**数学常数e的含义**

作者： [阮一峰](http://www.ruanyifeng.com/)

日期： [2011年7月 9日](http://www.ruanyifeng.com/blog/2011/07/)

1.

e是一个重要的常数，但是我一直不知道，它的真正含义是什么。

它不像π。大家都知道，π代表了圆的周长与直径之比3.14159，可是如果我问你，e代表了什么。你能回答吗？

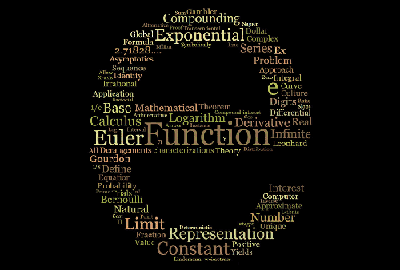
[维基百科](http://en.wikipedia.org/wiki/E_(mathematical_constant))说：

"e是自然对数的底数。"

但是，你去看["自然对数"](http://en.wikipedia.org/wiki/Natural_logarithm)，得到的解释却是：

"自然对数是以e为底的对数函数，e是一个无理数，约等于2.718281828。"

这就构成了循环定义，完全没有说e是什么。数学家选择这样一个无理数作为底数，还号称这种对数很"自然"，这难道不是很奇怪的事情吗？



2.

昨天我读到一篇[好文章](http://betterexplained.com/articles/an-intuitive-guide-to-exponential-functions-e/)，它把这个问题解释得非常清楚，而且一看就懂。

它说，什么是e？简单说，**e就是增长的极限。**

下面就是它的解释。

3.

假定有一种单细胞生物，它每过24小时分裂一次。

那么很显然，这种生物的数量，每天都会翻一倍。今天是1个，明天就是2个，后天就是4个。我们可以写出一个增长数量的公式：

http://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=growth%3D2%5Ex&chs=30

上式中的x就表示天数。这种生物在x天的总数，就是2的x次方。这个式子可以被改成下面这样：

http://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=growth%20%3D%20(1%20%2B%20100%25)%5Ex&chs=30

其中，1表示原有数量，100%表示单位时间内的增长率。

4.

我们继续假定：每过12个小时，也就是分裂进行到一半的时候，新产生的那半个细胞已经可以再次分裂了。

因此，一天24个小时可以分成两个阶段，每一个阶段都在前一个阶段的基础上增长50%。

http://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=growth%3D(1%2B%5Cfrac%7B100%25%7D%7B2%7D)%5E2%3D2.25&chs=50

当这一天结束的时候，我们一共得到了2.25个细胞。其中，1个是原有的，1个是新生的，另外的0.25个是新生细胞分裂到一半的。

如果我们继续修改假设，这种细胞每过8小时就具备独立分裂的能力，也就是将1天分成3个阶段。

http://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=growth%3D(1%2B%5Cfrac%7B100%25%7D%7B3%7D)%5E3%3D2.37037...&chs=50

那么，最后我们就可以得到大约2.37个细胞。

很自然地，如果我们进一步设想，这种分裂是连续不断进行的，新生细胞每分每秒都具备继续分裂的能力，那么一天最多可以得到多少个细胞呢？

http://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=growth%3D(1%2B%5Cfrac%7B100%25%7D%7Bn%7D)%5En%3D%3F&chs=50

当n趋向无限时，这个式子的极值等于2.718281828...。

http://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=%5Clim_%7Bn%5Cto%5Cinfty%7D(1%2B%5Cfrac%7B100%25%7D%7Bn%7D)%5En%3D2.718281828...&chs=50

因此，当增长率为100%保持不变时，我们在单位时间内最多只能得到2.71828个细胞。**数学家把这个数就称为e，它的含义是单位时间内，持续的翻倍增长所能达到的极限值。**

这个值是自然增长的极限，因此以e为底的对数，就叫做自然对数。

5.

有了这个值以后，计算银行的复利就非常容易。

假定有一家银行，每年的复利是100%，请问存入100元，一年后可以拿多少钱？

http://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=%5Clim_%7Bn%5Cto%5Cinfty%7D100(1%2B%5Cfrac%7B100%25%7D%7Bn%7D)%5En%3D100e%3D271.828...&chs=50

回答就是271.828元，等于100个e。

但是，实际生活中，银行的利息没有这么高，如果利息率只有5%，那么100元存一年可以拿到多少钱呢？

http://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=%5Clim_%7Bn%5Cto%5Cinfty%7D100(1%2B%5Cfrac%7B5%25%7D%7Bn%7D)%5En%3D%3F&chs=50

为了便于思考，我们取n等于50：

http://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=100(1%2B%5Cfrac%7B5%25%7D%7B50%7D)%5E%7B50%7D%3D100(1%2B0.1%25)%5E%7B50%7D&chs=50

我们知道，在100%利息率的情况下，n=1000所得到的值非常接近e：

http://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=(1%2B%5Cfrac%7B100%25%7D%7B1000%7D)%5E%7B1000%7D%3D(1%2B0.1%25)%5E%7B1000%7D%5Capprox%20e&chs=50

因此，5%利息率就相当于e的20分之一次方：

http://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=(1%2B%5Cfrac%7B5%25%7D%7B50%7D)%5E%7B50%7D%3D%5B(1%2B%5Cfrac%7B100%25%7D%7B1000%7D)%5E%7B1000%7D%5D%5E%7B%5Cfrac%7B1%7D%7B20%7D%7D%5Capprox%20e%5E%7B%5Cfrac%7B1%7D%7B20%7D%7D&chs=50

20分之一正好等于5%的利率率，所以我们可以把公式改写成：

http://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=growth%3De%5E%7Brate%7D&chs=25

上式的rate就代表增长率。这说明e可以用于任何增长率的计算，前提是它必须是持续不断的复合式增长。

6.

再考虑时间因素，如果把钱在银行里存2年，可以得到多少钱？

http://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=growth%3D(e%5E%7Br%7D)%5E2%3De%5E%7B2r%7D&chs=30

在时间t的情况下，通用公式就是：

http://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=growth%3D(e%5E%7Br%7D)%5Et%3De%5E%7Br%5Ccdot%20t%7D%3De%5E%7Brt%7D&chs=30

上式就是计算增长量的万能公式，可以适用于任何时间、任何增长率。

7.

回到上面的例子，如果银行的利息率是5%的复利，请问100元存款翻倍需要多少时间？

http://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=100%5Ccdot%20e%5E%7B5%25t%7D%20%3D%20200&chs=25

计算结果是13.86年：

http://chart.googleapis.com/chart?cht=tx&chl=t%3D%5Cfrac%7Bln2%7D%7B5%25%7D%3D%5Cfrac%7B0.693%7D%7B5%25%7D%3D%5Cfrac%7B69.3%7D%7B5%7D%5Capprox%20%5Cfrac%7B72%7D%7B5%7D&chs=50

上式最后一个等号，表明用72除以增长率，可以得到翻倍的大致时间，这就是[72法则](http://zh.wikipedia.org/wiki/72%E6%B3%95%E5%89%87)的来源。

（完）