: end function
```

Capítulo 7

Gobernanza de Metapárametros Heurísticos

La implementación de sistemas estocásticos en hardware finito exige la introducción de parámetros de regularización y truncamiento que no existen en la teoría de probabilidad continua. Este capítulo define la **Taxonomía de Control** para garantizar que la instancia numérica del predictor sea estable, reactiva y causal.

7.1 Taxonomía y Acotación Analítica (Safe Harbors)

Los siguientes límites matemáticos son mandatorios para evitar colapso numérico (NaNs), explosión de gradientes o violación de causalidad.

7.1.1 Parámetros de Discretización y Truncamiento

Definen la resolución del mundo simulado.

- **Paso de Tiempo** (Δt): No es una variable libre. Debe satisfacer la condición de Courant-Friedrichs-Lowy (CFL) generalizada para PIDE estocásticas.

$$\Delta t \leq \frac{C_{\text{safe}} \cdot (\Delta x)^2}{2 \cdot \sup |\sigma(x)|^2 + \sup |b(x)| \cdot \Delta x}$$

Donde $C_{\text{safe}} \approx 0.9$. Esta es una condición CFL mixta (Advectiva-Difusiva), necesaria porque la dinámica posee tanto un término de deriva (advección) regido por $\sup |b(x)|$ como un término de volatilidad (difusión) regido por $\sup |\sigma(x)|^2$. Una violación de este límite inducirá oscilaciones espurias en el solver DGM/IMEX.

- **Profundidad de Signatura** (M): El truncamiento del álgebra tensorial $T((\mathbb{R}^d))$ define la memoria topológica.
 - **Rango Seguro:** $M \in [3, 5]$.
 - **Justificación:** $M < 3$ pierde información de no-conmutatividad (el orden de los eventos).
 $M > 5$ invoca la maldición de la dimensionalidad (el vector de características crece como d^M), saturando la RAM sin ganancia predictiva marginal.

7.1.2 Parámetros de Regularización y Estabilidad

Controlan la suavidad de las soluciones en problemas mal planteados.

- **Entropía de Sinkhorn** (ε): Convierte el transporte de Wasserstein duro en un problema convexo suave.

- **Inicialización:** $\varepsilon \approx 10^{-2}$.
- **Límite Inferior:** $\varepsilon \geq 10^{-4}$ (para float32). Valores menores provocan *underflow* numérico en la exponenciación de la matriz de costos $K = e^{-C/\varepsilon}$.
- **Impacto:** $\varepsilon \rightarrow \infty$ genera una mixtura uniforme (máxima incertidumbre). $\varepsilon \rightarrow 0$ genera un "Winner-takes-all" inestable.
- **Paso Proximal JKO (τ):** Dicta la velocidad de cambio de la distribución de pesos ρ sobre la variedad de Wasserstein.

$$\rho_{k+1} = \text{Prox}_{\tau E}^W(\rho_k)$$

Un τ alto permite adaptación rápida pero ruidosa. Un τ bajo induce memoria inercial excesiva. Se recomienda τ adaptativo inversamente proporcional a la volatilidad del error de predicción.

7.1.3 Umbrales de Decisión (Fronteras Duras)

Convierten probabilidades continuas en acciones discretas (ej. activar Circuit Breaker).

- **Umbral CUSUM (h_t):** No debe ser una constante mágica. Se define dinámicamente incorporando ajuste por curtosis:

$$h_t = k \cdot \sigma_{\text{resid}} \cdot (1 + \ln(\kappa_t/3))$$

donde:

- σ_{resid} es la desviación estándar móvil de los residuos de predicción
- $k \in [3, 5]$ es el factor de sensibilidad base (regla de tres sigma)
- κ_t es la curtosis (cuarto momento estandarizado) calculada sobre una ventana deslizante
- El término $\ln(\kappa_t/3)$ ajusta el umbral en regímenes de colas pesadas, reduciendo falsos positivos durante períodos de alta volatilidad no-Gaussiana

Este umbral adaptativo es consistente con el Lema de Umbral Adaptativo con Curtosis formalizado en el documento de Teoría.

- **Tolerancia de Singularidad (H_{\min}):** Umbral del exponente de Hölder para activar el modo de emergencia (Signatures). Típicamente $H_{\min} \in [0.4, 0.5]$ para detectar regímenes de reversión a la media violentos o crash de mercado.

7.2 Validación Cruzada Causal (Walk-Forward Validation)

Los métodos de validación estática (K-Fold tradicional) están prohibidos pues violan la flecha del tiempo y filtran información futura (Look-ahead bias). El único esquema de validación aceptable es *Rolling Walk-Forward* con ventana deslizante para evitar la dilución de regímenes recientes.

7.3 Meta-Optimización Libre de Derivadas (Optimización Bayesiana)

Dado que muchos hiperparámetros son discretos (profundidad de árbol M , umbrales de decisión) o la superficie de error es ruidosa y no-convexa, el descenso de gradiente es inaplicable.

Se prescribe el uso de **Procesos Gaussianos (GP)** para la búsqueda eficiente del siguiente candidato óptimo θ_{next} :

$$\theta_{\text{next}} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \text{Expected Improvement}(\theta | \mathcal{D}_{\text{obs}})$$

Donde la función objetivo es el retorno negativo de la Validación Walk-Forward ($-\mathcal{E}$). Tras N iteraciones, el óptimo global estimado θ^* será el candidato que minimizó empíricamente el error \mathcal{E} .

Algorithm 8 Protocolo de Validación Walk-Forward Estricto (Rolling Window)

```
1: Input: Stream de datos  $\mathcal{D} = \{x_1, \dots, x_T\}$ , ventana inicial  $L_{\text{train}}$ , horizonte  $H$ , memoria máxima  $W_{\max}$ .
2: Output: Error de Generalización Agregado  $\mathcal{E}$ .
3:  $t \leftarrow L_{\text{train}}$ 
4: errors  $\leftarrow []$ 
5: while  $t + H \leq T$  do
6:    $start\_idx \leftarrow \max(1, t - W_{\max})$ 
7:    $\mathcal{D}_{\text{train}} \leftarrow \{x_{start\_idx}, \dots, x_t\}$   $\triangleright$  Ventana Deslizante (Rolling)
8:    $\mathcal{D}_{\text{test}} \leftarrow \{x_{t+1}, \dots, x_{t+H}\}$   $\triangleright$  Futuro inmediato desconocido
9:   Training: Optimizar Meta-Predictor ( $\theta$ ) en  $\mathcal{D}_{\text{train}}$ 
10:  Inference:  $\hat{y} \leftarrow \text{Predecir}(\mathcal{D}_{\text{test}}, \theta)$ 
11:  Evaluate:  $e_t \leftarrow \text{Metric}(\hat{y}, \mathcal{D}_{\text{test}})$ 
12:  errors.append( $e_t$ )
13:   $t \leftarrow t + H$   $\triangleright$  Avanzar el tiempo paso a paso
14: end while
15: return Media(errors)
```

1. **Prior:** Definir rangos seguros (Sección 7.1) para cada hiperparámetro.
2. **Surrogate Model:** Entrenar un GP sobre pares $(\theta_i, \text{Performance}_i)$ observados hasta el momento.
3. **Acquisition Function:** Seleccionar el siguiente θ_{next} que maximice la probabilidad de mejorar el mejor resultado actual (balanceando exploración vs. explotación).
4. **Evaluación Costosa:** Ejecutar el protocolo Walk-Forward completo solo para θ_{next} .

Este enfoque reduce drásticamente el coste computacional comparado con Grid Search o Random Search en espacios de alta dimensión, convergiendo a la "personalidad" óptima del predictor en pocas iteraciones.