

Titanic Espacial

Exploración del Lanzamiento de Satélites Terrestres

Practica 1

Modelado y simulación

Josué Francisco Soto Cortez

Samuel Salas Meza

Tomás Tavera Mejía

Brian Antonio Oseguera Mendoza

ENES Unidad Morelia, UNAM

Introducción

Para esta práctica decidimos hacer una simulación de un cohete que despegue de la superficie de la Tierra de tal manera que la orbite. A continuación presentamos el contexto sobre el cual se realiza esa simulación:

Reconocemos aquí sólo dos cuerpos relevantes: la Tierra y el cohete. Cada objeto tiene una masa, una posición y una velocidad. De la tierra ignoramos su atmósfera y establecemos su masa ($6e24\text{kg}$) en el origen con un vector de velocidad $[0,0,0]$.

Del cohete, usamos la masa de un Ariane 5 lleno de combustible ($75e4\text{kg}$) e ignoramos la pérdida de masa al hacer combustión. Su posición será sobre la superficie de la tierra en el eje Y $[0,6371000,0]$ y variamos su vector de velocidad inicial para obtener diferentes órbitas. Es importante reconocer que aquí se obtiene una velocidad instantánea, no se parte desde el reposo con una aceleración.

Los dos cuerpos interactúan con cambios en sus vectores de velocidad a causa de la gravedad. Para hacer esa actualización se tomará una medición discreta cada dt tiempo con la ecuación:

$$V = \frac{GxMxdt}{r^3}x\hat{U}$$

Entonces cada dt tiempo, durante cierta cantidad de T tiempo hallaremos la distancia entre los puntos con la norma del vector dado por la diferencia entre las posiciones. Así obtenemos r . Después multiplicaremos cada componente (x,y,z) en U (la dirección del vector de cambio) por su vector de dirección de dirección de fuerza. Para terminar actualizaremos las velocidades que lleva cada objeto y las posiciones con el vector que obtuvimos.

Los resultados se presentarán en gráficas tridimensionales. Se colocará una esfera azul denotando la tierra y puntos verdes que marcan la trayectoria del cohete en los diagramas.

Objetivos

Nuestro objetivo es obtener una órbita lo más circular posible con la Tierra en el centro. La motivación de ese modelo es que presenta la menor variabilidad en cuanto a la distancia a nuestro planeta desde cualquier punto de la órbita. Es decir que del centro de la tierra hay un radio. Así se puede tener una constancia en el tiempo que tardan en llegar señales y es probable que los cálculos para comunicarse con el satélite sean reducidos en un escenario hipotético.

Metodología

Para encontrar la trayectoria que queremos en el modelo que describimos todas las condiciones iniciales, excepto el vector de velocidad del cohete, están fijas. De este

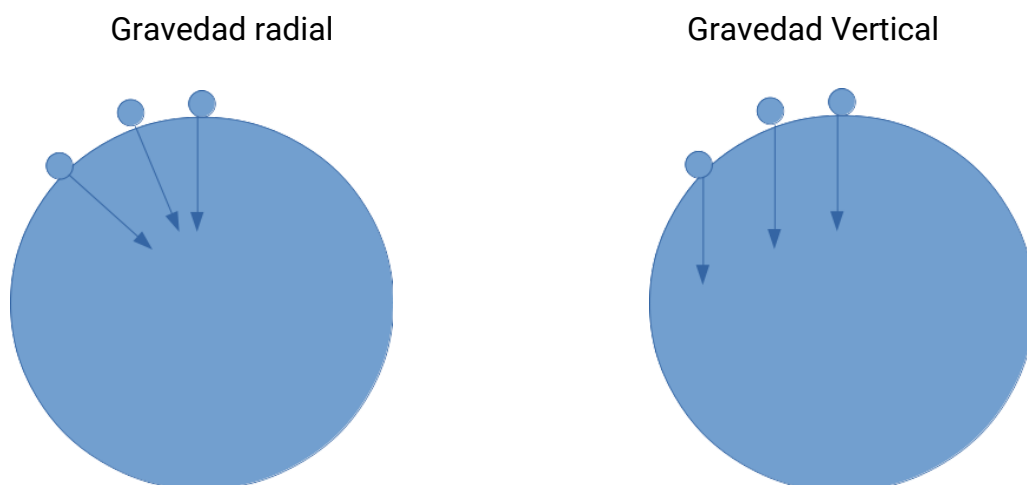
vector es relevante la magnitud y el ángulo de lanzamiento. Nuestra estrategia es tomar diferentes combinaciones de valores para obtener diferentes trayectorias y así aprender qué condiciones propician el modelo que estamos buscando. Afortunadamente existen algunos límites dados por la naturaleza del problema.

El primero es que la fuerza gravitatoria que ejerce un cuerpo sobre otro depende de la distancia que hay entre los cuerpos. Como la Tierra es esférica, la distancia del centro a cualquier punto de la superficie es constante. Por lo tanto no importa desde qué punto de la superficie se lance el objeto. Entonces podemos seleccionar un punto y hacer todas las pruebas desde ahí. Elegimos el $[0,6371000,0]$.

La segunda es que existe una infinidad de vectores con un ángulo W entre el vector de velocidad y la superficie de la Tierra, con origen en la posición P que fijamos. Encontramos que las trayectorias que se producen son rotaciones de las otras; para nuestros fines son equivalentes. Entonces tomaremos sólo una. Esto limita el lanzamiento de velocidad inicial a dos ejes $[X,Y]$ y el ángulo desde cero hasta noventa.

La tercera es la velocidad de escape. Si se lanza un cohete verticalmente a 11200 m/s escapará de la Tierra. Entonces tenemos un límite superior de velocidad inicial.

La cuarta es el límite inferior de la velocidad. Una manera de frasear este problema es: qué tan rápido debería ir un objeto para quedarse en órbita al raz de la tierra si se le aplica una fuerza perpendicular al vector de fuerza de gravedad. Su solución está dada probablemente por una ecuación diferencial. Nosotros decidimos hacer una aproximación y ajustarla con la simulación. Para explicarlo establecemos las siguientes ideas contextuales:



Aunque claramente la gravedad vertical no refleja exactamente el comportamiento de los cuerpos de masa, en distancias relativamente cortas los vectores de gravedad son lo suficientemente parecidos para poder hacer la aproximación.

Sabemos que un objeto en un segundo se desplaza $D=at^2/2$. Entonces para $a=gravedad$ tenemos que: $D=1^2 \times 9.807/2 \rightarrow 4.9035$

Ahora podemos hacer una aproximación y comprobarla con el modelo!

Para calcularla hacemos este método:

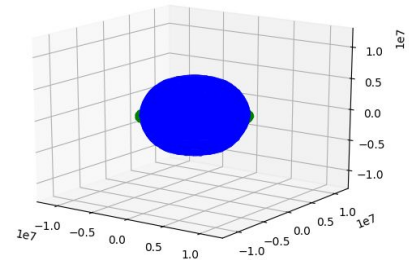
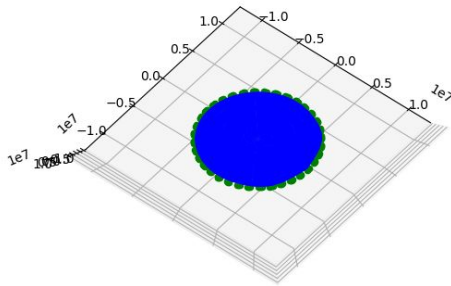
1. Sabemos que la ecuación de un círculo es $(x-k)^2+(y-h)^2=r^2$
2. Entonces si colocamos el centro del círculo en las coordenadas $[0,6371000]$, podemos encontrar el punto en X para una $Y= 4.9035$
3. Así sólo tenemos que sustituir en la ecuación:
$$x^2+(4.9035-6371000)^2=(6371000)^2$$
4. Resulta ser que $x=7904.4527295142325 \rightarrow 7904.452 \text{ m/s}$ es nuestra velocidad mínima para hacer una órbita al raz de la tierra

Encontramos algo similar en el modelo:

Haciendo un barrido desde 7904 aumentando un m/s cada paso. El valor real debe de ser aproximadamente 7977 m/s a 0 grados porque ahí está la primera una misión exitosa:

```
Q samuel@Friendly: ~/n-body
El cohete chocó en 46801.0 segundos
Grados: 0 Velocidad inicial: 7968 m/s
Velocidad en x: 7968.0 Velocidad en y: 0.0
El cohete chocó en 41801.0 segundos
Grados: 0 Velocidad inicial: 7961 m/s
Velocidad en x: 7961.0 Velocidad en y: 0.0
El cohete chocó en 41801.0 segundos
Grados: 0 Velocidad inicial: 7962 m/s
Velocidad en x: 7962.0 Velocidad en y: 0.0
El cohete chocó en 41801.0 segundos
Grados: 0 Velocidad inicial: 7963 m/s
Velocidad en x: 7963.0 Velocidad en y: 0.0
El cohete chocó en 41801.0 segundos
Grados: 0 Velocidad inicial: 7964 m/s
Velocidad en x: 7964.0 Velocidad en y: 0.0
El cohete chocó en 41801.0 segundos
Grados: 0 Velocidad inicial: 7965 m/s
Velocidad en x: 7965.0 Velocidad en y: 0.0
El cohete chocó en 41801.0 segundos
Grados: 0 Velocidad inicial: 7966 m/s
Velocidad en x: 7966.0 Velocidad en y: 0.0
El cohete chocó en 41801.0 segundos
Grados: 0 Velocidad inicial: 7967 m/s
Velocidad en x: 7967.0 Velocidad en y: 0.0
El cohete chocó en 41801.0 segundos
Grados: 0 Velocidad inicial: 7968 m/s
Velocidad en x: 7968.0 Velocidad en y: 0.0
El cohete chocó en 41801.0 segundos
Grados: 0 Velocidad inicial: 7969 m/s
Velocidad en x: 7969.0 Velocidad en y: 0.0
El cohete chocó en 41801.0 segundos
Grados: 0 Velocidad inicial: 7970 m/s
Velocidad en x: 7970.0 Velocidad en y: 0.0
El cohete chocó en 36801.0 segundos
Grados: 0 Velocidad inicial: 7971 m/s
Velocidad en x: 7971.0 Velocidad en y: 0.0
El cohete chocó en 36801.0 segundos
Grados: 0 Velocidad inicial: 7972 m/s
Velocidad en x: 7972.0 Velocidad en y: 0.0
El cohete chocó en 36801.0 segundos
Grados: 0 Velocidad inicial: 7973 m/s
Velocidad en x: 7973.0 Velocidad en y: 0.0
El cohete chocó en 36801.0 segundos
Grados: 0 Velocidad inicial: 7974 m/s
Velocidad en x: 7974.0 Velocidad en y: 0.0
El cohete chocó en 36801.0 segundos
Grados: 0 Velocidad inicial: 7975 m/s
Velocidad en x: 7975.0 Velocidad en y: 0.0
El cohete chocó en 36801.0 segundos
Grados: 0 Velocidad inicial: 7976 m/s
Velocidad en x: 7976.0 Velocidad en y: 0.0
El cohete chocó en 36801.0 segundos
Grados: 0 Velocidad inicial: 7977 m/s
Velocidad en x: 7977.0 Velocidad en y: 0.0
157
Misión Exitosa!
```

Estas son las trayectorias que sigue el cohete vistas desde arriba y desde un lado.



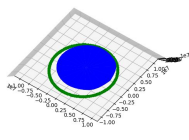
Finalmente, si una órbita choca contra la Tierra a X grados, chocará para Y grados siempre y cuando $X \leq Y \leq 90$.

Dentro de estos límites podemos iterar para encontrar nuestra órbita!

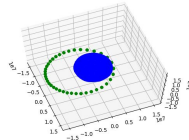
Elegimos tomar saltos de 500 m/s desde su límite inferior y con saltos de 3 grados desde 0 hasta 90, ignorando los resultados una vez choque el cohete por primera vez.

Resultados

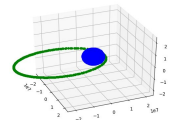
Con esta estrategia encontramos que la trayectoria que seguían los cohetes se elonga entre más aumenta la fuerza, pero no se acercan más a nuestra trayectoria deseada.



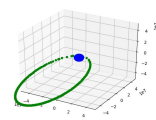
8477 m/s 0°



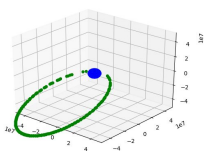
9477 m/s 0°



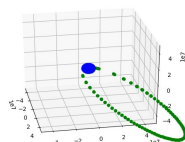
10477 m/s 0°



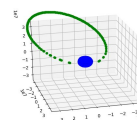
10977 m/s 3°



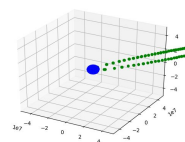
10977 m/s 9°



11000 m/s 51°



10977 m/s 0°



11000 m/s 73°

Aumentar el ángulo no parece tener una incidencia en una trayectoria más circular. Las órbitas más lentas prueban ser inútiles con cualquier grado de inclinación. El barrido total propuesto muestra estos resultados:

```
(base) samuel@frenabv: ~/n-body$ python3 n-body.py
Grados: 0 Velocidad inicial: 7977 m/s
Velocidad en x: 7977.0 Velocidad en y: 0.0
Mision Exitosa!
Grados: 3 Velocidad inicial: 7977 m/s
Velocidad en x: 7966.0677987372355 Velocidad en y: 417.4839229499629
El cohete chocó
Grados: 0 Velocidad inicial: 8477 m/s
Velocidad en x: 8477.0 Velocidad en y: 0.0
Mision Exitosa!
Grados: 3 Velocidad inicial: 8477 m/s
Velocidad en x: 8465.382566114522 Velocidad en y: 443.65190107143485
El cohete chocó
Grados: 0 Velocidad inicial: 8977 m/s
Velocidad en x: 8977.0 Velocidad en y: 0.0
Mision Exitosa!
Grados: 3 Velocidad inicial: 8977 m/s
Velocidad en x: 8964.69733349181 Velocidad en y: 469.81987919290674
El cohete chocó
Grados: 0 Velocidad inicial: 9477 m/s
Velocidad en x: 9477.0 Velocidad en y: 0.0
Mision Exitosa!
Grados: 3 Velocidad inicial: 9477 m/s
Velocidad en x: 9464.012100869097 Velocidad en y: 495.98785731437863
El cohete chocó
Grados: 0 Velocidad inicial: 9977 m/s
Velocidad en x: 9977.0 Velocidad en y: 0.0
Mision Exitosa!
Grados: 3 Velocidad inicial: 9977 m/s
Velocidad en x: 9963.326868246384 Velocidad en y: 522.1558354358506
El cohete chocó
Grados: 0 Velocidad inicial: 10477 m/s
Velocidad en x: 10477.0 Velocidad en y: 0.0
Mision Exitosa!
Grados: 3 Velocidad inicial: 10477 m/s
Velocidad en x: 10462.64163562367 Velocidad en y: 548.3238135573225
El cohete chocó
Grados: 0 Velocidad inicial: 10977 m/s
Velocidad en x: 10977.0 Velocidad en y: 0.0
Mision Exitosa!
Grados: 3 Velocidad inicial: 10977 m/s
Velocidad en x: 10961.956403000957 Velocidad en y: 574.4917916787944
Mision Exitosa!
Grados: 6 Velocidad inicial: 10977 m/s
Velocidad en x: 10916.866845457536 Velocidad en y: 1147.408941289032
Mision Exitosa!
Grados: 9 Velocidad inicial: 10977 m/s
Velocidad en x: 10841.854914712827 Velocidad en y: 1717.1811227466142
Mision Exitosa!
Grados: 12 Velocidad inicial: 10977 m/s
Velocidad en x: 10737.126213254985 Velocidad en y: 2282.246630106544
El cohete chocó
(base) samuel@frenabv: ~/n-body$
```

Y este es un ejemplo de barrido a bajas velocidades:

```
(base) samuel@frenabv: ~/n-body$ python3 n-body.py
Grados: 0 Velocidad inicial: 9000 m/s
Velocidad en x: 9000.0 Velocidad en y: 0.0
Mision Exitosa!
Grados: 10 Velocidad inicial: 9000 m/s
Velocidad en x: 8863.269777109872 Velocidad en y: 1562.833599002373
El cohete chocó
Grados: 20 Velocidad inicial: 9000 m/s
Velocidad en x: 8457.233587073177 Velocidad en y: 3078.1812899310185
El cohete chocó
Grados: 30 Velocidad inicial: 9000 m/s
Velocidad en x: 7794.2286340599485 Velocidad en y: 4499.999999999999
El cohete chocó
Grados: 40 Velocidad inicial: 9000 m/s
Velocidad en x: 6894.3999880708025 Velocidad en y: 5785.088487178853
El cohete chocó
Grados: 50 Velocidad inicial: 9000 m/s
Velocidad en x: 5785.088487178854 Velocidad en y: 6894.3999880708025
El cohete chocó
Grados: 60 Velocidad inicial: 9000 m/s
Velocidad en x: 4500.000000000001 Velocidad en y: 7794.228634059948
El cohete chocó
Grados: 70 Velocidad inicial: 9000 m/s
Velocidad en x: 3078.1812899310194 Velocidad en y: 8457.233587073175
El cohete chocó
Grados: 80 Velocidad inicial: 9000 m/s
Velocidad en x: 1562.8335990023738 Velocidad en y: 8863.269777109872
El cohete chocó
(base) samuel@frenabv: ~/n-body$
```

Cuando aumentamos la velocidad, obtenemos comportamiento extraño. Algunos ángulos chocan y otros no. Hecho que contradice nuestra lógica inicial:

```
Grados: 6 Velocidad Inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 10939.740849051006 Velocidad en y: 1149.813095944188
Mision Exitosa!
Grados: 9 Velocidad Inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 10864.571746546515 Velocidad en y: 1729.7791154425395
El cohete chocó
Grados: 12 Velocidad Inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 10759.623608071863 Velocidad en y: 2287.0285989953522
El cohete chocó
Grados: 15 Velocidad Inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 10625.184089177951 Velocidad en y: 2847.089496127728
El cohete chocó
Grados: 18 Velocidad Inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 10461.62167924669 Velocidad en y: 3399.1869381244214
Mision Exitosa!
Grados: 21 Velocidad Inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 10269.384691469219 Velocidad en y: 3942.047444998393
El cohete chocó
Grados: 24 Velocidad Inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 10049.08083466861 Velocidad en y: 4474.103973833801
Mision Exitosa!
Grados: 27 Velocidad Inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 9801.071766872047 Velocidad en y: 4993.895497135014
Mision Exitosa!
Grados: 30 Velocidad Inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 9526.279441628825 Velocidad en y: 5499.999999999999
El cohete chocó
Grados: 33 Velocidad Inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 9225.376247399665 Velocidad en y: 5991.029385165298
El cohete chocó
Grados: 36 Velocidad Inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 8899.186938124421 Velocidad en y: 6465.637775217205
Mision Exitosa!
Grados: 39 Velocidad Inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 8548.605570826679 Velocidad en y: 6922.524301548211
El cohete chocó
Grados: 42 Velocidad Inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 8174.593080251337 Velocidad en y: 7360.43669994744
El cohete chocó
Grados: 45 Velocidad Inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 7778.174593052024 Velocidad en y: 7778.174593052022
El cohete chocó
Grados: 48 Velocidad Inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 7360.43669994744 Velocidad en y: 8174.593080251336
El cohete chocó
Grados: 51 Velocidad Inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 6922.524301548213 Velocidad en y: 8548.605570826679
Mision Exitosa!
Grados: 54 Velocidad Inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 6465.637775217205 Velocidad en y: 8899.186938124421
Mision Exitosa!
Grados: 57 Velocidad Inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 5991.0293851653 Velocidad en y: 9225.376247399663
Mision Exitosa!
Grados: 60 Velocidad Inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 5500.000000000001 Velocidad en y: 9526.279441628825
```

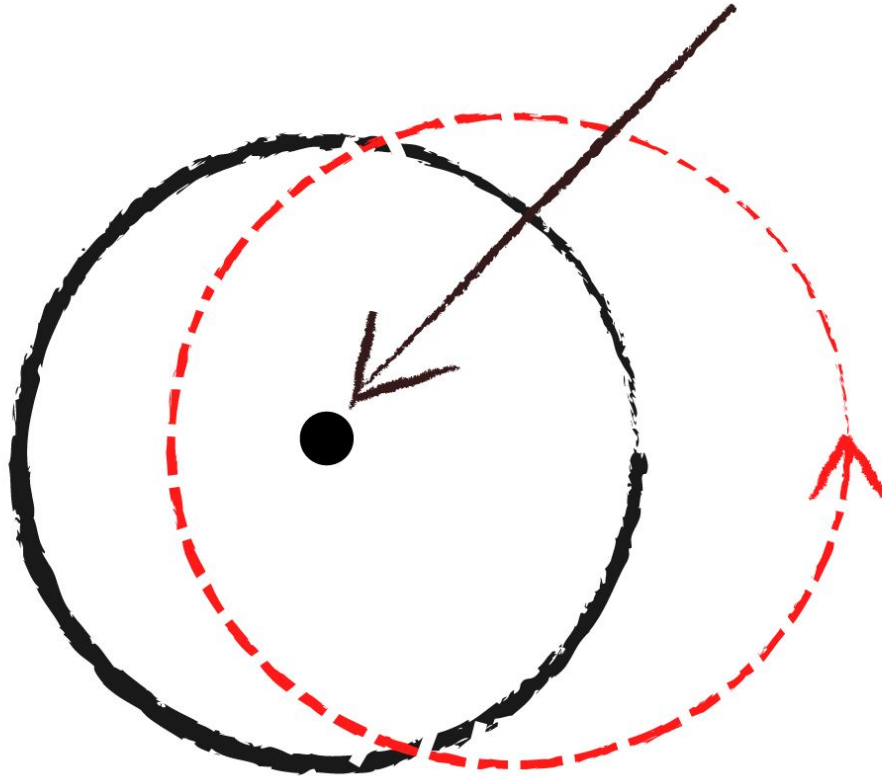
Conclusiones

Las órbitas de un lanzamiento desde la Tierra parecen no poder generar un sistema como el que originalmente habíamos planteado. Nosotros atribuimos este comportamiento al hecho de que el cohete se lanza desde la Tierra con únicamente una perturbación externa, entonces la fuerza que adquiere durante el regreso es mitigada por la fuerza de mayor magnitud que se le aplica cuando está extremadamente cerca al centro de gravedad. Pensamos que es un comportamiento similar al de un péndulo, que no puede aumentar su altura máxima después de su primer ciclo a menos de que una fuerza, diferente de la gravedad, actúe sobre el. En este caso el cohete se encuentra en balance igual que un péndulo y de la misma manera, no puede orbitar como buscábamos porque no hay fuerza que lo empuje en esa dirección. Así el vector de inicio desplazado unos cuantos metros tiene comportamiento asintótico.

En cuanto a las trayectorias creemos que todas las que funcionaron y que no tenían ángulo 0 están erróneamente admitidas como misiones completadas. El comportamiento en la vida real es más técnico que lo que describimos aquí, pero para fines prácticos, imaginamos a la Tierra con un centro de gravedad puntual. Entonces, siguiendo la lógica del ejercicio anterior creemos que la trayectoria del cohete, si no se pierde energía **debería de pasar en la misma dirección y posición del vector inicial**:

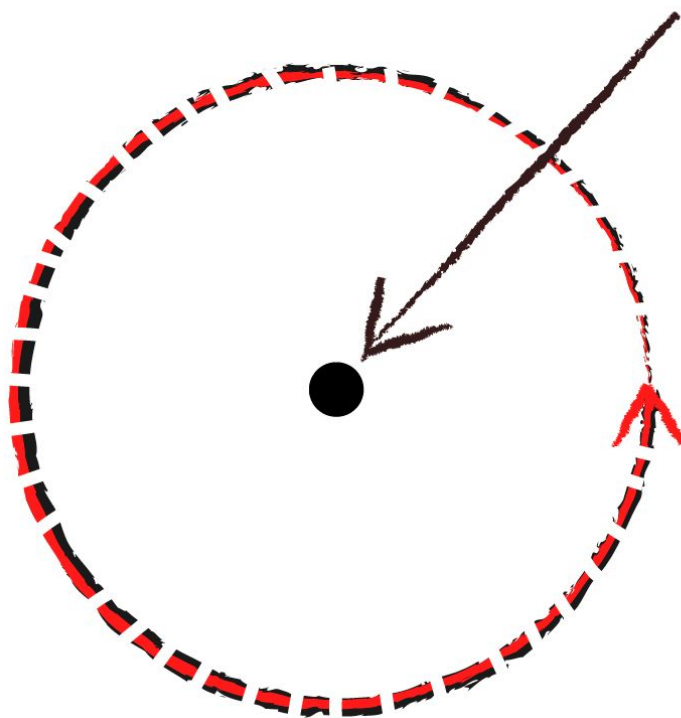
Cohete 1

Centro de gravedad



Cohete 2

Centro de gravedad



Entonces, ningún cohete con un ángulo debería de ser exitoso.

Pero el modelo las está aceptando! Eso puede estar pasando porque, para no saturar el plot, guardamos una medición cada mil pasos. Además hacemos el plot de una fracción de esos puntos. Entonces, como cuando está más cerca de la Tierra va más rápido, los puntos donde el cohete choca son más escasos. Por mero azar, estos puntos quedan descartados de las muestras y no los encuentra el modelo al momento de evaluar si en la trayectoria hubieron choques. Es por eso que probablemente está aceptandolos el modelo y lo podemos poner a prueba tomando más puntos de la trayectoria:

Para 11000 con 24 grados guardando todos los puntos por ejemplo:

```
Grados: 24 Velocidad inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 10049.00003406861 Velocidad en y: 4474.103073833801
El cohete chocó
```

Y ahora con un ángulo más tenue.

```
Grados: 3 Velocidad inicial: 11000 m/s
Velocidad en x: 10984.924882300313 Velocidad en y: 575.6955186723821
El cohete chocó
```

También choca!

Esta información soporta a nuestra conclusión. Investigando un poco, encontramos que el protocolo para poner en órbita a un satélite es primero propulsarlos verticalmente y una vez ganada la altura, darles velocidad horizontal para que tomen órbita. Aunque eso puede deberse a otras razones, puede ser explicado por nuestros resultados.

Otros experimentos extraños:

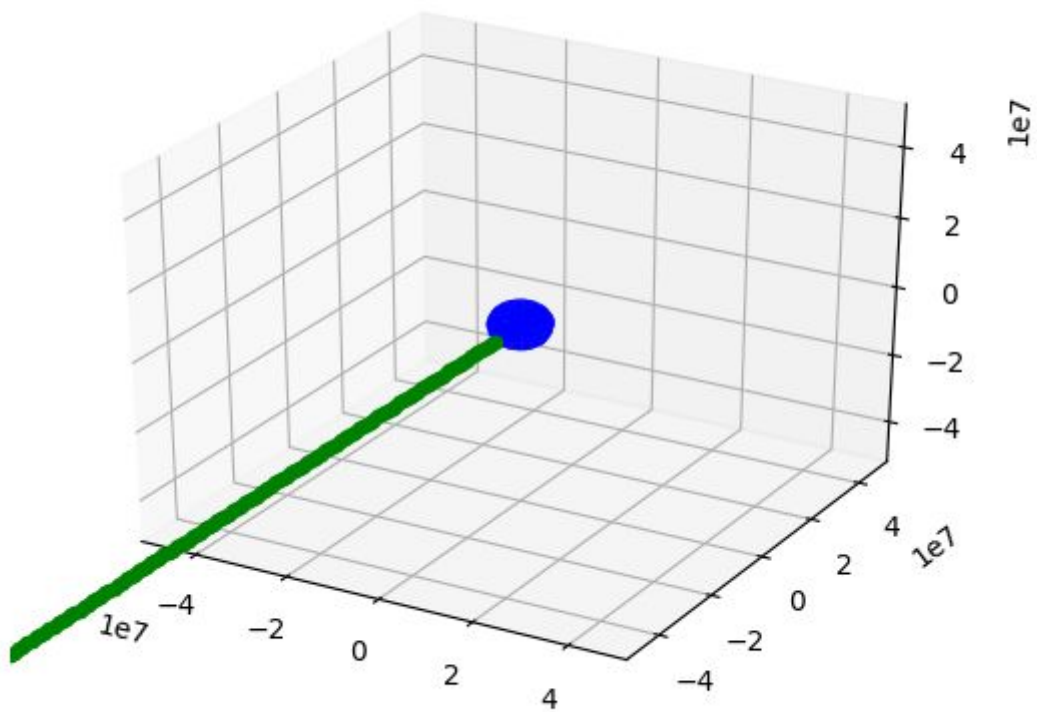
Aquí tiramos un objeto como proceso de rutina, así comprobamos que el modelo sea fiable y que tarda en caer 1 segundo desde 4.9035m de altura.

```
Grados: 0 Velocidad inicial: 0 m/s
Velocidad en x: 0.0 Velocidad en y: 0.0
El cohete chocó en 1.0 segundos
```

Todo es normal hasta ahora, pero si mostramos el resto de la simulación encontramos que la velocidad toma un comportamiento extraño:

[illegible]

Y como la velocidad queda constante en esa misma dirección, la partícula sale disparada:



El resultado de este comportamiento queda inconcluso para esta práctica. Es comportamiento que atribuimos a algún error en la simulación.

Referencias:

Victor de la Luz. (2019, 11 octubre). Implementation of n-body system. Recuperado 20 octubre, 2019, de <https://github.com/itztli/n-body>

Cohete espacial. (2019, 13 junio). Recuperado 22 octubre, 2019, de https://es.wikipedia.org/wiki/Cohete_espacial

Brown Gary, & Harris William. (s.f.). How Satellites Work. Recuperado 22 octubre, 2019, de <https://science.howstuffworks.com/satellite5.htm>