CAD模型旋转的矩阵应用数值实验

姓名：王旋宇
学号：2012049010022
班级：数理基科班
老师：赖生建

2015-10-27

1 实验目的

1. 了解正交矩阵、正交变换

2. 会使用CAD制作简单模型

2 实验原理

2 .1 二维平面旋转变换

设平面上有单位向量$\vec{a}=(x,y)$，设该向量和x轴的夹角为α，当该向量旋转一个角度θ时，设旋转以后的向量为$\vec{a}^{'}=(x^{'},y^{'})$，易知

$$\begin{cases} x = & \cos\alpha \\ y = & \sin\alpha \end{cases} \tag{1}$$

以及

$$\begin{cases} x^{'} = & \cos(\alpha+\theta) \\ y^{'} = & \sin(\alpha+\theta) \end{cases} \tag{2}$$

把(2)展开可以得到

$$\begin{cases} x^{'} = & \cos\alpha\cos\theta-\sin\alpha\sin\theta \\ y^{'} = & \sin\alpha\cos\theta+\cos\alpha\sin\theta \end{cases} \tag{3}$$

与(1)联立可得

$$\begin{cases} x^{'} = & \cos\theta x-\sin\theta y \\ y^{'} = & \cos\theta y+\sin\theta x \end{cases} \tag{4}$$

转化为矩阵形式即为

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx^{'} \\ y^{'} \end{bmatrix} \tag{5}$$

2 .2 分块矩阵

有时候，我们用几条纵线与横线将矩阵分割，把一个大矩阵看成是一些小矩阵组成的，就如是矩阵是由数组成的一样，构成一个个分块矩阵，从而把大型矩阵的运算华为若干小型矩阵的运算，使运算更为简明。

下面说一下分块矩阵的乘法。

设分块矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n},B=(b_{ij})_{n\times p}$，如果把$A,B$分别分块为$r\times s$和$s\times t$分块矩阵，且$A$的列的分法和$B$的行的分法相同，即

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1s}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{r1} & \cdots & A_{rs}\end{bmatrix}\qquad\qquad B=\begin{bmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ B_{s1} & \cdots & B_{st}\end{bmatrix}$$

则

$$AB=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s}\\ \vdots & & & \vdots\\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B_{11} & \cdots & B_{1t}\\ B_{21} & \cdots & B_{2t}\\ \vdots & & \vdots\\ B_{s1} & \cdots & B_{st}\end{bmatrix}=C \tag{6}$$

其中C是$r\times t$分块矩阵，且

$$\begin{aligned}C_{kl}&=A_{k1}B_{1l}+A_{k2}B_{2l}+\cdots+A_{ks}B_{sl}\\ &=\sum_{i=1}^{s}A_{ki}B_{il}\qquad\qquad (k=1,2,\cdots,r;l=1,2,\cdots,t)\end{aligned} \tag{7}$$

2 .3 正交矩阵

首先引入正交变换的概念。

定义1 . 正交变换：设σ为欧式空间V上的线性变换，若对所有的$\alpha,\beta\in V$都成立

$$(\alpha,\beta)=(\sigma(\alpha),\sigma(\beta)),$$

则称σ是V上的正交变换。

接下来我们根据正交变换的概念来定义正交矩阵。

定义2 . 正交矩阵：正交变换在某组正交基下面的矩阵就是正交矩阵。

正交矩阵还有另外一种定义。

定义3 . 正交矩阵：设$A\in R^{n\times n}$，若$AA^T=A^TA=I$，则称A是正交矩阵。

定理1 . 设σ为欧式空间V上的线性变换，那么σ保持V中向量的长度不变，即$\|\sigma(\alpha)\|=\|\alpha\|$。

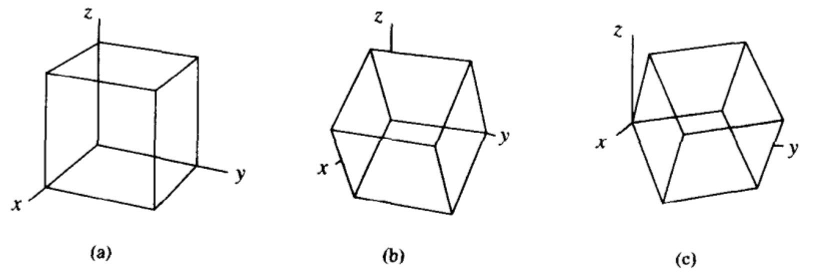

图 3.3 (a) 初始立方体;(b) $V = R_y(\frac{\pi}{6})U$,沿 y 轴旋转;(c) $W = R_z(\frac{\pi}{4})V$,沿 z 轴旋转

3 实验内容

(P93)

1. 单位立方体位于第一卦限，一个顶点在原点。首先，以角度$\frac{\pi}{6}$沿y轴旋转立方体，然后再以角度$\frac{\pi}{4}$沿z轴旋转立方体。使用动画展示。
2. 设单位立方体位于第一卦限，一个顶点在原点。首先，以角度$\frac{\pi}{12}$ 沿x轴旋转立方体，然后再以角度$\frac{\pi}{6}$沿z轴旋转立方体使用动画展示。
3. 四面体的坐标为(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)。首先以弧度0.15 沿y轴旋转，然后再以弧度-1.5沿z 轴旋转，最后以弧度2.7沿x轴旋转。使用动画展示。

4 实验分析

根据二维的旋转矩阵(5)以及分块矩阵的知识可以推导出来三维绕坐标轴旋转的旋转矩阵。设A为3×3 矩阵，$U = [x, y, x]'$是3×1矩阵，则乘积$V = AU$是另一个3×1矩阵。我们知道3×1阶矩阵和三维空间同构。矩阵U等价于位置向量$U = (x, y, z)$，表示在三维空间中一个点的位置。当点绕坐标轴旋转的时候，可以认为只有两个坐标变化而第三个不变。例如，当点绕z轴旋转γ角度的时候我们可以把旋转矩阵记为$R_z(\gamma)$，我们把旋转矩阵如下分割成四块，把坐标矩阵U分为如下两块

$$R_z(\gamma) = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \qquad U = \left[\begin{array}{c} x \\ y \\ \hline z \end{array}\right] = \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \tag{8}$$

则

$$V = R_z(\gamma)U = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE + BF \\ CE + DF \end{bmatrix} \tag{9}$$

可以看出，当B、C为零矩阵，D为单位矩阵的时候，所得矩阵V的$AE + BF = AE$，而$CE + DF = F$，即只有x、y 轴的坐标变化而z轴坐标不变，所

以当绕z轴旋转γ角度的时候，就是图形中所有的点在过这个点以及与xoy平行的平面中以z轴为中心旋转γ 角度。可得

$$R_z(\gamma)=\begin{bmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \tag{10}$$

同理，可以推出绕x轴旋转以及绕y轴旋转的旋转变换矩阵

$$R_x(\alpha)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix} \tag{11}$$

$$R_y(\beta)=\begin{bmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{bmatrix} \tag{12}$$

接下来需要证明这三个旋转矩阵不仅仅可以变换正方体的端点，还可以在旋转的过程中保持正方体的形状不变。只有满足了这个条件才能使用这三个旋转变换矩阵去变换正方体。

根据定义3 可以知道三个旋转变换矩阵都是正交矩阵，又根据定义2 可以知道三个矩阵都代表着一种正交变换，即：分别绕z轴、x轴、y轴逆时针转动。由定理1 可以知道在变换之后不改变正方体的形状，所以可以使用这三个矩阵去变换正方体。

实现时使用Matlab软件，利用plot3命令画出单位立方体，利用旋转变换矩阵乘上立方体的端点坐标来对立方体进行旋转变换。利用movie2avi命令生成动画，最终实现动画展示。

由于plot3命令需要的参数是一系列端点坐标，用把坐标连线的方式绘图，又由于这种方式不能方便的仅仅利用八个点就一次画出来，所以我们使用了一个3×16的矩阵作为参数。之所以采用只使用一次plot3命令来绘制立方体的，是为了进行立方体旋转变换方便以及容易录制视频考虑。

5 实验代码

1.

```
figure %建立窗口
h = figure %h为窗口句柄，将figure赋给h
%首先进行绕y轴pi/6的旋转，生成50帧的动画来展示。
for i=1:50
  %t为旋转变换矩阵，t左乘坐标矩阵即为对坐标进行绕y轴正方向逆时针旋转。
  t=[cos(i*pi/300),0,sin(i*pi/300);0,1,0;-sin(i*pi/300),0,cos(i*pi/300)];
  %cube为plot3命令中画出正方体端点的矩阵，保存在workspace中，见于实验结果分析
  t=t*cube;%对正方体进行旋转
```

```
    %画出旋转后的图像
    plot3(t(1,:),t(2,:),t(3,:));
    %在图像中给坐标轴贴标签
    xlabel('X');
    ylabel('Y');
    zlabel('Z');
    %由于不知道怎么画出从原点伸开的xyz轴，所以用网格来在观看的时候
    判断是否绕轴旋转
    grid;
    %按照常用的角度观察旋转，更容易理解动画
    view(64,22)
    %设置坐标轴范围，用来固定坐标轴
    axis([-0.7 1.5 -0.7 1.5 -0.7 1.5])
    %获取每一帧的动画
    A(i)=getframe(h);%在制作第二个视频的时候注释掉
end

%制作输出avi视频文件
%movie2avi(A,'y_movie2avi');
% 以下语句在进行制作绕z轴旋转的时候去掉注释，并且按照注释进行相应
的更改% aa = t; %y轴旋转之后的立方体保存在aa中
% for i=1:100 %动画设置为100帧。在录制绕z轴旋转的视频时改为1：100，
制作全过程的时候改为101：200
    % %t为绕z轴旋转变换矩阵
    % t=[cos((i)*pi/400),sin((i)*pi/400),0;-sin((i)*pi/400),cos((i)*pi/400),0;0,0,1];
    % %对aa进行旋转变换
    % t=t*aa;
    % %画出旋转变换之后的立方体
    % plot3(t(1,:),t(2,:),t(3,:));
    %在图像中给坐标轴贴标签
    % xlabel('X');
    % ylabel('Y');
    % zlabel('Z');
    %由于不知道怎么画出从原点伸开的xyz轴，所以用网格来在观看的时候
    判断是否绕轴旋转
    % grid;
    %按照常用的角度观察旋转，更容易理解动画
    % view(64,22)
    %设置坐标轴范围，用来固定坐标轴
    % axis([-0.7 1.5 -0.7 1.5 -0.7 1.5])
    %获取每一帧的动画
    % A(i)=getframe(h);
% end
% movie2avi(A,'z_movie2avi','compression','none');% 制作绕y 轴或者全部
视频的时候注释掉
% movie2avi(A,'all_movie2avi','compression','none');% 制作单个旋转的时候
```

注释掉
其中cube为:

Table 1: cube矩阵数据

0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	0

2. figure %建立窗口
h = figure %h为窗口句柄，将figure赋给h

%首先进行绕y轴pi/6的旋转，生成50帧的动画来展示。
for i=1:50
%t为旋转变换矩阵，t左乘坐标矩阵即为对坐标进行绕y轴正方向逆时针旋转。
t=[1,0,0;0,cos(i*pi/600),-sin(i*pi/600);0,sin(i*pi/600),cos(i*pi/600)];
%cube为plot3命令中画出正方体端点的矩阵
t=t*cube;%对正方体进行旋转
%画出旋转后的图像
plot3(t(1,:),t(2,:),t(3,:));
%在图像中给坐标轴贴标签
xlabel('X');
ylabel('Y');
zlabel('Z');
%由于不知道怎么画出从原点伸开的xyz轴，所以用网格来在观看的时候判断是否绕轴旋转
grid;
%按照常用的角度观察旋转，更容易理解动画
view(64,22)
%设置坐标轴范围，用来固定坐标轴
axis([-0.7 1.5 -0.7 1.5 -0.7 1.5])
%获取每一帧的动画
A(i)=getframe(h);%在制作第二个视频的时候注释掉
end
%制作输出avi视频文件
% movie2avi(A,'x_movie2avi','compression','None');
% movie(A)

aa = t; %y轴旋转之后的立方体保存在aa中
for i=51:100 %动画设置为50帧。在录制绕z轴旋转的视频时改为1：50，制作全过程的时候改为51：100
%t为绕z轴旋转变换矩阵
t=[cos((i-50)*pi/300),sin((i-50)*pi/300),0;-sin((i-50)*pi/300),cos((i-50)*pi/300),0;0,0,1];
%对aa进行旋转变换

```
    t=t*aa;
    %画出旋转变换之后的立方体
    plot3(t(1,:),t(2,:),t(3,:));
    % 在图像中给坐标轴贴标签
    xlabel('X');
    ylabel('Y');
    zlabel('Z');
    % 由于不知道怎么画出从原点伸开的xyz轴，所以用网格来在观看的时候判断是否绕轴旋转
    grid;
    % 按照常用的角度观察旋转，更容易理解动画
    view(64,22)
    % 设置坐标轴范围，用来固定坐标轴
    axis([-0.7 1.5 -0.7 1.5 -0.7 1.5])
    % 获取每一帧的动画
    A(i)=getframe(h);
end
% movie(A)
movie2avi(A,'z_movie2avi','compression','none');%制作绕y轴或者全部视频的时候注释掉
movie2avi(A,'all_movie2avi','compression','none');%制作单个旋转的时候注释掉
```

cube数据和第一题相同。

3.

```
figure %建立窗口
h = figure %h为窗口句柄，将figure赋给h
%首先进行绕y轴0.15的旋转，生成50帧的动画来展示。
for i=1:50
    %t为旋转变换矩阵，t左乘坐标矩阵即为对坐标进行绕y轴正方向逆时针旋转。
    t=[cos(i*3/1000),0,sin(i*3/1000);0,1,0;-sin(i*3/1000),0,cos(i*3/1000)];
    %tetrahedron为plot3命令中画出四面体端点的矩阵
    t=t*tetrahedron;%对四面体进行旋转
    %画出旋转后的图像
    plot3(t(1,:),t(2,:),t(3,:));
    %在图像中给坐标轴贴标签
    xlabel('X');
    ylabel('Y');
    zlabel('Z');
    %由于不知道怎么画出从原点伸开的xyz轴，所以用网格来在观看的时候判断是否绕轴旋转
    grid;
    %按照常用的角度观察旋转，更容易理解动画
    view(18,14)
    %设置坐标轴范围，用来固定坐标轴
    axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5 -1.5 1.5])
```

```
    %获取每一帧的动画
    A(i)=getframe(h);%在制作第二个视频的时候注释掉
end
%制作输出avi视频文件
% movie2avi(A,'y_movie2avi','compression','None');
aa = t; %y轴旋转之后的立方体保存在aa中
for i=51:100 %动画设置为50帧。在录制绕z轴旋转的视频时改为1：50，制
作全过程的时候改为51：100
    %t为绕z轴旋转变换矩阵
    t=[cos(-(i-50)*3/100),sin(-(i-50)*3/100),0;-sin(-(i-50)*3/100),cos(-(i-50)*3/100),0;0,0,1];
    %对aa进行旋转变换
    t=t*aa;
    %画出旋转变换之后的四面体
    plot3(t(1,:),t(2,:),t(3,:));
    % 在图像中给坐标轴贴标签
    xlabel('X');
    ylabel('Y');
    zlabel('Z');
    % 由于不知道怎么画出从原点伸开的xyz轴，所以用网格来在观看的
    时候判断是否绕轴旋转
    grid;
    % 按照常用的角度观察旋转，更容易理解动画
    view(18,14)
    % 设置坐标轴范围，用来固定坐标轴
    axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5 -1.5 1.5])
    % 获取每一帧的动画
    A(i)=getframe(h);
end
%制作输出avi视频文件
% movie2avi(A,'y_movie2avi','compression','None');
aaa = t; %y轴旋转之后的立方体保存在aaa中
for i=101:150 %动画设置为50帧。在录制绕z轴旋转的视频时改为1：50，
制作全过程的时候改为101:150
    %t为绕x轴旋转变换矩阵
    t=[1,0,0;0,cos((i-100)*27/500),-sin((i-100)*27/500);0,sin((i-100)*27/500),cos((i-
    100)*27/500)];
    %对aaa进行旋转变换
    t=t*aaa;
    %画出旋转变换之后的四面体
    plot3(t(1,:),t(2,:),t(3,:));
    % 在图像中给坐标轴贴标签
    xlabel('X');
    ylabel('Y');
    zlabel('Z');
    % 由于不知道怎么画出从原点伸开的xyz轴，所以用网格来在观看的
    时候判断是否绕轴旋转
```

```
    grid;
    % 按照常用的角度观察旋转，更容易理解动画
    view(18,14)
    % 设置坐标轴范围，用来固定坐标轴
    axis([-1.5 1.5 -1.5 1.5 -1.5 1.5])
    % 获取每一帧的动画
    A(i)=getframe(h);
end
movie2avi(A,'x_movie2avi','compression','none');% 制作全过程旋转的时候注释掉
movie2avi(A,'all_movie2avi','compression','none');% 制作单个旋转的时候注释掉
```

tetrahedron矩阵的数据如下表：

Table 2: tetrahedron矩阵数据

0	1	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1

6 实验结果

1. 第一题：单位立方体位于第一卦限，一个顶点在原点。首先，以角度$\frac{\pi}{6}$沿y轴旋转立方体，结果如下所示：

   单位立方体以角度$\frac{\pi}{6}$沿y轴旋转。

   然后再以角度$\frac{\pi}{4}$沿z轴旋转立方体结果如下所示：

   单位立方体以角度$\frac{\pi}{4}$沿z轴旋转。

   总旋转过程如下所示：

   单位立方体旋转总过程。

2. 第二题：单位立方体位于第一卦限，一个顶点在原点。首先，以角度$\frac{\pi}{12}$沿x轴旋转立方体，结果如下所示：

   单位立方体以角度$\frac{\pi}{12}$沿x轴旋转。

   然后再以角度$\frac{\pi}{6}$沿z轴旋转立方体结果如下所示：

   单位立方体以角度$\frac{\pi}{6}$沿z轴旋转。

总旋转过程如下所示：

单位立方体旋转总过程。

3. 第三题：四面体首先以弧度0.15沿y轴旋转，结果如下所示：

四面体首先以弧度0.15沿y 轴旋转。

然后再以弧度-1.5沿z轴旋转结果如下所示：

四面体以弧度-1.5沿z轴旋转。

然后再以弧度2.7沿x轴旋转结果如下所示：

四面体以弧度2.7沿x轴旋转。

总旋转过程如下所示：

四面体旋转总过程。

7 实验结果分析

实验结果表明，正交变换的确可以保证保持原图形形状不变的转动。并且，由于旋转变换是由矩阵表示的，我们可以证明旋转变换和正交矩阵关于矩阵乘法构成的群是同构的。那么旋转变换的复合就相当于矩阵的乘法。所以只有当两个正交矩阵关于矩阵乘法可以交换的时候，两个旋转变换才能交换顺序。而在此实验中，三个实验的旋转矩阵不能关于矩阵乘法交换，所以，在这个三个实验中都是不能交换旋转顺序的。

8 实验总结

该实验中主要收获有两个，第一是关于使用CAD软件画图、制作视频输出，第二是温习了关于正交、矩阵、变换的知识。

在图形化的现代，在计算机上实现图形变化是很重要的，因此牵涉出如何表示图形以及对图形进行变化。通过这个实验体会了矩阵的重要性。图形的绘制以及对图形的变换都可以通过矩阵方便的表示。同时由于对矩阵研究的深入，对于图形的变换更加的便利。变换$\rightleftharpoons$矩阵$\rightleftharpoons$图形，体现了抽象和具体以及抽象层次的变化，这也是很重要的思想。把具体的问题抽象化从而可以更加广泛的解决问题，抽象的层次越高越具有普适性。但是同时也要有可以具体表示的工具，只有这样学习才能更广泛深入有力的解决问题。

另外这次的报告使用LaTeX编写也是一段痛苦但是收获很多的过程，遗憾的是最终没能在PDF文件中插入视频，希望以后能学会如何做。