

# Zadania z ćwiczeń dot. drugiej części PAA

Emilian Zawrotny

## Zadanie 1

Dany jest graf kubiczny  $G$ . Ustal w jakim czasie można stwierdzić podaną własność. Każdy wiersz jest oceniany z osobna, pod warunkiem, a punkty przyznane jeśli nie ma w nim błędnych odpowiedzi.

Twierdzenie	Złożoność	Twierdzenie	Złożoność	Punkty (max 4)
$\chi(G) \leq 1$		$\chi(G) \geq 1$		
$\chi(G) \leq 2$		$\chi(G) \geq 2$		
$\chi(G) \leq 3$		$\chi(G) \geq 3$		
$\chi(G) \leq 4$		$\chi(G) \geq 4$		

## Rozwiązanie

Twierdzenie Brooks'a mówi nam, że  $\chi(G) \leq \Delta$ , chyba że  $G$  jest grafem pełnym (kliką) bądź nieparzystym cyklem, wówczas  $\chi(G) = \Delta + 1$ . A dla naszego grafu  $G$ :  $\Delta = 3$ .

Rozważmy specjalne przypadki grafów kubicznych: - Graf kuratowskiego ( $K_{3,3}$ ) -  $\chi(K_{3,3}) = 2$  - Graf  $K_4$  -  $\chi(K_4) = 4$

## Rozwiązanie każdego z twierdzeń

- $\chi(G) \leq 1$  - Trywialne, dla żadnego grafu kubicznego nie zachodzi taka własność - stąd  $O(1)$
- $\chi(G) \geq 1$  - Trywialne, zachodzi dla każdego grafu kubicznego -  $O(1)$
- $\chi(G) \geq 2$  - Wystarczy sprawdzić,  $G$  jest grafem dwudzielnym, możemy to zrobić w czasie  $O(n)$
- $\chi(G) \geq 2$  - Trywialne, zachodzi dla każdego grafu kubicznego
- $\chi(G) \leq 3$  - Wystarczy sprawdzić, czy  $G$  nie jest kliką  $K_4$  (sprawdzając czy  $n < 4$ ) -  $O(1)$
- $\chi(G) \geq 3$  - Wystarczy sprawdzić, czy graf nie jest dwudzielnym -  $O(n)$
- $\chi(G) \leq 4$  - Trywialne, zawsze prawda (na mocy twierdzenia Brooksa)
- $\chi(G) \geq 4$  - Prawda tylko i wyłącznie, gdy  $G$  jest kliką  $K_4$  -  $O(1)$

Twierdzenie	Złożoność	Twierdzenie	Złożoność
$\chi(G) \leq 1$	$O(1)$	$\chi(G) \geq 1$	$O(1)$
$\chi(G) \leq 2$	$O(n)$	$\chi(G) \geq 2$	$O(1)$
$\chi(G) \leq 3$	$O(1)$	$\chi(G) \geq 3$	$O(n)$
$\chi(G) \leq 4$	$O(1)$	$\chi(G) \geq 4$	$O(1)$

## Zadanie 2

Dla pewnego problemu teoriografowego istnieje algorytm o złożoności obliczeniowej  $O(n\Delta 2^\Delta)$ . Dla jakich grafów algorytm ten będzie wykładniczy? A dla jakich wielomianowy?

## Rozwiązanie

**Przykładowe grafy dla których algorytm jest wielomianowy:**

- Ścieżki  $P_n$  i cykle  $C_n$  (Bo  $\Delta = 2 = O(1) \implies n\Delta 2^\Delta = O(n)$ )
- Grafy kubiczne (Bo  $\Delta = 3 = O(1) \implies n\Delta 2^\Delta = O(n)$ )

**Przykładowe grafy, dla których algorytm jest wykładniczy:**

- Gwiazdy  $S_k$  (Bo  $\Delta = k \implies n\Delta 2^\Delta = O(kn \cdot 2^k)$ )
- Kliki  $K_n$  (Bo  $\Delta = n - 1 \implies n\Delta 2^\Delta = O(n^2 \cdot 2^n)$ )

## Notatka do zadania

Moim zdaniem to zadanie tylko sformułowane w inny sposób może pojawić się na kolokwium (w kontekście przypisywania klasy złożoności do problemu).