Executive Master Intelligence Artificielle et Science des Données

Algèbre linéaire

Rédigé par Alexandre Afgoustidis et adapté par Guillaume Legendre et Benjamin Melinand

(version du 4 juillet 2022)

Rédigé par Alexandre Afgoustidis et adapté par Guillaume Legendre et Benjamin Melinand
CEREMADE, Université Paris-Dauphine, 75016 Paris, France.
E-mail : `alegendre@ceremade.dauphine.fr, melinand@ceremade.dauphine.fr`

Ce polycopié a été créé avec LaTeX; pour la mise en forme, nous avons adapté des fichiers de style fournis par la Société Mathématique de France, notamment la classe `smfbook`.

ALGÈBRE LINÉAIRE

Rédigé par Alexandre Afgoustidis et adapté par Guillaume Legendre et Benjamin Melinand

TABLE DES MATIÈRES

PRÉAMBULE

Ces notes ont été rédigées pour accompagner le cours d'algèbre linéaire dispensé dans l'Executive Master Intelligence Artificielle et Sciences des Données à l'université Paris-Dauphine. Elles sont en majeure partie extraites du cours d'Algèbre linéaire 2 d'Alexandre Afgoustidis, dont elles reprennent la structure.

Bien que ce support de cours contienne plus que ce qui a été vu lors des cours magistraux, notamment en termes d'exemples et de remarques, les démonstrations des résultats données restent absentes. Le lecteur intéressé souhaitant approfondir les notions abordées est encouragé à consulter le polycopié précédemment mentionné.

CHAPITRE 1

ESPACES VECTORIELS

1. La structure d'espace vectoriel

1.1. Groupes abéliens. —

On souhaite travailler avec des structures dans lesquelles il est possible de parler de la « somme » de deux éléments.

Soit E un ensemble. Une *loi de composition interne sur E* est une application

$$\begin{aligned} E \times E &\to E \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

qui permet de produire un élément de E à partir de deux éléments de E.

On dit que « $(E, +)$ *est un groupe abélien* » lorsque E est un ensemble et $+$ une loi de composition interne sur E vérifiant les quatre propriétés suivantes.

$$\begin{aligned} &\text{Associativité :} && \textit{pour tout } (x,y,z) \in E^3, \text{ on a } (x+y)+z = x+(y+z)\ ; && (1.1) \\ &\text{Commutativité :} && \textit{pour tout } (x,y) \in E^2, \text{ on a } x+y = y+x\ ; && (1.2) \\ &\text{Existence d'un neutre :} && \textit{il existe un élément } \mathbf{0}_E \textit{ de } E \textit{ vérifiant : } \forall x \in E,\ x + \mathbf{0}_E = x\ ; && (1.3) \\ &\text{Existence des opposés :} && \textit{pour tout } x \in E,\ \textit{il existe un élément } \tilde{x} \in E \textit{ vérifiant : } x + \tilde{x} = \mathbf{0}_E. && (1.4) \end{aligned}$$

Si x est un élément de E et si $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$ sont deux éléments de E vérifiant $x + \tilde{x}_1 = \mathbf{0}_E$ et $x + \tilde{x}_2 = \mathbf{0}_E$, alors

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_1 + \mathbf{0}_E = \tilde{x}_1 + (x + \tilde{x}_2) = (\tilde{x}_1 + x) + \tilde{x}_2 = \mathbf{0}_E + \tilde{x}_2 = \tilde{x}_2,$$

si bien que l'élément $\tilde{x}$ mentionné dans (1.4) est uniquement déterminé par x. On l'appelle *l'opposé* de x et on le note $-x$.

Si x et y sont deux éléments de E, on peut ainsi toujours parler de l'élément $x - y \overset{\text{déf}}{=} x + (-y)$: dans un groupe abélien, toutes les soustractions sont possibles.

1.2. Scalaires ; lois externes. —

Fixons un corps $\mathbb{R}$. Dans la suite, $\mathbb{R}$ sera soit $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels, soit plus rarement $\mathbb{C}$ lensemble des nombres complexes.

Partant d'un ensemble E muni d'une loi de composition interne $+$, on souhaite pouvoir parler non seulement de la somme de deux éléments de E, mais aussi du produit $\lambda \cdot x$ lorsque λ est un nombre dans $\mathbb{R}$ et x un élément de E afin de faire des *changements d'échelle*. Les *nombres* de $\mathbb{R}$ seront ainsi appelés *scalaires* dans ce contexte. Tout ceca motive la définition suivante.

Une *loi de multiplication des éléments de E par les scalaires de $\mathbb{R}$* (on dit aussi une « loi externe pour E de corps de base $\mathbb{R}$ ») est une application

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times E &\to E \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda \cdot x \end{aligned}$$

qui, partant d'un scalaire de $\mathbb{R}$ et d'un élément de E, « fabrique » donc un élément de E.

On dit que « la loi $\cdot$ est *compatible avec* $+$ » lorsqu'elle vérifie les quatre propriétés suivantes :

$$\text{Multiplication par 1 : } \textit{pour tout } a \text{ de } E,\ 1 \cdot a = a\ ; \tag{1.5}$$

$$\text{Changements successifs : } \textit{pour tout } (\lambda, \mu) \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ et tout } x \text{ de } E,\ (\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)\ ; \tag{1.6}$$

$$\text{Première distributivité : } \textit{pour tout } \text{ de } \mathbb{R} \text{ et tout } (x, y) \text{ de } E^2,\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y\ ; \tag{1.7}$$

$$\text{Seconde distributivité : } \textit{pour tout } (\lambda, \mu) \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ et tout } x \text{ de } E,\ (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x. \tag{1.8}$$

1.3. Définition des espaces vectoriels. —

Définition 1.1 – Espace vectoriel sur un corps $\mathbb{R}$

Un $\mathbb{R}$-espace vectoriel est un triplet $(E, +, \cdot)$, où

E est un ensemble,
$+$ est une loi de composition interne sur E,
$\cdot$ est une loi de multiplication des éléments de E par les scalaires de $\mathbb{R}$,

qui vérifient :

$(E, +)$ est un groupe abélien.
La loi externe $\cdot$ est compatible avec $+$.

On notera que l'ensemble E contient l'élément neutre $\mathbf{0}_E$ de la loi $+$: un espace vectoriel ne peut jamais être vide.

1.3.1. *Exemples de règles de calcul.* —

Lemme 1.2 – Règles de calcul

Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

(a) Pour tout x de E, on a : $0 \cdot x = \mathbf{0}_E$.
(b) Pour tout λ de $\mathbb{R}$, on a : $\lambda \cdot \mathbf{0}_E = \mathbf{0}_E$.
(c) Pour tout (λ, x) de $\mathbb{R} \times E$, $\lambda \cdot x = \mathbf{0}_E \iff (\lambda = 0 \text{ ou } x = \mathbf{0}_E)$.
(d) Pour tout x de E, on a : $(-1) \cdot x = (-x)$.

1.3.2. *Quelques remarques sur la terminologie.* —

- Lorsque $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, on parle souvent de *vecteurs* pour les éléments de E.
- Il faut noter que les *vecteurs* de E peuvent être des objets très différents de ce que la géométrie classique appelait « vecteurs » en son temps : l'espace E peut être un ensemble de nombres, de fonctions, de matrices, d'images, de sons, de polynômes, etc... Ce changement de vocabulaire est tout sauf anodin : en travaillant avec un espace vectoriel de fonctions (resp. de matrices, de sons, d'images, etc), le simple fait de *voir pour*

l'occasion les fonctions (resp. matrices, sons, images, etc) comme des objets géométriques fournit de nouvelles images mentales et de nouveaux outils pour penser.
- On ne met généralement pas de flèche sur les éléments de E, même si on les appelle des vecteurs. On prendra bien garde à ne pas confondre scalaires et vecteurs dans une expression du type

$$\lambda \cdot x + \mu \cdot y$$

où, par exemple, λ et μ sont des scalaires et x et y des vecteurs.

1.3.3. *Quelques remarques sur les notations.* —

- On s'autorise souvent à dire « Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel » plutôt que « Soit $(E,+,\cdot)$ un $\mathbb{R}$- espace vectoriel » lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur le fait que les symboles $+$ et $\cdot$ vont désigner dans le raisonnement les deux lois qui interviennent dans la structure d'espace vectoriel.
- On omettra souvent le point pour la loi externe : si $(E,+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et x est un élément de E, on notera généralement $3x$ ce qui, formellement, devrait être noté $3 \cdot x$. On conserve cependant toujours l'ordre dans ce cas, et on écrit le scalaire « à gauche » : en général, une expression du type $a \times 3$ n'a pas de sens.
- On s'autorisera souvent à écrire simplement 0 pour l'élément $\mathbf{0}_E$; il faut dans ce cas faire attention à ne pas confondre le *scalaire zéro* et le *vecteur nul*.

1.3.4. *D'autres remarques, d'ordre psychologique.* —

- Il est *normal* de trouver que la structure d'espace vectoriel est (très) abstraite. C'est précisément parce qu'elle est abstraite qu'elle permet d'aborder des situations aussi diverses que les exemples de l'introduction. Pour comprendre les avantages *pratiques* qu'il y a à développer la théorie des espaces vectoriels de façon abstraite, on pourra garder à l'esprit les deux remarques suivantes.
    - Naturellement, un théorème démontré de façon abstraite est vrai *une fois pour toutes* : si on observe un phénomène commun à des espaces vectoriels très divers et si la démonstration est à peu près la même dans chaque cas particulier, le démontrer abstraitement une fois pour toutes représente une grande économie de temps et de pensée.
    - Plus important : un problème pratique qui semble difficile et porte sur des objets compliqués peut, lorsqu'on le reformule dans des termes abstraits, apparaître comme *structurellement identique* à un problème qui porte sur des objets beaucoup plus simples, face auquel l'intuition est bien plus à l'aise. L'habitude de l'abstraction est alors un *outil pour penser* à ce problème pratique. Nous en verrons un exemple spectaculaire avec le *problème de la compression d'images.*
- Il est *normal* de trouver difficile de retenir les propriétés (1.1) à (1.8)... et les retenir n'est pas utile. En effet, il est *très rare* de devoir vérifier complètement ces propriétés pour reconnaître un espace vectoriel.

    Le plus souvent, lorsqu'on rencontre un ensemble E sur lequel on dispose d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi externe $\cdot$ de corps de base $\mathbb{R}$, l'ensemble E apparaît comme sous-ensemble d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel déjà connu.
- Une mise en garde : dans un espace vectoriel, on peut multiplier un vecteur par un nombre, mais **la structure d'espace vectoriel ne donne pas de notion de « multiplication des vecteurs ».**

2. Exemples fondamentaux

2.1. Espaces numériques $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N}^\star)$. —

Soit n un élément de $\mathbb{N}^\star$. Les éléments de $\mathbb{R}^n$ sont les *n-uplets d'éléments de* $\mathbb{R}$.

Si x est un élément de $\mathbb{R}^n$, on écrira souvent $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, où les x_i, $i \in \{1, .., n\}$, sont des éléments de $\mathbb{R}$.

Lorsque cette notation en colonnes est trop encombrante, on notera $x = (x_1, ...x_n)$ pour le même vecteur.

Rappelons que l'ordre compte : dans $\mathbb{R}^3$, les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas les mêmes.

Si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, on note

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \text{ et } \lambda \cdot x = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

On définit ainsi une loi interne sur $\mathbb{R}^n$ et une loi $\cdot$ de multiplication des éléments de $\mathbb{R}^n$ par les scalaires de $\mathbb{R}$. On constate alors que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont le vecteur nul est $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Les propriétés (1.1) à (1.8) découlent directement des propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$.

2.2. Espaces de matrices $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ $\quad$ ($n \in \mathbb{N}^\star$, $p \in \mathbb{N}^\star$). —

Soient $A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}$ deux matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$ comportant n lignes et p colonnes. Soit λ un élément de $\mathbb{R}$. Rappelons que $A + B$ et λA sont les matrices

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1p} + b_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{np} + b_{np} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{np} \end{pmatrix}.$$

On définit ainsi une loi interne sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, une loi $\cdot$ de multiplication des éléments de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ par les scalaires de $\mathbb{R}$, et on constate que $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont le vecteur nul est la matrice nulle.

2.3. Espaces de polynômes $\mathbb{R}[X]$. —

- Si p est un entier naturel, et si $a_0, ...a_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}$, on peut considérer le *le polynôme à coefficients dans* $\mathbb{R}$
$$P(X) = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + ... + a_1 X + a_0.$$
L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ se note $\mathbb{R}[X]$.
- Dans ce cours, les notations P et $P(X)$ ont la même signification (et l'objet qu'elles désignent est un polynôme, alors que $P(0)$ ou $P(1)$ sont des éléments de $\mathbb{R}$, des « nombres »).
- Rappelons que si $P(X) = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + ... + a_1 X + a_0$ avec les $a_i, 0 \le i \le p$ dans $\mathbb{R}$, le *degré* de P, noté $\deg(P)$, est le plus grand entier k tel que $a_k \neq 0$. Rappelons aussi qu'il faut faire attention aux notations : si P s'écrit comme dans la phrase précédente, alors $\deg(P) \le p$, mais si on ne demande pas que a_p soit non nul, on ne sait rien de plus.
- Rappelons par ailleurs que si $P(X) = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + ... + a_1 X + a_0$ et $Q(X) = b_q X^q + b_{q-1} X^{q-1} + ... + b_1 X + b_0$ sont deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, on peut définir le polynôme *somme* $P + Q$, comme suit : on note $a_k = 0$

pour tout entier $k > p$, on note $b_k = 0$ pour tout entier $k > q$, et on pose

$$(P+Q)(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} (a_k + b_k)X^k;$$

la somme ci-dessus est en fait une somme finie, puisqu'on a $a_k + b_k = 0$ pour tout $k > \max(p,q)$.

- Si λ est un élément de $\mathbb{R}$ et $P(X) = a_pX^p + a_{p-1}X^{p-1} + ... + a_1X + a_0$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$ on définit le polynôme $\lambda \cdot P$ comme $(\lambda \cdot P)(X) = (\lambda a_p)X^p + ... + (\lambda a_1)X + (\lambda a_0)$.
- On définit ainsi une loi interne sur $\mathbb{R}[X]$, une loi $\cdot$ de multiplication des éléments de $\mathbb{R}[X]$ par les scalaires de $\mathbb{R}$, et on constate que $(\mathbb{R}[X], +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont le vecteur nul est le *polynôme nul*.

Quelques rappels supplémentaires :

- Dire que deux polynômes sont égaux, c'est dire qu'ils ont les mêmes coefficients.
- Si P est un polynôme, on note $\deg(P)$ son degré. C'est un entier naturel, sauf si P est le polynôme nul.
  Le polynôme nul est, par convention, de degré $-\infty$.
- Si P et Q sont deux polynômes et λ un élément *non nul* de $\mathbb{R}$, alors on a $\deg(\lambda P) = \deg(P)$
  et $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$ (avec l'exception évidente si l'un des polynômes est nul).
  On a $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$, mais pas égalité en général : songez (par exemple) à $X^3 + 1$ et $-X^3 + 2X$.
- Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au plus n racines dans $\mathbb{R}$.
  Le seul polynôme de degré n ayant strictement plus de n racines est le polynôme nul.
  Tout polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$ admet au moins une racine *complexe*.

2.4. Espaces de fonctions $\mathscr{F}(A,\mathbb{R})$ où A est un ensemble non vide quelconque. —

Soit A un ensemble non vide. Lorsque f et g sont deux applications de A dans $\mathbb{R}$ et lorsque λ est un élément de $\mathbb{R}$, on peut définir

$$f+g \;:\; \begin{aligned} A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)+g(x) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \lambda\cdot f \;:\; \begin{aligned} A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda f(x) \end{aligned}$$

(pour chaque x de A, l'addition $f(x)+g(x)$ ou la multiplication $\lambda f(x)$ se font *dans* $\mathbb{R}$, donc on les connaît déjà, alors qu'on est *en train de définir* $f+g$ et $\lambda \cdot f$).

On définit ainsi une loi interne $+$ sur $\mathscr{F}(A,\mathbb{R})$, une loi $\cdot$ de multiplication des éléments de $\mathscr{F}(A,\mathbb{R})$ par les scalaires de $\mathbb{R}$.
Il est alors un peu long, mais pas difficile, de vérifier que le triplet $(\mathscr{F}(A,\mathbb{R}), +, \cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarque 1.3. — les *vecteurs de* $\mathscr{F}(A,\mathbb{R})$ sont donc des *fonctions*. Le *vecteur nul* de $\mathscr{F}(A,\mathbb{R})$ est la *fonction nulle*

$$\mathbf{0}_{\mathscr{F}(A,\mathbb{R})} : \begin{aligned} A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 0. \end{aligned}$$

Exemple 1.4. — Nous rencontrerons souvent *l'espace* $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ *des fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$, ainsi que l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, autrement dit, *l'espace* $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ *des suites réelles.*

2.5. Espaces de fonctions $\mathscr{F}(A,E)$ où A est un ensemble et E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. —

Soit A un ensemble non vide et $(E, \underset{E}{+}, \underset{E}{\cdot})$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Lorsque f et g sont deux applications de A dans E et lorsque λ est un élément de $\mathbb{R}$ on peut définir

$$f+g : \begin{aligned} A &\to E \\ x &\mapsto f(x) \underset{E}{+} g(x) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \lambda\cdot f : \begin{aligned} A &\to E \\ x &\mapsto \lambda \underset{E}{\cdot} [f(x)]. \end{aligned}$$

On définit ainsi une loi interne $+$ sur $\mathscr{F}(A,E)$, une loi $\cdot$ de multiplication des éléments de $\mathscr{F}(A,E)$ par les scalaires de $\mathbb{R}$. Il est alors un peu long, mais pas difficile, de vérifier que le triplet $(\mathscr{F}(A,E),+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exemple 1.5. — L'espace $\mathscr{F}(A,\mathbb{R}^3)$ des fonctions de A dans $\mathbb{R}^3$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2.6. Espaces vectoriels produits. —

Soient n un entier naturel non nul et E_1, ... E_n des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. Sur le *produit cartésien* $\prod_{i=1}^{n} E_i = E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, on peut définir une loi de composition interne : si $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ et $(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ et sont deux éléments de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, on pose

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n) \overset{\text{def}}{=} (x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$$

(où x_1+y_1 est défini à l'aide de la structure d'espace vectoriel de E_1, x_2+y_2 à partir de celle de E_2, etc).

On peut aussi définir une loi externe de corps de base $\mathbb{R}$: si $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ est un élément de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ et si λ est un élément de $\mathbb{R}$, on pose

$$\lambda\cdot(x_1,x_2,\ldots,x_n) \overset{\text{def}}{=} (\lambda\cdot x_1,\ \lambda\cdot x_2,\ldots,\ \lambda\cdot x_n)$$

(où $\lambda\cdot x_1$ est défini à l'aide de la structure d'espace vectoriel de E_1, $\lambda\cdot x_2$ à partir de celle de E_2, etc).

On peut alors vérifier que le triplet $\left(\prod_{i=1}^{n} E_i\ ,\ +\ ,\ \cdot\right)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Remarque 1.6. — La structure déjà décrite sur $\mathbb{R}^n$ est bien la structure d'espace vectoriel produit correspondant à l'égalité

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n \text{ fois}}.$$

3. Combinaisons linéaires

3.1. Familles d'éléments d'un ensemble. —

Rappelons que si E est un ensemble non vide et I un ensemble, une *famille d'éléments de E indexée par I* est la donnée, pour chaque i de I, d'un élément x_i de E. On note $(x_i)_{i\in I}$ ou $(x_i \mid i\in I)$ une telle famille.

Notons que l'ordre compte : dans $\mathbb{R}^2$, les familles $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right)$ et $\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$ sont différentes. Par ailleurs, la famille vide existe, bien qu'elle ne soit pas très intéressante.

On rappelle aussi que si A est une partie de E, on peut la décrire comme la famille $(a \mid a\in A)$ d'éléments de E.

On s'autorisera souvent à dire « Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E » plutôt que « Soit I un ensemble et $(x_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de E indexée par I », en sous-entendant qu'on fixe l'ensemble I dans la suite de la discussion.

3.2. Combinaisons linéaires. —

Dans le cadre de ce cours, nous considérerons des combinaisons linéaires uniquement dans le cas d'une famille finie de vecteur.

3.2.1. *Définition et remarques.* —

Définition 1.7 – Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, p un entier naturel non nul et $(x_1,\dots x_p)$ une famille de p éléments de E. On dit qu'un élément de E est *combinaison linéaire de la famille* $(x_1,\dots x_p)$ lorsqu'il peut s'écrire sous la forme

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_p x_p$$

où $\lambda_1,\dots\lambda_p$ sont des éléments de $\mathbb{R}$.

***Remarque 1.8.* —** On n'oubliera pas que le scalaire zéro est « autorisé » dans les combinaisons linéaires : par exemple, même si $p > 1$, x_1 est toujours combinaison linéaire de $(x_1,\dots x_p)$, puisqu'il s'écrit $1x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_p$.

Pour cette raison, le vecteur nul est combinaison linéaire de toutes les familles.

***Remarque 1.9.* —** Pour la famille vide, on introduit la convention suivante : la seule combinaison linéaire possible est le vecteur nul.

3.2.2. *Premiers exemples concrets.* —

***Exemple 1.10.* —** Dans $\mathbb{R}^2$, le vecteur $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de la famille $\left(\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)$, car $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} = (-5)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + 11\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$.

***Exemple 1.11.* —** Dans $\mathbb{C}^3$, le vecteur $\begin{pmatrix}1-i\\3+i\\2-5i\end{pmatrix}$ *n'est pas* combinaison linéaire de $\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}5+i\\i\\0\end{pmatrix}$, car toute combinaison linéaire de ces vecteurs est de la forme $\begin{pmatrix}2\alpha+(7+i)\beta\\-\alpha+i\beta\\0\end{pmatrix}$, où α et β sont des nombres complexes, et ne peut donc pas avoir pour troisième coordonnée $2-5i$.

***Exemple 1.12.* —** Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix}3&-4\\4&3\end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$.

En revanche, $\begin{pmatrix}17&-4\\4&3\end{pmatrix}$ n'est pas combinaison linéaire de ces deux matrices. Voyez-vous pourquoi ?

***Exemple 1.13.* —** Dans $\mathbb{C}^2$, le vecteur $\begin{pmatrix}1+i\\-1\end{pmatrix}$ est combinaison linéaire *à coefficients complexes* de $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$, mais il n'est pas combinaison linéaire *à coefficients réels* des mêmes vecteurs.

***Exemple 1.14.* —** Dans $\mathbb{R}^3$, le vecteur $u = \begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$. On peut bien sûr le voir en écrivant

$$\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix};$$

cela dit, on a aussi

$$\begin{pmatrix}3\\6\\9\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

Il y a donc plusieurs « jeux de coefficients » qui permettent d'exprimer le vecteur u comme combinaison linéaire de la famille donnée.

3.2.3. *Exemples plus abstraits.* —

Exemple 1.15. — Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, dire qu'une fonction est *affine*, c'est dire qu'elle est combinaison linéaire des deux fonctions $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$ et $\mathrm{cste}_1 : x \mapsto 1$.

Exemple 1.16. — Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, dire qu'une matrice est *diagonale*, c'est dire que c'est une combinaison linéaire des matrices

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}.$$

Exemple 1.17. — Dans $\mathbb{R}[X]$, si n appartient à $\mathbb{N}$, les combinaisons linéaires de la famille $(1, X, X^2, \dots X^n)$ sont les polynômes de la forme

$$a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$$

où $(a_0, a_1, \dots a_n)$ appartient à $\mathbb{R}^{n+1}$. Ce sont donc exactement les polynômes de degré *inférieur*[1] *ou égal à* n.

Exemple 1.18. — Soit A une matrice à n lignes et p colonnes. Notons $C_1, \dots C_n$ les colonnes de A : Si $X = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_p\end{pmatrix}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^p$, alors AX est un vecteur de $\mathbb{R}^n$; la définition du produit matriciel donne

$$AX = x_1C_1 + x_2C_2 + \dots + x_pC_p.$$

Un produit matrice-vecteur est ainsi une combinaison linéaire des colonnes de la matrice, avec pour coefficients les coordonnées du vecteur.

4. Sous-espaces vectoriels

1. Noter que rien n'impose à a_n d'être non-nul, donc que le polynôme ci-dessus n'est pas forcément de degré n.

4.1. Définition et premier exemple. —

Définition 1.19 – Sous-espace vectoriel

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un *sous-espace vectoriel de* E lorsque
(a) La partie F est non vide
(b) Si x et y sont deux vecteurs de F, alors $x+y$ appartient à F
(c) Si x est un vecteur de F, alors pour tout λ de $\mathbb{R}$, $\lambda \cdot x$ appartient à F

Exemple 1.20. —

- La partie $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \, , \; y = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$,
- La partie $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \, , \; y = 1 \right\}$ n'en est pas un (en effet, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$appartiennent à F_2, mais pas leur somme).
- La partie $F_2' = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \, , \; x \in \mathbb{Z} \text{ et } y \in \mathbb{Z} \right\}$ n'en est pas un non plus (en effet, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à F_2', mais pas $\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$).

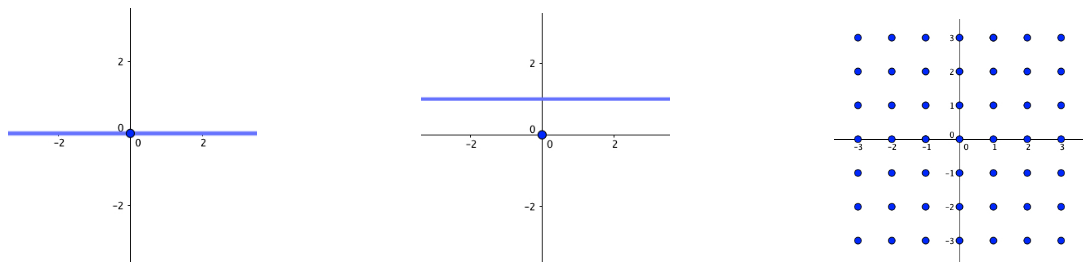


FIGURE 1. Dessin des parties F_1, F_2 et F_2' de l'exemple 1.20

4.2. Conséquences et reformulations de la définition. —

Soient $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E.

- La condition (a) dit qu'il existe un élément u dans F. Mais alors, grâce à (c), le vecteur $0 \cdot u$, appartient à F. Or, $0 \cdot u$ n'est autre que le vecteur nul $\mathbf{0}_E$, et ainsi **un sous-espace vectoriel contient automatiquement le vecteur nul.**
- La condition (b) dit que la restriction $+_{F^2}$ de $+$ à $F \times F$ est à valeurs dans F, si bien que $+_{F^2}$ est une loi de composition interne sur F ; elle vérifie alors *automatiquement* les propriétés (1.1) à (1.4), et ainsi $(F, +_{F^2})$ est un groupe abélien.
- La condition (c) dit, quant à elle, que la restriction $\cdot_{\mathbb{R}\times F}$ de $\cdot$ à $\mathbb{R} \times F$ est à valeurs dans F ; ainsi $\cdot_{\mathbb{R}\times F}$ définit une loi de multiplication des éléments de F par les scalaires de $\mathbb{R}$. Elle vérifie *automatiquement* les propriétés (1.5) à (1.8).

Ainsi, si F est un sous-espace vectoriel de E, il hérite une structure d'espace vectoriel de celle de E.

- Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F et v une combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$: rappelons que cela signifie qu'il existe un entier p, des scalaires $\lambda_1, \ldots \lambda_p$ et des indices $i_1, \ldots i_p$ tels que

$$v = \lambda_1 x_{i_1} + \lambda_2 x_{i_2} + \ldots + \lambda_p x_{i_p}.$$

D'après (c), chacun des $\lambda_k x_{i_k}$ ($k \in \{1, ..p\}$) appartient à F, et d'après (b), une somme d'éléments de F est dans F. Ainsi,

Ainsi, dire que F est un sous-espace vectoriel de E, c'est dire que toute combinaison linéaire d'éléments de F est encore un élément de F. Pour parler de cette propriété, on dit que F est *stable par combinaisons linéaires*.

Il est très utile de retenir la reformulation suivante de la définition.

Proposition 1.21 – Sous-espace vectoriel : en pratique

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une partie F de E est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si elle vérifie les deux conditions suivantes :

(i) Le vecteur nul $\mathbf{0}_E$ appartient à F.

(ii) Pour tout (λ, μ) de $\mathbb{R}^2$ et pour tout (x, y) de F^2, $\lambda x + \mu y$ appartient à F.

4.3. Exemples fondamentaux de sous-espaces vectoriels. —

4.3.1. *Sous-espaces $\{\mathbf{0}_E\}$ et E.* — Il y a d'abord deux exemples « triviaux » à ne pas oublier : si E est un espace vectoriel, les parties E et $\{\mathbf{0}_E\}$ sont toujours des sous-espaces vectoriels de E.

4.3.2. *Droites et plans passant par l'origine.* —

- Plaçons-nous d'abord dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$.

  Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$, rappelons que la *droite de $\mathbb{R}^2$ passant par l'origine et dirigée par $\vec{u}$* est l'ensemble
  $$\mathbb{R}\vec{u} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2, \exists t \in \mathbb{R}, \vec{x} = t\vec{u}\}.$$
  C'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$: d'abord, $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2} = 0\vec{u}$ appartient à $\mathbb{R}\vec{u}$. De plus, si λ et μ sont deux nombres réels et si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ appartiennent à $\mathbb{R}\vec{u}$, alors il existe deux réels t_x et t_y tels que $\vec{x} = t_x\vec{u}$ et $\vec{y} = t_y\vec{u}$; mais alors $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} = (\lambda t_x + \mu t_y)\vec{u}$ appartient aussi à $\mathbb{R}\vec{u}$.

- Plaçons-nous maintenant dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$.
  - Une *droite de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine* est un sous-ensemble de la forme $\mathbb{R}\vec{u} = \{\vec{r} \in \mathbb{R}^3, \exists t \in \mathbb{R}, \vec{r} = t\vec{u}\}$, osûr $\vec{u}$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$; pour la même raison que précédemment, c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
  - Un *plan de $\mathbb{R}^3$ passant par l'origine* est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ de la forme
    $$\mathscr{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ ax + by + cz = 0 \right\},$$
    où (a, b, c) est un triplet de nombres réels.

    Un tel plan est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$: bien sûr il contient toujours $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$; si de plus $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de $\mathscr{P}$ et si λ et μ sont deux réels, on a
    $$a(\lambda x_1 + \mu x_2) + b(\lambda y_1 + \mu y_2) + c(\lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda(ax_1 + by_1 + cz_1) + \mu(ax_2 + by_2 + cz_2) = 0,$$
    et donc $\lambda\vec{r}_1 + \mu\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_2 \\ \lambda y_1 + \mu y_2 \\ \lambda z_1 + \mu z_2 \end{pmatrix}$ vérifie l'équation de $\mathscr{P}$, donc il appartient à $\mathscr{P}$.

FIGURE 2. Droites et plans passant par l'origine sont des sous-espaces vectoriels

4.3.3. *Espace des solutions d'un système linéaire homogène.* —
Soient n et m deux entiers naturels non nuls. Rappelons qu'un *système de m équations linéaires homogènes à n inconnues à coefficients dans* $\mathbb{R}$ est un système d'équations de la forme

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

où les *coefficients* $a_{ij}, i \in \{1, ..m\}, j \in \{1, ..n\}$ (des éléments de $\mathbb{R}$) sont des données du problème et où $x_1, x_2, \ldots x_n$ sont les *inconnues*; rappelons également qu'en notant A la matrice à n lignes et p colonnes dont les coefficients sont les a_{ij}, résoudre le système (S), c'est résoudre l'équation

$$(S') : AX = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$$

d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Bien sûr le vecteur $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ est solution de (S'), car les seconds membres de (S') sont nuls.

De plus, λ et μ sont deux éléments de $\mathbb{R}$ et si X et X' sont deux solutions de (S'), alors AX_1 et AX_2 sont nuls; les propriétés du produit matriciel donnent alors

$$A(\lambda X_1 + \mu X_2) = \lambda(AX_1) + \mu(AX_2) = \lambda \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} + \mu \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}$$

si bien que $\lambda X_1 + \mu X_2$ est une solution de (S'). Nous avons obtenu le résultat suivant.

Proposition 1.22 – Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène

Soit (S) un système de m équations linéaires homogènes à n inconnues à coefficients dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

C'est un fait important, car nous verrons plus loin que *tout* sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ peut être décrit comme l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

Exemple 1.23. — Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$, la droite $\mathbb{R}\vec{u}$ peut être vue comme $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \begin{array}{r} bx - ay = 0 \\ cy - bz = 0 \end{array} \right\}$.

4.3.4. *L'espace $\mathbb{R}_n[X]$.* —

Proposition 1.24 – L'espace $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$

Si n est un entier naturel, le sous-ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré inférieur ou égal *à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.*

4.3.5. *Fonctions continues, dérivables, suites convergentes.* —

Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$,

- L'ensemble des fonctions continues est un sous-espace vectoriel.
  En effet, vous avez vu dans le cours d'analyse du premier semestre que la fonction nulle est continue et que si λ et μ sont deux réels et f et g deux fonctions continues, alors la fonction $\lambda f + \mu g$ est encore continue.
- L'ensemble des fonctions dérivables est un sous-espace vectoriel (voir le cours d'analyse).

Dans l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites réelles,

- L'ensemble des suites convergentes est un sous-espace vectoriel (voir le cours d'analyse).

4.3.6. *Suites vérifiant une relation de récurrence linéaire.* —

Soit k un entier naturel ; soient a_1, ... a_{k-1} des nombres réels.
L'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+k} = a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \ldots + a_{k-1} u_{n+(k-1)} \tag{4.1}$$

est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites réelles.

On dit que la relation (4.1) est une *relation de récurrence linéaire d'ordre k*.
Les suites vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 1 sont les *suites géométriques*.
La *suite de Fibonacci*, définie par $u_0 = u_1 = 0$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout n de $\mathbb{N}$, est une suite récurrente linéaire d'ordre 2.

4.4. Intersection de sous-espaces vectoriels. —

Proposition 1.25 – Une intersection de sous-espaces vectoriels en est un

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de sous-espaces vectoriels de E,
alors l'intersection $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Attention. — La *réunion* de deux sous-espaces vectoriels n'est « presque jamais » un sous-espace vectoriel.

5. Sous-espace vectoriel engendré

5.1. Définition et exemples. —

FIGURE 3. L'intersection de deux plans distincts passant par l'origine est une droite qui passe par l'origine ; c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. La réunion de deux droites distinctes, par contre, n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Définition 1.26 – Sous-espace engendré par une partie

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Le *sous-espace vectoriel de E engendré par* $(x_i)_{i\in I}$ est l'ensemble des éléments de E qui peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de la famille $(x_i)_{i\in I}$. On le notera $\mathbf{Vect}[(x_i)_{i\in I}]$.

Remarque 1.27. — La façon dont les vecteurs sont indexés dans $(x_i)_{i\in I}$ n'a pas d'influence sur $\mathbf{Vect}[(x_i)_{i\in I}]$, à cause de la commutativité de l'addition. Par exemple, si n appartient à $\mathbb{N}^\star$ et si $(x_1, x_2, \ldots x_n)$ est une famille de n vecteurs de E,

$$\mathbf{Vect}[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \{v \in E \quad / \quad \exists(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \quad v = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n \quad \}$$

et on a toujours $\mathbf{Vect}[x_1, x_2, \ldots, x_n] = \mathbf{Vect}[x_2, x_1, \ldots, x_n] = \mathbf{Vect}[x_n, x_2, \ldots, x_1]$.

Remarque 1.28. — Si A est une partie de E, on rappelle qu'on peut voir A comme une famille de vecteurs de E. On notera $\mathbf{Vect}[A]$ le sous-espace vectoriel engendré par A.

Exemple 1.29. — Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]$ est l'ensemble des vecteurs qui peuvent s'écrire sous la forme $\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\\beta\end{pmatrix}$ avec α, β dans $\mathbb{R}$, c'est donc le plan $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad / \quad y = 0\right\}$.

***Exemple 1.30* (Notion de droite vectorielle).** — Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]$ est l'ensemble des vecteurs *proportionnels* à $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, c'est-à-dire la droite passant par l'origine dont un vecteur directeur est $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

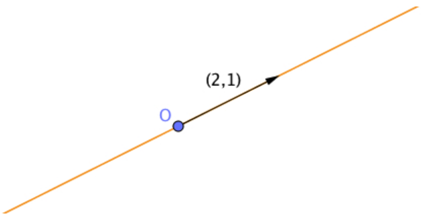


FIGURE 4. Une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$.

Plus généralement, si u est un vecteur *non nul* dans un espace vectoriel E, alors $\mathbf{Vect}[u]$ est l'ensemble des vecteurs de E qui sont proportionnels à u : par analogie avec l'exemple (b), on l'appellera la *droite vectorielle engendré par u*.

***Exemple 1.31* (Notion de plan vectoriel). —** On peut également généraliser la notion de plan passant par l'origine.

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et u et v deux vecteurs de E. On dit que u et v sont *colinéaires* s'il existe soit un élément α de $\mathbb{R}$ tel qu'on ait $u = \alpha v$, soit un élément β de $\mathbb{R}$ tel qu'on ait $v = \beta u$. On notera que *le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs.*

On dit alors qu'une partie P de E est un *plan vectoriel* s'il existe deux vecteurs *non colinéaires* u et v de E qui vérifient : $P = \mathbf{Vect}[u, v]$.

***Exemple 1.32* (Matrices). —** Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

5.2. Propriétés théoriques. — Il faut d'abord remarquer que la terminologie est cohérente : si A est une partie de E, alors $\mathbf{Vect}[A]$ est bien un sous-espace vectoriel de E. En effet :

- Le vecteur nul en est bien toujours combinaison linéaire des vecteurs de A.
- Soient λ et μ deux éléments de $\mathbb{R}$ et u et v des éléments de $\mathbf{Vect}[A]$.

  Dire que u et v sont dans $\mathbf{Vect}[A]$, c'est dire qu'il existe deux familles à support fini $(\alpha_i)_{i\in I}$ et $(\beta_i)_{i\in I}$ de scalaires telles que $u = \sum \alpha_i x_i$ et $v = \sum \beta_i x_i$. En introduisant les ensembles *finis* $J_u = \{i \in I,\ \alpha_i \neq 0\}$ et $J_v = \{i \in I,\ \beta_i \neq 0\}$, on peut alors écrire
  $$\lambda u + \mu v = \sum_{i\in I}(\lambda\alpha_i + \mu\beta_i)x_i = \sum_{i\in J_u\cup J_v}(\lambda\alpha_i + \mu\beta_i)x_i$$
  puisque si i n'est ni dans J_u ni dans J_v, alors $\alpha_i = \beta_i = 0$. L'ensemble $J_u \cup J_v$ étant fini, cela montre que $\lambda u + \mu v$ est combinaison linéaire de la famille (x_i), donc qu'il appartient bien à $\mathbf{Vect}[A]$.

Nous isolons maintenant ce qui est peut-être la propriété la plus utile du sous-espace engendré.

Proposition 1.33 – Propriété fondamentale du sous-espace engendré

Si F est un sous-espace vectoriel de E et si tous les vecteurs de A appartiennent à F, alors $\mathbf{Vect}[A] \subset F$.

On peut ainsi dire que si A est une partie de E, $\mathbf{Vect}[A]$ est le *plus petit sous-espace vectoriel de E qui contienne A*, au sens de la relation d'inclusion : il est inclus dans tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A.

***Exemple 1.34* (Premier exemple d'utilisation). —** Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = 0\}$; c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$, puisque c'est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.

Du fait que les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à F, on peut donc déduire :

$$\mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \subset F.$$

Exemple 1.35 **(Montrer une égalité de Vect$[\cdot]$). —** Dans $\mathbb{R}^3$, montrons l'égalité $\mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right] = \mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}\right]$. Notons $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$.

- On a $\vec{a}=\frac{1}{2}(\vec{u}+\vec{v})$, donc $\vec{a}$ appartient à $\mathbf{Vect}[\vec{u},\vec{v}]$. De plus, $\vec{b}=\vec{u}-\vec{v}$, donc $\vec{b}$ appartient aussi à $\mathbf{Vect}[\vec{u},\vec{v}]$.
  La proposition donne ainsi : $\mathbf{Vect}\big[\vec{a},\vec{b}\big]\subset\mathbf{Vect}[\vec{u},\vec{v}]$.
- Pour l'autre inclusion, on constate que $\vec{u}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$ et $\vec{v}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$.
  Ainsi, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ appartiennent tous les deux à $\mathbf{Vect}\big[\vec{a},\vec{b}\big]$, et $\mathbf{Vect}[\vec{u},\vec{v}]\subset\mathbf{Vect}\big[\vec{a},\vec{b}\big]$.

Voici deux corollaires importants de la propriété fondamentale du sous-espace engendré.

Proposition 1.36 – Comportement de Vect$[A]$ si on ajoute ou retire des vecteurs à A

(a) ***(Compatibilité avec les inclusions)***
Si A et B sont deux parties de E et si $A\subset B$, alors $\mathbf{Vect}[A]\subset\mathbf{Vect}[B]$.

(b) ***(Propriété d'élimination des redondances)***
Si A est une partie de E et si x est une combinaison linéaire des vecteurs de A, alors $\mathbf{Vect}[A\cup\{x\}]=\mathbf{Vect}[A]$.

Exemple 1.37 **(Utilisation de la propriété d'élimination des redondances.)**

Dans $\mathbb{R}^4$, notons $F=\mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5\\6\\0\\-1\end{pmatrix}\right]$. Alors on a l'égalité $F=\mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\3\\4\end{pmatrix}\right]$.

En effet, $\begin{pmatrix}5\\6\\0\\-1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2\\0\\3\\4\end{pmatrix}$.

Le sous-espace F, bien qu'engendré par trois vecteurs, est donc un plan vectoriel.

6. Familles génératrices

6.1. Définition et exemples fondamentaux. —

Définition 1.38 – Famille génératrice d'un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ *engendre* E (ou *est génératrice de* E) lorsque $E=\mathbf{Vect}[(x_i)_{i\in I}]$.

Nous donnons de premiers exemples importants.

***Exemple 1.39.* —**
La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$: pour tout $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$, on a $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ engendre $\mathbb{R}^3$: pour tout $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, on a $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.
Plus généralement, pour tout n de $\mathbb{N}^\star$, on peut définir une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ en posant

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\ e_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}.$$

La famille $(e_1,e_2,\dots e_n)$ est alors génératrice de $\mathbb{R}^n$.

***Exemple 1.40.* —** La famille $\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$ engendre $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. En effet, tout élément de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ peut s'écrire $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ avec $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ dans $\mathbb{R}$, et $\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+a_{12}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+a_{21}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Plus généralement, pour tout (n,p) de $(\mathbb{N}^\star)^2$ et pour tout (i,j) de $\{1,..n\}\times\{1,\dots p\}$, notons E_{ij} la matrice de taille $n\times p$ dont tous les coefficients valent zéro sauf celui situé en position (i,j), qui vaut 1. La famille $(E_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ comporte np matrices. Comme toute matrice $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq n 1\leq j\leq p}$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire $A=\sum\limits_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}a_{ij}E_{ij}$, la famille $(E_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$ engendre $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

6.2. Un exemple concret détaillé. —

Vérifions, uniquement à partir de la définition, que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ engendre $\mathbb{R}^3$.

Ce qu'il faut montrer, c'est que tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille.

Soit $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. Nous voulons vérifier qu'il existe des réels $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ tels qu'on ait

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}+\lambda_4\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

autrement dit

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2 & =x,\\ \lambda_1 \quad +2\lambda_3 & =y,\\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 & =z.\end{cases}$$

Nous devons donc étudier *l'existence* d'une solution à ce *système linéaire* dont les *inconnues* sont $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$.

Si nous appliquons la procédure habituelle (« méthode du pivot »), nous avons

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2 & =x\\ \lambda_1 \quad +2\lambda_3 & =y\\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 & =z\end{cases}\iff\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2 & =x\\ -\lambda_2+2\lambda_3 & =y-x\\ -2\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 & =z-x\end{cases}\iff\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2 & =x\\ -\lambda_2+2\lambda_3 & =y-x\\ -3\lambda_3+\lambda_4 & =x-2y+z\end{cases}$$

On constate alors qu'une solution possible est donnée par $\begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = -x + 2y - z \\ \lambda_2 = x - y \\ \lambda_1 = y \end{cases}$ (attention, ce n'est pas la seule solution).

Ainsi, il y a *toujours au moins une solution* au système envisagé : effectivement, on a bien

$$y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + (x-y) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (x - 2y + z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Conclusion : tous les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ peuvent s'écrire comme combinaison linéaire de notre famille, et notre famille est génératrice de $\mathbb{R}^3$.

6.3. Ajout ou retrait de vecteurs à une famille génératrice. —

La notion de famille génératrice est directement liée à celle de sous-espace vectoriel engendré par une famille. Voici par exemple une reformulation immédiate de la dernière proposition que nous avons rencontrée au numéro 1.6.

Proposition 1.41 – Ajouter ou retirer des vecteurs à une famille génératrice

a. ***(Ajouter des vecteurs à une famille génératrice)***
Une famille qui contient une partie génératrice est elle-même génératrice.

b. ***(Ôter un vecteur*** **redondant** ***à une famille génératrice).*** *Soit A une partie de E et x un élément de E. Si $A \cup \{x\}$ engendre E et si x est combinaison linéaire des vecteurs de A, alors A elle-même engendre E.*

Exemple 1.42. **—** Nous avons vu que la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $\mathbb{R}^3$.

Mais le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille : on a $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Par conséquent, $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ engendre $\mathbb{R}^3$.

L'exemple précédent nous mène à la notion suivante, qui prendra une grande importance dans le chapitre 2 :

Définition 1.43 – Famille génératrice minimale

Une famille génératrice est dite *minimale* lorsqu'il est impossible de lui ôter un vecteur sans détruire son caractère générateur.

7. Familles libres, indépendance linéaire

7.1. Définition, premiers exemples, interprétation de la liberté. —

Définition 1.44 – Famille libre dans un espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit n un entier naturel non nul et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E. On dit que $(x_i)_{i\in I}$ est *libre* si pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a

$$(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = \mathbf{0}_E) \implies (\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0).$$

Remarque 1.45. — Par convention, la famille vide est libre.

***Exemple 1.46* (Un exemple typique dans $\mathbb{R}^3$).** — Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\7\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre.

En effet, soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ trois réels. Supposons l'égalité

$$\lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}3\\7\\2\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$$

et montrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. L'égalité que nous avons supposée signifie

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 7\lambda_2 - 5\lambda_3 &= 0 \\ 4\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0. \end{cases}$$

Ce système équivaut (méthode de Gauss) à

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - 7\lambda_3 &= 0 \\ -10\lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - 7\lambda_3 &= 0 \\ -73\lambda_3 &= 0. \end{cases}$$

La seule possibilité est d'avoir $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

***Exemple 1.47* (Une famille de matrices).** — Dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, la famille $\left(\begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2 & 5\\-3 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1 & 4\\0 & 0\end{pmatrix}\right)$ est libre. En effet, soient λ, μ, ν trois réels. Supposons l'égalité

$$\lambda \begin{pmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2 & 5\\-3 & 0\end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix}-1 & 4\\0 & 0\end{pmatrix} = \mathbf{0}_{\mathscr{M}_2(\mathbb{R})}.$$

On a alors $\begin{pmatrix}\lambda + 2\mu - \nu & 2\lambda + 2\mu + 4\nu\\ -3\mu & \lambda\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$, donc $\begin{cases} \lambda + 2\mu - \nu = 0 \\ -3\mu = 0 \\ 2\lambda + 2\mu + 4\nu = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases}$

et cela implique $\lambda = \mu = \nu = 0$.

***Exemple 1.48* (Une famille de fonctions).** — Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la famille $(\sin, \cos)$ est libre. En effet, soient λ, μ deux réels. Supposons l'égalité

$$\lambda \sin + \mu \cos = \mathbf{0}_{\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}.$$

Attention, nous travaillons dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, donc ceci est une égalité de *fonctions*, qui signifie :

$\forall x \in \mathbb{R}, \lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = 0_{\mathbb{R}}$.

En l'évaluant en zéro, on obtient : $\lambda\sin(0)+\mu\cos(0)=0$, et comme $\sin(0)=0$ et $\cos(0)=1$, cela signifie $\mu=0$.

En l'évaluant en $\frac{\pi}{2}$, on obtient $\lambda\sin(\frac{\pi}{2})+\mu\cos(\frac{\pi}{2})=0$, et comme $\sin(\frac{\pi}{2})=1$ et $\cos(\frac{\pi}{2})=1$, cela signifie $\lambda=0$.

On en déduit que λ et μ sont tous deux nuls ; cela montre bien que $(\sin,\cos)$ est libre.

Lorsqu'une famille n'est pas libre, on dit aussi qu'elle est *liée*.

Proposition 1.49 – Comment voir « immédiatement » qu'une famille est liée

a. Toute famille contenant le vecteur nul est liée.
b. Si l'un des vecteurs de $(x_i)_{i\in I}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $(x_i)_{i\in I}$, alors $(x_i)_{i\in I}$ est liée.

Exemple 1.50. — Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\9\\12\end{pmatrix}\right)$ est liée, car $\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$.

Proposition 1.51 – Trois interprétations de la liberté

Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

(a) La famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre.

(b) ***Aucun vecteur de la famille n'est combinaison linéaire des autres :***
pour tout i_0 de I, $x_{i_0}\notin \mathbf{Vect}\big[(x_i)_{i\in I, i\neq i_0}\big]$.

(c) ***Unicité de l'écriture des combinaisons linéaires :***
si $(\alpha_i)_{i\in I}$ et $(\beta_i)_{i\in I}$ sont deux familles à support fini *de scalaires, alors*

$$\left(\sum_{i\in I}\alpha_i x_i=\sum_{i\in I}\beta_i x_i\right)\implies(\forall i\in I,\alpha_i=\beta_i)$$

Remarque 1.52. —
- À cause de la propriété (b), dire que des vecteurs forment une famille libre, c'est dire qu'il n'existe pas de *relation de dépendance linéaire* entre eux. On dit donc aussi qu'ils sont *linéairement indépendants*.
- La propriété (c) sous-tend beaucoup des démarches « par identification ».

7.2. Exemples généraux de familles libres. —

7.2.1. *Familles comportant un seul vecteur non nul.* — Si x est un vecteur *non nul* de E, alors la famille $\{x\}$ est libre. En effet, nous avons vu précédemment que si λ est un scalaire et $\lambda x=\mathbf{0}_E$, alors $\lambda=0$.

7.2.2. *Familles de deux vecteurs non colinéaires.* — Soient x et y deux vecteurs de E. Dire que la famille (x,y) est libre, c'est dire que les vecteurs x et y ne sont pas colinéaires. Nous l'avons déjà vu page 14.

7.2.3. *Familles de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et méthode « du pivot ».* — Soit $(x_1,\ldots x_p)$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Écrivons-les sous la forme

$$x_1=\begin{pmatrix}x_{11}\\x_{21}\\\vdots\\x_{n1}\end{pmatrix},\ldots,x_p=\begin{pmatrix}x_{1p}\\x_{2p}\\\vdots\\x_{np}\end{pmatrix},$$

où les x_{ij}, $(i,j)\in\{1,..n\}\times\{1,..p\}$ sont des éléments de $\mathbb{R}$.

Savoir si la famille $(x_1, ...x_p)$ est libre dans $\mathbb{R}^n$, c'est savoir s'il existe des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_p$ qui vérifient $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_p x_p = 0$ sans être tous nuls. C'est donc savoir si le système linéaire

$$\begin{cases} x_{11}\lambda_1 + ... + x_{1p}\lambda_p & = 0 \\ & \vdots \\ x_{n1}\lambda_1 + ... + x_{np}\lambda_p & = 0 \end{cases}$$

d'inconnues $\lambda_1, ..., \lambda_p$, admet une autre solution que $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_p = 0$.

Cela ramène la question à la résolution d'un système linéaire.

7.2.4. *Familles de polynômes à degrés deux à deux distincts.* —

Proposition 1.53 – Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts

Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes non nuls à coefficients dans $\mathbb{R}$.
Si les degrés de ces polynômes sont deux à deux distincts, c'est-à-dire si pour $i \neq j$, on a $\deg(P_i) \neq \deg(P_j)$, alors la famille $(P_i)_{i\in I}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 1.54. —

- La famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.
- Plus généralement, pour tout a de $\mathbb{R}$, la famille $((X-a)^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est libre dans $\mathbb{R}[X]$.

Attention. — La réciproque est fausse, une famille de polynômes peut être libre sans être à degrés deux à deux distincts.

7.2.5. *Familles de matrices avec des coefficients en positions complémentaires.* —

Proposition 1.55 – Famille de matrices avec coefficients en positions complémentaires

Soit $(A^{[\alpha]})_{\alpha\in A}$ une famille d'éléments non nuls de $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Pour chaque α de A, notons $A^{[\alpha]} = (c_{ij}^{[\alpha]})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$.
*Si pour chaque (i,j) de $\{1,..,n\}\times\{1,...,p\}$, il y a **au plus** un α de A tel que $c_{ij}^{[\alpha]}$ soit non nul, alors la famille $(A^{[\alpha]})_{\alpha\in A}$ est libre dans $\mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$.*

Exemple 1.56. —

- Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, la famille $\left(\begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \pi \end{pmatrix}\right)$ est libre.
- Dans $\mathcal{M}_{23}(\mathbb{R})$, la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 99 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.76 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre.

Attention. — La réciproque est bien sûr fausse : dans l'exemple 1.47, nous avons rencontré une famille libre de matrices 2×2 dont les coefficients ne sont pas en positions complémentaires.

7.3. Ajout ou retrait de vecteurs à une famille libre. —

Proposition 1.57 – Effet sur la liberté de l'ajout ou du retrait d'un vecteur

a. ***Ôter des vecteurs à une famille libre :***
Une sous-famille d'une famille libre est elle-même libre.

b. ***Ajouter un vecteur* indépendant *à une famille libre :*** *Soit A une partie de E et x un élément de E. On suppose que A est libre. Alors $A \cup \{x\}$ est libre si et seulement si x n'appartient pas à* $\mathbf{Vect}[A]$.

La seconde propriété signifie que pour conserver la liberté en ajoutant un vecteur, il faut et il suffit que le vecteur ajouté ne soit pas combinaison linéaire des vecteurs initiaux.

Exemple 1.58 **(Exemple d'ajout d'un vecteur indépendant). —** Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}\right)$ est libre, car c'est une famille de deux vecteurs et que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

De plus, pour que $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ puisse appartenir à $\mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}\right]$, il faut avoir $x = z$.

Ainsi, $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ n'appartient pas à $\mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}\right]$; par conséquent, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right)$ est libre.

Définition 1.59 – Famille libre maximale

Une famille libre est dite *maximale* lorsqu'il est impossible de lui ajouter un vecteur sans détruire sa liberté.

CHAPITRE 2

BASES ET DIMENSION

1. Bases d'un espace vectoriel, coordonnées dans une base

1.1. Définition et notion de coordonnées. —

Définition 2.1 – Base d'un espace vectoriel

Soient E un espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est une *base* de E si elle est à la fois *libre* et *génératrice de* E.

Si $\mathscr{B} = (x_i)_{i\in I}$ est une base de E, alors le fait qu'elle soit génératrice de E indique que tout vecteur de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$; le fait qu'elle soit libre indique qu'il n'est pas possible de l'écrire de deux façons différentes comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$. Ainsi,

La famille $\mathscr{B}$ est une base de E

$\Updownarrow$

Tout vecteur v de E peut s'écrire *de façon unique* comme une combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$.

Les coefficients de cette combinaison linéaire sont appelés les *coordonnées de v dans la base $\mathscr{B}$*.

Par exemple, si l'on considère une famille finie $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ de vecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, dire que c'est une base de E, c'est dire que pour chaque v de E, *il existe un unique* n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ de scalaires de $\mathbb{R}$ tel que $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n b_n$. Les coordonnées de v dans la base $\mathscr{B}$ sont alors données par le n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$.

***Exemple 2.2* (Une base de $\mathbb{R}^2$). —** La famille $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. En effet, pour tout $v = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$, il existe un unique couple (λ_1, λ_2) de réels qui vérifie $v = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$: le système linéaire $\begin{cases} x = \lambda_1 - \lambda_2 \\ y = 2\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases}$ admet une unique solution, à savoir $\lambda_1 = \dfrac{x+y}{3}$, $\lambda_2 = \dfrac{-2x+y}{3}$.

On constate ici que si x et y sont deux réels, les coordonnées du vecteur $v = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans $\mathscr{B}$ sont données par le couple $\left(\dfrac{x+y}{3}, \dfrac{-2x+y}{3}\right)$.

Une fois qu'on sait que ces deux vecteurs forment une base, pour trouver les coordonnées du vecteur $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, il suffit de constater que $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$: on sait alors d'avance qu'il s'agit de la seule manière d'exprimer $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{B}$, donc que les coordonnées du vecteur w sont données par le couple $(1, -2)$.

FIGURE 1. Illustration de l'exemple ci-dessus. *Gauche :* on constate que $(3,0) = (1,2) - 2(-1,1)$. *Droite :* la famille $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et définit un repère.

Exemple 2.3 **(Un exemple dans $\mathbb{R}^3$).** — La famille $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 97 \\ 98 \\ 99 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 97 \\ 98 \\ 97 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. En effet, pour tout $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, il existe un unique triplet $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ de réels qui vérifie $v = \lambda_1 \begin{pmatrix} 97 \\ 98 \\ 99 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 97 \\ 98 \\ 97 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$: le système linéaire

$$\begin{cases} 97\lambda_1 + 97\lambda_2 + \lambda_3 & = x \\ 98\lambda_1 + 98\lambda_2 + \lambda_3 & = y \\ 99\lambda_1 + 97\lambda_2 + \lambda_3 & = z \end{cases} \iff \begin{cases} 97\lambda_1 + 97\lambda_2 + \lambda_3 & = x \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = y - x \\ 2\lambda_1 & = z - x \end{cases}$$

admet une unique solution, à savoir $\lambda_1 = \dfrac{z-x}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{-x+2y-z}{2}$, $\lambda_3 = 98x - 97y$. Les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 194 \\ 194 \\ 196 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathscr{B}$ sont données par le triplet $(1, 1, 0)$.

Les deux exemples précédents montrent clairement que :

- La notion de base est une (vaste) généralisation de celle de *repère du plan ou de l'espace à trois dimensions*.
- Un vecteur peut avoir des coordonnées *très compliquées* dans une base et *très simples* dans une **autre** base.

La notion de base permet donc notamment d'envisager des *repères de l'espace des fonctions*, des *repères de l'espace des sons*, des *repères de l'espace des images*, etc. De plus, dans certains de ces « repères », il est tout à fait possible que des objets intéressants (pour la théorie... ou pour la pratique) aient des coordonnées particulièrement simples.

1.2. Caractérisation des bases parmi les familles génératrices et parmi les familles libres. —

Proposition 2.4 – Base = famille libre maximale = famille génératrice minimale

Soit E un espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

(a) La famille $(x_i)_{i\in I}$ est une base de E.
(b) La famille $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice minimale de E.
(c) La famille $(x_i)_{i\in I}$ est une famille libre maximale de E.

1.3. Des exemples classiques de bases, et quelques remarques. —

1.3.1. *Base canonique de $\mathbb{R}^n$.* —
Nous avons déjà vu que si $n \geq 1$ et si on pose

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots,\ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

alors la famille $(e_1, e_2, \dots e_n)$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$. De plus, elle est libre : si $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des scalaires vérifiant $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = 0$, alors il suffit de noter que $\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$ pour voir que tous les λ_i doivent être nuls.

La famille $(e_1, \dots e_n)$ est donc une base de $\mathbb{R}^n$, célèbre sous le nom [1] de *base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

1.3.2. *Il existe cependant bien d'autres bases de $\mathbb{R}^n$.* —

Par exemple, dans $\mathbb{R}^3$, nous avons déjà vu que $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 97 \\ 98 \\ 99 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 97 \\ 98 \\ 97 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

On peut aussi obtenir beaucoup de bases à partir d'une base donnée :
$\left(\begin{pmatrix} -97 \\ -98 \\ -99 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 97 \\ 98 \\ 97 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est aussi une base de $\mathbb{R}^3$, $\left(\begin{pmatrix} 0.97 \\ 0.98 \\ 0.99 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 97 \\ 98 \\ -97 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right)$ également...

Insérons ici une remarque générale : si $E \neq \{0\}$, alors dès qu'il admet une base, il en admet beaucoup d'autres. Une expression comme « la base », sans préciser laquelle, n'a donc *jamais* de sens.

1.3.3. *Base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.* — Soit (n, p) un couple d'entiers naturels non nuls. Pour chaque (i, j) de $\{1, \dots, n\} \times \{1, \dots, p\}$, notons E_{ij} la matrice dont le coefficient en position (i, j) (au croisement de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne) vaut 1, et dont tous les autres coefficients valent zéro.

Par exemple si $n = 2$, $E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

La famille $(E_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ est libre, car elle vérifie le critère de la page 20.

1. Cela signifie simplement « la base classique », « la base habituelle »...

De plus, elle engendre $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$, car si $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ est une matrice $n \times p$ quelconque à coefficients dans $\mathbb{R}$, on peut écrire

$$A = \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} a_{ij}E_{ij}.$$

et donc exprimer A comme combinaison linéaire de la famille $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$.

La famille $(E_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}$ est donc une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$; on l'appelle souvent la *base canonique* de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

1.3.4. *Il existe cependant beaucoup d'autres bases de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.* — Voici un exemple de base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Considérons

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ un élement de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Peut-on l'écrire comme combinaison linéaire à coefficients réels de la famille (M_1, M_2, M_3, M_4) ?

Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ quatre réels. Alors

$$A = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i M_i \iff \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 & \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4 \\ \lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4 & \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = a_{11} \\ \lambda_1+\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4 = a_{12} \\ \lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4 = a_{21} \\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3-\lambda_4 = a_{22} \end{cases}$$

ce qui équivaut à $\lambda_1 = \dfrac{a_{11}+a_{21}}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{a_{12}-a_{21}}{2}$, $\lambda_3 = \dfrac{a_{22}-a_{21}}{2}$ et $\lambda_4 = \dfrac{a_{11}-a_{22}+a_{21}-a_{12}}{2}$.

Chaque matrice A peut donc s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire de (M_1, M_2, M_3, M_4) ; notre famille est bien une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

Si l'on en croit le calcul précédent, les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ dans cette base sont données par le quadruplet $\left(\dfrac{1+7}{2}, \dfrac{5-7}{2}, \dfrac{3-7}{2}, \dfrac{1-3+7-5}{2}\right) = (4, -1, -2, 0)$.

Et effectivement, on a $4\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + 0\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$.

1.3.5. *Base canonique de $\mathbb{R}[X]$, de $\mathbb{R}_n[X]$.* —

• Nous avons déjà vu que la famille $(X^k)_{k\in\mathbb{N}} = (1, X, X^2, \ldots)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}[X]$, et que c'est une famille libre (car c'est une famille de polynômes à degrés deux à deux distincts). Ainsi, c'est une base de $\mathbb{R}[X]$, souvent appelée *base canonique de* $\mathbb{R}[X]$.

• De même, pour chaque n de $\mathbb{N}$, nous avons vu que la famille $(1, X, X^2, \ldots X^n)$ engendre $\mathbb{R}_n[X]$, et elle est libre pour la même raison ; c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$, souvent appelée *base canonique de* $\mathbb{R}_n[X]$.

• Par exemple, les coordonnées du polynôme $1299X^7 - \pi X^3 + 3X^2$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{10}[X]$ sont données par le 11-uplet $(0, 0, 3, -\pi, 0, 0, 0, 1299, 0, 0, 0)$.

1.3.6. *Il existe cependant beaucoup d'autres bases de $\mathbb{R}[X]$ et de $\mathbb{R}_n[X]$.* — Voici une manière simple d'en fabriquer.

Définition 2.5 – Famille échelonnée en degré de $\mathbb{R}_n[X]$

Une famille *échelonnée en degré de* $\mathbb{R}_n[X]$ est une famille $(P_0, P_1, \ldots P_n)$ de polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ vérifiant : pour tout i de $\{0, \ldots, n\}$, $\deg(P_i) = i$.

Proposition 2.6 – Une famille échelonnée en degré donne une base de $\mathbb{R}_n[X]$

Pour tout n de $\mathbb{N}$, si $(P_0, P_1, \dots P_n)$ est une famille échelonnée en degré de $\mathbb{R}_n[X]$, alors $(P_0, P_1, \dots P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Attention. — La réciproque est fausse : il existe des bases de $\mathbb{R}_n[X]$ qui ne sont pas échelonnées en degré. Par exemple, la famille $(X^2, X^2 - X - 1, X^2 - 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, alors que les trois polynômes de la famille ont le même degré.

2. Espaces vectoriels de dimension finie

2.1. La définition. —

Définition 2.7 – Espace de dimension finie

Soit E un espace vectoriel. On dit que E est *de dimension finie* s'il admet une famille génératrice de cardinal fini, et on dit qu'il est *de dimension infinie* s'il n'admet pas de famille génératrice de cardinal fini.

La terminologie peut sembler mystérieuse à ce stade, puisqu'on parle de *dimension finie* ou *infinie* sans avoir encore défini la dimension. Relevons en attendant que nous avons déjà vu des exemples de tels espaces :

- Les espaces $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $K_n[X]$ sont de dimension finie, puisque nous avons déjà rencontré des parties génératrices de cardinal fini de chacun d'entre eux.
- L'espace $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie : en effet, s'il existait une famille génératrice finie $(P_1, \dots P_k)$ de $\mathbb{R}[X]$, on pourrait noter $d = \max(\deg P_1, \deg P_2, \dots, \deg P_k)$, et alors *tout* polynôme de $\mathbb{R}[X]$ serait une combinaison linéaire de polynômes de degré inférieur ou égal à d, donc serait lui-même de degré inférieur ou égal à d. Mais ce n'est pas le cas de X^{d+1}.

2.2. Théorème de la base incomplète. —

Théorème 2.8 – Théorème-clé

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $\mathscr{L}$ une famille libre de E et $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E. Il est possible de compléter $\mathscr{L}$ en une base de E en lui ajoutant des vecteurs de $\mathscr{G}$.

Théorème 2.9 – Conséquences du théorème-clé

1. ***Existence de bases.***
   Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors E admet une base.
2. ***Théorème de la base incomplète.***
   Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.
3. ***Théorème de la base extraite.***
   De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base.

2.3. Théorème de Steinitz et notion de dimension. —

Théorème 2.10 – Théorème de Steinitz

Si $\mathscr{L}$ est une famille libre de E de cardinal fini et si $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de E de cardinal fini, alors

$$\mathrm{Card}(\mathscr{L}) \leq \mathrm{Card}(\mathscr{G}).$$

La conséquence la plus importante du théorème de Steinitz est le résultat suivant, qui est au fondement de toute l'algèbre linéaire.

Théorème 2.11 – Théorème fondamental sur le cardinal des bases

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les bases de E ont le même cardinal.

Définition 2.12 – Notion de dimension

Lorsque E est un espace vectoriel de dimension finie, on appelle *dimension de E*, et on note $\dim(E)$, le cardinal commun à toutes les bases de E. C'est un entier.

3. Exemples d'espaces de dimension finie

3.1. Les exemples fondamentaux : colonnes, matrices, polynômes. —

***Dimension de $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}^\star$).* —**

Nous avons déjà rencontré une base de $\mathbb{R}^n$, la *base canonique* $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right)$.

Elle comporte n vecteurs. Par conséquent, on a $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

***Dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ ($n, p \in \mathbb{N}^\star$).* —**

Nous avons déjà rencontré une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la base canonique $(E_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$.

Cette base comporte np vecteurs. Par conséquent, on a $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) = np$. En particulier, l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées à n lignes et n colonnes est de dimension n^2.

***Dimension de $\mathbb{R}_\mathbf{n}[\mathrm{X}]$ ($n \in \mathbb{N}$).* —**

Nous avons déjà rencontré au moins une base de $\mathbb{R}_n[X]$, la base canonique $(1, X, X^2, \dots, X^n)$.
Elle comporte $n+1$ vecteurs. Par conséquent, on a $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$.

3.2. L'espace des matrices symétriques. —

• Soit $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ A^T = A\right\}$ l'ensemble des matrices *symétriques* de taille n à coefficients réels. Par exemple,

$$\mathscr{S}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & u & w \\ u & b & v \\ w & v & c \end{pmatrix}, (a,b,c,u,v,w) \in \mathbb{R}^6 \right\}.$$

L'ensemble $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
• En observant la forme des éléments de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$, on constate qu'il faut exactement six nombres pour décrire une matrice symétrique de taille 3, et cela laisse penser que $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ est de dimension six.
• Pour le démontrer, il faut exhiber une base de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ qui comporte six matrices. Notons :

$$S_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, S_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, S_{33} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On constate que la famille $(S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{22}, S_{23}, S_{33})$ est une famille de matrices à coefficients en positions complémentaires. C'est donc une famille libre de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$.

Par ailleurs, si $A = \begin{pmatrix} a & u & w \\ u & b & v \\ w & v & c \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique, alors

$$A = aS_{11} + bS_{22} + cS_{33} + uS_{12} + vS_{23} + wS_{13},$$

donc tout élément de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$ est combinaison linéaire de $(S_{11}, S_{12}, S_{13}, S_{22}, S_{23}, S_{33})$, qui est donc une famille génératrice de $S_n(\mathbb{R})$.

Ainsi, notre famille de six matrices est une base de $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$, cet espace est donc bien de dimension six.
• Plus généralement, revenons à n quelconque : on conjecture que connaître complètement une matrice symétrique, c'est connaître précisément les coefficients situés soit sur la diagonale, soit strictement au-dessus.

Il y a $\dfrac{n(n+1)}{2}$ coefficients à ces positions, on conjecture donc que la dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration de cette conjecture. — Pour déterminer la dimension de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, il faut exhiber une base de cet espace.

- Pour tout (i,j) de $\{1,..,n\}^2$ vérifiant $i < j$, notons S_{ij} la matrice $E_{ij} + E_{ji}$, et pour tout i de $\{1,..n\}$, notons $S_{ii} = E_{ii}$.

  On obtient toujours une matrice symétrique : si $i < j$ on a $S_{ij}^T = (E_{ij}+E_{ij}^T)^T = E_{ij}^T+(E_{ij}^T)^T = E_{ij}^T+E_{ij} = S_{ij}$, et si $i = j$ on a $S_{ij}^T = E_{ii}^T = E_{ii} = S_{ij}$.

  La famille $(S_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n}$ comporte $\dfrac{n(n+1)}{2}$ matrices.
- C'est une famille de matrices à coefficients en positions complémentaires, donc c'est une famille libre de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
- De plus, si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ est une matrice symétrique quelconque, on a $A = \sum\limits_{1\leq i\leq j\leq n} a_{ij}S_{ij}$, donc la famille $(S_{ij})_{1\leq i\leq j\leq n}$ est une famille génératrice de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$; c'est bien une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

□

Cas des matrices antisymétriques. —
Soit $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), A^T = -A\right\}$ l'ensemble des matrices *antisymétriques* de taille n. Par exemple,

$$\mathscr{A}_3(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & u & w \\ -u & 0 & v \\ -w & -v & 0 \end{pmatrix}, (u,v,w) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

Cette fois, on constate qu'il suffit de connaître les coefficients situés *strictement* au-dessus de la diagonale pour connaître complètement une matrice antisymétrique, car la diagonale est automatiquement nulle. On peut donc penser que la dimension de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ est $\dfrac{n(n-1)}{2}$. On peut le vérifier en exercice.

4. Cardinal des familles libres et génératrices en dimension finie

Avant de poursuivre les développements théoriques, prenons le temps de souligner trois conséquences immédiates du long développement théorique de la section 2. Elles ont un intérêt pratique considérable.

Proposition 2.13 – Familles libres/génératrices et nombre de vecteurs.

Soit E un espace vectoriel de dimension n.

(a) Aucune famille comportant strictement plus de n vecteurs n'est libre.

(b) Aucune famille comportant strictement moins de n vecteurs n'est génératrice de E.

***Exemple 2.14* (Exemples d'utilisation dans $\mathbb{R}^3$). —**

- La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}\right)$ comporte deux vecteurs ; comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, elle ne peut pas être génératrice de $\mathbb{R}^3$.
- La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\11\\12\end{pmatrix}\right)$ comporte quatre vecteurs ; comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, elle ne peut pas être libre.

Proposition 2.15 – Comment vérifier qu'un espace est de dimension infinie

Soit E un espace vectoriel. Il y a équivalence entre

(i) il existe une famille libre de E de cardinal infini,

(ii) E est de dimension infinie.

En particulier, s'il existe une famille libre $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$, alors E est de dimension infinie.

***Exemple 2.16* (L'espace de tous les polynômes). —** Dans $\mathbb{R}[X]$, la famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, X, X^2, \ldots)$ est libre. Comme elle comporte une infinité de vecteurs, $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie (nous avions déjà vérifié page 26 que $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie, mais ceci est plus « direct »).

Proposition 2.17 – Pour les familles de n vecteurs en dimension n, « libre = génératrice »

Soit E un espace vectoriel de dimension n.
Si $(v_1, \ldots v_n)$ est une famille comportant exactement n vecteurs *de E, alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) La famille $(v_1, \ldots v_n)$ est une base de E,

(ii) La famille $(v_1, \ldots v_n)$ est libre,

(iii) La famille $(v_1, \ldots v_n)$ est génératrice de E.

Exemple 2.18 **(Une application dans $\mathbb{R}^3$). —** La famille $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ comporte trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$. Pour vérifier que c'est une base, il suffit de vérifier qu'elle est libre.

Si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont trois réels qui vérifient $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, alors $\begin{cases}\lambda_1+\lambda_3=0\\2\lambda_1+\lambda_2=0\\2\lambda_2+\lambda_3=0\end{cases}$, d'où on déduit facilement $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Donc la famille est libre, et c'est *automatiquement* une base de E (pas besoin de vérifier qu'elle est génératrice).

Exemple 2.19 **(Famille de polynômes échelonnée en degré). —** Si $(P_0, P_1, ...P_n)$ est une famille échelonnée en degré de $\mathbb{R}_n[X]$, alors c'est une famille de polynômes à degrés deux à deux distincts, donc elle est libre ; nous avons vu que la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est $n+1$ et cette famille libre comporte $n+1$ polynômes, c'est donc automatiquement une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Remarque 2.20 **(Utilisation pratique de ce résultat). —** Étant donnés un espace vectoriel de dimension finie E et une famille $(x_1, .., x_n)$ de vecteurs de E, lrosqu'on se demande si $(x_1, .., x_n)$ est une base de E, il ne faut pas confondre les deux situations suivantes :

(a) Si on *connaît déjà la dimension de E* et si cette dimension est égale au nombre n de vecteurs de la famille, il suffit de vérifier soit que la famille est libre, soit qu'elle est génératrice, mais il est inutile de vérifier les deux séparément.
(si au contraire la dimension de E n'est pas n, la famille $(x_1, .., x_n)$ n'a aucune chance d'être une base de E).

(b) Si on *ne connaît pas déjà la dimension de E*, on ne peut pas utiliser ce résultat : impossible d'échapper à vérifier séparément que la famille est libre puis qu'elle est génératrice, ou alors à vérifier que tout vecteur peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire de la famille. Si on arrive à vérifier que $(x_1, .., x_n)$ est une base de E, on pourra en *déduire* que la dimension de E est n.

5. Dimension d'un sous-espace, dimension d'un produit, dimension complexe

Proposition 2.21 – Dimension d'un sous-espace et cas d'égalité

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

(i) Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$ *;*

(ii) De plus, si F est un sous-espace vectoriel de E et si $\dim(F) = \dim(E)$*, alors $F = E$.*

La propriété (ii) est très souvent utilisée pour montrer que deux sous-espaces sont égaux en ne vérifiant que l'une des deux inclusions.

Exemple 2.22 **(Utilisation de (ii)). —** Reprenons l'exemple de la page 15 : dans $\mathbb{R}^3$, comparons $\mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right]$ et $\mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}\right]$.

Chacun de ces deux sous-espaces est de dimension 2 (car engendré par deux vecteurs non colinéaires).

Pour montrer que les deux sous-espaces sont égaux, il suffit donc de montrer l'une des inclusions, l'autre se déduira automatiquement de l'égalité des dimensions.

Écrire $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$ prouve $\mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}\right]\subset\mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right]$, donc l'égalité.

Proposition 2.23 – Dimension d'un espace produit

Si E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie, alors

$$\dim(E\times F)=\dim(E)+\dim(F).$$

6. Rang d'une famille de vecteurs ou d'une matrice

6.1. Définition et premières propriétés. —

Définition 2.24 – Rang d'une famille de vecteurs

Soient E un espace vectoriel et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. Lorsque $\mathbf{Vect}[(x_i)_{i\in I}]$ est de dimension finie, on appelle *rang* de $(x_i)_{i\in I}$ sa dimension. On note :

$$\mathbf{rg}[(x_i)_{i\in I}]\stackrel{\text{def}}{=}\dim\mathbf{Vect}[(x_i)_{i\in I}].$$

Remarque 2.25. —

- Lorsque E est de dimension finie, le rang d'une famille de vecteurs de E est toujours inférieur ou égal à $\dim E$.
- Lorsque $\mathbf{Vect}[(x_i)_{i\in I}]$ est de dimension infinie, on dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est *de rang infini*.

Exemple 2.26. —

- Dans $\mathbb{R}^3$, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ est de rang 2.
- Dans $\mathbb{R}^3$, on a : $\mathbf{rg}\left[\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\5\\0\end{pmatrix}\right]=2.$

Exemple 2.27. — Dans $\mathbb{R}[X]$, on a : $\mathbf{rg}\big[1,X,3X,X^2,5X^2+X+8\big]=3$ et $\mathbf{rg}\big[1,X,X^4,X^7,X^10\big]=5$.

Proposition 2.28 – Rang d'une famille VS cardinal de la famille et cas d'égalité

Si k est un entier naturel non nul et si $(x_1,\ldots,x_k)$ est une famille de k vecteurs de E, alors $\mathbf{rg}[x_1,\ldots x_k]\le k$. Pour qu'il y ait égalité, il faut et il suffit que la famille $(x_1,\ldots,x_k)$ soit libre.

Définition 2.29 – Rang d'une matrice

Soit A une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. Le *rang de* A, noté $\mathbf{rg}[A]$, est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les colonnes de A.

Remarque 2.30. — La notion de rang pour une matrice apparaît, grâce à la définition et la remarque ci-dessus, comme un cas particulier de la notion de rang pour une famille de vecteurs.

Pour les familles finies de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, la réciproque est vraie : le rang d'une famille peut être étudié matriciellement.

En effet, supposons donnés p vecteurs $x_1, \dots x_p$ de $\mathbb{R}^n$.

Écrivons $x_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$, ... $x_p = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$, si bien que la matrice $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}$ a pour colonnes les coordonnées des x_i dans la base canonique. À l'évidence, le rang de A et le rang de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ sont identiques.

Pour chercher le rang de la famille $(x_1, \dots, x_n)$, on peut donc chercher le rang de A.

6.2. Opérations élémentaires et détermination pratique du rang. — Dans ce paragraphe, on explique comment calculer concrètement le rang d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ou d'une matrice à coefficients dans $\mathbb{R}$.

• Rappelons qu'on dit qu'une matrice est *échelonnée en colonnes* lorsque

- chaque colonne commence par strictement plus de zéros que la précédente,
- si une colonne est nulle, alors toutes les suivantes sont nulles.

Par exemple, les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 5 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont échelonnées en colonnes,

tandis que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas échelonées en colonnes.

• Nous partons de la remarque suivante : si la matrice A est échelonnée en colonnes, le rang de A est égal au nombre de colonnes non nulles.

• Expliquons maintenant comment ramener la recherche du rang d'une famille ou matrice quelconque au cas échelonné. Rappelons que les *opérations élémentaires sur les colonnes* sont les suivantes :

- Effectuer une *transvection*, c'est-à-dire remplacer l'une des colonnes C_j par $C_j + \alpha C_i$ où $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{R}$;
- Effectuer une *dilatation*, c'est-à-dire remplacer l'une des colonnes C_j par λC_j où $\lambda \in \mathbb{R}^\star$;
- Effectuer une *permutation*, c'est-à-dire échanger deux colonnes C_i et C_j, $i \neq j$.

La remarque suivante est essentielle :

- on a $\mathbf{Vect}\big[C_1, \dots, C_p\big] = \mathbf{Vect}\big[C_1, \dots, C_{j-1}, C_j + \alpha C_i, C_{j+1} \dots, C_p\big]$
  (toute combinaison linéaire de la deuxième famille est évidemment combinaison linéaire de la première, et la réciproque est vraie : tous les $C_k, k \neq j$ ainsi que $C_j = \alpha C_i + (C_j - \alpha C_i)$ appartiennent à $\mathbf{Vect}\big[C_1, \dots, C_{j-1}, C_j + \alpha C_i, C_{j+1} \dots, C_p\big]$).
- De même, $\mathbf{Vect}\big[C_1, \dots, C_p\big] = \mathbf{Vect}\big[C_1, \dots, C_{j-1}, \lambda C_j, C_{j+1} \dots, C_p\big]$.

- Enfin, une permutation n'a visiblement pas d'effet sur le sous-espace engendré par les colonnes.

Par conséquent, le sous-espace vectoriel engendré par les colonnes est inchangé lorsqu'on effectue une des opérations élémentaires. Sa dimension est donc aussi inchangée : les opérations élémentaires sur les colonnes préservent le rang. • Or, on sait que partant d'une matrice quelconque, il existe une suite finie d'opérations élémentaires (« méthode du pivot », voir le premier semestre) qui mène à une matrice échelonnée en colonnes. Cette « réduite échelonnée » a donc le même rang que la matrice de départ, et aucun travail n'est nécessaire pour déterminer son rang. La « méthode du pivot », effectuée sur les colonnes, permet de trouver le rang d'une matrice.

• Colonnes ou lignes ?

Nous verrons plus loin que le rang d'une matrice est le même que le rang de sa transposée. Or, pour effectuer une opération élémentaire sur les *lignes* d'une matrice A, on peut prendre le chemin détourné suivant : transposer A, effectuer l'opération élémentaire voulue sur les colonnes de A^T, puis prendre la transposée du résultat. Du fait qu'aucune de ces opérations ne change le rang, on déduit que les opérations élémentaires sur les lignes préservent également le rang. On peut alors utiliser la « méthode du pivot » pour se ramener à une matrice échelonnée en lignes, dont le rang (toujours grâce au théorème à démontrer plus tard sur le rang de la transposée) est le nombre de lignes non nulles.

***Exemple 2.31.* —** Déterminons le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

D'après les résultats que nous venons de montrer, cette matrice a le même rang que les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

et la dernière matrice, échelonnée en colonnes, est visiblement de rang 3, donc le rang de A est 3.

On aurait aussi pu passer par des opérations élémentaires sur les lignes : la matrice A a le même rang que les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et la dernière est échelonnée en lignes et visiblement de rang 3.

7. Description des sous-espaces de $\mathbb{R}^n$: repères ou équations cartésiennes

Dans ce paragraphe, on démontre que tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à coefficients dans $\mathbb{R}$; on explique comment passer concrètement de la description d'un sous-espace à l'aide d'une famille génératrice à la description du même sous-espace comme ensemble des solutions d'un système linéaire.

7.1. La question. — Soient F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $(u_1, \ldots u_p)$ une famille génératrice finie de F.

Dire qu'un vecteur $v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^n$ appartient à F, c'est donc dire que v appartient à $\mathbf{Vect}\big[u_1, ...u_p\big]$, c'est-à-dire qu'il existe des éléments $\lambda_1, ..., \lambda_p$ de $\mathbb{R}$ vérifiant : $v = \lambda_1 u_1 + ... + \lambda_p u_p$.

Notons comme précédemment $u_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}$, ... $u_p = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ \vdots \\ a_{np} \end{pmatrix}$. La question à étudier est donc celle de l'existence d'au moins une solution au système linéaire (S) : $\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + ... + a_{1p}\lambda_p = & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}\lambda_1 + ... + a_{np}\lambda_p = & x_n \end{cases}$, d'inconnues $\lambda_1, ..., \lambda_p$.

Il s'agit donc de chercher les conditions sur le membre de droite pour que ce système admette au moins une solution.

7.2. Un exemple concret. — .

Plaçons-nous dans $\mathbb{R}^4$, considérons $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le sous-espace $F = \mathbf{Vect}\big[u_1, u_2, u_3, u_4\big]$.

Un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$ appartient à F si et seulement s'il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ vérifiant :

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & = x, \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 & = y, \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 & = z, \\ -\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 & = t. \end{cases}$$

Ce système équivaut à

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 \quad + \lambda_3 + \lambda_4 & = x \\ \quad -2\lambda_2 - 2\lambda_3 - 2\lambda_4 & = y - x \\ \quad +2\lambda_2 \qquad + \lambda_4 & = z + x \\ \qquad +2\lambda_3 \ + \lambda_4 & = t + x \end{cases}$$

ou encore, en allant au bout de la méthode du pivot,

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 \quad + \lambda_3 + \lambda_4 & = x \\ \quad -2\lambda_2 - 2\lambda_3 - 2\lambda_4 & = y - x \\ \qquad -2\lambda_3 \ - \lambda_4 & = z + y \\ \qquad 0 & = t + x + (z + y) \end{cases}$$

Le dernier système est échelonné ; visiblement, pour qu'il ait une solution, il est *nécessaire* qu'on ait $x + y + z + t = 0$, et si cette condition est vérifiée, *il y a bien au moins une solution*, par exemple donnée par $\lambda_4 = 0$, $\lambda_3 = -\frac{z+y}{2}$, $\lambda_2 = \frac{z+x}{2}$, $\lambda_1 = \frac{y+x}{2}$.
On en déduit que v appartient à F si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation $x + y + z + t = 0$.

7.3. Une stratégie générale. — .

- Pour étudier l'existence d'au moins une solution au système linéaire $(S):\begin{cases} a_{11}\lambda_1+\ldots+a_{1p}\lambda_p = & x_1\\ \vdots & \vdots\\ a_{n1}\lambda_1+\ldots+a_{np}\lambda_p = & x_n\end{cases}$
d'inconnues $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$, on peut naturellement utiliser la « méthode du pivot ».
- Vous savez que des opérations élémentaires sur les lignes permettent de voir que (S) est équivalent à un système *échelonné en lignes* dont le nombre de lignes non nulles est, vu le numéro 2.6, le rang r de la famille $(u_1,\ldots,u_p)$.
- Ainsi (S) est équivalent à un système de la forme

$$(S'):\begin{cases}\tilde a_{11}\lambda_1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+\tilde a_{1p}\lambda_p = & y_1\\ 0+\tilde a_{2j_2}\lambda_{j_2}+\ldots\ldots\ldots+\tilde a_{2p}\lambda_p = & y_2\\ \vdots & \vdots\\ 0+\ldots+0+\tilde a_{rj_r}\lambda_{j_r}+\ldots+\tilde a_{rp}\lambda_p = & y_r\\ 0+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+0 = & y_{r+1}\\ \vdots & \vdots\\ 0+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+0 = & y_n\end{cases}$$

ayant les deux propriétés suivantes :
(a) sur chaque ligne i, l'entier $j_i=\min\big(j\in\{1,..p\}\mid a_{ij}\neq 0\big)$ qui donne la position du premier coefficient non nul est strictement supérieur à celui j_{i-1} de la ligne précédente ;
(b) les seconds membres y_i sont obtenus à partir des coordonnées x_i en faisant des combinaisons linéaires :
pour chaque i, il existe des scalaires $\beta_{i1},\ldots\beta_{ip}$ tels que y_i soit égal à $\beta_{i1}x_1+\ldots+\beta_{ip}x_p$.
La propriété (a) traduit le fait que (S') est échelonné en lignes, la propriété (b) traduit le fait que les opérations élémentaires sur les lignes ne font intervenir que des combinaisons linéaires des lignes.

- On constate alors que pour qu'il y ait une solution au système (S'), il est *nécessaire* que les seconds membres des $(n-r)$ dernières lignes soient nuls, c'est-à-dire que les x_i vérifient les $n-r$ équations

$$(C)\begin{cases}\beta_{(r+1)1}\ x_1+\ldots+\beta_{(r+1)p}\ x_p & =0\\ \vdots & \vdots\\ \beta_{n1}\ \ x_1+\ldots+\ \ \beta_{np}\ \ x_p & =0\end{cases}$$

- C'est également *suffisant* : si ces équations sont vérifiées, alors on obtient une solution de (S'), donc de (S), en choisissant $\lambda_{j_r}=\dfrac{y_r}{\tilde a_{rj_r}}$ et tous les λ_k nuls pour $k>j_r$, ce qui garantit que la $r^{\text{ème}}$ équation de (S') est vérifiée,
puis en choisissant $\lambda_{j_{r-1}}=y_{r-1}-\tilde a_{(r-1)j_r}\lambda_{j_r}$ et tous les λ_k nuls pour k strictement compris entre j_{r-1} et j_r, ce qui garantit que la $(r-1)^{\text{ème}}$ équation de (S') est vérifiée, et en poursuivant ainsi jusqu'à la première ligne.

- Ainsi le système (S) admet une solution, autrement dit v est dans F, si et seulement si les **conditions de compatibilité** (C) sont vérifiées. Ces conditions sont des équations linéaires homogènes portant sur les coordonnées de v.
- Il y a $(n-r)$ équations dans le système (C). Rappelons le lien avec la dimension de F : l'entier r était le rang de $(u_1,\ldots u_p)$, c'est donc la dimension de $\mathbf{Vect}\big[u_1,\ldots,u_p\big]$, mais cette famille est génératrice de F, donc $r=\dim F$.

Nous avons démontré le résultat suivant :

Théorème 2.32 – Description des S.E.V. de $\mathbb{R}^n$ par des équations linéaires homogènes

Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à coefficients dans $\mathbb{R}$.
Si F est un sous-espace vectoriel de dimension r de $\mathbb{R}^n$,
alors il existe un système linéaire homogène de $(n-r)$ équations dont F est l'ensemble des solutions.

CHAPITRE 3

SOMMES ET SUPPLÉMENTAIRES

1. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Définition 3.1 – Sous-espace somme de deux sous-espaces vectoriels

Soit E un espace vectoriel ; soient F_1, F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.
Le *sous-espace somme de F_1 et F_2*, noté $F_1 + F_2$, est l'ensemble des vecteurs qui peuvent s'écrire comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 :

$$F_1 + F_2 = \left\{x_1 + x_2 \;\middle|\; x_1 \in F_1,\ x_2 \in F_2\right\}$$

***Il s'agit toujours d'un sous-espace vectoriel.* —** En effet, reprenant les notations précédentes, si $x = x_1 + x_2$ et $y = y_1 + y_2$ sont deux éléments de $F_1 + F_2$ (avec, donc, x_1 et y_1 dans F_1 et x_2, y_2 dans F_2), et si λ et μ sont deux scalaires, on a $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2)$; puisque F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels, $\lambda x_1 + \mu y_1$ appartient à F_1 et $\lambda x_2 + \mu y_2$ à F_2. Ainsi $\lambda x + \mu y$ appartient à $F_1 + F_2$, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 3.2 – Reformulation abstraite de la définition

On a l'égalité $F_1 + F_2 = \mathbf{Vect}[F_1 \cup F_2]$. Ainsi, $F_1 + F_2$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contienne à la fois F_1 et F_2.

***Exemple 3.3* (Avec deux droites). —** Dans $\mathbb{R}^3$, les droites vectorielles $\mathscr{D}_1 = \mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$ et $\mathscr{D}_2 = \mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]$ ont pour somme le plan $\mathscr{P} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, x = z\right\}$.

En effet, $\mathscr{P} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\x\end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix}x\\0\\x\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\y\\0\end{pmatrix},\ x, y \in \mathbb{R}\right\} = \{u + v,\ u \in \mathscr{D}_1, v \in \mathscr{D}_2\} = \mathscr{D}_1 + \mathscr{D}_2$.

***Exemple 3.4* (Avec deux plans). —**

Toujours dans $\mathbb{R}^3$, considérons les plans $\mathscr{H} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ z = 0\right\}$ et $\mathscr{V} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ y = 0\right\}$. On a $\mathscr{H} + \mathscr{V} =$

$\mathbb{R}^3$. En effet, on a bien sûr $\mathscr{H}+\mathscr{V} \subset \mathbb{R}^3$, et pour tout vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, on peut écrire $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x/2 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{H}} + \underbrace{\begin{pmatrix} x/2 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}}_{\in \mathscr{V}}$, ainsi $\mathbb{R}^3 \subset \mathscr{H} + \mathscr{V}$.

***Exemple 3.5* (Polynômes pairs et impairs). —** Dans $\mathbb{R}[X]$, considérons les sous-espaces

$$\mathscr{P} = \{P \in \mathbb{R}_6[X], P(-X) = P(X)\} = \left\{a + cX^2 + eX^4 + gX^6, \quad (a,c,e,g) \in \mathbb{R}^4\right\}$$

$$\mathscr{I} = \{P \in \mathbb{R}_6[X], P(-X) = -P(X)\} = \left\{bX + dX^3 + fX^5, \quad (b,d,f) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

des polynômes *pairs* et *impairs* de degré inférieur ou égal à 6. On a $\mathscr{P} + \mathscr{I} = \mathbb{R}_6[X]$.

Proposition 3.6 – Sous-espace engendré par une réunion de parties

Si A et B sont deux parties de E (pas nécessairement des sous-espaces vectoriels), on a

$$\textbf{Vect}[A \cup B] = \textbf{Vect}[A] + \textbf{Vect}[B].$$

***Exemple 3.7.* —** Dans $\mathbb{R}^3$, on a l'égalité $\textbf{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] + \textbf{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \textbf{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

Comme $3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, on a donc en fait $\textbf{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] + \textbf{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \textbf{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.

2. Formule de Grassmann pour la dimension du sous-espace somme

Théorème 3.8 – Formule de Grassmann

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E, alors

$$\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2) - \dim(F_1 \cap F_2).$$

3. Somme directe (cas de deux sous-espaces)

3.1. Définition et premiers exemples. —

Définition 3.9 – Situation de somme directe pour deux sous-espaces

Soit E un espace vectoriel, soient F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de E.
On dit que F_1 et F_2 sont *en somme directe* lorsque la propriété suivante est vérifiée.

$$\begin{aligned} \textit{si} \quad & x_1 + x_2 = \mathbf{0}_E \quad \textit{où} \quad x_1 \in F_1 \textit{ et } x_2 \in F_2, \\ \textit{alors} \quad & x_1 = \mathbf{0}_E \text{ et } x_2 = \mathbf{0}_E. \end{aligned}$$

Examinons cette notion sur les précédents exemples.

Exemple 3.10. — Dans $\mathbb{R}^3$, les droites vectorielles $\mathscr{D}_1 = \textbf{Vect}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right]$ et $\mathscr{D}_2 = \textbf{Vect}\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]$ sont en somme directe.

En effet, si $x_1 = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\\alpha\end{pmatrix}$ est un vecteur de $\mathscr{D}_1$ et $x_2 = \begin{pmatrix}0\\\beta\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur de $\mathscr{D}_2$, si $\begin{pmatrix}\alpha\\0\\\alpha\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\beta\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, alors bien sûr $\alpha = \beta = 0$ et $x_1 = x_2 = 0$.

Exemple 3.11. — Dans $\mathbb{R}^3$, les plans $\mathscr{H} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ z = 0\right\}$ et $\mathscr{V} = \left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ y = 0\right\}$ ne sont pas en somme directe. En effet, $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{H}$, $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ appartient à $\mathscr{V}$, et on a $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ alors que ces vecteurs ne sont pas nuls.

Exemple 3.12. — Dans $\mathbb{R}[X]$, les sous-espaces

$$\mathscr{P} = \{P \in \mathbb{R}_6[X], P(-X) = P(X)\} = \left\{a + cX^2 + eX^4 + gX^6, (a,c,e,g) \in \mathbb{R}^4\right\}$$

et

$$\mathscr{I} = \{P \in \mathbb{R}_6[X], P(-X) = -P(X)\} = \left\{bX + dX^3 + fX^5, (b,d,f) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

sont en somme directe. En effet, si $U(X) = a + cX^2 + eX^4 + gX^6$ est un vecteur de $\mathscr{P}$ et $V(X) = bX + dX^3 + fX^5$ est un vecteur de $\mathscr{I}$ et si leur somme est nulle, alors tous les coefficients a à g sont nuls, donc les polynômes U et V sont nuls.

Exemple 3.13. — Dans $\mathbb{R}[X]$, les sous-espaces $\mathscr{V}_0 = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = 0\}$ et $\mathscr{V}_{-5} = \{P \in \mathbb{R}[X], P(-5) = 0\}$ ne sont pas en somme directe. En effet, on a $\underbrace{X(X+5)}_{\in \mathscr{V}_0} + \underbrace{(-X)(X+5)}_{\in \mathscr{V}_{-5}} = 0$ alors que les deux termes de cette somme sont non-nuls.

***Remarque 3.14* (Notation $\oplus$).** — L'usage, lorsque F_1 et F_2 sont en somme directe, est de noter $F_1 \oplus F_2$ la somme qui d'habitude se note $F_1 + F_2$.

Ainsi, écrire « $F_1 + F_2 = F_1 \oplus F_2$ », c'est affirmer que F_1 et F_2 sont en somme directe.

Attention à utiliser cette notation à bon escient : dans ce cours,

- on ne peut parler de $F_1 \oplus F_2$ que si on a déjà vérifié que F_1 et F_2 sont en somme directe[1] ;
- si on veut « montrer que $A = B \oplus C$ », il faut vérifier que $A = B + C$ *et* que B et C sont en somme directe.

3.2. Caractérisations de la situation de somme directe. —

La notion de somme directe est extrêmement utile, car elle admet l'interprétation suivante.

Proposition 3.15 – Somme directe et unicité des décompositions des vecteurs de $F + G$

Soit E un espace vectoriel, soient F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de E. Il y a équivalence entre :

(i) *F_1 et F_2 sont en somme directe.*
(ii) *Si $x_1 + x_2 = x_1' + x_2'$ avec $(x_1, x_1') \in F_1^2$ et $(x_2, x_2') \in F_2^2$, alors $x_1 = x_1'$ et $x_2 = x_2'$.*
(iii) *Pour tout vecteur z de $F_1 + F_2$, il existe un* unique *x_1 de F_1 et un* unique *x_2 de F_2 tels que $z = x_1 + x_2$.*

1. Dans d'autres contextes mathématiques, cette notation peut avoir un autre sens.

Le résultat qui vient simplifie considérablement l'utilisation de la notion de somme directe.

Proposition 3.16 – Somme directe $\iff$ intersection réduite à $\{0\}$

Soit E un espace vectoriel, soient F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de E. Il y a équivalence entre :

(i) F_1 *et* F_2 *sont en somme directe.*

(ii) $F_1 \cap F_2 = \{\mathbf{0}_E\}$.

Exemple 3.17 **(Somme de deux droites vectorielles).** — Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites vectorielles *distinctes* de $\mathbb{R}^3$, alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont en somme directe. En effet, $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}'$ est contenu dans $\mathscr{D}$ et il est aussi contenu dans $\mathscr{D}'$; il est donc de dimension 0 ou 1. S'il est de dimension 1, il doit être égal à $\mathscr{D}$ et il doit être aussi égal à $\mathscr{D}'$ pour la même raison ; donc si $\mathscr{D} \neq \mathscr{D}'$ on doit avoir $\mathscr{D} \cap \mathscr{D}' = \{0\}$.

Exemple 3.18 **(Somme d'un plan et d'une droite de $\mathbb{R}^3$).** — Si $\mathscr{P}$ est un plan de $\mathbb{R}^3$, si $\mathscr{D}$ est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ et si $\mathscr{D}$ n'est pas contenue dans $\mathscr{P}$, alors $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont en somme directe. En effet, $\mathscr{D} \cap \mathscr{P}$ est contenu dans $\mathscr{D}$ qui est de dimension 1, donc c'est soit $\{0\}$ soit $\mathscr{D}$. Dire que $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \mathscr{D}$, c'est dire que $\mathscr{D}$ est contenue dans $\mathscr{P}$. Ainsi, si $\mathscr{D}$ n'est pas contenue dans $\mathscr{P}$ alors $\mathscr{D} \cap \mathscr{P} = \{0\}$.

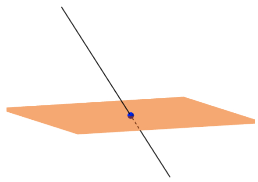


FIGURE 1. Un plan et une droite en somme directe dans $\mathbb{R}^3$.

Les deux exemples ci-dessus peuvent se généraliser de la manière suivante.

Proposition 3.19 – Somme directe lorsque l'un des sous-espaces est une droite

si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E et si x est un vecteur qui n'appartient pas à F, alors F et la droite $\mathbf{Vect}[x]$ *sont en somme directe.*

Continuons à illustrer le lien entre somme directe et intersection.

Exemple 3.20 **(Somme de deux plans de $\mathbb{R}^3$).** — Dans l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^3$, deux plans ne sont jamais en somme directe : si P_1 et P_2 sont deux plans de $\mathbb{R}^3$, la dimension de $P_1 + P_2$ est soit 2 soit 3 ; de la formule de Grassmann on déduit que $P_1 \cap P_2$ est de dimension 1 ou 2, donc qu'on n'a jamais $P_1 \cap P_2 = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}\}$.

FIGURE 2. *Gauche :* Deux plans de $\mathbb{R}^3$ ne sont jamais en somme directe. *Droite :* deux droites en somme directe déterminent un plan.

***Exemple 3.21* (Un exemple abstrait important). —** Plus généralement, soit E un espace vectoriel de dimension finie. Si F_1 et F_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E et si $\dim(F_1)+\dim(F_2) > \dim(E)$, alors F_1 et F_2 ne peuvent pas être en somme directe : $F_1 + F_2$ étant un sous-espace vectoriel de E, sa dimension ne dépasse pas $\dim(E)$, et la formule de Grassmann $\dim(F \cap G) = \dim(F)+\dim(G)-\dim(F+G)$ montre qu'on ne peut avoir $\dim(F \cap G) = 0$ dans le cas ici envisagé.

***Exemple 3.22* (Retour sur la page 37). —** Reprenons les exemples 3.12 et 3.13 pour voir si le lien entre somme directe et intersection peut simplifier les discussions.

- Dans $\mathbb{R}[X]$, pour vérifier que les sous-espaces
$$\mathscr{P} = \{P \in \mathbb{R}_6[X], P(-X) = P(X)\} \quad \text{et} \quad \mathscr{I} = \{P \in \mathbb{R}_6[X], P(-X) = -P(X)\}$$
sont en somme directe, il suffit d'étudier l'intersection.
Or, si P appartient à $\mathscr{P} \cap \mathscr{I}$, alors on a $P(X) = P(-X) = -P(X)$, si bien que $2P(X) = 0$ et P est le polynôme nul. Ainsi $\mathscr{P} \cap \mathscr{I} = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}_6[X]}\}$.
- Dans $\mathbb{R}[X]$, les sous-espaces $\mathscr{V}_0 = \{P \in \mathbb{R}[X], P(0) = 0\}$ et $\mathscr{V}_{-5} = \{P \in \mathbb{R}[X], P(-5) = 0\}$ ne sont pas en somme directe. En effet, $\mathscr{V}_0 \cap \mathscr{V}_{-5}$ contient le polynôme $X(X+5)$, donc il n'est pas réduit à $\{\mathbf{0}_{\mathbb{R}[X]}\}$.

3.3. Cas de la dimension finie. —

Proposition 3.23 – Sommes directes : dimensions et bases

Soit E un espace vectoriel de dimension finie , soient F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de E. Il y a équivalence entre :

(i) F_1 *et* F_2 *sont en somme directe.*
(ii) $\dim(F_1 + F_2) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$.
(iii) *Si $\mathscr{B}_1$ est une base de F_1 et $\mathscr{B}_2$ est une base de F_2, alors $\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2 = \emptyset$ et $\mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est une base de $F_1 + F_2$.*

Décomposition d'un espace vectoriel en somme directe de deux sous-espaces vectoriels. — Étant donné un espace vectoriel E, il n'est pas rare que l'existence d'une décomposition $E = F_1 \oplus F_2$ en somme directe de deux sous-espaces « intéressants » soit un renseignement précieux. Nous étudierons en détail cette situation dans le prochain paragraphe.

On peut déduire le résultat suivant des précédents.

Proposition 3.24 – Cas d'une somme directe donnant E tout entier

Il y a équivalence entre

(a) $E = F_1 \oplus F_2$,
(b) $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ *et* $\dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$
(c) *il existe une base de E dont les k premiers vecteurs sont dans F_1 et les $n-k$ derniers dans F_2.*

4. Supplémentaires d'un sous-espace vectoriel

4.1. Définition et remarques. —

Définition 3.25 – Supplémentaire d'un sous-espace vectoriel

Soient E un espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Un *supplémentaire de F dans E* est un sous-espace vectoriel S de E qui vérifie : $E = F \oplus S$.

Interprétation. — dire que S est un supplémentaire de F dans E, c'est dire que tout vecteur de E peut s'écrire *de façon unique* comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de S.

Attention. — Ne pas confondre *les éventuels supplémentaires de F dans E* (une notion d'algèbre linéaire, qui donne toujours des sous-espace vectoriels) et *le complémentaire de F dans E* (une notion de théorie des ensembles, qui ne donne jamais un sous-espace vectoriel).

Remarque 3.26. — D'après la partie (b) de la proposition 3.24, tous les supplémentaires éventuels de F dans E ont la même dimension, à savoir $\dim(E) - \dim(F)$.

Vocabulaire. — *Deux sous-espaces F_1 et F_2 de E* sont supplémentaires *quand $E = F_1 \oplus F_2$. C'est la situation rencontrée dans la proposition 3.24.*

4.2. Exemples classiques. —

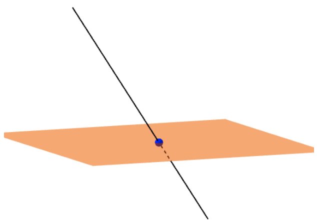
Exemple 3.27 **(Droite et plan de $\mathbb{R}^3$). — Droites et plans de $\mathbb{R}^3$**

Soient a, b et c sont trois réels non tous nuls ; considérons le plan $\mathscr{P} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ ax + by + cz = 0 \right\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Le vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ n'appartient pas à $\mathscr{P}$. Montrons que la droite $\mathscr{D} = \mathbb{R}\vec{u} = \mathbf{Vect}[\vec{u}]$ est un supplémentaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}^3$.

La droite $\mathscr{D}$ n'est pas contenue dans le plan $\mathscr{P}$, donc $\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ sont en somme directe (voir l'exemple 3.17).

De plus, on a l'égalité $\dim(\mathscr{P}) + \dim(\mathscr{D}) = 2 + 1 = \dim(\mathbb{R}^3)$. D'après le critère (b) de la proposition 3.24, on a $\mathbb{R}^3 = \mathscr{P} \oplus \mathscr{D}$, ce qui signifie bien que $\mathscr{D}$ est un supplémentaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}^3$.



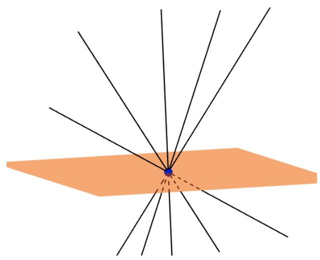


FIGURE 3. *Gauche :* une droite et un plan supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$. *Droite :* le plan orange admet une infinité de supplémentaires disincts

Plus généralement, si $\mathscr{P}$ est un plan de $\mathbb{R}^3$, *toute* droite non contenue dans $\mathscr{P}$ est un supplémentaire de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}^3$ (le raisonnement est exactement le même qu'à partir de la troisième ligne de l'exemple 3.27).

Si $\mathscr{P}$ est un plan de $\mathbb{R}^3$, il admet donc une infinité de supplémentaires différents !

Exemple 3.28 **(Matrices symétriques et antisymétriques). —**

Plaçons-nous dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 1$, considérons l'espace $\mathscr{S} = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M^T = M\right\}$ des matrices symétriques et l'espace $\mathscr{A} = \left\{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ M^T = -M\right\}$ des matrices antisymétriques.

- Si une matrice M appartient à $\mathscr{S}$ et à $\mathscr{A}$, on a $M = M^T = -M$, donc M doit être la matrice nulle : $\mathscr{S} \cap \mathscr{A} = \{0\}$.
- De plus, nous avons vu page 28 que $\dim(\mathscr{S}) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathscr{A}) = \frac{n(n-1)}{2}$; on a donc $\dim(\mathscr{S}) + \dim(\mathscr{A}) = n^2$.
- Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension n^2, le critère (b) de la proposition 3.24 garantit alors que $\mathscr{S}$ et $\mathscr{A}$ sont supplémentaires.

Pour chaque matrice M, on peut préciser concrètement l'unique décomposition de M comme somme d'un élément de $\mathscr{S}$ et d'un élément de $\mathscr{A}$: on constate que

$$M = \underbrace{\frac{M+M^T}{2}}_{\text{symétrique}} + \underbrace{\frac{M-M^T}{2}}_{\text{antisymétrique}},$$

et on *sait d'avance* que c'est la seule manière d'écrire M sous la forme $M_{\mathscr{S}} + M_{\mathscr{A}}$ avec $M_{\mathscr{S}}$ symétrique et $M_{\mathscr{A}}$ antisymétrique.

Exemple 3.29 **(Fonctions paires et impaires). —**
Plaçons-nous dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, et considérons l'espace $\mathscr{P}$ des fonctions *paires* et l'espace $\mathscr{I}$ des fonctions *impaires*. Si f est une fonction à la fois paire et impaire et si x est un nombre réel, on a $f(x) = f(-x) = -f(x)$, donc $f(x) = 0$, si bien que f est la fonction nulle. Ainsi $\mathscr{P} \cap \mathscr{I} = \{0\}$ et $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont *en somme directe*.

Montrons que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont supplémentaires. Comme $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ est de dimension infinie, il n'est pas possible d'utiliser un argument de dimension. Montrons que toute fonction $f \in \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ peut s'écrire *de façon unique* comme
$f = f_{\mathscr{P}} + f_{\mathscr{I}}$ avec $f_{\mathscr{P}} \in \mathscr{P}$ et $f_{\mathscr{I}} \in \mathscr{I}$.

Si une telle décomposition est disponible, alors pour tout x de $\mathbb{R}$, on a

$$f(x) = f_{\mathscr{P}}(x) + f_{\mathscr{I}}(x)$$

et comme $f_{\mathscr{P}}(-x) = f_{\mathscr{P}}(x)$ et $f_{\mathscr{I}}(-x) = -f_{\mathscr{I}}(x)$,

$$f(-x) = f_{\mathscr{P}}(x) - f_{\mathscr{I}}(x)$$

ce qui donne *nécessairement* $f_{\mathscr{P}}(x) = \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $f_{\mathscr{I}}(x) = \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.
Ainsi les *seuls candidats possibles* pour $f_{\mathscr{P}}$ et $f_{\mathscr{I}}$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.
Comme on a bien

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} + \frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

il existe une *unique* décomposition de f en somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. Cela montre bien que $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ sont supplémentaires.

On appelle parfois *partie paire* de f la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et *partie impaire* de f la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$:
par exemple, la partie paire de exp est la fonction cosh et sa partie paire est la fonction sinh.

Exemple 3.30 **(Constantes et fonctions qui valent zéro en zéro). —**
Restons dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et considérons l'espace $\mathscr{E}_0$ des fonctions *qui valent zéro en zéro* et l'espace $\mathscr{C}$ des fonctions *constantes*. Montrons que $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathscr{E}_0 \oplus \mathscr{C}$. Il s'agit de savoir si toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ peut s'écrire de façon unique comme somme d'une fonction valant zéro en zéro et d'une fonction constante.

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et s'il existe des éléments $g \in \mathscr{E}_0$ et $h \in \mathscr{C}$ vérifiant $f = f_0 + c_f$, on a $f(0) = g(0) + h(0) = 0 + h(0)$. Comme h doit être une fonction constante, c'est nécessairement la fonction constante $x \mapsto f(0)$, et g est nécessairement la fonction $x \mapsto f(x) - f(0)$. Il y a donc une seule possibilité pour g et une seule possibilité pour h : constatant qu'on a bien

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = (f(x) - f(0)) + f(0)$$

on obtient l'existence d'une *unique* décomposition de f en somme d'un élément de $\mathscr{E}_0$ et d'un élément de $\mathscr{C}$.

On a donc bien $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \mathscr{E}_0 \oplus \mathscr{C}$, autrement dit, $\mathscr{E}_0$ et $\mathscr{C}$ sont supplémentaires dans $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

4.3. Existence et non-unicité. —

Proposition 3.31 – Supplémentaires : existence toujours, mais unicité presque jamais

Soit E un espace vectoriel, soit F un sous-espace vectoriel de E.

- *Il existe au moins un supplémentaire de F dans E*
- *Si $\dim(E) \geq 2$ et si F n'est ni $\{0\}$ ni E, alors F admet une infinité de supplémentaires différents.*

***Remarque 3.32* (Comment trouver un supplémentaire en pratique). —** La partie « existence » de la démonstration indique que pour obtenir concrètement un supplémentaire de F dans E, on peut par exemple chercher une base de F puis la compléter en une base de E.

5. Somme et somme directe (cas de plusieurs sous-espaces)

Nous généralisons ici les résultats vus dans ce chapitre au cas où on somme strictement plus de deux sous-espaces. Leur intérêt n'est pas évident en première lecture ; ils nous seront cependant indispensables pour parler de réduction des endomorphismes.

5.1. Définitions. —

Définition 3.33 – Sous-espace somme pour k sous-espace vectoriels

Soit E un espace vectoriel, soient k un élément de $\mathbb{N}^\star$ et F_1, F_2, ..., F_k des sous-espaces vectoriels de E.
Le *sous-espace somme* $F_1 + F_2 + \ldots + F_k$ est l'ensemble

$$\left\{x_1 + x_2 + \ldots + x_k \,\middle|\, x_1 \in F_1,\ x_2 \in F_2, \ldots, x_k \in F_k\right\}.$$

On a l'égalité $F_1 + F_2 + \ldots + F_k = \mathbf{Vect}[F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k]$.

Définition 3.34 – Situation de somme directe pour k sous-espaces vectoriels

On dit que F_1, F_2, ..., F_k sont *en somme directe* lorsque

$$\text{si } x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 0 \quad \text{avec} \quad x_1 \in F_1, x_2 \in F_2, \ldots, x_k \in F_k,$$
$$\text{alors } x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0.$$

Dans ce cas, on note $F_1 \oplus \ldots \oplus F_k$ à la place de $F_1 + \ldots + F_k$.

Attention. — Il ne suffit pas, pour que F_1, F_2, ..., F_k soient en somme directe, que les F_i soient deux à deux en somme directe. De même, l'étude de $F_1 \cap F_2 \cap \ldots \cap F_k$ ne permet pas de savoir si F_1, F_2, ..., F_k sont ou pas en somme directe.

5.2. Caractérisations de la situation de somme directe. —

Proposition 3.35 – Caractérisations de la situation de somme directe

Soit E un espace vectoriel, soit k un élément de $\mathbb{N}^\star$ et F_1, F_2, ..., F_k des sous-espaces vectoriels de E. Il y a équivalence entre

(i) La somme $F_1 + \ldots + F_k$ est directe

(ii) ***(Unicité des décompositions)*** *Si $\underbrace{x_1}_{\in F_1} + \ldots + \underbrace{x_k}_{\in F_k} = \underbrace{x'_1}_{\in F_1} + \ldots + \underbrace{x'_k}_{\in F_k}$, alors $x_1 = x'_1$, ..., $x_k = x'_k$.*

(iii) ***(Pas de perte de dimension)*** $\dim(F_1 + \ldots + F_k) = \dim(F_1) + \ldots + \dim(F_k)$

(iv) ***(Concaténation de bases)*** *Si $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$, ..., $\mathscr{B}_k$ sont des bases de F_1, F_2,..., F_k,*
alors $\mathscr{B}_i \cap \mathscr{B}_j = \emptyset$ pour chaque $i \neq j$ et $\mathscr{B}_1 \cup \ldots \cup \mathscr{B}_k$ est une base de $F_1 + \ldots + F_k$.

CHAPITRE 4

APPLICATIONS LINÉAIRES

1. Définition, exemples, propriétés élémentaires

1.1. Définition, remarques pratiques et vocabulaire. —

Définition 4.1 – Application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application de E dans F.
On dit que f est *linéaire* lorsque

$$\forall (u, v) \in E^2, \;\; f(u+v) = f(u) + f(v)$$
$$\forall u \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \;\; f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$$

Fixons deux espaces vectoriels E et F.

Proposition 4.2 – L'image du vecteur nul par une application linéaire est le vecteur nul

Si $f : E \to F$ est linéaire, alors $f(\mathbf{0}_E) = \mathbf{0}_F$

En effet, $f(\mathbf{0}_E) = f(2\mathbf{0}_E) = 2f(\mathbf{0}_E)$, donc si on note $y = f(\mathbf{0}_E)$, c'est un vecteur de F et on a $y = 2y$, ainsi $y = \mathbf{0}_F$.

Proposition 4.3 – Comment vérifier en pratique qu'une application est linéaire

Une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si elle vérifie

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v).$$

Vocabulaire : endomorphisme, forme linéaire. — Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- Lorsque f est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$, on dit que c'est une *forme linéaire*. Par exemple, l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_0 : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\ (x_1, \cdots, x_n) &\mapsto x_1 \end{aligned}$$

  est linéaire, c'est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$.
- Lorsque f est une application *linéaire* de E dans lui-même, on dit que f est un *endomorphisme de E*.
  Par exemple, l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Id}_E : E &\to E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

  est linéaire [1], c'est un endomorphisme de E.

1.2. Exemples d'applications linéaires. — La liste que je vais donner est longue, afin que vous puissiez prendre conscience du fait que beaucoup d'opérations mathématiques « naturelles », issues de contextes variés, sont linéaires.

(a) L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 7x-4y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est linéaire. En effet, si $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^2$ et si λ est un nombre réel, on a

$$f(u+v) = f\left[\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2(x+x')+3(y+y') \\ 7(x+x')-4(y+y') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+3y \\ 7x-4y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x'+3y' \\ 7x'-4y' \end{pmatrix} = f(u)+f(v)$$

et

$$f(\lambda\cdot u) = \begin{pmatrix} 2(\lambda x)+3(\lambda y) \\ 7(\lambda x)-4(\lambda y) \end{pmatrix} = \lambda\cdot\begin{pmatrix} 2x+3y \\ 7x-y \end{pmatrix} = \lambda\cdot f(u).$$

On aurait pu aller plus vite en introduisant la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ et en constatant que pour tout X de $\mathbb{R}^2$, $f(X) = AX$, si bien que pour chaque (u, v) de $(\mathbb{R}^2)^2$ et chaque (λ, μ) de $\mathbb{R}^2$,

$$f(\lambda u + \mu v) = A(\lambda u + \mu v) = \lambda(Au) + \mu(Av) = \lambda f(u) + \mu f(v). \tag{1.1}$$

(b) **Application linéaire canoniquement associée à une matrice.**
La seconde stratégie que nous avons utilisée pour montrer la linéarité de l'application précédente fait apparaître un fait très général et essentiel pour la suite.

Définition 4.4 – Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ une matrice à n lignes et p colonnes $(n, p \in \mathbb{N}^\star)$.
L'application linéaire canoniquement associée à A est l'application linéaire

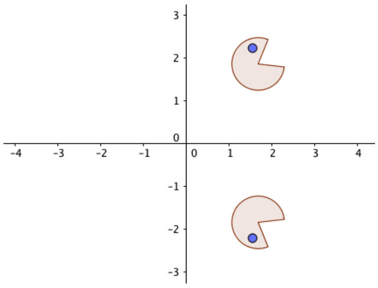
$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^p &\to \mathbb{R}^n \\ X &\mapsto AX. \end{aligned}$$

1. On a bien sûr $\forall (u,v) \in E^2, \forall(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{Id}_E(\lambda u + \mu v) = \lambda u + \mu v = \lambda \mathrm{Id}_E(u) + \mu \mathrm{Id}_E(v)$.

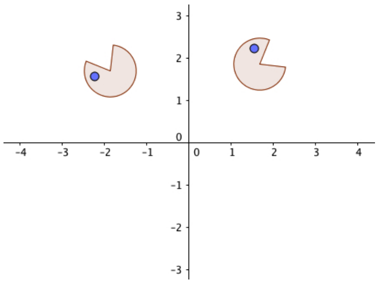
La démonstration est évidemment la même qu'en (1.1).

Beaucoup d'exemples « intéressants » d'applications linéaires sont obtenus de cette manière. Voici quelques illustrations en dimension 2, qui montrent que beaucoup des notions classiques de géométrie plane peuvent être étudiées par l'algèbre linéaire.

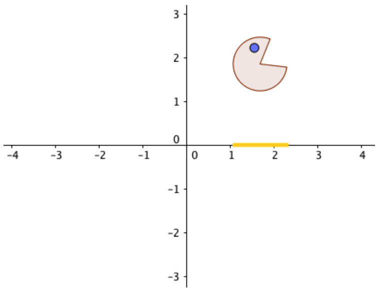
- Si A est la matrice $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T_A : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$ est la *symétrie par rapport à l'axe des abscisses*.



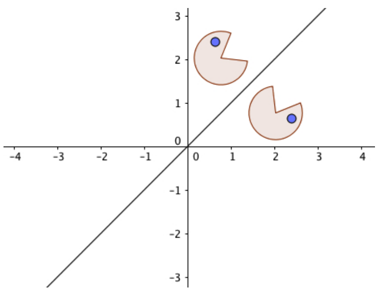
- Si θ est un nombre réel et A est la matrice $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$, T_A est la *rotation d'angle θ autour de l'origine*.



- Si A est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, T_A est la *projection orthogonale sur l'axe des ordonnées*,



- Si A est la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, T_A est la *transformation qui permute les coordonnées x et y*, autrement dit la *symétrie par rapport à la première bissectrice*



Nous rencontrerons très souvent des transformations de ce type, car toute application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est en fait de cette forme :

Proposition 4.5 – Toute appli. linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ est associée à une matrice

Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ $(n, p \in \mathbb{N}^\star)$.
Notons $(e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.
Soit A la matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ dont la 1^{re} colonne est le vecteur $f(e_1)$ de $\mathbb{R}^n$, dont la $2^{è}$ colonne $f(e_2)$, ... et dont la $p^{è}$ colonne est $f(e_p)$.
On a alors l'égalité $f = T_A$.

Le chapitre suivant reviendra très longuement sur des idées de ce type.

(c) **Homothétie, identité, application nulle.**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Si α est un scalaire de $\mathbb{R}$, l'application

$$\begin{aligned} E &\to E \\ x &\mapsto \alpha \cdot x \end{aligned}$$

est linéaire. On l'appelle *l'homothétie de E de rapport α.*

Lorsque $\alpha = 1$, c'est de l'application *identité* id_E que nous sommes en train de parler. Lorsque $\alpha = 0$, c'est de l'application *nulle* $x \mapsto \mathbf{0}$ que nous sommes en train de parler.
Plus généralement, si E et F sont deux espaces vectoriels, l'application de E dans F définie par $f(x) = \mathbf{0}_F$ pour tout x de E est linéaire.

(d) **Linéarité de l'intégrale**

Soient a et b deux nombres réels avec $a < b$
et $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ le sous-espace de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$ formé des fonctions continues sur $[a,b]$. L'application

$$\begin{aligned} \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ f &\mapsto \int_a^b f \end{aligned}$$

est linéaire.

(e) **Translation de la variable dans une fonction**

Soit a un nombre réel. L'application

$$\begin{aligned} \tau_a : \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \tau_a[f] = [x \mapsto f(x-a)] \end{aligned}$$

est linéaire.

(f) **Multiplication par une fonction**

Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'application

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}_\varphi : \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \varphi \cdot f = [x \mapsto \varphi(x) f(x)] \end{aligned}$$

est linéaire.

(g) **Composition à droite** Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'application

$$\begin{aligned} CD_\varphi : \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f &\mapsto f \circ \varphi \end{aligned}$$

est linéaire. Ne pas confondre avec l'exemple précédent !

Pour le démontrer, constatons que si f et g sont deux fonctions et λ et μ deux réels, $CD_\varphi(\lambda f + \mu g)$ est la fonction $x \mapsto (\lambda f + \mu g)(\varphi(x)) = \lambda f(\varphi(x)) + \mu g(\varphi(x)) = \lambda CD_\varphi(f)(x) + \mu CD_\varphi(g)(x)$, c'est-à-dire la fonction $\lambda CD_\varphi(f) + \mu CD_\varphi(g)$.

Attention, en revanche, l'application de composition à gauche

$$\begin{aligned} CG_\varphi : \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \varphi \circ f \end{aligned}$$

n'est presque jamais linéaire. Par exemple, si φ est la fonction $x \mapsto x^2$, CG_φ est l'application $f \mapsto f^2$, et si f n'est pas l'application nulle, on n'a pas $CG_\varphi(2f) = 2 \cdot CG_\varphi(f)$, puisque $CG_\varphi(2f) = (2f)^2 = 4f^2 = 4 \cdot CG_\varphi(f)$.

(h) **Sommation de vecteurs**

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et r un élément de $\mathbb{N}^\star$.

Rappelons que le produit cartésien $E^r = \underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{r \text{ fois}}$ est un espace vectoriel. L'application

$$\begin{aligned} \Sigma : E^r &\to E \\ (u_1, \ldots u_r) &\mapsto u_1 + \ldots + u_r \end{aligned}$$

est linéaire. En effet, si $U = (u_1, ..u_r)$ et $V = (v_1, \ldots, v_r)$ sont deux vecteurs de E^r et si λ est un scalaire de $\mathbb{R}$, alors

$$\Sigma(U+V) = (u_1+v_1) + \ldots + (u_r+v_r) = (u_1 + \ldots + u_r) + (v_1 + \ldots + v_r) = \Sigma(U) + \Sigma(V);$$

$$\Sigma(\lambda \cdot U) = \lambda \cdot u_1 + \ldots + \lambda \cdot u_r = \lambda \cdot (u_1 + \ldots + u_r) = \lambda \cdot \Sigma(U).$$

(i) **Restriction d'une application linéaire à un sous-espace vectoriel.**

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application.

Si A est un *sous-espace vectoriel* de E et si f est <u>*linéaire*</u>, alors la restriction

$$\begin{aligned} f_{|A} : A &\to F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

est aussi linéaire.

(k,bis) **Inclusion d'un sous-espace vectoriel de E dans E.**

En particulier, si A est un sous-espace vectoriel de E, *l'injection canonique*

$$\begin{aligned} \iota : A &\to E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

est linéaire.

1.3. Exemples d'applications non-linéaires. —

- L'application

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & x + 3y + 1 \end{array}$$

n'est pas linéaire. En effet, l'image du vecteur nul de $\mathbb{R}^2$ par f n'est pas nulle.

- L'application
$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & xy \end{array}$$
n'est pas linéaire. En effet, $g\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = 4$, ce qui n'est pas égal à $2 \cdot g\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$.
- Les applications
$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & x^2 + 3y - e^x \end{array} \quad \text{et} \quad T : \begin{array}{ccc} \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \mapsto & \ln(f^4 + 1) \end{array}$$
ne sont pas non plus linéaires. Voyez-vous pourquoi ?
- (exemple moins formel).
L'inversion des matrices n'est pas une opération linéaire. En effet :
  - Si A est une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $2A$ est aussi inversible, mais $(2A)^{-1}$ est égale à $0.5A^{-1}$, pas à $2A^{-1}$.
  - Au-delà des calculs, la définition de la linéarité n'a de sens que si les espaces de départ et d'arrivée sont des espaces vectoriels. Or il existe des matrices qui ne sont pas inversibles, et l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ n'est *pas un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (il ne contient même pas la matrice nulle).

1.4. Opérations sur les applications linéaires. —

Définition 4.6 – Espace des applications linéaires

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F.
On note $\mathscr{L}(E)$ pour l'espace $\mathscr{L}(E,E)$ des endomorphismes de E.

Proposition 4.7 – Combinaison linéaire d'applications linéaires

Si $f : E \to F$ et $g : E \to F$ sont deux applications linéaires, et si λ, μ sont deux scalaires, alors l'application $\lambda f + \mu g$ est aussi une application linéaire.

Ainsi $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(E,F)$.

(pour la seconde phrase, on rappelle que l'application nulle de E dans F est linéaire).

Proposition 4.8 – Composition d'applications linéaires

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications linéaires, alors la composée $g \circ f : E \to G$ est aussi une application linéaire.
Si $f : E \to F$ est une application linéaire *et* bijective,
alors sa bijection réciproque $f^{-1} : F \to E$ est aussi une application linéaire.

Proposition 4.9 – Pour les applications linéaires T_A, composition = produit

Si $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{pq}(\mathbb{R})$, on a l'égalité

$$T_A \circ T_B = T_{AB}$$

Si A est une matrice inversible de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est bijective et on a l'égalité

$$T_A^{-1} = T_{A^{-1}}$$

C'est une conséquence immédiate de la définition de T_A pour une matrice A.

Cette propriété des applications linéaires canoniquement associées à des matrices n'est pas la seule analogie qu'on puisse trouver avec la notion de produit :

Proposition 4.10 – Distributivités entre la composition et les combinaisons

Soient E, F, G trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, f_1, f_2 et f des éléments de $\mathscr{L}(E,F)$, g_1, g_2 et g deux éléments de $\mathscr{L}(F,G)$, λ et μ deux scalaires. Les deux égalités suivantes sont vraies :

(i) $g \circ (\lambda f_1 + \mu f_2) = \lambda(g \circ f_1) + \mu(g \circ f_2)$;

(ii) $(\lambda g_1 + \mu g_2) \circ f = \lambda(g_1 \circ f) + \mu(g_2 \circ f)$.

Remarque 4.11 **(Notation fg pour la composée $f \circ g$). —** Grâce à cette propriété, on peut manier les compositions d'applications linéaires comme s'il s'agissait de produits usuels.

Par exemple, si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E, on notera souvent

$$3f^6 - 7f^3 + \sqrt{2}f - 8$$

pour l'application $3\underbrace{(f \circ \ldots \circ f)}_{6 \text{ fois}} - 7\underbrace{(f \circ \ldots \circ f)}_{3 \text{ fois}} + \sqrt{2}f - 8\mathrm{Id}_E$.

De même, si f et g sont deux endomorphismes de E, on pourra parler de l'endomorphisme $f^2g - 17gf^8 + f - g + 9$.

***Attention.* —** Les composées $f \circ g$ et $g \circ f$ sont en général différentes (songer au cas de composées $T_A \circ T_B$ si A et B sont des matrices carrées qui ne commutent pas). On prendra donc garde, dans les raccourcis d'écriture du type ci-dessus, à ne pas maltraiter l'ordre dans les produits.

Vocabulaire : puissances d'un endomorphisme, endomorphisme nilpotent.

Si E est un espace vectoriel, si f appartient à $\mathscr{L}(E)$ et si k appartient à $\mathbb{N}$, on notera ainsi f^k pour l'endomorphisme $\underbrace{(f \circ \ldots \circ f)}_{k \text{ fois}}$ de E (par exemple, $f^0 = \mathrm{Id}_E$, $f^1 = f$, $f^2 = f \circ f$, etc).

On dit que f est *nilpotent* s'il existe n de $\mathbb{N}^\star$ tel que f^n soit l'endomorphisme nul. Le plus petit entier p pour lequel $f^p = 0$ est appelé *l'indice de nilpotence de f*.

1.5. Effet sur les sous-espaces vectoriels. —

Dans ce paragraphe, on fixe deux espaces vectoriels E et F.

Proposition 4.12 – Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire

Si $f : E \to F$ est linéaire et si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(A)$ est un sous-espace vectoriel de F.

Proposition 4.13 – Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une appli. linéaire

Si $f : E \to F$ est linéaire et si B est un sous-espace vectoriel de F, alors $f^{-1}(B)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 4.14 – Graphe d'une application linéaire

Si $f : E \to F$ est linéaire, alors le graphe $\Gamma_f = \{(x, y) \in E \times F, y = f(x)\}$ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$.

La réciproque du résultat précédent est en fait vraie :

Proposition 4.15 – Graphe et linéarité

Soient E et F deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ est une application.
Il y a équivalence entre

- *l'application f est linéaire ;*
- *le graphe $\Gamma_f = \{(x, y) \in E \times F, y = f(x)\}$ est un sous-espace vectoriel de $E \times F$.*

2. Noyau et image d'une application linéaire

2.1. Noyau d'une application linéaire ou d'une matrice. —

Définition 4.16 – Noyau d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire de E vers F.
Le *noyau de f*, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est

$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E,\ f(x) = \mathbf{0}_F\}\,.$$

C'est un sous-espace vectoriel de l'espace *de départ* E.

Vous connaissez déjà cette notion dans le cadre ensembliste : le noyau de f est l'ensemble $f^{-1}(\{\mathbf{0}_F\})$ des vecteurs dont l'image par f est $\mathbf{0}_F$. Le seul ajout de la définition ci-dessus est donc *terminologique*.

Exemple 4.17. — Considérons l'application $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Dire qu'un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Ker}(T_A)$, c'est dire que $T_A\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(T_A)$ est la droite $\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,\ \ y = -x/2\right\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Exemple 4.18. — Considérons l'application $T_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
Vérifions que $\mathrm{Ker}(T_A) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}$ de deux façons différentes :

- Dire qu'un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Ker}(T_A)$, c'est dire que $T_A\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} x+2y \\ 3x+4y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Mais le système linéaire $\begin{cases} x+2y=0 \\ 3x+4y=0 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} x+2y=0 \\ -2=0 \end{cases}$, ou encore à $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, ce qu'il fallait démontrer.

- Un vecteur X de $\mathbb{R}^2$ est dans le noyau de T_A si et seulement si $T_A(X) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$; or la matrice A est inversible et $T_A(X) = AX$, donc $T_A(X) = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$ équivaut à $AX = \mathbf{0}$ ou encore à $A^{-1}(AX) = A^{-1}\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$, c'est-à-dire à $X = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}$.

Ainsi $\mathrm{Ker}(T_A) = \{\mathbf{0}_{\mathbb{R}^2}\}$.

Exemple 4.19. — L'application

$$\Phi : \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$$
$$f \mapsto \Phi(f) : [x \mapsto f(x+2\pi) - f(x)]$$

est linéaire, et dire qu'une fonction f appartient à $\mathrm{Ker}(\Phi)$, c'est dire qu'on a : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+2\pi) = f(x)$. Ainsi $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est l'ensemble des fonctions 2π-périodiques.

Exemple 4.20. — L'application

$$\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$$
$$y \mapsto y' - y$$

est linéaire, et son noyau est l'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ vérifiant l'équation différentielle linéaire $y' - y = 0$: c'est l'ensemble des fonctions proportionnelles à exp, c'est-à-dire la droite vectorielle **Vect**[exp].

Proposition 4.21 – Noyau et injectivité

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Il y a équivalence entre
- *f est injective ;*
- $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}_E\}$.

***Remarque 4.22* (En pratique).** — Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Puisque $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel, on sait déjà qu'il contient $\mathbf{0}_E$. Pour vérifier qu'une application linéaire f est injective, il suffit donc de vérifier que si x est un vecteur tel que $f(x) = \mathbf{0}_F$, alors on a forcément $x = \mathbf{0}_E$.

Noyau d'une matrice. — Si A est une matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$, on appelle *noyau de A* le sous-espace $\mathrm{Ker}(T_A) = \{X \in \mathbb{R}^p, AX = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^n}\}$ de $\mathbb{R}^p$.
On le note $\mathrm{Ker}(A)$.

Si $C_1, \ldots C_p$ sont les p vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui donnent les colonnes de la matrice A, il faut remarquer que

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p,\ x_1C_1 + \ldots + x_pC_p = 0 \right\} :$$

un vecteur $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Ker}(A)$ si et seulement s'il fournit une relation de dépendance entre les colonnes de A.

$\rightsquigarrow$ Par exemple, si A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 3 & -6 \\ 4 & 7 & 3 & -6 \end{pmatrix}$,

le fait que la dernière colonne est « moins deux fois la troisième » se traduit par le fait que $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Ker}(A)$,

le fait que deuxième colonne est la somme de la première et de la troisième se traduit par : $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Ker}(A)$

2.2. Sous-espace image d'une application linéaire. —

Définition 4.23 – Sous-espace image d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire de E vers F.
Le *sous-espace image de f*, noté $\mathrm{Im}(f)$, est

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in F, \exists x \in E \; f(x) = y\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de l'espace *d'arrivée* F.

Là encore, vous connaissez déjà cette notion dans le cadre ensembliste.

Proposition 4.24 – Image et surjectivité

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Il y a équivalence entre

- *f est surjective ;*
- *$\mathrm{Im}(f) = F$.*

Ici il n'y a rien à montrer.

Proposition 4.25 – Détermination d'une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$

Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels et $f \in \mathscr{L}(E, F)$ une application linéaire de E vers F.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs de E, alors $f(\mathbf{Vect}[(x_i)_{i\in I}]) = \mathbf{Vect}[(f(x_i)_{i\in I}]$.
En particulier, si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E, on a $\mathrm{Im}(f) = \mathbf{Vect}[(f(x_i))_{i\in I}]$.

Image d'une matrice. — Si A est une matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$, on appelle *image de A* le sous-espace $\operatorname{Im}(T_A) = \{Y \in \mathbb{R}^n,\ \exists X \in \mathbb{R}^p, Y = AX\}$ de $\mathbb{R}^n$.
On le note $\operatorname{Im}(A)$. Rappelons T_A est une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ et que la définition du produit matriciel implique

Les colonnes de A sont les images par T_A des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^p$:
si e_j est le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$, alors Ae_i est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Comme la base canonique est une famille génératrice de $\mathbb{R}^p$, la deuxième partie de la proposition précédente implique

$$\operatorname{Im}(A) = \mathbf{Vect}\left[C_1, \dots C_p\right],\ \text{où } C_1, .., C_p \text{ est la famille des colonnes de } A.$$

Attention à une confusion fréquente : **—** si A est une matrice $n \times p$ qui n'est pas carrée, ou si f est une application linéaire de E dans F où les espaces vectoriels E et F sont différents, le noyau $\operatorname{Ker}(A)$ et l'image $\operatorname{Im}(A)$, ou le noyau $\operatorname{Ker}(f)$ et l'image $\operatorname{Im}(f)$, *ne sont pas des sous-espaces du même espace vectoriel*. Attention donc à bien vérifier la nature des objets dans $\operatorname{Ker}(f)$ ou $\operatorname{Im}(f)$ (objets abstraits, coordonnées, etc) : se tromper dessus mène à écrire des choses qui n'ont pas de sens même après des calculs justes.

Par exemple, l'application

$$\begin{aligned} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R}_2[X] \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &\mapsto (a+d)X^2 + (b+c)X + (a-d) \end{aligned}$$

est linéaire et *son noyau est un espace de matrices*, alors que *son image est un espace de polynômes.*

2.3. Principe de superposition des solutions d'équations linéaires. — Lorsque E et F sont deux espaces vectoriels et $f : E \to F$ est une application linéaire, on dit que l'équation

$$f(x) = \mathbf{0}_F$$

d'inconnue $x \in E$, est une *équation linéaire homogène* (ou, si le contexte s'y prête, un *système d'équations linéaires homogènes*). Son ensemble de solutions est bien sûr $\operatorname{Ker}(f)$.

Une conséquence de la linéarité de f est le fait que la somme de deux solutions de l'équation $f(x) = \mathbf{0}_F$ est encore une solution. Par exemple, fixons un réel ω ; si on considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} \Phi : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) &\to \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ y &\mapsto y'' + \omega^2 y \end{aligned}$$

les fonctions $t \mapsto \sin(\omega t)$ et $t \mapsto \cos(\omega t)$ sont solutions de l'équation $\Phi(y) = 0$, donc pour tout α et tout β de $\mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$ en est aussi une solution.

L'abondance d'équations linéaires dans les applications des mathématiques (où, dans l'équation $f(x) = 0$, l'inconnue x peut être un objet très compliqué : fonction, matrice, image, onde, son, champ électromagnétique, état d'un système quantique...) est une des raisons de l'importance de l'algèbre linéaire dans les sciences contemporaines. Le *principe de superposition* que nous venons de discuter est, dans toutes ces applications, un outil crucial (même s'il est mathématiquement évident !).

Si un vecteur b de F est donné, l'équation
$$f(x) = b$$
est une *équation linéaire (inhomogène)*.

Proposition 4.26 – Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire

Soit $f : E \to F$ une application linéaire et b un vecteur de F.
Considérons l'équation (E) : $f(x) = b$, d'inconnue $x \in E$.

- *Si b n'appartient pas à $\mathrm{Im}(f)$, cette équation n'a pas de solution.*
- *Si b appartient à $\mathrm{Im}(f)$, et si x_0 est un vecteur de E tel que $f(x_0) = b$* (solution particulière de *(E)*)*, alors l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des vecteurs de la forme $u + x_0$ avec $u \in \mathrm{Ker}(f)$.* (les solutions de (E) sont obtenues en ajoutant, à une solution particulière, les solutions de l'équation sans second membre).

Exemple 4.27 **(Résolution d'une équation différentielle inhomogène). —** Soient b un nombre réel et a un nombre réel non nul. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$, dont l'inconnue est une fonction y de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, peut être obtenu comme suit : désignant par $\mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, par C_b la fonction constante de valeur b, et considérant l'application linéaire
$$\begin{aligned}\Phi : \mathscr{D}(\mathbb{R},\mathbb{R}) &\to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})\\ y &\mapsto y' - ay\end{aligned}$$
on constate qu'il s'agit de chercher les solutions de l'équation linéaire $\Phi(y) = C_b$.

La fonction constante $C_{-b/a}$ de valeur $-b/a$ est une solution particulière de cette équation, et les solutions de l'équation $\Phi(y) = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto Ke^{ax}$ où K est un nombre réel.

D'après la proposition précédente, une fonction y est solution de l'équation de départ si et seulement s'il existe un réel K tel qu'on ait : $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = Ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

3. Injectivité, surjectivité d'applications linéaires

Nous avons déjà vu un critère pratique essentiel pour savoir si une application linéaire est injective, à l'aide du noyau.

En voici un autre.

Proposition 4.28 – Injectivité d'applications linéaires et familles libres

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Il y a équivalence entre

- *f est injective ;*
- *si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille* libre *de E, alors la famille $(f(x_i))_{i\in I}$ est une famille libre de F.*

Exemple 4.29 **(Une conséquence importante). —**

(a) Si une matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ a plus de colonnes que de lignes ($p > n$), alors $T_A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ n'est jamais injective. En effet, l'image par T_A de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est la famille $(C_1, .., C_p)$ des colonnes de A ; si f était injective cette famille devrait être libre, mais comme c'est une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$, elle ne peut pas être libre si $p > n$.

(b) Plus généralement, lorsque E et F sont de dimension finie, on constate que

> si $\dim(E) > \dim(F)$, alors aucune application linéaire de E dans F ne peut être injective.

En effet, si $(e_1, ..., e_p)$ est une base de E (avec $p = \dim(E)$), alors $\big(f(e_1), .., f(e_p)\big)$ est une famille de p vecteurs de f, et si f est injective elle doit être libre puisque $(e_1, ..., e_p)$ l'est, mais c'est une famille de p vecteurs de F et elle ne peut pas être libre si $p > \dim(F)$.

Proposition 4.30 – Surjectivité d'applications linéaires et familles génératrices

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Il y a équivalence entre

(i) f est surjective ;

(ii) l'image de toute *famille génératrice de E est une famille génératrice de F ;*

(iii) il existe une *famille génératrice de E dont l'image par f est une famille génératrice de F.*

***Exemple 4.31* (Une conséquence importante). —** (a) Si une matrice $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ a plus de lignes que de lignes ($p < n$), alors $T_A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ n'est jamais surjective. En effet, l'image par T_A de la base canonique de $\mathbb{R}^p$ est la famille $(C_1, .., C_p)$ des colonnes de A ; si f était surjective cette famille devrait être génératrice de $\mathbb{R}^n$, mais comme c'est une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$, elle ne peut pas être génératrice si $p < n$.

(b) Plus généralement, lorsque E et F sont de dimension finie, on constate que

> Si $\dim(E) < \dim(F)$, alors aucune application linéaire de E dans F ne peut être surjective.

En effet, si $(e_1, ..., e_p)$ est une base de E (avec $p = \dim(E)$), alors $\big(f(e_1), .., f(e_p)\big)$ est une famille de p vecteurs de f, et si f est surjective elle doit être génératrice puisque $(e_1, ..., e_p)$ l'est, mais c'est une famille de p vecteurs de F et elle ne peut pas être génératrice si $p < \dim(F)$.

En rassemblant les deux propositionsci-dessus, nous obtenons le résultat suivant.

Proposition 4.32 – Bijectivité d'applications linéaires et bases

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Il y a équivalence entre

- *f est bijective ;*
- *l'image par f de* toute *base de E est une base de F ;*
- *il existe* une *base de E dont l'image par f est une base de F.*

***Cas d'une application linéaire canoniquement associée à une matrice.* —** Soit A une matrice *carrée* de taille n. Le résultat que nous venons de montrer indique que pour savoir si $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est bijective, il suffit de savoir si l'image par T_A d'une base de $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$. Par exemple, il suffit de savoir si l'image par T_A de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Or, nous avons vu que l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ est la famille $(C_1, ..., C_n)$ des colonnes de A. Puisque c'est une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, pour savoir si la famille $(C_1, ..., C_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ il suffit de savoir si elle est libre. Ainsi T_A est bijective si et seulement si la famille $(C_1, ..., C_n)$ des colonnes de A est libre.

Mais nous avons aussi vu page 52 que T_A est bijective si et seulement si la matrice A est inversible. Ainsi A est inversible si et seulement si la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ des colonnes de A est libre.

Par ailleurs, A est inversible si et seulement si sa transposée A^T l'est (voir le cours d'algèbre du premier semestre, Proposition 8.3.12), donc on peut aussi dire que A est inversible si et seulement si T_{A^T} est inversible ; puisque les colonnes de A^T sont les lignes de A, c'est équivalent à la liberté de la famille des lignes de A.

En résumé, nous avons obtenu par un chemin abstrait deux caractérisations très pratiques de l'inversibilité d'une matrice :

A est inversible
$\Updownarrow$
T_A est bijective
$\Updownarrow$
il n'y a pas de relation linéaire entre les *colonnes* de A
$\Updownarrow$
il n'y a pas de relation linéaire entre les *lignes* de A.

On peut relever que la dernière équivalence (les colonnes sont liées si et seulement si les lignes sont aussi liées), dont on vient de voir qu'elle était vraie pour *toutes* les matrices, n'est pas du tout évidente intuitivement !

Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible, car ses deux premières lignes sont les mêmes ; mais si on observe les colonnes, on pourrait être tenté à première vue de penser qu'elles sont linéairement indépendantes.

4. Isomorphismes

4.1. Définition et exemples. —

Définition 4.33 – Isomorphisme linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels.
Si f est une application *linéaire* et *bijective* de E dans F, on dit que c'est un *isomorphisme entre E et F*.

On dira alors que deux espaces vectoriels E et F *sont isomorphes* s'il existe un isomorphisme entre E et F.

Exemple 4.34 **(Applications linéaires canoniquement associées à des matrices, conséquences pour $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$)**

Considérons une matrice A de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$, $(n, p) \in (\mathbb{N}^\star)^2$. Nous avons vu au paragraphe précédent que $T_A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ ne peut pas être injective si $p > n$, et que T_A ne peut pas être surjective si $p < n$. En conséquence, T_A ne peut être un isomorphisme entre $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ que si $p = n$, c'est-à-dire si la matrice A est carrée. Dans ce cas, nous avons vu que la bijectivité de T_A équivaut à l'inversibilité de A.

Par ailleurs, nous avons vu précédemment que pour toute application linéaire f de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, il existe $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ pour laquelle $f = T_A$. Ce qui précède donne donc un renseignement général sur les applications linéaires entre $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$:

En résumé,

Les espaces $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont isomorphes que si $p = n$.
Si $p > n$, aucune application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ n'est injective.
Si $p < n$, aucune application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ n'est surjective.

4.2. Résultats théoriques. —

Proposition 4.35 – Effet d'un isomorphisme sur la dimension

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.
Si F est un espace vectoriel isomorphe à E, alors F est aussi de dimension finie et $\dim(F) = \dim(E)$.

Démonstration. — Si f est un isomorphisme entre E et F et si $(e_1, ..., e_n)$ est une base de E (avec $n = \dim(E)$), nous avons vu (lien entre bijectivité et image d'une base, page 58) que $(f(e_1), ...f(e_n))$ est une base de F. Cette famille comporte n vecteurs, donc F est de dimension $n = \dim(E)$. □

Ainsi, deux espaces (de dimension finie) ne peuvent être isomorphes que s'ils ont la même dimension. On peut préciser un peu ce constat en rassemblant les résultats des pages 58 et 58 :

Proposition 4.36 – Résultats de non-injectivité ou non-surjectivité automatique

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie.
Si $\dim(E) > \dim(F)$*, aucune application linéaire de E dans F n'est injective.*
Si $\dim(E) < \dim(F)$*, aucune application linéaire de E dans F n'est surjective.*

4.3. En pratique : espaces abstraits et coordonnées. — Le paragraphe précédent montre que deux espaces de dimension finie ne peuvent être isomorphes que s'ils ont la même dimension. Réciproquement, deux espace de même dimension (finie) sont *toujours* isomorphes.

Théorème 4.37 – Tous les espaces de dimension n sont isomorphes

Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie n, alors il existe un isomorphisme entre E et $\mathbb{R}^n$.

Ce théorème est important et mérite quelques commentaires.

1. Ainsi, un espace est de dimension n si et seulement s'il est isomorphe à $\mathbb{R}^n$. Cela donne un sens précis à la remarque « dire qu'un espace est de dimension n, c'est dire que connaître un vecteur de cet espace revient à connaître n scalaires ». La démonstration s'appuie, comme on pouvait s'en douter, sur le fait que dans un espace admettant une base $\mathscr{B}$ de cardinal n, connaître un vecteur, c'est connaître ses coordonnées dans $\mathscr{B}$.
2. Puisqu'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension $n \neq 0$ admet (dans le cadre de ce cours où $\mathbb{R}$ est infini) une infinité de bases différentes, on constate donc qu'*il y a une infinité d'isomorphismes différents entre E et $\mathbb{R}^n$*, donc une infinité de façons différentes de ramener la connaissance d'un vecteur de E à la connaissance de n scalaires.

Au paragraphe précédent, nous avons par exemple croisé deux isomorphismes très différents entre $\mathbb{R}_n[X]$ et $\mathbb{R}^{n+1}$: l'un lié à la formule de Taylor, l'autre aux polynômes de Lagrange.

3. Si E et F sont deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de même dimension n, il existe un isomorphisme φ entre E et $\mathbb{R}^n$ et un isomorphisme ψ entre F et $\mathbb{R}^n$; l'application $\psi^{-1} \circ \varphi$ est alors un isomorphisme entre E et F.
4. Un intérêt pratique majeur de la proposition ci-dessus est que fixer un isomorphisme entre E et $\mathbb{R}^n$ rend *complètement concrets* (donc manipulables disons par un ordinateur...) les vecteurs de E, même si E est au départ un espace qui aurait semblé abstrait (de polynômes, de matrices, d'images, de sons...). À chaque fois qu'on utilise un ordinateur pour manipuler des images ou des sons, on utilise une correspondance entre l'espace d'objets « naturels » et l'espace « accessible au calcul » des structures de données qui les encodent sur ordinateur.
5. Dans le même ordre d'idées, si un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est de dimension 3 mais de description un peu abstraite, fixer un isomorphisme entre E et $\mathbb{R}^3$ permet de faire des *dessins dans E*.

Exemple 4.38 **(Dessins dans l'espace des matrices symétriques). —**
Considérons l'espace $\mathscr{S}_2 = \left\{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ M^T = M\right\} = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$ des matrices 2×2 symétriques.

- L'application
$$\begin{aligned} \Gamma : \mathscr{S}_2 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \end{aligned}$$
est linéaire.
- Elle est injective : si $\Gamma\left[\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est la matrice nulle.
- Elle est aussi surjective : si $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un élément de $\mathbb{R}^3$, la matrice $\begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$ fournit un antécédent de u.
- C'est donc que Γ est un isomorphisme.

Il permet par exemple de dessiner dans $\mathbb{R}^3$ l'ensemble des matrices *de trace 3* (la condition étant $x+z=3$, c'est un plan), l'ensemble des matrices *de déterminant* -1 (la condition étant $xz - y^2 = -1$, c'est un hyperboloïde), l'ensemble des matrices *non-inversibles, c'est-à-dire de déterminant zéro* (la condition est $xz - y^2 = 0$, donc c'est un cône)....

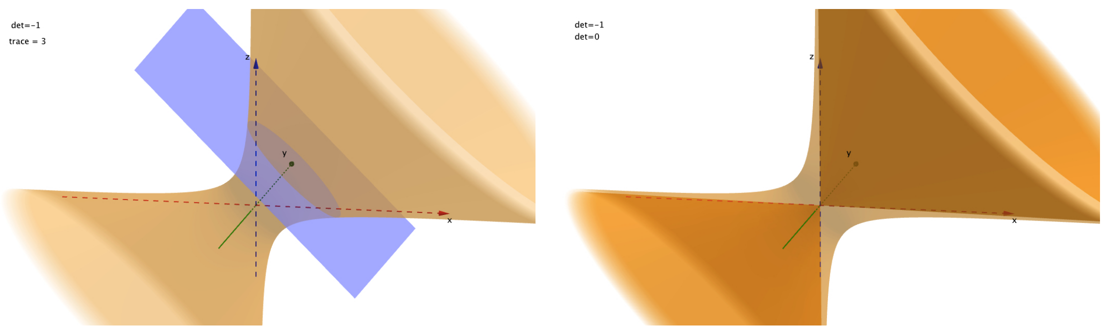


FIGURE 1. L'isomorphisme Γ révèle une correspondance inattendue entre des objets géométriques célèbres et des ensembles de matrices. Des résultats de géométrie « à l'ancienne » peuvent donc donner des renseignements sur un ensemble de matrices, et vice-versa.

5. Rang d'une application linéaire. Théorème du rang

Définition 4.39 – Rang d'une application linéaire

Soient E et F deux espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F.

- On dit que f est de *rang fini* si $\text{Im}(f)$ est de dimension finie, sinon on dit que f est de rang infini ;
- si f est de rang fini, on appelle rang de f et on note $\mathbf{rg}[f]$ l'entier $\dim[\text{Im}(f)]$.

Indiquons la cohérence avec la notion de rang d'une famille de vecteurs ou d'une matrice, vue au chapitre 2 (page 31) :
si $(x_i)_{i\in I}$ est une base de E, alors on a $\text{Im}(f) = \mathbf{Vect}[(f(x_i))_{i\in I}]$, et $\mathbf{rg}[f]$ apparaît comme le rang de la famille $(f(x_i))_{i\in I}$.

En particulier, si f est l'application linéaire $T_A : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ associée à une matrice A de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ et si $(e_1, ..., e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^p$, on obtient : $\mathbf{rg}[T_A] = \dim \mathbf{Vect}[Ae_1, ..., Ae_n]$; mais pour chaque j de $\{1, .., p\}$, Ae_j est la j^e colonne C_j de A, si bien que $\mathbf{rg}[T_A]$ est la dimension de $\mathbf{Vect}\big[C_1, ..., C_p\big]$, ce qui est la définition que nous avions donnée au chapitre 2 pour $\mathbf{rg}[A]$.

Proposition 4.40 – Effet d'une application linéaire sur la dimension

Soient E et F deux espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F.

(a) ***Le rang est inférieur à la dimension de l'espace-but :***
Si F est de dimension finie, alors f est de rang fini et $\mathbf{rg}[f] \leq \dim(F)$.
Dans ce cas, f est surjective si et seulement si $\mathbf{rg}[f] = \dim(F)$.

(b) ***Une application linéaire ne peut « augmenter la dimension » et ne la préserve qu'en cas d'injectivité :***
si E est de dimension finie, alors $\mathbf{rg}[f] \leq \dim(E)$.
Dans ce cas, f est injective si et seulement si $\mathbf{rg}[f] = \dim(E)$.

Exemple 4.41. **—** si A est une matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$, le rang de l'application $T_A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ est inférieur ou égal à n **et** à p, donc à $\min(n, p)$. Une matrice 12×7 a donc un rang compris entre 0 et 7.

La deuxième partie de la proposition précédente dit que lorsque E est de dimension finie, le rang est « maximal » parmi les rangs possibles lorsque f est injective, c'est-à-dire lorsque la dimension du noyau est nulle, « minimale » parmi les dimensions possibles. Autrement dit,

lorsque l'image est de dimension maximale (parmi les possibles),
le noyau est de dimension minimale (parmi les possibles).

On peut aller beaucoup plus loin : il y a un lien étroit entre la dimension du noyau et celle de l'image.
C'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 4.42 – Le théorème du rang

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel, f une application linéaire de E dans F.

$$\dim(E) = \dim[\mathrm{Ker}(f)] + \dim[\mathrm{Im}(f)]$$

Attention. — Retenir « dimension *de l'espace de départ* = dimension du noyau + dimension de l'image ». Lorsque l'espace de départ et l'espace d'arrivée sont de dimensions différentes, gare à ne pas utiliser la mauvaise !

Exemple 4.43. — Soit A la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 9 & 3 \end{pmatrix}$. L'application linéaire T_A va de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}^2$. Le théorème du rang donne

$$\dim(\mathbb{R}^4) = \dim[\mathrm{Ker}(T_A)] + \dim[\mathrm{Im}(T_A)].$$

Or, $\mathrm{Im}(T_A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$: c'est le sous-espace $\mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$ de $\mathbb{R}^2$.

Il est de dimension 0, 1 ou 2, et comme les quatre colonnes de A ne sont pas toutes colinéaires, on sait qu'il est de dimension exactement 2.

D'après le théorème du rang, on *doit* donc avoir $4 = \dim[\mathrm{Ker}(T_A)] + 2$, donc $\dim[\mathrm{Ker}(T_A)] = 2$.
Ainsi le noyau $\mathrm{Ker}(A)$, qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ est de dimension 2.

On peut aller plus loin et trouver concrètement $\mathrm{Ker}(A)$: rappelons qu'on peut trouver des vecteurs dans le noyau d'une matrice en observant les relations éventuelles entre ses colonnes (voir page 54). Ici on constate que $\begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathrm{Ker}(A)$; on constate aussi que $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartient aussi à $\mathrm{Ker}(A)$.

Puisque u et v appartiennent au sous-espace $\mathrm{Ker}(A)$, on a $\mathbf{Vect}[u, v] \subset \mathrm{Ker}(A)$; comme u et v ne sont pas colinéaires $\mathbf{Vect}[u, v]$ est de dimension 2, et puiqu'on a vu que $\mathrm{Ker}(A)$ est aussi de dimension 2, on obtient $\mathrm{Ker}(A) = \mathbf{Vect}[u, v]$, ce qui décrit complètement $\mathrm{Ker}(A)$.

Proposition 4.44 – Entre espaces *de même dimension*, injectivité $\Longleftrightarrow$ surjectivité

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie.
On suppose que les dimensions $\dim(E)$ et $\dim(F)$ sont ÉGALES.
Alors si f est une application linéaire *de E dans F, les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

- *f est injective*
- *f est surjective*
- *f est bijective*

Ce résultat est essentiel en pratique : si on sait déjà que les espaces de départ et d'arrivée ont même dimension, on peut montrer qu'une application linéaire est bijective sans avoir à montrer la surjectivité.

Attention, ce « miracle » reliant l'injectivité à la surjectivité ne vaut qu'en dimension finie

Par exemple, si E est l'espace $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ des suites réelles et si on considère l'application

$$\sigma : E \to E$$
$$(u_0, u_1, u_2, \ldots) \mapsto (u_1, u_2, u_3, \ldots)$$

alors σ est surjective (en effet, si $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_0, v_1, \ldots)$ est une suite réelle, la suite $u = (0, v_0, v_1, \ldots)$ vérifie $\sigma(u) = v$) ;

mais σ n'est pas injective : si δ est la suite $(1,0,0,\ldots.)$, $\sigma(\delta)$ est la suite nulle alors que δ n'est pas la suite nulle.

Attention, ce « miracle » ne concerne que les applications linéaires. —
Par exemple, l'application $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est injective sans être surjective...

6. Projecteurs

6.1. Définition et premiers exemples. —

Définition 4.45 – Projection sur un sous-espace parallèlement à un supplémentaire

Soient E un espace vectoriel, F et S deux sous-espaces vectoriels *supplémentaires* de E.
Rappelons que pour tout x de E, il existe un *unique* couple (x_F, x_S) de $F \times S$ vérifiant $x = x_F + x_S$.
La *projection sur F parallèlement à S* est l'application

$$\begin{aligned} E &\to E \\ x &\mapsto x_F. \end{aligned}$$

C'est un endomorphisme de E.

Exemple 4.46. **—** Dans $\mathbb{R}^3$, considérons le plan $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3,\ z = 0 \right\}$.

- La droite $S_1 = \textbf{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$ est un supplémentaire de F (voir le chapitre 3). Notons π_1 la projection sur F parallèlement à S_1. Alors on a

$$\pi_1 = \left[\begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{car} \quad \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.1 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in S_1}.$$

  Plus généralement, pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, on a $\pi_1 \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$.

- Cela dit, la droite $S_2 = \textbf{Vect}\left[\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$ est un autre supplémentaire de F. Notons π_2 la projection sur F parallèlement à S_1. Alors on a

$$\pi_2 \left[\begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.1 \\ 3 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2.2 \\ -0.1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{car} \quad \begin{pmatrix} 0.2 \\ -0.1 \\ 3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2.2 \\ -0.1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\in S_2}.$$

  Plus généralement, pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, on a $\pi_2 \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x - 2z/3 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2z/3 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$.

Exemple 4.47 **(Parties paire et impaire d'une fonction). —** Rappelons que dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, les sous-espaces $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ des fonctions paires et impaires sont supplémentaires (voir page 43). Notons p la projection sur $\mathscr{P}$

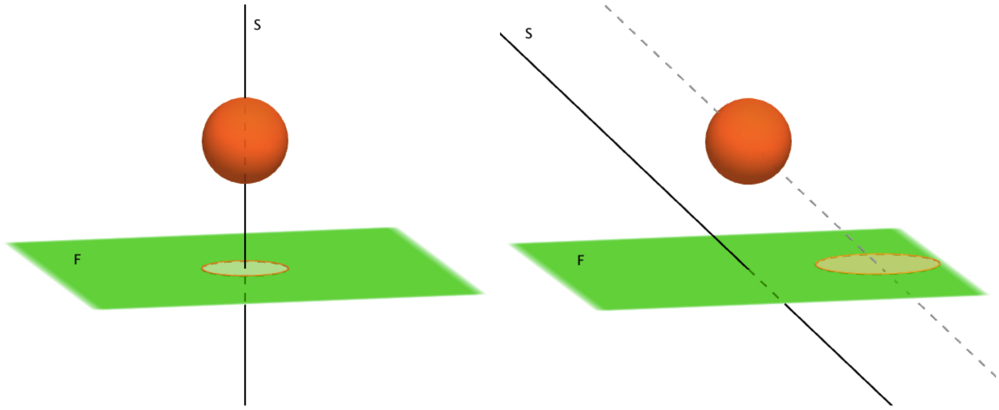


FIGURE 2. Un plan F de $\mathbb{R}^3$, deux supplémentaires S différents et ce que devient la boule centrée en $(0,0,3)$ et de rayon 1 lorsqu'on la projette sur F parallèlement à chacun de ces deux supplémentaires.

parallèlement à $\mathscr{I}$. Alors on a [2]

$$p(\exp)=\cosh, \qquad \text{car} \quad \exp=\underbrace{\cosh}_{\text{paire}}+\underbrace{\sinh}_{\text{impaire}}.$$

Si f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on appelle souvent $p(f)$ la *partie paire de* f.

On a vu page 43 qu'il est possible de donner une expression explicite de $p(f)$: on a

$$\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

et les fonctions $x\mapsto\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $x\mapsto\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ sont respectivement paire et impaire ; ainsi, $p(f)$ n'est autre que la fonction $x\mapsto\frac{f(x)+f(-x)}{2}$.

Proposition 4.48 – Le noyau = le supplémentaire, l'image = ce sur quoi on projette

Soient E un espace vectoriel, F et S deux sous-espaces vectoriels supplémentaires *de E, p la projection sur F parallèlement à S. On a*

- $\mathrm{Ker}(p)=S$
- $\mathrm{Im}(p)=F$
- *Un vecteur x appartient à $\mathrm{Im}(p)$ si et seulement si $p(x)=x$.*

Vous pouvez reprendre les expressions explicites trouvées dans les trois exemples ci-dessus et vous convaincre que cette proposition rend bien compte de la situation.

Il est important de retenir la dernière partie de la proposition précédente :

Pour un projecteur, le sous-espace image est l'ensemble des points fixes.

2. On rappelle que $\cosh(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\sinh(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Proposition 4.49 – Un projecteur est idempotent

Soient E un espace vectoriel, F et S deux sous-espaces vectoriels supplémentaires *de E.*
Notons p la projection sur F parallèlement à S. *Alors on a l'égalité d'endomorphismes*

$$p^2 = p$$

(qui signifie : $\forall x \in E, p(p(x)) = p(x)$.)

6.2. Caractérisation algébrique des projecteurs. —

Proposition 4.50 – Caractérisation algébrique des projecteurs

Soit E un espace vectoriel. Si

$$\begin{cases} p \text{ est une application linéaire de } E \text{ dans } E \\ p^2 = p, \end{cases}$$

alors il existe deux sous-espaces supplémentaires F et S vérifiant : p est la projection sur F parallèlement à S.

Vocabulaire. — On dit souvent qu'une application de E dans E est un *projecteur* lorsqu'il existe il existe deux sous-espaces supplémentaires F et S vérifiant : p est la projection sur F parallèlement à S. On peut donc résumer les deux propositions qu'on vient de lire de la manière suivante :

$$p \text{ est un projecteur} \iff p \text{ est linéaire et } p^2 = p.$$

Proposition 4.51 – Comment retrouver les sous-espaces F et S

i $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur, alors
- $\mathrm{Ker}(p)$ *et* $\mathrm{Im}(p)$ *sont supplémentaires dans E*
- *p est la projection sur* $\mathrm{Im}(p) = \{x \in E, p(x) = x\}$ *parallèlement à* $\mathrm{Ker}(p)$.

Exemple 4.52 **(Exemple avec un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$).** — Considérons la matrice $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et l'application linéaire T_A de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

- La transformation T_A vérifie : $T_A^2 = T_A \circ T_A = T_{A^2}$ (voir page 52). Or, on constate l'égalité $A^2 = A$ (calcul !).
- Par conséquent, l'application linéaire T_A est un projecteur. Pour la caractériser géométriquement, la proposition précédente dit que nous devons trouver son noyau et l'ensemble de ses points fixes.
- Soit $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de $\mathbb{R}^2$. On constate que

$$T_A u = u \text{ équivaut à } \begin{cases} x - y + z = 2x \\ -x + y + z = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \quad \text{ou encore à :} z = x + y$$

tandis que

$$T_A u = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \text{ équivaut à } \begin{cases} x - y + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{ou encore à : } \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire à } u \in \mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right].$$

- Ainsi, on sait que l'ensemble des points fixes de T_A est le plan $\mathscr{P}$ d'équation $z = x + y$ et que le noyau de T_A est la droite $\mathscr{D} = \mathbf{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$. D'après la proposition précédente, T_A est la projection sur $\mathscr{P}$ parallèlement à $\mathscr{D}$ (et en plus, on a automatiquement $\mathrm{Im}(T_A) = \mathscr{P}$).

***Exemple 4.53* (Matrices symétriques et antisymétriques). —** Plaçons-nous dans l'espace $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et considérons l'application

$$\begin{aligned} \sigma : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) &\to \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto \frac{M + M^T}{2}. \end{aligned}$$

- C'est un endomorphisme de E (car la transposition l'est et qu'une combinaison linéaire d'applications linéaires est linéaire) ; pour toute matrice M de E, on a :

$$\sigma(\sigma(M)) = \sigma\left(\frac{M + M^T}{2}\right) = \frac{\frac{M + M^T}{2} + \left(\frac{M + M^T}{2}\right)^T}{2} = \frac{(M + M^T) + (M^T + M)}{4} = \frac{2M + 2M^T}{2} = \frac{M + M^T}{2}$$

  si bien que $\sigma^2(M) = \sigma(M)$. Ainsi $\sigma^2 = \sigma$ et σ est un projecteur.
- Sur quoi et dans quelle direction ? Observons les points fixes et le noyau de σ.
  L'équation $\sigma(M) = M$ équivaut à $\frac{M+M^T}{2} = M$, c'est-à-dire à $M + M^T = 2M$, autrement dit $M^T = M$. Ainsi $\sigma(M) = M$ si et seulement si la matrice M est symétrique.
  Par ailleurs, $\sigma(M) = 0$ équivaut à $\frac{M+M^T}{2} = 0$ ou encore à $M^T = -M$. Ainsi $\mathrm{Ker}(\sigma)$ est l'ensemble des matrices antisymétriques.
- Conclusion : σ est la projection sur l'espace des matrices symétriques parallèlement à celui des matrices antisymétriques.

7. Formes linéaires, hyperplans, dualité

7.1. Formes linéaires, espace dual. —

Définition 4.54 – Forme linéaire, espace dual

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Une *forme linéaire sur* E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$.
L'ensemble des formes linéaires sur E est appelé *dual de* E ; on le note souvent $E^\star$ plutôt que $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$.

Rappelons que $\mathscr{L}(E,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Pour chaque $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, on dispose donc d'un « autre » $\mathbb{R}$-espace vectoriel, son dual.

Exemple 4.55. — Si $E=\mathbb{R}^3$ et si (a,b,c) est un triplet de nombres réels, alors l'application

$$\begin{aligned}\varphi_{a,b,c} : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}\\ (x,y,z) &\mapsto ax+by+cz\end{aligned}$$

est une forme linéaire sur E. Rappelons par ailleurs que toute forme linéaire sur $\mathbb{R}^3$ peut s'écrire $\varphi_{a,b,c}$ pour un certain (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 4.56. — De même si $E=\mathbb{R}^n$ et si $\vec{a}=(a_1,...,a_n)$ est un n-uplet de nombres réels, alors l'application

$$\begin{aligned}\varphi_{\vec{a}} : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}\\ (x_1,..,x_n) &\mapsto a_1x_1+...+a_nx_n\end{aligned}$$

est une forme linéaire sur E. Tout élément de $E^\star$ est de la forme $\varphi_{\vec{a}}$ pour un certain a de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 4.57. — Si $E=\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et si a est un nombre réel, alors l'application

$$\begin{aligned}\mathrm{ev}_a : E &\to \mathbb{R}\\ f &\mapsto f(a)\end{aligned}$$

est une forme linéaire sur E.
Si $E=\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors l'application

$$\begin{aligned}\mathrm{Int}_{[0,1]} : E &\to \mathbb{R}\\ f &\mapsto \int_0^1 f(t)dt\end{aligned}$$

est une forme linéaire sur E.

Proposition 4.58 – Surjectivité automatique pour les formes linéaires non nulles

Si une forme linéaire $\varphi : E\to\mathbb{R}$ est non nulle, alors φ est surjective.

7.2. Hyperplans. —
Rappelons que si a, b, c sont trois réels et qu'ils ne sont pas tous nuls, l'ensemble $\mathscr{P} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ ax + by + cz = 0\right\}$ est un plan de $\mathbb{R}^3$. On peut reformuler l'équation de $\mathscr{P}$ à l'aide d'une forme linéaire :

$$\mathscr{P} = \mathrm{Ker}(\varphi), \text{ où } \varphi \text{ est la forme linéaire } (x, y, z) \mapsto ax + by + cz \text{ sur } \mathbb{R}^3.$$

Cela motive la définition suivante, qui donne un nom géométriquement suggestif à l'« ensemble des solutions d'une seule équation linéaire ».

Définition 4.59 – Hyperplan dans un espace vectoriel quelconque

Soit E un espace vectoriel. On dit qu'une partie H de E est un *hyperplan de* E lorsqu'il existe une *forme linéaire* $\varphi \in E^\star$ *non nulle* qui vérifie :

$$H = \mathrm{Ker}(\varphi).$$

Attention. **—** Si $\varphi = \mathbf{0}_{E^\star}$ est la forme linéaire nulle, l'espace $E = \mathrm{Ker}(\mathbf{0}_{E^\star})$ ne mérite pas d'être appelé un hyperplan
(pas plus que l'espace $\mathbb{R}^3$ tout entier ne mérite d'être appelé un plan).

Exemple 4.60. **—** Reprenons les exemples de formes linéaires des exemples du §7.1

(a) Un hyperplan de $\mathbb{R}^3$ n'est rien d'autre qu'un plan au sens usuel (passant par l'origine).
(b) Dans $\mathbb{R}^n$, un hyperplan est un sous-ensemble de la forme $\{(x_1, \dots, x_n), a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$ où $a_1, \dots, a_n$ sont des nombres réels non tous nuls.
(c) Dans $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, si a est un nombre réel, alors $\{f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f(a) = 0\}$ est un hyperplan.
(d) Dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions vérifiant $\int_0^1 f(t)dt = 0$ est un hyperplan.
(e) Dans $\mathbb{R}[X]$, l'ensemble des polynômes P vérifiant $P(1) = P(2)$ est un hyperplan.

Pour se faire une idée plus concrète de ce qu'est un hyperplan, le résultat qui vient est très utile.

Proposition 4.61 – Supplémentaires et dimensions des hyperplans

Soient E un espace vectoriel et H un sous-espace vectoriel de E. Alors

$$H \text{ est un hyperplan } \iff \text{ il existe un vecteur non nul } u \text{ de } E \text{ vérifiant : } E = H \oplus \mathbf{Vect}[u].$$

Corollaire 4.62 – Hyperplan : cas de la dimension finie

Si E est un espace de dimension finie n, alors

$$H \text{ est un hyperplan } \iff \dim(H) = n - 1.$$

Proposition 4.63 – Les hyperplans sont les plus grands sous-espaces vectoriels stricts

- *si H est un hyperplan et $u \notin H$, alors $E = H \oplus \mathbf{Vect}[u]$.*
- *si H est un hyperplan et F est un sous-espace vectoriel de E qui contient H, alors soit $F = H$, soit $F = E$.*

On pourra comparer ce qui précède aux exemples de la page 42 : le corollaire ci-dessus étend aux espaces vectoriels quelconques l'observation « si $\mathscr{P}$ est un plan de $\mathbb{R}^3$, toute droite vectorielle non contenue dans $\mathscr{P}$ en donne un supplémentaire ».

Proposition 4.64 – Toutes les équations d'un hyperplan donné sont proportionnelles

Si φ et ψ sont deux formes linéaires non nulles sur E et si les hyperplans $\mathrm{Ker}(\varphi)$ *et* $\mathrm{Ker}(\psi)$ *sont identiques, alors il existe un scalaire λ vérifiant $\psi = \lambda\varphi$.*

7.3. Base duale. —

Définition 4.65 – Forme linéaire extrayant une coordonnée

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
Pour chaque j de $\{1, .., n\}$, la *forme « $j^{\text{ème}}$ coordonnée dans $\mathscr{B}$ »* est l'application

$$e_j^\star : E \to \mathbb{R}$$
$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \mapsto \lambda_j.$$

C'est une forme linéaire sur E.

Rappelons qu'écrire « $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ » signifie que les coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$ sont données par le n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$: ainsi les réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont entièrement déterminés par x, ce qui justifie la définition ci-dessus.

Exemple 4.66. — Si $E = \mathbb{R}^3$, la forme « $2^{\text{ème}}$ coordonnée dans la base canonique de E » est l'application $(x, y, z) \mapsto y$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.

Exemple 4.67. — Toujours si $E = \mathbb{R}^3$, la famille $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de E.

Comme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x - y - \frac{z}{6}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (y - \frac{z}{6}) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$,
la forme « $1^{\text{ère}}$ coordonnée dans la base canonique de E » est l'application $(x, y, z) \mapsto x - y - \frac{z}{6}$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$.
Si $E = \mathbb{R}_3[X]$, la forme « $2^{\text{ème}}$ coordonnée dans la base canonique de E » est l'application $P \mapsto P'(0)$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}$: en effet, la formule de Taylor donne, pour chaque P de $\mathbb{R}_3[X]$, $P(X) = P(0) + P'(0)X + \frac{P''(0)}{2}X^2 + \frac{P^{(3)}(0)}{6}X^3$.

Proposition 4.68 – Notion de base duale

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
La famille $\mathscr{B}^\star = (e_1^\star, \ldots, e_n^\star)$ est une base de l'espace dual $E^\star$.
On dit que c'est la base duale *de $\mathscr{B}$.*

***Exemple 4.69.* —**

- Si $E = \mathbb{R}^3$ et si $\mathscr{B}$ est la base canonique de E, alors la base duale de $\mathscr{B}$ est la famille $(e_1^\star, e_2^\star, e_3^\star)$ de formes linéaires sur E : ici $e_1^\star$ est l'application $(x,y,z) \mapsto x$, $e_2^\star$ l'application $(x,y,z) \mapsto y$ et $e_3^\star$ l'application $(x,y,z) \mapsto z$. .
- Si $E = \mathbb{R}^3$ et si $\mathscr{B}$ est la base canonique de E, alors la base duale de $\mathscr{B}$ est la famille $(e_1^\star, e_2^\star, e_3^\star)$ de formes linéaires sur E : ici $e_1^\star$ est l'application $(x,y,z) \mapsto x$, $e_2^\star$ l'application $(x,y,z) \mapsto y$ et $e_3^\star$ l'application $(x,y,z) \mapsto z$.

Corollaire 4.70 – Dimension de l'espace dual $E^\star$ si E est de dimension finie

Si E est de dimension finie*, alors l'espace $E^\star$ est aussi de dimension finie et* $\dim(E^\star)$ *n'est autre que* $\dim(E)$.

7.4. Application : nombre d'équations indépendantes et dimension de l'espace des solutions. — Fixons deux entiers naturels non nuls n et p. Considérons un système linéaire de d équations à n inconnues

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = & 0 \\ \vdots & \vdots \\ a_{dn}x_1 + \ldots + a_{dn}x_n = & 0. \end{cases}$$

On peut réécrire (S) sous la forme

$$(S) : \begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = & 0 \\ \vdots & \vdots \\ \varphi_d(x_1, \ldots, x_n) = & 0. \end{cases}$$

où pour chaque i de $\{1,..,d\}$, $\varphi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est la fonction $(x_1,\ldots,x_n) \mapsto a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$.
Nous avons vu (exemple 4.5.1(b) page 69) que φ_1, φ_2, ..., φ_d sont des *formes linéaires sur* $\mathbb{R}^p$.

Les exercices sur la notion de dimension vous ont sans doute habitués à l'idée suivante :

Si les équations $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 0$, ..., $\varphi_d(x) = 0$ sont indépendantes,
alors l'espace des solutions de (S) est de dimension $n - d$.

Mais que signifie l'expression « équations indépendantes », que nous utilisons régulièrement sans jamais l'avoir définie ?

Nous l'utilisons d'habitude pour dire qu'il n'est *pas possible d'exprimer l'une des équations comme combinaison linéaire des autres*. Mais cela signifie que la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_d)$ est *libre en tant que famille de vecteurs de l'espace $E^\star$*.

Au contraire, si la famille $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est liée en tant que famille de vecteurs de l'espace $E^\star$, alors on peut obtenir un système équivalent à (S) en *éliminant les redondances*, c'est-à-dire en cherchant à *extraire de* $(\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_d)$ *une famille libre maximale*. Mais cela revient à chercher la dimension de **Vect**$[\varphi_1, .., \varphi_d]$ de $E^\star$, c'est-à-dire *le rang de* $(\varphi_1, \varphi_2, .., \varphi_d)$.

Grâce aux observations précédentes, il est raisonnable de penser qu'étant donné un espace vectoriel E de dimension finie, les notions de liberté et de rang pour les familles de formes linéaires sur E permettent de trouver la dimension de l'espace des solutions d'un système linéaire dont l'inconnue est un vecteur de E.

Proposition 4.71 – Lien entre rang de la famille d'équations et espace des solutions

1. *Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension d. Il existe une famille libre $(\varphi_1, .., \varphi_{n-d})$ de $(n-d)$ formes linéaires sur E vérifiant :* $F = \bigcap_{k=1}^{n-d} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$.
2. *Si p un entier naturel non nul et si $(\varphi_1, .., \varphi_p)$ est une famille de formes linéaires sur E, alors la dimension de* $\bigcap_{k=1}^{p} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ *est $(n-r)$, où r est le rang $(\varphi_1, .., \varphi_p)$ comme famille de vecteurs de $E^\star$.*

CHAPITRE 5

REPRÉSENTATION MATRICIELLE DES APPLICATIONS LINÉAIRES

1. Une application linéaire est déterminée par l'image d'une base

Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F. Nous avons vu que si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E, alors certains renseignements sur la famille $(f(e_i))_{i\in I}$ donnent des informations précieuses sur l'application f : par exemple si $(f(e_i))_{i\in I}$ est génératrice de F alors f est surjective, tandis que si $(f(e_i))_{i\in I}$ est libre alors f est injective.

Nous allons voir maintenant qu'on peut aller beaucoup plus loin : si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et si on connaît la famille $(f(e_i))_{i\in I}$, alors on connaît *complètement* l'application f.

Théorème 5.1 – Connaître une application linéaire $\iff$ connaître l'image d'une base

Soient

- *E et F deux espaces vectoriels,*
- *$\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E,*
- *$(v_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F indexée par I.*

Il existe une unique application linéaire f de E dans F vérifiant : $\forall i \in I,\ f(e_i) = v_i$.

***Exemple 5.2.* —** Cherchons à décrire une application *linéaire* f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ qui, sur la base canonique, se comporte comme suit :

$$f\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\qquad f\left[\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\qquad f\left[\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}.$$

Si $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, on a $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Comme f est linéaire, on doit avoir

$$f\left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right]=f\left[x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right]=x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+4y+7z\\2x+5y+8z\\3x+6y+9z\end{pmatrix}$$

ce qui donne « la formule pour calculer » $f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right]$ lorsque x, y et z sont quelconques :

$$f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} x + 4y + 7z \\ 2x + 5y + 8z \\ 3x + 6y + 9z \end{pmatrix}.$$

Cela décrit bien sûr complètement f, et on constate que $f = T_A$, où A est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.

Voici d'autres exemples d'utilisation du théorème ci-dessus.

Exemple 5.3. — Soit Ψ une forme linéaire sur $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Si $\Psi\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \Psi\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] = \Psi\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \Psi\left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] = 1$, alors Ψ est nécessairement l'application $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + b + c + d$.

2. Matrice d'une application linéaire

2.1. Définition et exemples. —

Définition 5.4 – Matrice d'une application linéaire dans des bases

Soient
- E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie,
- f une application linéaire de E dans F,
- $\mathscr{B} = (e_1, .., e_p)$ une base de E,
- $\mathscr{C} = (u_1, .., u_n)$ une base de F.

On appelle *matrice de f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$*, et on note

$$\mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}[f]$$

la matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$ dont la j-ème colonne (pour $j \in \{1, .., p\}$) recense les coordonnées de $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$.

Remarque 5.5 **(Sur les notations). —**
- **Attention à l'ordre qui est la première source d'erreurs sur ce chapitre.** Dans ce cours on note les bases de départ et d'arrivée *de droite à gauche*. Lorsqu'il y a risque de confusion, on n'hésitera pas à noter $\mathscr{M}_{\text{arr}=\mathscr{C},\ \text{dép}=\mathscr{B}}[f]$ cette matrice.
- Si l'espace *d'arrivée* est de dimension n et l'espace *de départ* de dimension p, alors $\mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}[f]$ comporte n lignes et p colonnes.
- Lorsque $E = F$ et $\mathscr{C} = \mathscr{B}$ (même base au départ et à l'arrivée), on notera $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}[f]$ plutôt que $\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}[f]$.

Nous donnons maintenant une série d'exemples significatifs.

Exemple 5.6. **—** Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Dire que la matrice de f dans la base canonique[1] est $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 8 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$,

c'est dire que $f\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$, $f\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $f\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Dans ce cas f est l'application $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ 3x - y + 8z \\ 5x + 5y + 5z \end{pmatrix}$. Plus généralement, si A est une matrice de $\mathscr{M}_{np}(\mathbb{R})$, et si f est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$, dire que la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$ est la matrice A, c'est dire que f est la transformation T_A canoniquement associée à A.

$f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est la transformation T_A $\iff$ f a pour matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$.

1. Autrement dit la matrice $\mathscr{M}_{\mathscr{C}\mathscr{C}}(f)$ où $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 5.7. — Voici un exemple qui montre qu'une application linéaire peut avoir une matrice *compliquée* ou *qui rend l'application difficile à comprendre* dans certaines bases et une matrice *très simple* ou *qui rend l'application facile à comprendre* dans d'autres bases. Considérons l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 2x-y \\ -x+2z \\ -x-2y+4z \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\mathscr{B}'$ la base (u,v,w) du même espace où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

La matrice $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$ de f dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, puisque $f = T_A$ (voir l'ex. 2bis ci-dessus).

Par ailleurs, on constate que $f(u) = u$, $f(v) = 2v$ et $f(w) = 3w$:

en conséquence, dans la base $\mathscr{B}' = (u,v,w)$, la matrice de f est la matrice diagonale $\mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Voici à présent une remarque théorique importante. Fixons deux bases $\mathscr{B} = (e_1, .., e_p)$, $\mathscr{C} = (u_1, .., u_n)$ de E et F. Nous avons vu qu'à toute application linéaire f de $\mathscr{L}(E,F)$, on peut associer sa matrice dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$: on dispose donc d'une application

$$\begin{aligned} \mathbf{Mat} : \mathscr{L}(E,F) &\to \mathscr{M}_{np}(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto \mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}[f]. \end{aligned}$$

L'application **Mat** est bijective : connaître f et connaître sa matrice dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, c'est « la même chose ».

Ce fait est d'une importance pratique immense, car il permet de manipuler *par le calcul* (et d'automatiser sur un ordinateur) des applications linéaires abstraites, donc qui relient des objets « compliqués » (par exemple susceptibles d'intervenir dans le traitement de données, de sons, d'images...).

2.2. Comment les opérations sur les applications linéaires se traduisent sur leurs matrices. —

Proposition 5.8 – Matrice d'une combinaison d'applications linéaires

Soient

- *E, F, deux espaces vectoriels de dimension finie,*
- *f et g deux applications linéaires de E dans F,*
- *α et β deux réels,*
- *$\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ des bases de E et F.*

On a l'égalité

$$\mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}[\alpha f + \beta g] = \alpha\, \mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}[f] + \beta\, \mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}[g]$$

Proposition 5.9 – Matrice d'une composée = produit des matrices

Soient

- *E, F, G trois espaces vectoriels de dimension finie,*
- *$f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(E,G)$,*
- *$\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ des bases de E, F et G respectivement.*

On a alors

$$\mathscr{M}_{\mathscr{D},\mathscr{B}}[g \circ f] = \mathscr{M}_{\mathscr{D},\mathscr{C}}[g]\,\mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}[f]$$

C'est une conséquence de l'observation suivante :

Lemme 5.10 – Comment décrire l'image par f d'un vecteur à l'aide de $\mathscr{M}_{\mathscr{C}\mathscr{B}}[f]$

Soit v un vecteur de E.
Notons $X^v_{\mathscr{B}}$ la matrice-colonne (de $\mathscr{M}_{p1}(\mathbb{R})$, où $p = \dim(E)$) rassemblant les coordonnées de v dans la base $\mathscr{B}$.
Alors les coordonnées de $f(v)$ dans la base $\mathscr{C}$ sont données par le produit matriciel

$$X^{f(v)}_{\mathscr{C}} = \mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}[f] \cdot X^v_{\mathscr{B}}.$$

Voici quelques conséquences très utiles de la proposition 5.9.

(a) Si f est une application linéaire bijective, alors $\mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}[f]$ est une matrice inversible et $\mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}[f]^{-1} = \mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}\left[f^{-1}\right]$.

(b) Soient E est un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. S'il existe une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$ vérifie $A^2 = A$, alors f est un projecteur.

En effet, on a alors $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f) = A = A^2 = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f^2)$, et nous avons vu que deux endomorphismes dont les matrices dans $\mathscr{B}$ coïncident sont identiques, donc $f^2 = f$.

Par ailleurs, si f est un projecteur, alors pour toute base $\mathscr{B}$ de E, la matrice $A = \mathscr{M}_{\mathscr{B}}(f)$ vérifie $A^2 = A$ (pourquoi ?).

Relevons par ailleurs un renseignement théorique :

Proposition 5.11 – Dimension de l'espace des applications linéaires

oient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. La dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ est donnée par

$$\dim[\mathscr{L}(E,F)] = \dim(E) \cdot \dim(F).$$

3. Changements de coordonnées, changements de base

3.1. Matrice de changement de base. —

Définition 5.12 – Matrice de passage ou de changement de base

Soient

- E un espace vectoriel de dimension finie n
- $\mathscr{B} = (e_1, .., e_n)$ et $\mathscr{C} = (u_1, .., u_n)$ deux bases de E.

On appelle *matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$*, et on note

$$P_{\mathscr{B} \text{ vers } \mathscr{C}} \qquad \text{ou} \qquad P_{\mathscr{B} \to \mathscr{C}}$$

la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont la j-ème colonne (pour $j \in \{1, .., n\}$) recense les coordonnées de u_j dans la base $\mathscr{B}$.

Exemple 5.13. — Dans $\mathbb{R}^3$,

pour trouver la matrice de passage de la base $(u, v, w) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ à la base $(u', v', w') = \left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\5\\5\end{pmatrix}\right)$,

il suffit d'exprimer u', v' et w' en fonction de u, v et w :
or $u' = 1 \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$, $v' = (-1) \cdot u + 1 \cdot v + 0 \cdot w$ et $w' = 0 \cdot u + 0 \cdot v + 5 \cdot w$, donc

$$P_{(u,v,w) \text{ vers } (u',v',w')} = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\1 & 1 & 0\\0 & 0 & 5\end{pmatrix}.$$

***Exemple 5.14* (Passage de la base canonique à une autre).** — Si $\mathscr{C} = \left[\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{n1}\end{pmatrix}, .. \begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{nn}\end{pmatrix}\right]$ est une base de $\mathbb{R}^n$, et si $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$, alors la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$ est $\begin{pmatrix}a_{11} & \dots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}$: ses colonnes donnent les coordonnées dans la base canonique des vecteurs de $\mathscr{C}$.

Proposition 5.15 – Interprétation théorique de la matrice de changement de base

Avec les notations de la définition ci-dessus, on a l'égalité

$$P_{\mathscr{B} \text{ vers } \mathscr{C}} = \mathscr{M}_{\text{arr}=\mathscr{B},\ \text{dép}=\mathscr{C}}\left[id_E\right]$$

Attention, l'ordre n'est probablement pas celui qu'on imagine en premier !

***Remarque 5.16* (Inversibilité des matrices de passage). —** (a) Dans le contexte ci-dessus, $P_{\mathscr{B} \text{ vers } \mathscr{B}'}$ est toujours inversible : l'interprétation théorique la fait apparaître comme matrice dans des bases de l'application linéaire bijective id_E. Comme $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$, on a d'ailleurs (remarque (a) page 78) :

$$P^{-1}_{\mathscr{B} \text{ vers } \mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}' \text{ vers } \mathscr{B}}$$

(b) Réciproquement, si P est une matrice inversible, alors c'est une matrice de passage : ses colonnes $C_1, .., C_n$ forment une base $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^n$ (voir page 58), et si on note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, nous avons vu dans le premier exemple page 79 que $P = P_{\mathscr{B} \text{ vers } \mathscr{C}}$.

Si P est une matrice inversible, on a : $\quad P \quad = \quad P_{\text{(base canonique) vers (base des colonnes de } P)}$.

3.2. Changement de coordonnées pour les vecteurs. —

Proposition 5.17 – Lien entre les coordonnées d'un vecteur dans deux bases différentes

Soient

- *E un espace vectoriel de dimension finie ;*
- *$\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $P_{\mathscr{B} \text{ vers } \mathscr{B}'}$ la matrice de passage associée ;*
- *u un vecteur de E ;*
- *$X^u_{\mathscr{B}'}$ la colonne rassemblant les coordonnées de u dans $\mathscr{B}'$, $X^u_{\mathscr{B}}$ celle qui rassemble ses coordonnées dans $\mathscr{B}$.*

On a l'égalité

$$X^u_{\mathscr{B}} = P_{\mathscr{B} \text{ vers } \mathscr{B}'} \cdot X^u_{\mathscr{B}'}.$$

Attention, les erreurs sur ce résultat sont très fréquentes : à gauche il y a les « anciennes » coordonnées.

***Exemple 5.18.* —** On se place dans $\mathbb{R}^2$. Fixons un réel θ et considérons les deux vecteurs $u_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$, $v_\theta = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

La famille (u_θ, v_θ) est formée de deux vecteurs non colinéaires (ils sont orthogonaux !), donc c'est une base de $\mathbb{R}^2$.

Si $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$, ses coordonnées dans la base canonique (e_1, e_2) sont bien sûr x et y ; pour trouver ses coordonnées (x', y') dans la base (u_θ, v_θ), la proposition précédente dit qu'on a

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_{(e_1,e_2) \text{ vers } (u_\theta, v_\theta)} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

autrement dit

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

N'oubliez pas qu'ici les nouvelles coordonnées sont *à droite* : pour les trouver, il convient donc d'écrire [2]

2. Le fait que $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & +\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ peut se vérifier à la main.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & +\sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos(\theta) + y\sin(\theta) \\ -x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

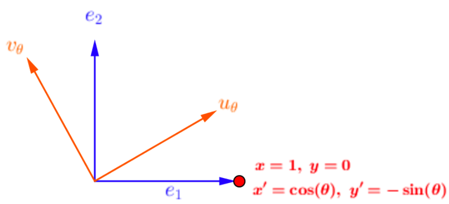


FIGURE 1. Coordonnées du point rouge dans (e_1, e_2) et (u_θ, v_θ).

3.3. Changement de base pour les matrices d'applications linéaires. —

Théorème 5.19 – Changement de base pour la matrice d'une application linéaire

Soient

- *E et F deux espaces vectoriels de dimension finie,*
- *f une application linéaire de E dans F,*
- *$\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E,*
- *$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F.*

On a l'égalité

$$\mathscr{M}_{\mathscr{C}',\mathscr{B}'}[f] = P_{\mathscr{C}' \text{ vers } \mathscr{C}} \cdot \mathscr{M}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}[f] \cdot P_{\mathscr{B} \text{ vers } \mathscr{B}'}.$$

Démonstration. —

$$\mathscr{M}_{\mathscr{C}'\mathscr{B}'}[f] = \mathscr{M}_{\mathscr{C}'\mathscr{C}}[\mathrm{id}_F]\, \mathscr{M}_{\mathscr{C}\mathscr{B}}[f]\, \mathscr{M}_{\mathscr{B}\mathscr{B}'}[\mathrm{id}_E]$$

et les interprétations théoriques des matrices de passage (proposition 5.3.1) font le reste. □

Corollaire 5.20 – Cas particulier : chang^{t} de base pour les matrices d'endomorphismes

Soient

- *E un espace vectoriel de dimension finie,*
- *f un endomorphisme de E,*
- *$\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E.*

On a l'égalité

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}'}[f] = P^{-1}_{\mathscr{B} \text{ vers } \mathscr{B}'} \cdot \mathscr{M}_{\mathscr{B}}[f] \cdot P_{\mathscr{B} \text{ vers } \mathscr{B}'}.$$

Exemple 5.21. — Nous pouvons voir fonctionner ce résultat sur l'exemple 5.7.

- Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathscr{B}'$ la base (u, v, w) où $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

  La matrice de passage $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est $P_{\mathscr{B} \text{ vers } \mathscr{B}'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$ (voir (b) page 79).

  Pour trouver son inverse, deux possibilités :
  - soit on cherche l'inverse par la méthode « du pivot » ;
  - soit on utilise le fait que $P^{-1}_{\mathscr{B} \text{ vers } \mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}' \text{ vers } \mathscr{B}}$ et on cherche la matrice de passage de (u, v, w) vers la base canonique. Il s'agit dans ce cas d'exprimer les vecteurs de la base canonique à l'aide de u, v et w : or on constate que $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{u+w}{2}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}u - v - \frac{1}{2}w$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -u + v - w$, si bien que $P_{\mathscr{B}' \text{ vers } \mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$.

- Considérons l'endomorphisme f dont la matrice dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.

  Le théorème ci-dessus dit donc que $\mathscr{M}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1 \end{pmatrix}$...

  le calcul donne $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, comme prévu compte tenu des discussions antérieures de cet exemple.

4. Matrices semblables

Définition 5.22 – Matrices semblables

Soient n un entier naturel non nul et M, N deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
On dit que M et N sont semblables lorsqu'il existe une matrice P de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui soit inversible et qui vérifie

$$N = P^{-1}MP.$$

La notion est évidemment liée à ce qui précède :

Proposition 5.23 – Semblables = représentent la même appli. dans des bases différentes

Soit n un entier naturel non nul et M, N deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Les matrices M et N sont semblables

(ii) Il existe un endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ et deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^n$ vérifiant : $M = \mathcal{M}_{\mathscr{B}}[f]$ et $N = \mathcal{M}_{\mathscr{C}}[f]$.

Voici une série d'exemples.

Exemple 5.24. — Reprenons l'exemple 5.7 : nous avons montré que si A est la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, alors

- la matrice de T_A dans la base canonique est A
- dans la base $\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$, on a vu que : $\mathcal{M}_{\mathscr{B}}[T_A] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Ainsi A et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exemple 5.25. — Soit A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = 0$ mais $A \neq 0$. Montrons que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Fixons un vecteur X de $\mathbb{R}^2$ vérifiant $AX \neq 0$ (il en existe, puisque $A \neq 0$) ; considérons la famille $(u, v) = (X, AX)$.

C'est une famille libre : en effet, si $\alpha X + \beta AX = 0$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, alors $A(\alpha X + \beta AX) = 0$, donc $\alpha(AX) + \beta(A^2X) = 0$, c'est-à-dire $\alpha(AX) = 0$; comme AX n'est pas nul, on obtient $\alpha = 0$ puis $\beta(AX) = 0$ et $\beta = 0$.

Ainsi (u, v) est une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$; c'en est une base. Elle vérifie $T_A(u) = v$ et $T_A(v) = A^2X = 0$.

On a donc bien $\mathcal{M}_{(u,v)}(T_A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, comme annoncé.

Exemple 5.26. — Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = A$. Montrons que si A n'est ni la matrice nulle ni la matrice identité, alors A est semblable soit à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, soit à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On sait que l'application T_A est un projecteur ; rappelons que si $F = \mathrm{Im}(A)$ et $S = \mathrm{Ker}(A)$, alors $F = \{X \in \mathbb{R}^n, AX = X\}$ et que T_A est le projecteur sur F parallèlement à S. Rappelons également que si $\mathcal{B}_F$ est une base de F et $\mathcal{B}_S$ une base de S, alors la réunion $\mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_S$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (voir le numéro 3.3, page 41) .

- Si $\dim(F) = 0$, alors $\mathbb{R}^3 = F \oplus S = \{0\} \oplus S = S = \mathrm{Ker}(T_A)$ et T_A est l'application nulle, donc A est la matrice nulle.
- Si $\dim(F) = 1$, alors $\dim(S) = 2$; choisissons une base (u) de F et une base (v, w) de S, alors $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $T_A(u) = u$, $T_A(v) = T_A(w) = 0$, si bien que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}[f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Si $\dim(F) = 2$, alors $\dim(S) = 1$; choisissons une base (u, v) de F et une base (w) de S, alors $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et $T_A(u) = u$, $T_A(v) = v$, $T_A(w) = 0$, si bien que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}[f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Si $\dim(F) = 3$, alors $\mathbb{R}^3 = F = \{X \in \mathbb{R}^n, \quad AX = X\}$, donc A est en fait la matrice identité.

***Remarque 5.27* (Utilisation pratique de la notion).** — Les exemples ci-dessus devraient montrer clairement que le fait qu'une matrice A soit semblable à une matrice « simple » révèle que la transformation T_A est en fait facile à décrire géométriquement, mais à condition d'utiliser un repère différent de la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si $A = PBP^{-1}$ avec B « agréable » et P inversible, alors la matrice P permet de passer de la base canonique à un repère dans lequel la transformation T_A est « plus facile à comprendre » que si on s'en tient à la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Nous venons de voir que pour montrer que deux matrices *sont* semblables, il est souvent nécessaire de comprendre les transformations géométriques sous-jaçentes et d'en révéler une parenté cachée. Ce n'est pas un problème évident.

En général, montrer que deux matrices sont semblables, c'est difficile.

En revanche, quelques indices permettent parfois de voir très vite que deux matrices *ne sont pas* semblables. En voici deux :

Proposition 5.28 – Trace et rang de deux matrices semblables

Soient n un entier naturel non nul et M, N deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Si M et N sont semblables, alors on a $Tr(M) = Tr(N)$ et $\mathbf{rg}[M] = \mathbf{rg}[N]$.

La façon la plus courante d'utiliser ce résultat est la remarque suivante :

Si deux matrices n'ont pas la même trace ou pas le même rang, elles n'ont aucune chance d'être semblables.

Exemple 5.29. —

(a) Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables : leurs traces sont différentes.

(b) Les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ont la même trace (zéro) mais elles ont des rangs différents : la première est de rang 1, la seconde de rang 2. Elles ne sont donc pas semblables.

Attention, il est très fréquent que deux matrices aient la même trace et le même rang sans être semblables.

***Exemple 5.30.* —** (a) Les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ne sont pas semblables. En effet, H est le double $2I_2$ de la matrice identité, donc pour *toute* matrice inversible P, on a $P^{-1}HP = H$ et on ne peut jamais avoir $P^{-1}IP = A$.

(b) Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ ont même trace (5) et même rang (2), mais le chapitre qui vient montrera facilement qu'elles ne sont pas semblables.