

QFT笔记整理

obxygene 据LX老师上课整理毕于2021年12月12日

2025 年 5 月 18 日

Chapter 1

路径积分方法的微扰展开

1.1 前置

1.1.1 核心公式

含参变量求导公式：通过引入参变数 J ，考虑一积分

$$I(J) = \int_{\beta(J)}^{\alpha(J)} dx f(x, J)$$

则有

$$\frac{\partial I(J)}{\partial J} = f(\alpha(J), J) \frac{d\alpha(J)}{dJ} - f(\beta(J), J) \frac{d\beta(J)}{dJ} + \int_{\beta(J)}^{\alpha(J)} dx \frac{df(x, J)}{dJ}$$

1.1.2 应用：高斯积分

使用：一维高斯积分的计算技巧

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy y^n e^{-\frac{1}{2}y^2} \quad (1.1)$$

考虑该高斯积分的变形(以下积分域均为实数轴)

$$I(J) = \int dy e^{-\frac{1}{2}y^2 + Jy} \quad (1.2)$$

可以发现，成立关系

$$\frac{d^n I}{dJ^n} = \int dy y^n e^{-\frac{1}{2}y^2 + Jy} \quad (1.3)$$

如果再令引入的参变数 $J = 0$ ，那么就得到了原来所求的高斯积分

$$\frac{d^n I}{dJ^n} \Big|_{J=0} = \int dy y^n e^{-\frac{1}{2}y^2 + Jy} \Big|_{J=0} = \int dy y^n e^{-\frac{1}{2}y^2} \quad (1.4)$$

但是注意到，(2)式是常见的高斯型，通过配方，我们可以将其直接积出

$$I(J) = e^{\frac{J^2}{2}} \int dy e^{-\frac{1}{2}(y-J)^2} = e^{\frac{J^2}{2}} Z(0) \quad (1.5)$$

上式中将常数项记为 $Z(0)$ ，这样一来，(3)式的关系可写为

$$\frac{d^n I}{dJ^n} = Z(0) \frac{d^n e^{J^2/2}}{dJ^n} \quad (1.6)$$

最后，可以得到

$$\int dy y^n e^{-\frac{1}{2}y^2} = Z(0) \frac{d^n e^{J^2/2}}{dJ^n} \Big|_{J=0} \quad (1.7)$$

为验证该等式的正确性，取一例 $n = 14$ ，注意 $n = 2m+1$ 恒为零，直接利用Mathematica计算有

$$\int dy y^n e^{-\frac{1}{2}y^2} = 135135\sqrt{2\pi}$$

注意到 $Z(0) = \sqrt{2\pi}$

我们再可以利用同时计算(1.7)的右边，再令 $J = 0$ ，直接计算有

$$\begin{aligned} & \frac{d^n}{dJ^n} e^{J^2/2} \Big|_{J=0} \\ &= +135135e^{\frac{J^2}{2}} + 945945e^{\frac{J^2}{2}} J^2 + e^{\frac{J^2}{2}} J^{14} + 91e^{\frac{J^2}{2}} J^{12} + 3003e^{\frac{J^2}{2}} J^{10} + 45045e^{\frac{J^2}{2}} J^8 + 315315e^{\frac{J^2}{2}} J^6 + 945945e^{\frac{J^2}{2}} J^4 \end{aligned}$$

令 $J = 0$ ，易看出只有第一项不为零，其他项都含 J^m

*P.S.*朋友提出的快速求导计算：

$$\begin{aligned} \frac{d^{14}}{dJ^{14}} e^{J^2/2} \Big|_{J=0} &= \frac{d^{14}}{dJ^{14}} \frac{1}{7!} \left(\frac{J^2}{2} \right)^7 \\ &= \frac{14!}{7!2^7} = 135135 \end{aligned} \quad (1.8)$$

1.2 推广

利用(1.7)式，将其配以相应的系数并求和，逆向使用泰勒公式有

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \int dy y^n e^{-\frac{1}{2}y^2} &= Z(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0) \frac{d^n}{dJ^n} e^{J^2/2} \Big|_{J=0} \\ &= \int dy f(y) e^{-\frac{1}{2}y^2} = Z(0) f\left(\frac{d}{dJ}\right) e^{\frac{J^2}{2}} \Big|_{J=0} \end{aligned} \quad (2.1)$$

在此基础上，在第二行的右侧加入新的因子

$$\begin{aligned} &Z(0) f\left(\frac{d}{dJ}\right) e^{\frac{J^2}{2}} e^{Jx} \Big|_{J=0, x=0} \\ &= Z(0) f\left(\frac{d}{dJ}\right) e^{\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}} e^{Jx} \Big|_{J=0, x=0} \\ &= Z(0) e^{\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}} f\left(\frac{d}{dJ}\right) e^{Jx} \Big|_{J=0, x=0} \\ &= Z(0) e^{\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}} f(x) e^{Jx} \Big|_{J=0, x=0} \\ &= Z(0) e^{\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}} f(x) \Big|_{x=0} \end{aligned} \quad (2.2)$$

即最后有

$$Z(0) e^{\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}} f(x) \Big|_{x=0} = \int dy f(y) e^{-\frac{1}{2}y^2} \quad (2.3)$$

例：令 $f(x) = \cos(x)$ ，通过Mathematica计算可以有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dy \cos(y) e^{-\frac{y^2}{2}} &= \sqrt{\frac{2\pi}{e}} \\ \sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}} \cos(x) \Big|_{x=0} &= \sqrt{\frac{2\pi}{e}} \cos(0) \end{aligned} \quad (2.4)$$

1.3 渐进微扰展开的敛散性(Altland, Simons Chapter 5.1)

在进入量子场论中的微扰展开的讨论之前，考察一个函数的微扰展开有利于理解之后对场的微扰展开。

我们考虑一个含有参数的积分。

$$I(g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2 - gx^4\right] = \frac{\exp\left[\frac{1}{32g}\right]}{4\sqrt{g\pi}} BesselK\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{32g}\right) \quad (3.1)$$

其中 g 为参数，右边为利用Mathematica计算得到的显式解，做出其关于 g 的图像可以得到

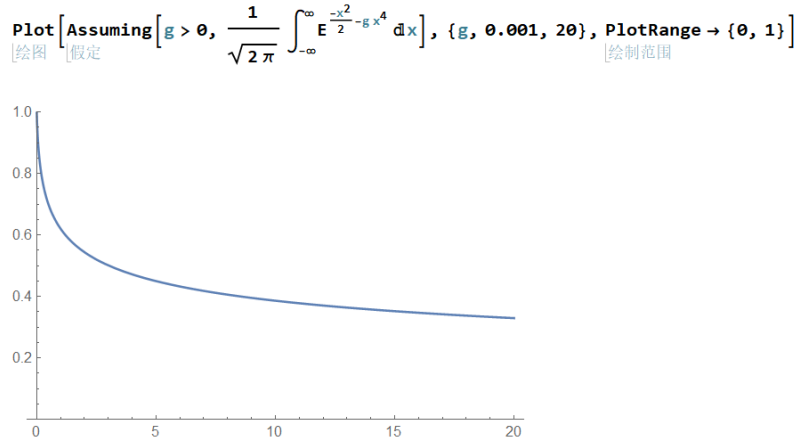


图 1.1:

可以发现，这个解析解是在 $g > 0$ 时良定义的。但是考虑到，我们通常都不会得到一个解析解，因此我们更期望有一个更一般的方法，来近似计算这个积分关于 g 的值。

首先，我们设 $g \ll 1$ ，以便我们可以对 x^4 进行泰勒展开。但是，我们这里并没有确认这样的展开是否可以展开到无穷项，因此我们首先取前 n 项

$$I(g) \approx \sum_{i=0}^n \frac{(-g)^i}{i!} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{4i} = \sum_{i=1}^n (-g)^i \frac{(4i-1)!!}{i!} \quad (3.2)$$

应用斯特灵近似(Stirling): $n! \approx n^n e^{-n}, n \gg 1$

此时式(3.2)的第 n 项近似为

$$\left(-\frac{gn}{e}\right)^n$$

可以发现，无论 g 多么小，如果我们展开的阶数过高的话，括号内的因子 n 将会超过 g ，在此之后，越高阶的项贡献越多！这意味着我们如果盲目展开到无穷阶并计算的话，我们将不会得到之前解析解所给出的有限的结果，而是得到一个发散的结果，微扰展开的高阶项是失效的！

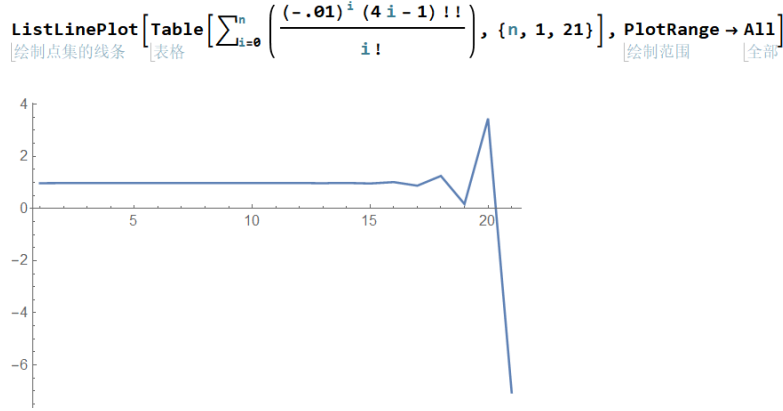


图 1.2: 取 $g=0.01$, 可以发现, 当 n 到20附近时, 计算结果开始震荡发散

上面是直接从数学的角度分析的高阶项的敛散性。如果从更物理的角度来考虑3.2中的

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} x^{4n} = (4n-1)!!$$

可以发现, $(4n-1)!!$ 可以看作是, 将 $4n$ 个对象两两配对所得到的组合数(从 $4n$ 个球中固定一个, 然后从 $4n-1$ 个球中选择一个与其配对, 这带来 $(4n-1)$ 种可能。不断重复这个过程, 最终是 $(4n-1)(4n-3)\dots = (4n-1)!!$ 种组合), 此时, 微扰展开在第几阶失败的判据可以认为是, 至第几阶, 该组合系数将会超过小因子 g^n 。

但是上面的分析并不代表微扰展开是无用的。事实上, 我们可以在微扰展开至失效前作截断, 来得到一个精度依赖于 g 有多小的结果。为了估量误差, 我们考虑

$$\left| I(g) - \sum_{n=0}^{n_{max}} g^n (-1)^n \frac{(4n-1)!!}{n!} \right| \leq g^{n_{max}+1} \left| g^{n_{max}+1} \frac{(4(n_{max}+1)-1)!!}{(n_{max}+1)!} \right| \quad (3.3)$$

$\approx \left(\frac{gn_{max}}{e} \right)^{n_{max}} \quad \text{当 } n_{max} \text{ 足够大}$

上面的误差由于 n_{max} 足够大, 对其求导并求得极值点为 $n_{max} \approx \frac{1}{g}$, 此时误差约为 $e^{-1/g}$, 这意味着当 $g \approx 0.01$ 时, 我们可以得到近乎 e^{-100} 的误差, 但是如果 $g \approx 0.3$, 那么我们取到第三项的时候就该停止了。事实上上面的是相当近似的结果, 利用Mathematica计算的话, 如果取 $g = 0.01$, 求和项取到大约6, 7的时候误差就到最小了。

上面讨论说明了微扰展开事实上并不是严格的泰勒展开, 而是一种渐近展开。只有在参量 g 足够小, 并选取恰当的阶数, 才可能得到足够精确的结果。对于场论中的微扰展开也是同样的道理, 只是场论中需要考虑的结构更为复杂。

实际上, 1952年, Dyson提供了一种针对渐近展开收敛半径为0的物理上的讨论。If this

series had a finite radius of convergence, the resulting analytic function around $g = 0$ would describe the physics of the problem for both positive and negative values of the coupling constant g , provided this is sufficiently small. However, if the coupling is negative, the physics is completely different, no matter how small g is in absolute value: the potential is unstable, and a particle sitting at its bottom will eventually decay by tunnel effect. Therefore, we should not expect a non-zero radius of convergence for this series 对于更多的关于非微扰效应，例如瞬子的讨论，可以参考Marcos Marino的Instantons and Large N一书。

1.4 泛函形式

约定欧几里得时间下，考虑自由场的作用量

$$\frac{1}{2} \int d^d x \phi(x) \Delta \phi(x)$$

此时 $\phi(x)$ 的泛函 $\mathcal{F}[\phi]$ 的泛函平均为

$$\langle \mathcal{F}[\phi] \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \int d^d x \phi(x) \Delta \phi(x)} \mathcal{F}[\phi] \quad (4.1)$$

其中 $\Delta \equiv \Delta_x$ 是微分算符，

将(4.1)式右侧与(2.3)式右侧对比

$$Z(0) e^{\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} f(x)}|_{x=0} = \int dy f(y) e^{-\frac{1}{2} y^2}$$

可以发现对应关系

$$\begin{aligned} \int dy &\leftrightarrow \int \mathcal{D}\phi \\ f(y) &\leftrightarrow \mathcal{F}(\phi) \\ e^{-\frac{1}{2} y^2} &\leftrightarrow e^{-\frac{1}{2} \int d^d x \phi(x) \Delta \phi(x)} \end{aligned}$$

用同样的证明路线，引入函数(源) $J(x)$ ，将(4.1)写为

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \int d^d x \phi(x) \Delta \phi(x) + i \int d^d x J(x) \phi(x)} \mathcal{F}[\phi] \quad (4.2)$$

此时(4.2)是 J 的一个泛函,要求得(4.1)式，只需设定 $J = 0$,即

$$\langle \mathcal{F}[\phi] \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \int d^d x \phi(x) \Delta \phi(x) + i \int d^d x J(x) \phi(x)} \mathcal{F}[\phi] |_{J=0}$$

可以将指数上的场做变换 $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + i \int d^d y \Delta^{-1}(x, y) J(y)$ ，虚数单位 i 来自于引入源函数的时候有虚数单位。如果源函数中不含 i ，这里可省略。易发现这个变换的Jacobian为1(相当于对函数作平移变换 $x \rightarrow y = x + a, a > 0, dx = d(y + a) = dy$ ，即这样的变换的Jacobian为1)，能够得到完全平方式

$$\begin{aligned}
& \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \int d^d x \phi(x) \Delta \phi(x) + i \int d^d x J(x) \phi(x)} \mathcal{F}[\phi] \\
& \rightarrow \int \mathcal{D}\phi \mathcal{F} \left[\frac{\delta}{i\delta J} \right] e^{-\frac{1}{2} \int d^d x (\phi(x) + i \int d^d y \Delta^{-1}(x, y) J(y)) \Delta (\phi(x) + i \int d^d z \Delta^{-1}(x, z) J(z)) + i \int d^d x J(x) (\phi(x) + i \int d^d y \Delta^{-1}(x, y) J(y))} \\
& = \mathcal{F} \left[\frac{\delta}{i\delta J} \right] \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \int d^d x (\phi \Delta \phi + 2i J(x) \phi(x) - \int d^d y \Delta^{-1}(x, y) J(y) J(x)) + i \int d^d x J(x) (\phi(x) + i \int d^d y \Delta^{-1}(x, y) J(y))} \\
& = \mathcal{F} \left[\frac{\delta}{i\delta J} \right] \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \int d^d x (\phi \Delta \phi)} e^{(+\frac{1}{2} \int d^d x \int d^d y J(x) \Delta^{-1}(x, y) J(y) - \int d^d x \int d^d y J(x) \Delta^{-1}(x, y) J(y))} \\
& = \mathcal{F} \left[\frac{\delta}{i\delta J} \right] Z[0] \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^d x d^d y J(x) \Delta^{-1}(x, y) J(y) \right]
\end{aligned} \tag{4.3}$$

这里的 $Z(0)$ 形式上的表示高斯型泛函积分

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \int d^d x \phi(x) \Delta \phi(x)} = Z(0) \propto \det(\Delta^{-1})^{1/2}$$

这个 $Z(0)$ 是个(无穷大的)常数，但是并不影响所求取的泛函平均(考虑d维高斯积分，这里是同样的道理)。对一个微分算符的行列式的一个比较好的思路是：首先考虑到，有限维的矩阵可被称为算子，其行列式即为所有本征值之积，然后将微分算符考虑为一无穷维算子，它的行列式即为无穷个本征值之积(例如球坐标系的角向拉普拉斯算子，它作用在球谐函数上给出本征值 $l(l+1)$)

综上，即得到了

$$\int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \int d^d x \phi(x) \Delta \phi(x) + i \int d^d x J(x) \phi(x)} \mathcal{F}[\phi] = Z[0] \mathcal{F} \left[\frac{\delta}{i\delta J} \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^d x d^d y J(x) \Delta^{-1}(x, y) J(y) \right] \tag{4.4}$$

接下来与(9)式类似，引入因子 $\exp \left[i \int d^d x J(x) \phi(x) \right] |_{\phi=0}$

$$\begin{aligned}
& Z[0] \mathcal{F} \left[\frac{\delta}{i\delta J} \right] \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^d x d^d y J(x) \Delta^{-1}(x, y) J(y) \right] \exp \left[i \int d^d x J(x) \phi(x) \right] |_{\phi=0} \\
& = Z[0] \mathcal{F} \left[\frac{\delta}{i\delta J} \right] \exp \left[\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \Delta^{-1}(x, y) \frac{\delta^2}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right] \exp \left[i \int d^d x J(x) \phi(x) \right] |_{\phi=0} \tag{4.5} \\
& = Z[0] \exp \left[\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \Delta^{-1}(x, y) \frac{\delta^2}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right] \mathcal{F}[\phi] \exp \left[i \int d^d x J(x) \phi(x) \right] |_{\phi=0}
\end{aligned}$$

注意第二行中由于有两个 $J(x)$ ，将其替换为 $\delta/\delta\phi$ 时的虚数平方会消掉前面的负号。最后设 $J=0$ ，可以得到

$$\langle \mathcal{F}[\phi] \rangle = Z[0] \exp \left[\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \Delta^{-1}(x, y) \frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right] \mathcal{F}[\phi]|_{\phi=0} \quad (4.6)$$

在Polchinski-String Theory中的附录(A.1.41)里证明(4.6)的思路为，利用傅里叶变换与线性叠加。其中，泛函 $\mathcal{F}[\phi]$ 的傅里叶变换为

$$\mathcal{F}[\phi] = \int \mathcal{D}J \exp \left[i \int d^d x J(x) \phi(x) \right] \tilde{f}[J] \quad (4.7)$$

具体为在(4.1)式中令泛函 $\mathcal{F}[\phi] = \exp \left[i \int d^d x J(x) \phi(x) \right]$ ，直接得到

$$\begin{aligned} & \left\langle \exp \left[i \int d^d x J(x) \phi(x) \right] \right\rangle \\ &= Z[0] \exp \left[\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \Delta^{-1}(x, y) \frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right] \exp \left[i \int d^d x J(x) \phi(x) \right] |_{\phi=0} \end{aligned} \quad (4.8)$$

左右两边以傅里叶因子加权并求和，构成傅里叶变换

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[\phi] \rangle &= \int \mathcal{D}J \left\langle \exp \left[i \int d^d x J(x) \phi(x) \right] \right\rangle \tilde{f}[J] \\ &= Z[0] \exp \left[\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \Delta^{-1}(x, y) \frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right] \int \mathcal{D}J \exp \left[i \int d^d x J(x) \phi(x) \right] \tilde{f}[J] |_{\phi=0} \\ &= Z[0] \exp \left[\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \Delta^{-1}(x, y) \frac{\delta^2}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \right] \mathcal{F}[\phi]|_{\phi=0} \end{aligned} \quad (4.9)$$

可以发现，这与(4.6)一样

1.5 费曼图(基于Mark Srednicki 9.5题)

1.5.1 微扰的代数形式

Srednicki中给出的式(9.41)

$$\langle 0 | T \left\{ \prod_{i=n}^1 \phi(x_i) \right\} | 0 \rangle = \frac{\langle \emptyset | T \left\{ \prod_{i=n}^1 \phi_I(x_i) \exp \left[- \int d^4 x \mathcal{H}_I(x) \right] \right\} | \emptyset \rangle}{\langle \emptyset | T \left\{ \exp \left[- \int d^4 x \mathcal{H}_I(x) \right] \right\} | \emptyset \rangle} \quad (5.1)$$

与之前Polchinski中给出的

$$\langle \mathcal{F}[\phi] \rangle = Z[0] \exp \left[\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \Delta^{-1}(x, y) \frac{\delta^2}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right] \mathcal{F}[\phi]|_{\phi=0}$$

其中

$$\langle \mathcal{F}[\phi] \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \int d^d x \phi(x) \Delta \phi(x)} \mathcal{F}[\phi]$$

为了联系起式(4.6)和(5.1)，令

$$\mathcal{F}[\phi] = \prod_{i=n}^1 \phi(x_i) \exp \left[\int d^d x \mathcal{L}_{int}[\phi(x)] \right] \quad (5.2)$$

这里 $\mathcal{L}_{int}[\phi(x)]$ 是相互作用的拉氏量密度，我们考虑d维时空，积分域为整个时空代入(5.1)式中，有

$$\begin{aligned} \left\langle \prod_{i=n}^1 \phi(x_i) \exp \left[- \int d^d x \mathcal{L}_{int}[\phi(x)] \right] \right\rangle &= \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \int d^d x \phi(x) \Delta \phi(x)} \prod_{i=n}^1 \phi(x_i) \exp \left[\int d^d x \mathcal{L}_{int}[\phi(x)] \right] \\ &= \left(\prod_{i=1}^n \frac{\delta}{\delta J(x_i)} \right) \int \mathcal{D}\phi \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^d x \phi(x) \Delta \phi(x) + \int d^d x \mathcal{L}_{int}[\phi(x)] + \int d^d x J(x) \phi(x) \right] \Bigg|_{J=0} \\ &= \left(\prod_{i=1}^n \frac{\delta}{\delta J(x_i)} \right) Z_{int}(J) \\ &= \langle 0|T\{\prod_{i=n}^1 \phi(x_i)\}|0\rangle \end{aligned} \quad (5.3)$$

最后一行来于Srednicki (8.15)。

也即，为了计算式(5.1)，我们可以将其转化为令 $\mathcal{F}[\phi] = \prod_{i=n}^1 \phi(x_i) \exp \left[\int d^d x \mathcal{L}_{int}[\phi(x)] \right]$ 时，(4.6)式的计算。在下面我们将看见，这种方法能够直观的观察出，微扰代数结构是怎么样的

利用(4.6)，取 $\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{3!} g \phi^3$ ，即 ϕ^3 场论，其中 g 为耦合系数，不计入常数项 $Z(0)$ (这个常数和我们希望测得的关联函数无关)，可以得到

$$\langle 0|T\{\prod_{i=n}^1 \phi(x_i)\}|0\rangle = \exp \left[\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \Delta^{-1}(x, y) \frac{\delta^2}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right] \prod_{i=n}^1 \phi(x_i) \exp \left[\int d^d x \mathcal{L}_{int}(x) \right] \Bigg|_{\phi=0} \quad (5.4)$$

将等式右边的两个指数进行泰勒展开，得到

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \sum_{k=1}^? \left(\frac{1}{k!} \right) \left(\frac{1}{2} \int d^4 y d^4 z \Delta^{-1}(y, z) \frac{\delta^2}{\delta \phi_y \delta \phi_z} \right)^k \right) \prod_{i=1}^n \phi(x_i) \left(1 + \sum_{j=1}^? \left(\frac{1}{j!} \right) \left(\frac{1}{3!} g \int d^4 w \phi(w)^3 \right)^j \right) \Big|_{\phi=0} \\
&= \sum_{k=1, j=0}^? [g]^j \left(\frac{1}{k!} \right) \left(\frac{1}{j!} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^k \left(\frac{1}{3!} \right)^j \int \prod_{p=1}^k d^4 y_p d^4 z_p \int \prod_{l=1}^j d^4 w_l \\
& \left[\prod_{p=1}^k \Delta^{-1}(y_p, z_p) \frac{\delta^2}{\delta \phi_{y_p} \delta \phi_{z_p}} \prod_{i=1}^n \phi(x_i) \prod_{l=1}^j \phi^3(w_l) \right]
\end{aligned} \tag{5.5}$$

上式便是形式上的微扰展开的代数形式。之所以求和上限有一个问号，来自于§1.3中，我们看到，对 g 的展开只有在有限展开的范围内是成立的。(或者说，我不知道上限是否可以取到无穷) 在第二行中，对于不含导数的项可以直接取 $\phi = 0$ ，因而 k 的求和从1，而非0开始。同时可以看出，上式当且仅当 $2p = n + 3l$ 时，即导数算符的个数和被求导的 ϕ 场个数相同时，结果才不为零(例如二次函数求三阶导数会得到0[例： $(x^2)''' = 0$]，而三次函数求二阶导数后再设自变量为零，结果依然为0[例： $(x^3)''|_{x=0} = 0$])

1.5.2 由图到积分的对应

费曼图(Feynman diagram)是一种能够将上式中，每一个满足 $(2p = n + 3l)$ 条件的项，与一个几何图形对应，起来的技巧。通过这种对应，我们可以方便地通过画出所需要的几何图形，来快速地写下所需要的积分，同时可以直观地分析这个积分是否重要，(总之很有用)

为了直观起见，我们通过例子的堆砌来说明这种对应关系。在下面，我们假设格林函数不可交换，即 $\Delta^{-1}(x, y) \neq \Delta^{-1}(y, x)$ ，并且每个外点的时空点是不等价的(不对称)(Srednicki假设了时空点之间是等价的，所以这里的对称因子不同于Srednicki的对称因子，更具体的讨论见后面)

例1

首先我们给出下面这个图形

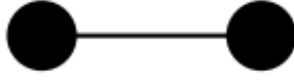


图 1.3:

首先，这里的左右黑点代表外点(external point)，为了明显起见标注得较大。在此章节之后，为了方便做图，一般不会明显表示外点。外点的数目在(5.5)式中对应于

$$\langle 0 | T \{ \prod_{i=2}^1 \phi(x_i) \} | 0 \rangle$$

中的 $n = 2$

然后中间的线(edge)代表传播子 $\Delta^{-1}(y, z)$ ，由于只有一个，因此 $p = 1$ ，对应到式子中取 $k = 1$ ，而在这个图中没有顶点(vortex)，对应为 $l = 0$ ，即 $j = 0$ 显式地计算，对应到(5.5)可以有

$$\begin{aligned} [g]^0 & \left(\frac{1}{1!} \right) \left(\frac{1}{0!} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^1 \left(\frac{1}{3!} \right)^0 \int d^4 y_1 d^4 z_1 \left[\Delta^{-1}(y_1, z_1) \frac{\delta^2}{\delta \phi_{y_1} \delta \phi_{z_1}} \phi(x_1) \phi(x_2) \right] \\ & = \frac{1}{2} (\Delta^{-1}(x_1, x_2) + \Delta^{-1}(x_2, x_1)) \end{aligned}$$

对应到图1.3，此时为两个外点相互交换得到 $\frac{1}{2}$ 因子

例2

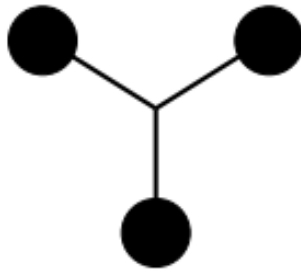


图 1.4:

这里中间三个edge的交点为一vertex，对应(3,3,1)，同理读出图对应的积分式，为

$$[g]^1 \left(\frac{1}{3!} \right) \left(\frac{1}{1!} \right) \left(\frac{1}{2} \right)^3 \left(\frac{1}{3!} \right)^1 \int \prod_{p=1}^3 d^4 y_p d^4 z_p \int d^4 w \left[\prod_{p=1}^3 \Delta^{-1}(y_p, z_p) \frac{\delta^2}{\delta \phi_{y_p} \delta \phi_{z_p}} \prod_{i=1}^3 \phi(x_i) \phi^3(w) \right] \quad (5.6)$$

经过计算上式，(比较复杂，但是推荐自己算一下，可能要用几张纸)可以得到其中的一项

$$\frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2} \right)^3 \int d^4 w [\Delta^{-1}(x_1, w) + \Delta^{-1}(w, x_1)] [\Delta^{-1}(x_2, w) + \Delta^{-1}(w, x_2)] [\Delta^{-1}(x_3, w) + \Delta^{-1}(w, x_3)] \quad (5.7)$$

这张图对应于上面的图1.4。值得注意的是，如果直接计算，会发现还应有形如

$$\Delta^{-1}(x_2, x_3) \int d^4 w \Delta^{-1}(w, w) \Delta^{-1}(w, x_1)$$

这对应下二图(它们共同作为一张图构成上式!)



在srednicki式(9.23)下的论述中，通过引入Counterterm的论述下，仅有一个external point的图贡献为零(即便第二个图是两个外点)，因此上式为零

例3

对于

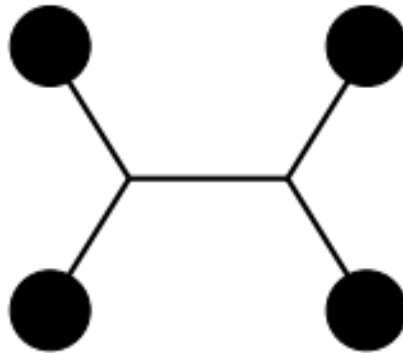


图 1.5:

$$\frac{1}{2^3} \left(\frac{1}{2} \right)^5 \int d^4 w_1 d^4 w_2 ([\Delta^{-1}(x_1, w_1) + \Delta^{-1}(w_1, x_1)] [\Delta^{-1}(x_2, w_1) + \Delta^{-1}(w_1, x_2)]$$

$$[\Delta^{-1}(w_1, w_2) + \Delta^{-1}(w_2, w_1)] [\Delta^{-1}(w_2, x_3) + \Delta^{-1}(x_3, w_2)] [\Delta^{-1}(w_2, x_4) + \Delta^{-1}(x_4, w_2)]$$

对称因子

在(5.5)中可以发现，前面的系数

$$\left(\frac{1}{\#propagator!}\right) \left(\frac{1}{\#vertex!}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^{\#propagator} \left(\frac{1}{3!}\right)^{\#vertex} \quad (5.8)$$

在经过一系列求导和积分运算后，会被一定程度上地取消掉一些。在经过化简后的，非零积分前面的系数被称为对称因子 $\frac{1}{S}$ 。如例1, 2, 3中，对称因子分别为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^5}$ 。可以发现，前面的因子都只存在于分母上，因此以其倒数来定义对称因子。

之所以这个因子被称为对称因子，是由于该因子与费曼图本身的对称性相关。首先，观察系数的来源，可以发现 g 的阶数来自于vertex的个数，而 $\left(\frac{1}{\#propagator!}\right)$ 则来自于传播子之间的置换， $\left(\frac{1}{\#vertex!}\right)$ 来自于顶点之间的置换， $\left(\frac{1}{2}\right)^{\#propagator}$ 来自于传播子两个端点的交换， $\left(\frac{1}{3!}\right)^{\#vertex}$ 来自于 ϕ^3 的三个场之间的置换

弄清楚了来源，我们接下来考虑，当一个图具有对称性的时候，这些系数是怎么变成对称因子的。

首先我们需要知道，图的对称性意味着，图对应的积分中的某一些指标在相互交换后不会产生新的项。如果这句话并不是很好理解的话，我们考虑一个简单的代数例子

$$\frac{1}{3!}(x+y+z)^3 = \frac{1}{3!}(x^3 + (xyx + yxx) + \dots + y^3 + \dots + z^3)$$

注意右边第二项与第一项的差别!第二项中我们通过交换 $x \leftrightarrow y$ 可以获得总计3种不同的组合。由于乘法的交换律，我们可以将它组合为 $3x^2y$ ，从而得到系数 $1/2$ ，但是对于 x^3 而言，它的系数不能通过相互交换来消除，因此它的因子是 $1/3!$ ，而这是由于 x^3 的轮换依然是自身，即 x^3 的对称性让它在相互交换中没有产生新的项。由于没有通过交换来产生的系数，因此前面的因子保留为 $1/3!$ ，此时我们说， x^3 的对称因子是 $3!$ 。

现在再来看，图对应的积分中的某一些指标在相互交换后不会产生新的项，这句话意味着，当一个图不具有对称性的时候，它的对称因子应当是1，而如果一个图拥有对称性，那么这个对称性将会使得前面的系数中相应的系数无法被消除掉。

然后注意到前面三个例子的对称因子 $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^3}, \frac{1}{2^5}$ ，它们来源于我们的格林函数是非对称的。如果假设格林函数是对称的，从前面给出的结果中很轻易地看出，这些 $1/2$ 都被完美地消掉了。

我们这里假设了外点的时空坐标是不等价的。如果这些时空坐标是等价的话，那么交换

相应的外点将带来额外的对称性。此时，对于例1, 2, 3的对称因子，在假设格林函数是对称的情况下，应当是 $2, 3!, 2^3$ ，这就是由于对称性带来的无法消掉的因子。

对称因子的结论

这里直接给出一个可记住的结论:

在格林函数对称的情况下，前面的因子为

$$\frac{1}{\text{rank}(S)}$$

其中 S 为图的对称群， $\text{rank}(S)$ 为对称群的阶

1.6 生成泛函(Generating Functional)(还可见Nakahara-Geometry, Topology and Physics)

1.6.1 定义

(参考了Srednicki，作用量的虚数单位可能不匹配(懒得改了))生成泛函定义为

$$Z[J] \equiv \int \mathcal{D}\phi e^{S + i \int dx J(x)\phi(x)}$$

其中

$$S \equiv \int d^d x \frac{1}{2} \phi(x) \Delta \phi(x) + \frac{g}{3!} \phi(x)^3 \quad (6.1)$$

注意，生成泛函计算中不需要令 $\phi = 0$ ，因为它已经被积分掉了。

从之前的笔记可知，利用函数 $J(x)$ ，可以将相互作用变为对 $J(x)$ 的泛函导数，写为

$$Z[J] = e^{\frac{ig}{3!} \int d^d x \left(\frac{\delta^3}{i^3 \delta J(x)^3} \right)} \int \mathcal{D}\phi e^{iS_0 + i \int dy J(y)\phi(y)} = e^{\frac{ig}{3!} \int d^d x \left(\frac{\delta^3}{i^3 \delta J(x)^3} \right)} Z_0 \quad (6.2)$$

对于

$$Z_0 = \int \mathcal{D}\phi e^{iS_0 + i \int dy J(y)\phi(y)}$$

作平移变换 $\phi(x) \rightarrow \phi(x) - \int d^d y \Delta^{-1}(x, y) J(y)$,有

$$\begin{aligned} Z_0 &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{2} \int d^d x \left(\phi(x) - \int d^d y \Delta^{-1}(x, y) J(y) \right) \Delta(x) \left(\phi(x) - \int d^d y \Delta^{-1}(x, y) J(y) \right) + J\phi \right] \\ &= \int \mathcal{D}\phi \exp \left[\frac{i}{2} \int d^d x \phi \Delta \phi + \frac{i}{2} \int d^d x d^d y J(x) \Delta^{-1}(x, y) J(y) \right] \\ &\propto \exp \left[\frac{i}{2} \int d^d x d^d y J(x) \Delta^{-1}(x, y) J(y) \right] \end{aligned} \quad (6.3)$$


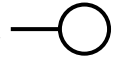
在第一行中，平移变换的Jacobian为1，常数略去写为成正比符号


综上，生成泛函可以写为

$$Z[J] = \exp \left[\frac{ig}{3!} \int d^d x \left(\frac{\delta^3}{i^3 \delta J(x)^3} \right) \right] \exp \left[\frac{i}{2} \int d^d x d^d y J(x) \Delta^{-1}(x, y) J(y) \right] \quad (6.4)$$

1.6.2 连通图

与之前的费曼图引入一样，生成泛函中的每一项也可以与一类图对应。为了便于描述，在这里介绍一下连通图与非连通图。一般而言，连通图(不严格的)定义为，所有端点都可以通过一条路径相连的图，而非连通图则顾名思义。举出例子的话，连通图如

—，和  还有  它们分别作为一个个体，为连通图。

而形如  这样的，由连通图组合在一起的图，但有些端点之间不能被连接的图，就是非连通图

通过费曼图，在微扰展开计算 $Z[J]$ 的过程中可以将其泰勒展开，其中每一项都对应于特定的乘积以及特定的对称因子，以费曼图形式写出，那么 $Z[J]$ 形如

$$\begin{aligned} Z[J] &= \left[\text{---} + \frac{1}{2!} \text{==} + \frac{1}{3!} \text{===} + \dots \right] + \left[\text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2!} \text{---} \text{---} \text{---} = + \frac{1}{2!} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \frac{1}{2!3!} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots \right] + \dots \end{aligned}$$

即， $Z[J]$ 可以写为这样的一系列连通图与非连通图的和

其中每个连通图都携带自身的对称因子，在这里并没有写出。一项图(也即两个加号之间的数个图，它们整体代表一项)的系数是指，该项包含数个相同的连通图，这些连通图之间可以相互交换，带来置换群的对称因子。如果一项图中包含有 p 个相同的图，那么对应的会有 $\frac{1}{p!}$ 的对称因子。

1.7 连通生成泛函 Connected Generating Functional

连通生成泛函定义为

$$W[J] = \ln(Z[J]) \quad (7.1)$$

也即

$$Z[J] = \exp(W[J])$$

其中, $W[J]$ 只由连通图构成, 不包含非连通图, 即

$$W[J] = \left[\text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \dots \right]$$

可以验证

$$\exp \left[\text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \dots \right]$$

$$= \left[\text{---} + \frac{1}{2!} \text{---} \text{---} + \frac{1}{3!} \text{---} \text{---} + \dots \right] + \left[\text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} + \dots \right] + \dots$$

可以发现, 在下面的非连通图前面的因子来自于指数的展开。

这里为了具体起见, 采用了 ϕ^3 作为例子。但事实上, 这是一个普遍成立的结论。即连通图与非连通图之和等于连通图之和的指数

对于更多的了解, 可见 *linked cluster theorem*

1.8 量子作用量 Quantum Action(还可见Nakahara-Geometry, Topology and Physics)

1.8.1 Legendre Transform

勒让德变换定义为, 给出一个性质良好的函数 $f(x)$, 约定 $p = \frac{df}{dx}$, 形式上来说, 可以定义逆函数, 将 x 以 p 表出, 即 $x = x(p)$ 作变换

$$g(p) = x(p)p - f(x(p))$$

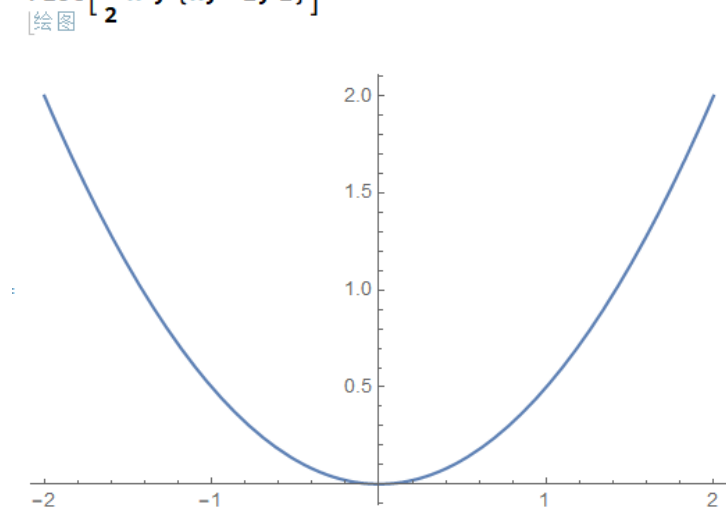
即为一维函数的勒让德变换。其直观的几何意义为一个凸函数可以由其切线的包络来表示，即

$$f[x_] := \frac{1}{2} x^2;$$

$$p = \frac{df}{dx} = x \rightarrow x = p$$

$$g[p_] = px - f[x[p]]$$

$$\text{Plot}\left[\frac{1}{2} x^2, \{x, -2, 2\}\right]$$



$$\text{Plot}\left[\text{Table}\left[p x - \frac{1}{2} x^2, \{x, -2, 2, .1\}\right], \{p, -2, 2\}, \text{PlotRange} \rightarrow \{\{-2, 2\}, \{-1, 2\}\}\right]$$

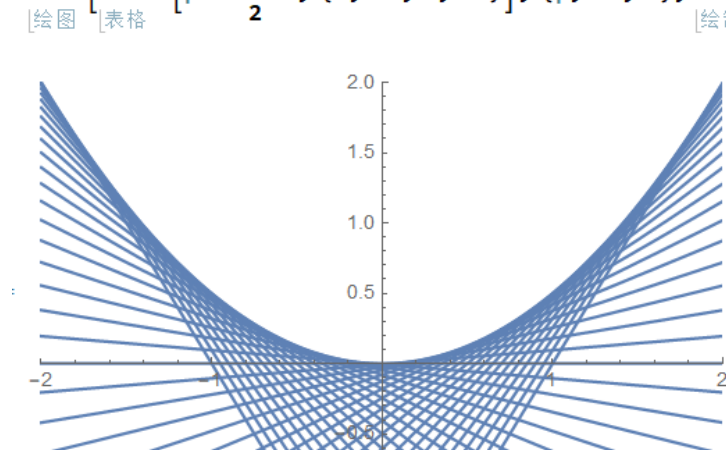


图 1.6:

可以证明，勒让德变换具有关系

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} \Big|_{(x,p)} = 1$$

下括号表示将 $G(x, p)$ 的关系代入，可以代入 $x(p)$ 也可 $p(x)$

证明：

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{dp}{dx} \\ \frac{dg}{dp} &= x(p) + px' - \frac{df}{dx} \frac{dx}{dp} = x + px' - px' = x \end{aligned} \quad (8.1)$$

$$\frac{d^2 d}{dp^2} = \frac{dx}{dp} \quad (8.2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} \Big|_{(x,p)} = \frac{dp}{dx} \frac{dx}{dp} = 1 \quad (8.3)$$

对于多变量函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv f(x_i)$ 其勒让德变换

$$g(\vec{p}) = \sum_i p_i x_i - f(x(p))$$

有关系

$$\sum_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_k} \Big|_{(\vec{x}, \vec{p})} = \delta_{ik} \quad (8.4)$$

证明：(采用求和约定)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} &= \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \\ \frac{\partial g}{\partial p_i} &= x_i + p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial p_i} \\ &= x_i + p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i} - p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i} = x_i \\ &\rightarrow \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_k} = \frac{\partial x_j}{\partial p_k} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial^2 g}{\partial p_j \partial p_k} &= \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial p_k} = \frac{\partial p_i}{\partial p_k} = \delta_{ik} \end{aligned} \quad (8.5)$$

1.8.2 量子作用量

如果推广到泛函，那么对于泛函 $W[J]$,约定 $\phi[J(x)] = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}$ 并作逆映射 $\phi[J] \rightarrow J[\phi]$ ，定义变换

$$\Gamma[\phi] = \int dx J[\phi(x)]\phi(x) - W[J[\phi]]$$

该变换满足关系

$$\int dy \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x)\delta J(y)} \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(y)\delta \phi(z)}|_{[J,\phi]} = \delta(x-z) \quad (8.6)$$

当 $W[J]$ 为之前的连通生成泛函时， $\Gamma[\phi]$ 称为量子作用量。利用量子作用量计算 $Z[J]$ 时，可以将其当作普通的作用量处理，并且其费曼图仅包括树图(tree diagram)，但是其中会包含高阶的相互作用项。

在这里，引入一种新的一类图的定义，为1-particle(propagator)-irreducible connected,或者1PI连通图，该图是指这样的一类图，切断其中的一个Internal line，得到的新图依然保持连通的图。例如图



这些图中间切断一根线，图依然是保持连通的。

而 $\text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc$ 则不是，从它们中间的线切开会导致他们成为两个不连通的部分

Claim: 计算 $\Gamma[\phi]$ 仅需要考虑所有的1PI图

在考虑计算前，约定在计算中，有归一化条件

$$W[J=0] = 0 \quad (8.7)$$

即令

$$W[J] = \ln(Z[J]/Z[0])$$

同时约定，对于 $Z[J]$ 而言，有

$$\langle |\phi| \rangle = \frac{\delta Z[J]}{\delta J}|_{J=0} \equiv 0$$

若 $\langle |\phi| \rangle \neq 0 = a$ ，那么重定义场 $\phi = \phi - a$ 可重新获得该条件

在这个条件下,可以得到

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J}\Big|_{J=0} = \frac{1}{Z[J]} \frac{\delta Z[J]}{\delta J}\Big|_{J=0} = 0 \quad (8.8)$$

结合之前的归一化条件, 如果对 $W[J]$ 进行泛函泰勒展开, $W[J]$ 将只包含二阶及以上的项, 即为

$$\begin{aligned} W[J] &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{\delta^n W}{\prod_{j=1}^n \delta J(y_j)} \Big|_{J(y_0)} \prod_{j=1}^n J(y_j) dy_j \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int W^{(n)}(y_1 - y_0, \dots, y_n - y_0) \prod_{j=1}^n J(y_j) dy_j \end{aligned} \quad (8.9)$$

类比可为一元函数的泰勒展开。这里的 y_0 为任选一点, $y_i - y_0$ 表明系数 $W^{(n)}$ 仅依赖于各坐标的相对位置。零阶项和一阶项由式(8.7)与(8.8)为零可不予考虑

同样, 由式(8.8)为零, 注意到

$$\phi[J=0] = \frac{\delta W[J]}{\delta J}\Big|_{J=0} = 0$$

以及

$$\Gamma[\phi[J=0]] = \int dx \, 0 \cdot \phi(x) - W[J=0] = 0$$

即, $\Gamma[\phi]$ 的零阶和一阶项为0, 可以得到

$$\Gamma[\phi] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \Gamma^{(n)}(y_1 - y_0, \dots, y_n - y_0) \prod_{j=1}^n \phi(y_j) dy_j \quad (8.10)$$

1.8.3 动量空间

之前的展开都是在实空间中展开的, 为后续讨论的便利性, 我们对场进行傅里叶变换进入频域, 引入傅里叶变换

$$\phi(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\phi}(k) e^{ikx}$$

对于(8.10)式可得到

$$\Gamma[\phi] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \Gamma^{(n)}(\vec{y} - \vec{y}_0) \prod_{j=1}^n \int d^d k_j d^d y_j \tilde{\phi}(k_j) \frac{1}{(2\pi)^{nd}} e^{i(k_1 y_1 + k_2 y_2 + \dots + k_n y_n)} \quad (8.11)$$

由于整体的空间平移对称，有动量守恒，从而得到一个 $\delta(\sum_{i=1}^n k_i)$ 即

$$\Gamma[\phi] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \tilde{\Gamma}^{(n)}(\vec{k}) \prod_{j=1}^n \tilde{\phi}(k_j) dk_j \delta(\sum k) \quad (8.12)$$

同理有

$$W[J] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \tilde{W}^{(n)}(\vec{k}) \prod_{j=1}^n \tilde{J}(k_j) dk_j \delta(\sum k) \quad (8.13)$$

如果要考虑更详细的推导，可见后面的1.8.6的补充部分.

此时式(1.8.2)变为

$$\begin{aligned} & \int dk_2 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta \tilde{J}(k_1) \delta \tilde{J}(k_2)} \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \tilde{\phi}(k_2) \delta \tilde{\phi}(k_3)} \Big|_{[J, \phi]=0} = \delta(k_1 - k_3) \\ & = \int dk_2 \tilde{W}^{(2)}(k_1, k_2) \delta(k_1 + k_2) \tilde{\Gamma}^{(2)}(k_2, k_3) \delta(k_2 + k_3) = \delta(k_1 - k_3) \\ & = \left[\int dk_2 \tilde{W}^{(2)}(k_1, -k_1) \delta(k_1 + k_2) \tilde{\Gamma}^{(2)}(k_2, -k_2) \right] \delta(k_1 - k_3) = \delta(k_1 - k_3) \\ & \rightarrow \tilde{W}^{(2)}(k_1) \tilde{\Gamma}^{(2)}(k_1) = 1 \end{aligned} \quad (8.14)$$

注意到 $W^{(2)}$ 对应为 $W[J]$ 中含有 $J\Delta^{-1}J$ 的项，因为其只有两个外源 J ，对 J 求导，可以得到 $W^{(2)} \propto \Delta^{-1}$ ，又因为上面导出的 $\tilde{W}^{(2)}(k_1) \tilde{\Gamma}^{(2)}(k_1) = 1$ ，可认为，在动量空间中， $\tilde{\Gamma}^{(2)} \propto \Delta$

1.8.4 1 PI Diagram

从现在起，为具体起见，我们选取微分算符 Δ 为Klein-Gordon场的微分算符 $\Delta = -\partial^2 - m^2$ ，在频域中有 $\Delta = p^2 - m^2$ ，此时，对于KG场而言，有 $W^{(2)}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2}$

上面提到了 $W^{(2)}$ 对应为 $W[J]$ 中含有 $J\Delta^{-1}J$ 的项。但当存在相互作用下，例如 ϕ^3 ，有

$$\begin{aligned}
W^{(2)}(k) &= \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \\
&+ \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots \\
&= \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} \\
&\text{其中 } \bigcirc = \bigcirc + \bigcirc + \bigcirc + \text{other 1PI diagrams with two truncated external line}
\end{aligned}$$

定义 $\Sigma(k) = \text{---} \bigcirc \text{---}$ ，称这个为1PI diagram with two truncated external line的和，
我们有

$$\begin{aligned}
W^{(2)}(k) &= \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} + \text{---} \bigcirc \text{---} \bigcirc \text{---} + \dots = \text{---} \bigcirc \text{---} \\
&= \frac{1}{k^2 - m^2} + \frac{1}{k^2 - m^2} \Sigma(k) \frac{1}{k^2 - m^2} + \Delta^{-1} \Sigma(k) \Delta^{-1} \Sigma(k) \Delta^{-1} + \dots \\
&= \Delta^{-1} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \Sigma(k) \Delta^{-1} \right) = \Delta^{-1} \frac{1}{1 - \Sigma(k) \Delta^{-1}} = \frac{1}{\Delta - \Sigma(k)} = \frac{1}{k^2 - m^2 - \Sigma(k)}
\end{aligned}$$

因 $W^{(2)}(k) \Gamma^{(2)}(k) = 1$ 可以得到

$$\Gamma^{(2)}(k) = k^2 - m^2 - \Sigma(k)$$

即 $\Gamma[\phi]$ 的泰勒展开第二个系数为微分算符与所有1PI图之和，意味着量子作用量的第二阶系数为经典部分加上量子自能部分，这就得到了所说的Claim对于泰勒展开第二阶是成立的。

当考虑更高阶的情况，对式(1.8.2)求导，有

$$\frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}(k_4)} \delta(k_1 - k_3) = \frac{\delta}{\delta \tilde{\phi}(k_4)} \int dk_2 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta \tilde{J}(k_1) \delta \tilde{J}(k_2)} \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \tilde{\phi}(k_2) \delta \tilde{\phi}(k_3)} \Big|_{[J, \phi]=0}$$

可以得到

$$0 = \int dk_2 dk_5 \frac{\delta^3 W}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_5} \frac{\delta J_5}{\delta \phi_4} \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \tilde{\phi}(k_2) \delta \tilde{\phi}(k_3)} \Big|_{[J, \phi]=0} + \int dk_2 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta \tilde{J}(k_1) \delta \tilde{J}(k_2)} \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_2 \delta \phi_3 \delta \phi_4} \quad (8.15)$$

注意到 $\frac{\delta J_5}{\delta \phi_4} = \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_5 \delta \phi_4}$ 有

$$\begin{aligned}
0 &= \int dk_2 dk_5 \frac{\delta^3 W}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_5} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_5 \delta \phi_4} \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \tilde{\phi}(k_2) \delta \tilde{\phi}(k_3)} \Big|_{[J, \phi]=0} \\
&+ \int dk_2 \frac{\delta^2 W[J]}{\delta \tilde{J}(k_1) \delta \tilde{J}(k_2)} \frac{\delta^3 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_2 \delta \phi_3 \delta \phi_4}
\end{aligned} \quad (8.16)$$



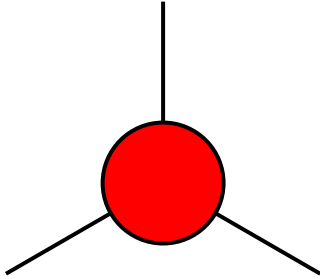
如果省略掉积分求导等符号，观察其代数关系，可以得到

$$W_{ijm}^{(3)} \Gamma_{lm}^{(2)} \Gamma_{jk}^{(2)} + W_{ij}^{(2)} \Gamma_{jkl}^{(3)} = 0$$

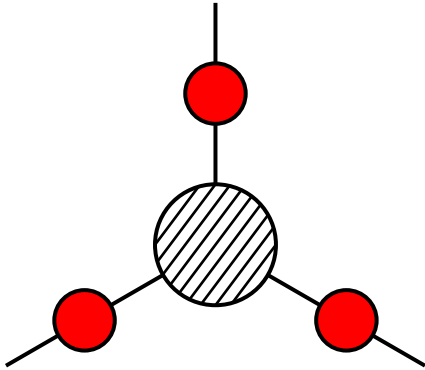
其中 $i, j, k, l, m \rightarrow 1, 2, 3, 4, 5$ 代表形式上的导数，相同指标表示积分。注意到之前曾求得 $\Gamma^{(2)} W^{(2)} = 1$ ，再给出逆运算，可以得到

$$W_{ijm}^{(3)} = W_{lm}^{(2)} W_{jk}^{(2)} W_{ij}^{(2)} \Gamma_{jkl}^{(3)}$$

即对于有三个外源(external line)的连通图 $W^{(3)}$ ，若可以对应为图



则其可以依上述的代数关系表示为



上述操作若直接计算，对(8.16)式两边作用

$$\int dk_3 dk_4 \frac{\delta^2 W}{\delta J_4 \delta J_6} \frac{\delta^2 W}{\delta J_3 \delta J_7}$$

有

$$\begin{aligned}
0 &= \int dk_3 dk_4 \frac{\delta^2 W}{\delta J_4 \delta J_6} \frac{\delta^2 W}{\delta J_3 \delta J_7} \int dk_2 dk_5 \frac{\delta^3 W}{\delta J_1 \delta J_2 \delta J_5} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \phi_5 \delta \phi_4} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\phi}(k_2) \delta \tilde{\phi}(k_3)} \Big|_{[J, \phi]=0} \\
&+ \int dk_3 dk_4 \frac{\delta^2 W}{\delta J_4 \delta J_6} \frac{\delta^2 W}{\delta J_3 \delta J_7} \int dk_2 \frac{\delta^2 W}{\delta \tilde{J}(k_1) \delta \tilde{J}(k_2)} \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_2 \delta \phi_3 \delta \phi_4} \\
&= \frac{\delta^3 W}{\delta J_1 \delta J_7 \delta J_6} + \int dk_2 dk_3 dk_4 \frac{\delta^3 \Gamma}{\delta \phi_2 \delta \phi_3 \delta \phi_4} \frac{\delta^2 W}{\delta \tilde{J}_1 \delta \tilde{J}_2} \frac{\delta^2 W}{\delta J_4 \delta J_6} \frac{\delta^2 W}{\delta J_3 \delta J_7}
\end{aligned} \tag{8.17}$$

这就是，对于第三阶泰勒展开的系数，连通生成泛函与量子作用量的关系。注意到如果我们左右对应的话会有一个额外的符号，这来自于我们所选的勒让德变换。如果我们令勒让德变换携带一个负号的话，这里的负号将会被抵消，从而得到一个不需要考虑符号的对应关系。

1.8.5 例子 ϕ^2

利用费曼规则计算 ϕ^2 对格林函数的修正

为简便起见，我们取微分算符为常见的有质量标量粒子

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{g}{2} \phi^2 \tag{8.18}$$

我们已经知道，对这样的标量场，在没有微扰的情况下的格林函数为

$$\tilde{G}_0(p) = \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{8.19}$$

如果将微扰计入质量中，我们预期可以得到

$$\tilde{G}(p) = \frac{i}{p^2 - (m^2 + g) + i\epsilon} \tag{8.20}$$

现在，我们利用费曼图计算完整传播子。由于我们这里的微扰是 ϕ^2 ，因此只有一种可能，那就是一个顶点链接两个传播子，即

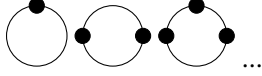
$$\text{---} \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} \bullet \text{---} + \dots$$

即

$$\begin{aligned}
\tilde{G}(p) &= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} + \left[\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-ig) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \\
&+ \left[\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-ig) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-ig) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right] + \dots \\
&= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \sum_{i=0}^{\infty} \left[(-ig) \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right]^i \\
&= \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \frac{1}{1 - \frac{g}{p^2 - m^2 + i\epsilon}} \\
&= \frac{i}{p^2 - (m^2 + g) + i\epsilon}
\end{aligned} \tag{8.21}$$

计算 ϕ^2 对圈图的修正

现在来考虑 ϕ^2 对圈图的修正，圈图是指以下图之和



注意到这里没有单纯的不含顶点的圈，因为这样的图没有顶点将传播子连接起来。利用费曼规则，注意到顶点具有 $1/n$ 的轮换对称给出的对称因子，可以写出它们作为因子 g 的贡献

$$\begin{aligned}
V(g) &= \int d^4p \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} (-ig) + \int d^4p \frac{1}{2} (-ig)^2 \left(\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)^2 \\
&+ \int d^4p \frac{1}{3} (-ig)^3 \left(\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)^3 + \dots \\
&= \int d^4p \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[\frac{g}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right]^n \\
&= - \int d^4p \ln \left[1 - \frac{g}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right] \\
&= - \int d^4p \ln \left[\frac{p^2 - (m^2 + g) + i\epsilon}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right]
\end{aligned} \tag{8.22}$$

可以发现，这里的分母是真空涨落部分，将会被归一化因子消除。这个积分不例外的，需要被重整化。如果这里的因子 g 是一个背景场 ϕ_0 ，这个结果就是Coleman-Weinberg势的单圈结果。更具体的计算可以参见Weinberg的qft2的第16章。

当 $g = \frac{1}{2} \lambda \phi_0^2$ 时，费曼图就是

其中两条虚线就代表着背景场 ϕ_0

1.8.6 量子作用量-补充

1. 通过对连通生成泛函的泰勒展开，有

$$\begin{aligned} W[J] &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \frac{\delta^n W}{\prod_{j=1}^n \delta J(y_j)} \Big|_{J(y_0)} \prod_{j=1}^n J(y_j) dy_j \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int W^{(n)}(y_1, y_2, \dots, y_n) \prod_{j=1}^n J(y_j) dy_j \end{aligned} \quad (8.23)$$

可以对场进行傅里叶变换，即

$$J(y_i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int \tilde{J}(p_i) e^{ip_i \cdot y_i} d^d p_i$$

得到

$$W[J] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int W^{(n)}(y_1, y_2, \dots, y_n) \prod_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d}} \int \tilde{J}(p_j) e^{ip_j \cdot y_j} d^d p_j d^d y_j \quad (8.24)$$

集中于求和的第n项，有

$$\left[\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{nd}}} \int W^{(n)}(y_1, y_2, \dots, y_n) e^{i \sum_{j=1}^n p_j \cdot y_j} \prod_{j=1}^n d^d y_j \right] \prod_{i=1}^n \tilde{J}(p_i) dp_i \quad (8.25)$$

可以发现，中括号里恰为傅里叶变换。如果我们利用平移不变性，那么有约束 $0 = \sum_i p_i$ ，代入 $W^{(n)}$ 的傅里叶变换中，可以得到

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^{nd}}} \int \tilde{W}^{(n)}(y_1, y_2, \dots, y_n) e^{i \sum_{j=1}^{n-1} p_j \cdot (y_j - y_n)} \prod_{j=1}^n d^d y_j \quad (8.26)$$

可以发现，整个傅里叶变换不依赖于 p_n 于是上式可以写为

$$\tilde{W}^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}) \equiv \tilde{W}^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_n) \delta\left(\sum_j p_j\right) \quad (8.27)$$

即有傅里叶变换对

$$W^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n) \leftrightarrow \tilde{W}^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_n) \delta\left(\sum_j p_j\right) \quad (8.28)$$

2. 由勒让德变换的恒等关系

$$\int dy \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(x) \delta J(y)} \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(y) \delta \phi(z)} \Big|_{[J, \phi]} = \delta(x - z) \quad (8.29)$$

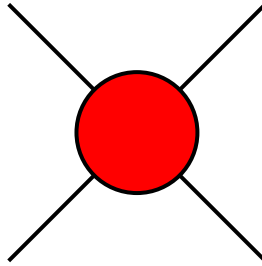
可以直接导出

$$\int dy W^{(2)}(x, y) \Gamma^{(2)}(y, z) = \delta(x - z)$$

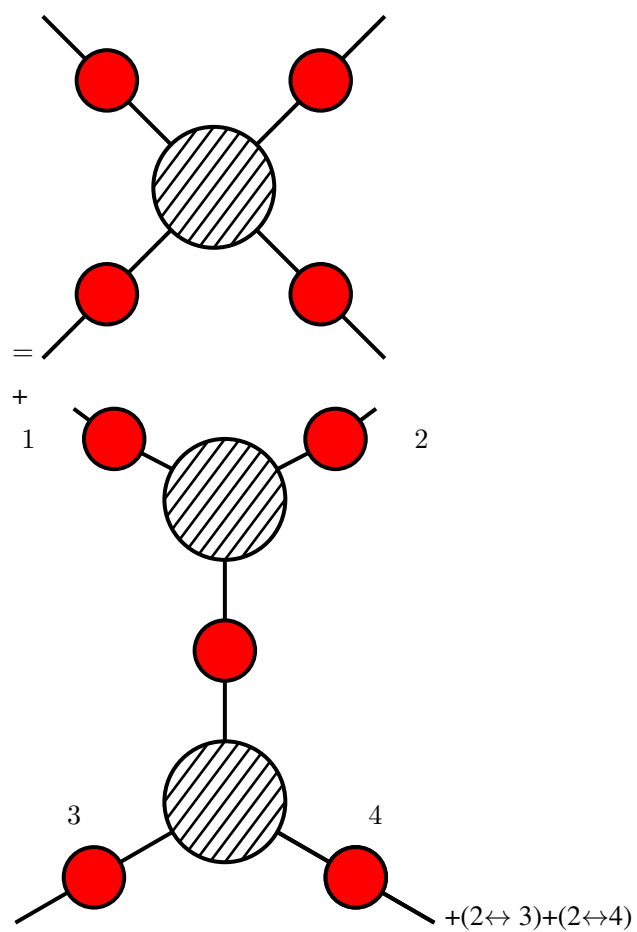
对其作傅里叶变换，有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^2} \int dy \int dp_1 dp_2 \tilde{W}^{(2)}(p_1, p_2) e^{ip_1 x + ip_2 y} \delta(p_1 + p_2) \int dq_1 dq_2 \tilde{\Gamma}^{(2)}(q_1, q_2) e^{iq_1 y + iq_2 z} \delta(q_1 + q_2) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int dy \int dp_1 \tilde{W}^{(2)}(p_1, -p_1) e^{ip_1 x - ip_1 y} \int dq_1 \tilde{\Gamma}^{(2)}(q_1, -q_1) e^{iq_1 y - iq_1 z} \\ &= \int dp_1 dq_1 \frac{1}{2\pi} \tilde{W}^{(2)}(p_1) \tilde{\Gamma}^{(2)}(q_1) \int dy e^{i(q_1 - p_1)y} \frac{1}{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int dp e^{ip \cdot (x - z)} \tilde{W}(p) \tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = \delta(x - z) \equiv \frac{1}{2\pi} \int e^{ip(x - z)} \\ &\rightarrow \tilde{W}(p) \tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = 1 \end{aligned} \quad (8.30)$$

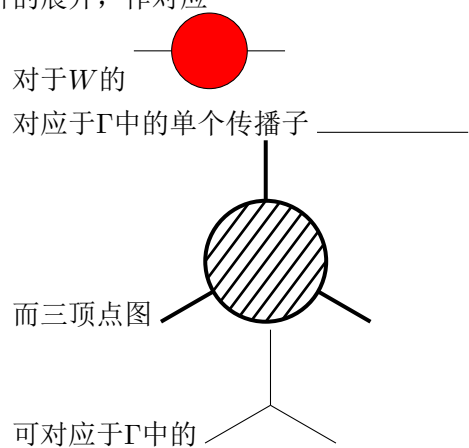
1.8.7 四阶系数的图对应关系



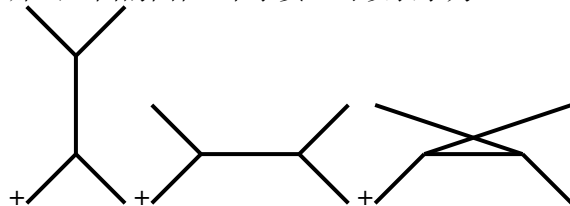
经过直接的计算，四阶图的关系为



其中括号表示交换第二个树图的标号的另外两个拓扑不等价的树图，结合之前对二阶和三阶的展开，作对应



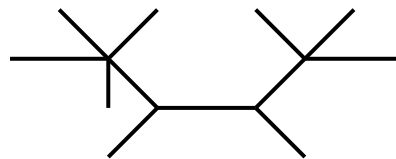
那么上面的图在 Γ 中事实上可以表示为



可以发现，上图在量子作用量中都是树图！
通过上面图的对应关系，我们可以得到结论

通过 Γ 计算 W 时，仅需计入 Γ 中的所有树图

这里的树图还包括高阶的相互作用，例如下树图
图里包括3阶，4阶和5阶的相互作用



这张

进一步的，如果我们考察 Γ 树图的所有顶点，我们可以发现，这些顶点均对应于 W 中的 $1PI$ 图，
也即我们可以认为

$\Gamma^{(n)}$ 的计算只需要考虑 W 中的 $1PI$ 图

1.9 量子作用量与连通生成泛函关系的一般性证明

由之前的2，3，4阶的数学归纳法式的证明，我们可以有以下两个结论

1. 通过 Γ 计算 W 时，仅需计入 Γ 中的所有树图
2. $\Gamma^{(n)}$ 的计算只需要考虑 W 中的 $1PI$ 图

为了更一般地证明这两个结论，我们引入一个一般的新的作用量 $A[\phi]$ 并引入含参数 \hbar 的新

的生成泛函

$$Z_{A,\hbar}[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{(iA[\phi] + i \int J\phi)/\hbar} \quad (9.1)$$

他有所定义的连通生成泛函

$$Z_{A,\hbar}[J] = e^{iW_{A,\hbar}[J]} \quad (9.2)$$

类似于之前的过程，我们可以写出这个生成泛函的费曼图，注意这里并不是连通生成泛函，我们还需要考虑非连通的费曼图

如果写出图的话，可以发现，对于每个传播子 Δ^{-1} ，相互作用顶点 g 以及外点 J ，我们都需要计入它们关于 \hbar 的相关性，具体表现为

$$\Delta \rightarrow \Delta \frac{1}{\hbar} \Rightarrow \Delta^{-1} \rightarrow \Delta^{-1} \hbar \quad (9.3)$$

$$g \Rightarrow \frac{1}{\hbar} g \quad (9.4)$$

$$J \Rightarrow \frac{1}{\hbar} J \quad (9.5)$$

因此，对于一张含 P 个传播子， V 个顶点以及 E 个外点的图，其 \hbar 的依赖性为

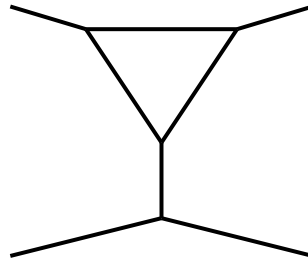
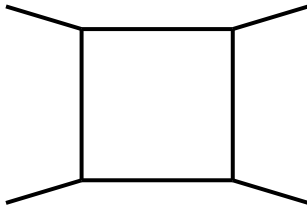
$$\hbar^{P-V-E} \quad (9.6)$$

注意到对于图论，如果一张图由 P 根线， V 个顶点， E 个外点组成的话，那么它们与这张图的环的个数 L 有关系

$$L = P - E - (V - 1) \quad (9.7)$$

其存在一物理上的说明：考虑任一张图， $P - E$ 为内线的数目，每个顶点都存在一个动量守恒的约束，由于图本身的整体动量已守恒，因顶点而得到的约束由于整体约束的存在应当减1，即剩下的未确定的动量为 $P - E - (V - 1)$ 。可以得知，剩下未确定的动量即为环本身所携带的动量，即与环的个数相同，上式得以说明

可以验证



些关系的

这些图都是满足这

现在代入之前的 \hbar 关系中，可以发现

$$\hbar^{L-1} \quad (9.8)$$

如果我们只考虑树图，那么树图的 \hbar 依赖性为

$$\hbar^{-1}$$

即，所有树图的 \hbar 都应是 \hbar^{-1} 的

现在考虑生成泛函

$$Z_{A,\hbar}[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{(iA[\phi] + i \int J\phi)/\hbar}$$

的驻定相位解，作 ϕ 的变分并令其为0，可以得到式

$$\frac{\delta A}{\delta \phi} + J = 0 \quad (9.9)$$

利用这个关系，可以将 ϕ 反过来作为 J 的泛函，即有 $\phi = \phi[J]$ 将这个解代入生成泛函里，可以发现，生成泛函指数上的一阶项为零，有

$$\begin{aligned} Z_{\hbar} &= \int \mathcal{D}\phi e^{(iA[\phi[J]] + i \int J\phi[J] + i \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\delta^n (A+J\phi)}{\delta \phi^n} \phi^n)/\hbar} \\ &= e^{(iA[\phi[J]] + i \int J\phi[J])/\hbar} \int \mathcal{D}\phi e^{(i \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\delta^n (A+J\phi)}{\delta \phi^n} \phi^n)/\hbar} \end{aligned} \quad (9.10)$$

可以作场位移，令

$$\tilde{\phi} = \phi - \phi_J$$

可以得到

$$e^{(iA[\phi[J]] + i \int J\phi[J])/\hbar} \int \mathcal{D}\tilde{\phi} e^{(i \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\delta^n (A+J\phi)}{\delta \phi^n} |_{\phi=0} \tilde{\phi}^n)/\hbar} \quad (9.11)$$

注意到，右边的泛函积分的指数上面只有2次及以上的部分，并没有外源的贡献，这意味着该泛函积分的费曼图是没有external point的，均是至少含一个环的圈图，即它们正比于 $\hbar^n, n \geq 0$

如果再取该生成泛函的连通生成泛函，我们对(9.11)式取对数，可以得到

$$iW_{J,\hbar} = \frac{1}{\hbar} (iA[\phi[J]] + i \int J\phi[J]) + i \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)} \hbar^n \quad (9.12)$$

由于之前讨论的，所有的树图贡献均来自于 $\frac{1}{\hbar}$ 项的贡献，因此对于连通生成泛函的树图部分的贡献即为

$$\frac{1}{\hbar}(A[\phi[J]] + \int J\phi[J])$$

至此，我们导出了一个中间的结论，在引入参数 \hbar 的帮助下，对于任一理论的作用量 $A[\phi]$ ，通过其定义的连通生成泛函 $W_{A,J}$ 的树图部分由

$$\frac{1}{\hbar}(A[\phi[J]] + \int J\phi[J])$$

贡献。

现在来考虑第一个结论，即通过 $\Gamma[\phi]$ 计算 $W_{S[\phi]}$ 时，仅需计入 Γ 中的所有树图

首先，我们有一个作用量 $S[\phi]$ ，通过它的含源路径积分，我们可以定义出生成泛函，再得到连通生成泛函。现在连通生成泛函是由一系列的连通图之和所构成。

我们希望构造另一个作用量 $\Gamma[\phi]$ ，同样的，我们可以根据其定义一个新的连通生成泛函，并根据上面提到的中间的结论，将 $W_{\Gamma[\phi]}$ 的树图部分分离，可以得到

$$\Gamma[\phi[J]] + \int J\phi[J]$$

，其中 J 是对于 Γ 所引入的源，并满足 $\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi} + J = 0$ ，此时，我们令其等于通过作用量 $S[\phi]$ 定义的连通生成泛函，即

$$W_{S[\phi]}[J] \equiv \Gamma[\phi[J]] + \int J\phi[J]$$

至此，我们便将 $W_{S[\phi]}[J]$ 以另一作用量 $\Gamma[\phi]$ 的树图表示出来。观察上式的结构，可以发现恰为勒让德变换(至多相差一符号)，因此，我们可以通过勒让德变换获得量子作用量 $\Gamma[\phi]$ ，并利用量子作用量的树图计算 $W_{S[\phi]}$

对于第二个结论，可以结合之前对于二阶，三阶，四阶图的计算来得到。因为在这里我们已经证得第一个结论，讨论是相似的，不再赘述

1.10 引入

在之前的讨论中，我们形式化地引用了微分算符 Δ 的逆 Δ^{-1} 来表示传播子。事实上，这一类问题都可以归结为格林函数理论。

在量子场论的标量场理论中，我们假设有作用量

$$S[\phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi(x)^2 - V(\phi(x)) \right]$$

采用闵可夫斯基度规 $(+, -, -, -)$, $V(\phi)$ 为势场。如果稍作分部积分, 将除势场之外的部分写作一个二次型, 可以得到

$$S[\phi] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \phi (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi - V(\phi) \right]$$

假设势场为零, 对该作用量作变分, 可以得到运动方程

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x) = 0$$

这便是自由标量场的Klein-Gordon方程, 整个运动方程的结构为一微分算符作用于场算符得到零, 我们将微分算符抽象地写为 Δ , 整个式子便可写为

$$\Delta_x \phi(x) = 0$$

易发现, 这是偏微分方程。如果考虑势场, 对运动方程作变分可以得到形如

$$\Delta_x \phi(x) = J(x)$$

即一含源的, 或者叫做非齐次的偏微分方程。

一般情况下, 除了微分方程本身以外, 我们还需要一定的边界条件。在量子场论中的边界条件大致的有两类。第一类是已知某点的场分布以及关于时间的导数的场分布, 即

$$\begin{aligned} x_0 = 0, \phi(x_0 = 0, \vec{x}) \\ x_0 = 0, \dot{\phi}(x_0 = 0, \vec{x}) \end{aligned} \tag{10.1}$$

或者第二类, 已知时间两点的场分布, 即

$$\begin{aligned} x_0 = 0, \phi(x_0 = 0, \vec{x}) \\ x_0 = T, \phi(x_0 = T, \vec{x}) \end{aligned} \tag{10.2}$$

综上, 为了求解一个微分方程, 我们需要结合微分方程本身与对应的边界条件。

现在来考虑格林函数。常见的格林函数定义为满足下式以及一定边界条件的函数 $G(x, y)$ (这里没有考虑权函数)

$$\Delta_x G(x, y) = \delta(x - y) \tag{10.3}$$

利用格林函数，我们可以将微分方程

$$\Delta_x \phi(x) = J(x)$$

的解形式地写为

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \int dy G(x, y) J(y)$$

其中 $\phi_0(x)$ 是齐次解，用于调节匹配边界条件。可以验证，将微分算符作用于上式，可以得到 $\Delta_x \phi(x) = 0 + \int dy \Delta_x G(x, y) J(y) = J(x)$

即上面形式解确为微分方程的解，由此可以发现，当我们得到了格林函数，我们只需要将其与源做积并积分，即可求得非齐次微分方程的解，然后调节齐次解的系数匹配边界条件，便求得该微分方程及边界条件的解考虑KG方程

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x) = 0$$

其格林函数定义为

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2) G(x, y) = \delta(x - y) \quad (10.4)$$

约定四维时空的傅里叶变换为

$$\phi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{G}(p) \quad (10.5)$$

其中 $p \cdot (x - y) \equiv p^0(x^0 - y^0) - \vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})$

代入上式可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) e^{-ip \cdot (x-y)} \tilde{G}(p) = \delta(x - y) \\ & = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip \cdot (x-y)} (-p^2 + m^2) \tilde{G}(p) = \delta(x - y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p e^{-ip \cdot (x-y)} \\ & \rightarrow (-p^2 + m^2) \tilde{G}(p) = 1 \end{aligned} \quad (10.6)$$

反解出 $\tilde{G}(p)$ 并带入傅里叶变换，可以得到KG方程的格林函数为

$$G(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{-p^2 + m^2} \quad (10.7)$$

可以发现，这个积分在实数轴上并不是良定义的。为方便起见，取 $y = (0, 0, 0, 0)$ 我们将其展开，有

$$G(x, 0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\vec{p} \int dp^0 \frac{e^{-i(p^0 x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x})}}{-(p^0)^2 + \vec{p}^2 + m^2} \quad (10.8)$$

可以发现，对于 p^0 的积分在实数轴上有单极点 $p^0 = \pm\sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \equiv \pm\omega_p$ 但是由于这是单极点，我们可以利用柯西主值，选择从极点的上面，下面或者舍弃极点贡献，这三种方式来使积分良定义。

为具体起见，我们令两个单极点都处于积分路径的下方，这可以通过小 $\epsilon \rightarrow 0^+$ 技巧，如下

$$G_{ret}(x, 0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^3\vec{p} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \int dp^0 \frac{e^{-ip^0 x^0}}{-(p^0 + i\epsilon)^2 + \omega_p^2} \quad (10.9)$$

这里的ret表示retarded，称为推迟格林函数即按积分路径在两个极点之上来定义

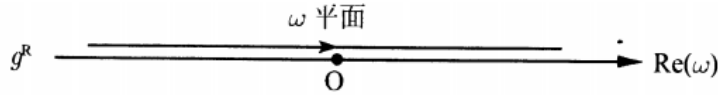


图 1.7:

现在来考虑为何其为推迟格林函数。在开始之前，我们首先需要对 x^0 ，即时间分量 t 进行分类。

1. $x^0 < 0$ ，此时指数部分 $e^{-ip^0 x^0}$ 若要收敛，则应令 p^0 取上半平面的半圆，此时由于上半平面的半圆弧与积分路径构成的半圆内没有极点的存在，因此积分(1.10)等于零。
2. $x^0 > 0$ ，此时指数部分若要收敛，则应取下半平面，此时应当计入两个极点，为简化分析，假设质量为0，积分较繁，这里给出结论

$$G(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \theta(x^0) \delta(x^2)$$

可以发现，当时间小于0时，格林函数没有贡献，而时间大于0时，对于无质量粒子，格林函数仅在未来光锥上有贡献。粗略而言，推迟格林函数表示格林函数只在事件发生之后($x^0 > 0$)有贡献，因此称为推迟格林函数

对于无质量格林函数的解析解，在附录中给出。

目前已有推迟格林函数

$$G_{ret}(x, y) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d\vec{p} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \int dp^0 \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{(p^0 + i\epsilon)^2 - \omega_p^2} \quad (10.10)$$

超前格林函数

$$G_{adv}(x, y) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d\vec{p} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} \int dp^0 \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0)}}{(p^0 - i\epsilon)^2 - \omega_p^2} \quad (10.11)$$

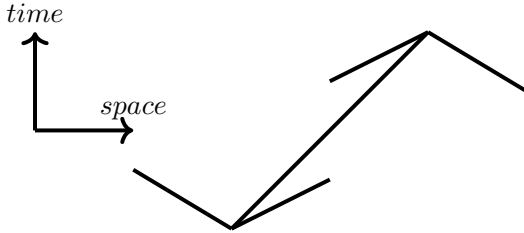
这些都是格林函数。推迟格林函数在未来光锥内非零，而超前格林函数在过去光锥内为零。但是这两种格林函数并不是用于量子场论中微扰展开的格林函数。为了得到量子场论中的微扰展开格林函数，我们回到最开始的泛函平均的定义

$$\langle \mathcal{F}[\phi] \rangle = Z[0] \exp \left[\frac{1}{2} \int d^d x d^d y \Delta^{-1}(x, y) \frac{\delta^2}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \right] \mathcal{F}[\phi]|_{\phi=0} \quad (10.12)$$

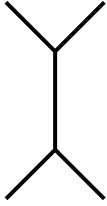
我们需要知道这里的格林函数 $\Delta^{-1}(x, y)$ 。如果回到Srednicki第九章习题中第9.5道，我们可以发现，在(j)问中通过利用 $H_0 \rightarrow H_0(1 - i\epsilon)$ 的代换，可以将相互作用场的多点关联函数的真空以自由场的真空替代，而代价为需要将时空坐标延拓到正负无穷，同时要计入哈密顿量中相互作用部分，即下式

$$\langle 0|T\{\prod_{i=n}^1 \phi(x_i)\}|0\rangle = \frac{\langle \emptyset|T\{\prod_{i=n}^1 \phi_I(x_i) \exp[-\int d^4 x \mathcal{H}_I(x)]\}|\emptyset\rangle}{\langle \emptyset|T\{\exp[-\int d^4 x \mathcal{H}_I(x)]\}|\emptyset\rangle} \quad (10.13)$$

这里值得注意的是，如果我们单纯将时空坐标拓展到无穷，将会引入非因果的相互作用，以及由于正负无穷时空而导致的发散行为。如果考虑一个在时空框架下的粒子相互作用，写出其中一个费曼图，我们会有下图的相互作用



这个图拓扑等价于费曼图



表明，这种四个外点的树图相互作用的顶点可以超出它们自身所处的时空点，而这些顶点可以从负无穷时间跑到正无穷时间，导致一个发散行为。

但是我们将看到，在替换 $H_0 \rightarrow H_0(1 - i\epsilon)$ 中，这个 ϵ 因子自动将时空的发散行为抑制住。

考虑 $H_0 = \frac{1}{2}(\Pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2)$

注意到，为了得到(10.13)式，利用第一次课的结论

当

$$\mathcal{F}[\phi] = \prod_{i=1}^n \phi(x_i) \exp \left[\int d^4x \mathcal{L}_{int} \right]$$

有等式

$$\frac{\langle \emptyset | T \{ \prod_{i=1}^n \phi_I(x_i) \exp[-\int d^4x \mathcal{H}_I(x)] \} | \emptyset \rangle}{\langle \emptyset | T \{ \exp[-\int d^4x \mathcal{H}_I(x)] \} | \emptyset \rangle} = \langle \mathcal{F} \rangle \quad (10.14)$$

右侧为泛函平均，为

$$\langle \mathcal{F} \rangle = \int \mathcal{D}\phi e^{\frac{1}{2} \int d^4x \phi(x) \Delta \phi(x)} \mathcal{F}[\phi] \quad (10.15)$$

现在，注意到替换 $H_0 \rightarrow H_0(1 - i\epsilon)$ 最显著的作用在于对质量的替换 $m^2 \rightarrow (1 - i\epsilon)m^2$ (这里我认为的说法是，参数相对于被积分的场要更重要，因为对于被积分的场而言，在泛函积分中的场的涨落可以被平移 $\phi \rightarrow \phi(1 + i\epsilon)$ 所抵消掉，而参数不能被抵消掉)，我们期望微分算符 $\Delta = \partial^2 + m^2 \rightarrow \partial^2 + (1 - i\epsilon)m^2$ 回到格林函数，我们可以得到这个微分算符在替换的作用下变为

$$G_F(x, y) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (10.16)$$

称这个传播子为费曼传播子。为方便起见，取 $y = 0$ ， $x = (x^0, 0, 0, z)$ 研究其解析性质，

有

$$\begin{aligned}
G_F(x, 0) &= \frac{-}{(2\pi)^4} \int d\vec{p} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \int dp^0 \frac{e^{-ip^0 x^0}}{(p^0)^2 - \omega_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} \\
&= \frac{i}{(2\pi)^3} \int d\vec{p} e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} \frac{e^{-i(\omega_{\vec{p}} - i\epsilon)x^0}}{2\omega_{\vec{p}}} \\
&= \frac{i}{2(2\pi)^2} \int d(-\cos\theta) p^2 dp e^{ip|z| \cos\theta} \frac{e^{-i(\omega_{\vec{p}} - i\epsilon)x^0}}{\omega_{\vec{p}}}
\end{aligned} \tag{10.17}$$

可以发现，当 x^0 变得很大的时候，因子 $e^{-\epsilon x^0}$ 将会抑制传播子，从而抑制时空积分到无穷时的发散行为。

再来考察费曼传播子的非因果性质。继续积分，有

$$G_F(x, 0) = \frac{1}{2(2\pi)^2 |z|} \int_0^\infty dpp (e^{ip|z|} - e^{-ip|z|}) \frac{e^{-i\omega_{\vec{p}} x^0}}{\omega_{\vec{p}}} \tag{10.18}$$

我们考虑类空间隔两事件的格林函数。继续变形可以得到

$$G_F(x, 0) = \frac{i}{2(2\pi)^2 |z|} \int_{-\infty}^\infty dpp e^{ip|z|} \frac{e^{-i\sqrt{p^2 + m^2} x^0}}{\sqrt{p^2 + m^2}} \tag{10.19}$$

如果令 $x^0 \rightarrow 0^+$ 可以得到

$$G_F(0^+, 0) = \frac{i}{2(2\pi)^2 |z|} \int_{-\infty}^\infty dpp \frac{e^{ip|z|}}{\sqrt{p^2 + m^2}} \tag{10.20}$$

注意到这个积分事实上是不收敛的，因此它不是作为 z 的函数的良定义。由Gradshteyn和Ryzhik的方法，需要将其作为分布处理。考虑在复平面上，对这个在实轴上的积分进行变形，注意到割线的存在，选取积分围道

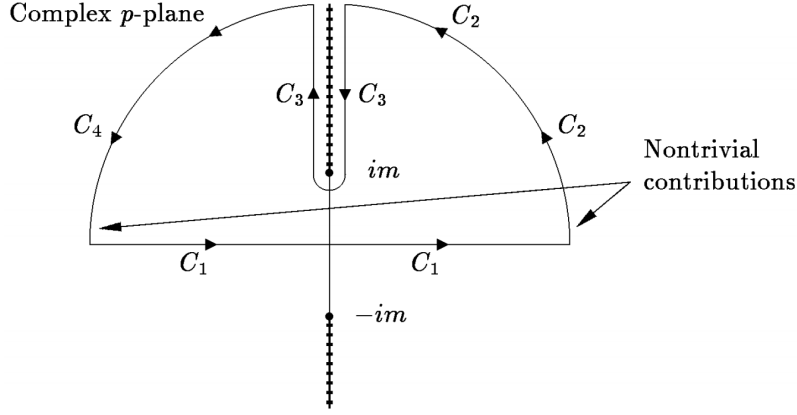


图 1.8:

积分部分可写为

$$\frac{i}{2(2\pi)^2 |z|} \left[\int_m^\infty d(iq + 0^+)(iq + 0^+) \frac{e^{i(iq+0^+)|z|}}{\sqrt{(iq+0^+)^2 + m^2}} + \int_\infty^m d(iq - 0^+)(iq - 0^+) \frac{e^{i(iq-0^+)|z|}}{\sqrt{(iq-0^+)^2 + m^2}} \right] \quad (10.21)$$

注意到复平面的平方根是一个多值函数，在绕过支线会获得一个负号，即下式

$$\sqrt{p^2 + m^2} = \begin{cases} \sqrt{|p^2 + m^2|} \exp^{i \frac{\arg(p^2 + m^2)}{2}} \\ \sqrt{|p^2 + m^2|} \exp^{i \frac{\arg(p^2 + m^2) + 2\pi}{2}} \end{cases} \quad (10.22)$$

整理后可得

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2(2\pi)^2 |z|} \left[i \int_m^\infty q dq \frac{e^{-q|z|}}{\sqrt{q^2 - m^2}} - i \int_\infty^m q dq \frac{e^{-q|z|}}{\sqrt{q^2 - m^2}} \right] \\ &= \frac{-}{4\pi^2 |z|} \int_m^\infty q dq \frac{e^{-q|z|}}{\sqrt{q^2 - m^2}} \end{aligned} \quad (10.23)$$

注意到这个积分形如

$$\int_u^\infty \frac{x e^{-\mu x} dx}{\sqrt{x^2 - u^2}} = u K_1(u\mu) \quad u > 0, \operatorname{Re} \mu > 0$$

其中 $K_\nu(z)$ 是虚宗量贝塞尔函数。其积分表示为

$$K_\nu(z) = \int_u^\infty e^{-z \cosh t} \cosh(\nu t) dt \quad \left[|\arg z| < \frac{\pi}{2} \text{ or } \operatorname{Re} z = 0 \text{ and } \nu = 0 \right]$$

其在 $r \rightarrow \infty$ 下极限为

$$\frac{e^{-mr}}{2(2\pi mr)^{3/2}}$$

可以发现，费曼传播子在类空间隔下取值非零，在间隔趋近无穷下呈指数衰减，这意味着费曼传播子是非因果的

另一种计算方法

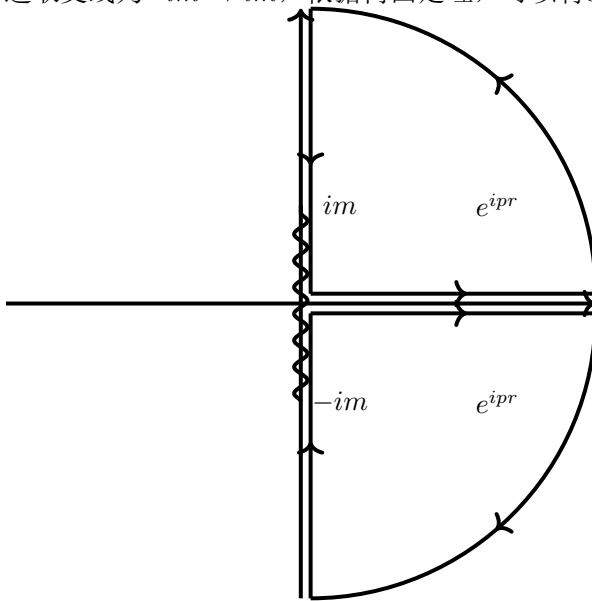
从

$$G_F(x, 0) = \frac{1}{2(2\pi)^2 |z|} \int_0^\infty dp p (e^{ip|z|} - e^{-ip|z|}) \frac{e^{-i\omega_{\vec{p}} x^0}}{\omega_{\vec{p}}} \quad (10.24)$$

出发，令 $x^0 \rightarrow 0^+$ 可以得到

$$G_F(x, 0) = \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \int_0^\infty dp p \frac{e^{ipr} - e^{-ipr}}{\sqrt{p^2 + m^2}} \quad (10.25)$$

选取支线为 $-im \rightarrow im$ ，依据柯西定理，可以将 $e^{\pm ipr}$ 分别以两个围道组成



由于支线在虚轴上，我们约定平方根在右半平面解析，根据柯西积分定理，沿正实轴的积分可以化为虚轴上的积分。我们暂时置圆弧积分贡献于一边(这里圆弧的贡献并不因我们所

选圆弧的增大而消失!)可以得到积分

$$G_F(x, 0) = \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \left[\int_{\eta+0i}^{\eta+i\infty} dpp \frac{e^{ipr}}{\sqrt{p^2 + m^2}} - \int_{\eta-0i}^{\eta-i\infty} dpp \frac{e^{-ipr}}{\sqrt{p^2 + m^2}} \right] \quad (10.26)$$

其中 $\eta \rightarrow 0^+$, 但是注意, 我们将实轴的积分变换到贴近虚轴的积分带来的一个问题是, 当 p 沿虚轴变得很大时, 对负数的开根存在是选取 $+i$ 还是 $-i$ 的歧义性。

首先, 对于第一个积分, 可以认为其根号在 $p \rightarrow i\infty$ 时应取 ip , 而对于第二个应取 $-ip$, 可以得到

$$G_F(x, 0) = \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \left[\int_{\eta+0i}^{\eta+i\infty} dpp \frac{e^{ipr}}{i\sqrt{-p^2 - m^2}} - \int_{\eta-0i}^{\eta-i\infty} dpp \frac{e^{-ipr}}{-i\sqrt{-p^2 - m^2}} \right] \quad (10.27)$$

但是, 考虑到我们认为, 原来的平方根在右半平面是解析的, 这意味着当 $p \rightarrow 0$ 时, 两个分母应当都取值 m . 但是如果依上式的约定, 若两个积分的平方根都约定由 $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}, a > 0$, 那么两分母会取 $+m$ 和 $-m$, 这违背了原来平方根的解析性。因此, 作为我们提取出 i 的代价, 我们约定左侧的平方根是 $\sqrt{-a} = -i\sqrt{a}, a > 0$, 而右侧平方根是 $\sqrt{-b} = i\sqrt{b}, b > 0$ 。即, 我们对两个积分的平方根取值作了一个约定, 作为提取出 i 的代价。

为了将积分限转至实数域, 分别作变换 $p \rightarrow \eta + iq$ 和 $p \rightarrow \eta - i\tilde{q}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2(2\pi)^2 r} \left[\int_0^\infty d(iq)(iq) \frac{e^{-qr}}{i\sqrt{q^2 - m^2}} - \int_0^\infty d(-i\tilde{q})(-i\tilde{q}) \frac{e^{-\tilde{q}r}}{-i\sqrt{\tilde{q}^2 - m^2}} \right] \\ &= \frac{i}{2(2\pi)^2 r} \left[\int_0^\infty dq q \frac{e^{-qr}}{\sqrt{q^2 - m^2}} + \int_0^\infty d\tilde{q} \tilde{q} \frac{e^{-\tilde{q}r}}{\sqrt{\tilde{q}^2 - m^2}} \right] \end{aligned} \quad (10.28)$$

注意到我们之前对于平方根的约定。可以很明显看出, 在 $[0, m]$ 的积分范围内, 两个积分取值相反, 因此我们可以得到最终的积分

$$\frac{i}{(2\pi)^2 r} \int_m^\infty q dq \frac{e^{-qr}}{\sqrt{q^2 - m^2}} \quad (10.29)$$

剩下的讨论如之前的计算

1.10.1 因果性

考虑费曼传播子

$$G_F(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip \cdot (x-y)}}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$$

现在考虑 $x - y$ 为类时间隔，可以取 $x^0 > 0, y^0 = 0, \vec{x} - \vec{y} = 0$

$$\begin{aligned}
& \propto \int d\vec{p} \int dp^0 \frac{e^{-ip^0 x^0}}{(p^0)^2 - \omega_{\vec{p}}^2 + i\epsilon} \\
& \propto \int d\vec{p} \frac{e^{-i\omega_{\vec{p}} x^0}}{2\omega_{\vec{p}}} \\
& \propto \int_0^\infty p^2 dp \frac{e^{-i\sqrt{p^2 + m^2} x^0}}{\sqrt{p^2 + m^2}} \quad \text{change } p^2 + m^2 = E^2 \\
& \propto \int_m^\infty dE \sqrt{E^2 - m^2} e^{-iEx^0} \quad \text{change } E = mx \\
& \propto \int_1^\infty m^2 dx \sqrt{x^2 - 1} e^{-imxx^0}
\end{aligned} \tag{10.30}$$

由于之后会让 $x^0 \rightarrow \infty$,我们可以将 $mx^0 \equiv t$

$$\begin{aligned}
& \propto \int_1^\infty dx \sqrt{x^2 - 1} e^{-imt} \\
& = \frac{K_1(it)}{it}
\end{aligned} \tag{10.31}$$

其中 $K_1(z)$ 是第二类修正贝塞尔函数，它在大宗量近似下有

$$K_1(z) = \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z} [1 + \dots]$$

故有

$$\frac{K_1(it)}{it} \approx e^{-imx^0} \tag{10.32}$$

即对于类时间隔的费曼传播子在远处以指数震荡

Klein-Gordon方程因果性

考虑微分方程系统

$$\begin{aligned}
\Delta\phi(x) &= j(x) \\
\phi(0, \vec{x}) &= \psi(\vec{x}) \\
\dot{\phi}(0, \vec{x}) &= \lambda(\vec{x})
\end{aligned} \tag{10.33}$$

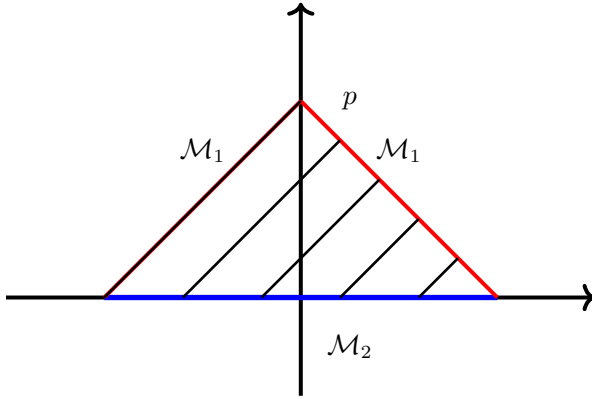
对于这个系统，我们有解

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \int d^4y G(x, y) j(y) \quad (10.34)$$

为了匹配边界条件，我们有方程组

$$\begin{aligned} \phi_0(0, \vec{x}) + \int d^4y G((0, \vec{x}), y) j(y) &= \psi(\vec{x}) \\ \dot{\phi}_0(0, \vec{x}) + \int d^4y [\partial_0 G((0, \vec{x}), y)] j(y) &= \lambda(\vec{x}) \end{aligned} \quad (10.35)$$

考虑光锥(这里只画出了二维光锥，但实际上应当是3+1维的),其中 \mathcal{M} 表示超曲面



考虑之前的方程组，有以下论断

1. p点的影响将只来自于蓝色部分的边界条件，除蓝色部分以外的边界条件将不会影响p点

为证明此论断，考虑一个新的积分，称其为能量积分

$$\begin{aligned} 0 &= 2(\partial_0 \phi)(\Delta \phi) = 2(\partial_0 \phi)(\partial_0^2 \phi - \partial_i^2 \phi + m^2 \phi) \\ &= \partial_0 [(\partial_0 \phi)^2 + (\partial_i \phi)^2] - 2\partial_i (\partial_0 \phi \partial_i \phi) + m^2 \partial_0 (\phi^2) \quad \text{左右对光锥内区域积分} \\ \int 0 d^4x &= \int d^4x \partial_0 [(\partial_0 \phi)^2 + (\partial_i \phi)^2] - 2\partial_i (\partial_0 \phi \partial_i \phi) + m^2 \partial_0 (\phi^2) \\ &= \int_{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2} n_0 d\mathcal{A} [(\partial_0 \phi)^2 + (\partial_i \phi)^2 + m^2 \phi^2] - 2 \int_{\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2} d\mathcal{A} (\partial_0 \phi \partial_i \phi) \end{aligned} \quad (10.36)$$

其中 \hat{n} 是欧几里得意义下法向朝外垂直于超曲面 \mathcal{M}_1 的单位矢量，并且由于所设光速 $c = 1$ ，在光锥上，光锥与时间轴成夹角为 45° ， \mathcal{A} 是面元。

我们要证明第一个论断，为简便起见，我们舍弃源，令其为零。假设有两种边界条件 (ψ_1, λ_1) 和 (ψ_2, λ_2) ，它们除了在蓝色部分的超曲面 \mathcal{M}_2 相同以外，在其他区域都可以不同，对二者导致的能量积分作差，可以只计入 \mathcal{M}_1 部分的积分，即可以得到

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathcal{M}_1} n_0 d\mathcal{A} [(\partial_0 \phi)^2 + (\partial_i \phi)^2 + m^2 \phi^2] - 2 \int_{\mathcal{M}_1} d\mathcal{A} (\partial_0 \phi \partial_i \phi) \\ 0 &= \int_{\mathcal{M}_1} d\mathcal{A} \left[\frac{1}{n_0} \sum_i (\partial_i \phi n_0 - \partial_0 \phi n_i)^2 + m^2 \phi^2 n_0 \right] \end{aligned} \quad (10.37)$$

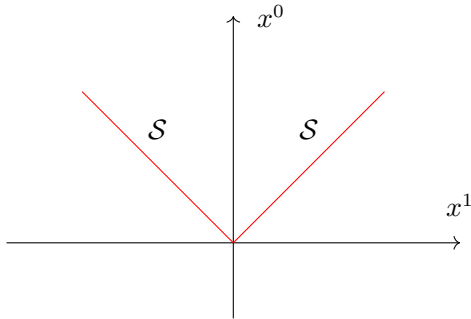
由于等式左侧等于0，而右侧积分号内都是二次型，因此左右两边成立的条件是二次型为零，即可以求得

$$\partial_i \phi n_0 - \partial_0 \phi n_i|_{\mathcal{M}_1} = 0 \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (10.38)$$

$$\phi(\mathcal{M}_1) = 0 \quad (10.39)$$

第二个条件很明显，意味着两种边界条件导致的场在超面上的取值是一致的，第一个条件意味着，对任意的空间分量，方向导数 $(\partial_0 \phi, \partial_1 \phi, \partial_2 \phi, \partial_3 \phi)$ 沿超曲面 \mathcal{M}_1 内的方向的取值为零，即场 ϕ 沿光锥方向的导数为零，可以导出，两个边界条件若在蓝色部分一致，那么他们导致的光锥内的场也一致，从而在 p 点的影响一致，而蓝色区域之外的边界条件将不会影响 p 点

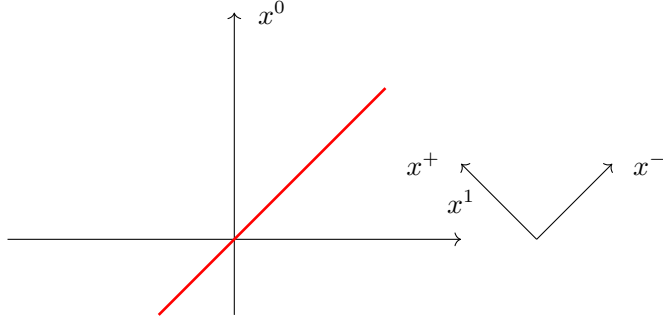
论断：若在光锥上设定边界条件，只需要知道 $\phi(\mathcal{S})$ ，而无需知道 $\frac{\partial \phi}{\partial n}(\mathcal{S})$ ，其中 \mathcal{S} 是光锥面



为了证明这个论断，我们需要证明两个条件

1. 设定对应边界条件，能够提供必要的信息来确定之后的演化(Completeness)
2. 设定对应边界条件，所提供的信息之间不会矛盾(Inconsistency)

首先来考察第二个。考虑一个光面(light sheet), 其方程为 $x^0 = x^1$, 在四维时空下, 为方便起见, 可以约定 $x^0 = x^1$, 如下图



红线代表超曲面light sheet, 沿光面方向的矢量为 x^- , 垂直于光面方向的矢量为 x^+ , 其中 $x^- = (x^0 + x^1)$, $x^+ = (x^0 - x^1)$ 可以证明, 对于这个超曲面, 有

$$\begin{aligned}\partial_+ \partial_- &= \partial_- \partial_+ = \left[\frac{\partial x^0}{\partial x^-} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial x^1}{\partial x^-} \frac{\partial}{\partial x_1} \right] \left[\frac{\partial x^0}{\partial x^+} \frac{\partial}{\partial x_0} + \frac{\partial x^1}{\partial x^+} \frac{\partial}{\partial x_1} \right] \\ &= \left[\frac{\partial^2}{\partial (x^0)^2} - \frac{\partial^2}{\partial (x^1)^2} \right] = (\partial_0^2 - \partial_1^2)\end{aligned}\quad (10.40)$$

假设我们在光面上设定边界条件

$$\phi(x^-) = \psi(x^-) \quad \partial_+ \phi(x^-) = \lambda(x^-)$$

利用上式, 我们利用 $\partial_+ \partial_- = \partial_- \partial_+$
有

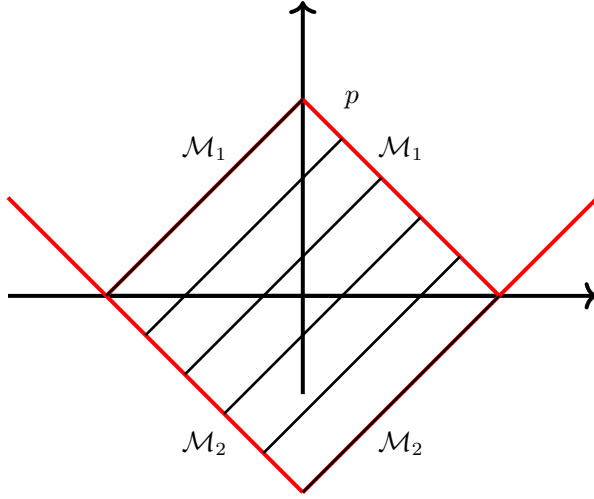
$$\begin{aligned}\partial_+ \partial_- \phi &= \partial_- \partial_+ \phi = (\partial_0^2 - \partial_1^2) \phi \\ &= \partial_+ [\partial_- \psi(x^-)] = \partial_- [\lambda(x^-)] = \left(\sum_{i=2}^d \partial_i^2 + m^2 \right) \phi(x^-)\end{aligned}\quad (10.41)$$

注意到, 对于 ψ 和 λ 是可以任意设定的, 这意味着我们可以随意变动两个函数, 使得上式不成立。但是上式是在光面这个超曲面上必然成立的结论, 因此设定两个边界条件会出现不一致(Inconsistency), 同时, 还可由上式知, 我们应当只需要一个 $\phi(x^-) = \psi(x^-)$ 才能确保一致性

同样的结论可以应用于光锥上, 注意到光锥的方程为 $(x^0)^2 = \sum_{i=1}^d (x^i)^2$, 利用链式法则, 可以得到一致的结果

但现在还欠缺“已知 $\phi(\mathcal{S})$ ”便可以确定之后的演化, 即唯一性。为了考察唯一性, 我们再次利用能量积分

$$\begin{aligned}
0 &= 2(\partial_0\phi)(\Delta\phi) = 2(\partial_0\phi)(\partial_0^2\phi - \partial_i^2\phi + m^2\phi) \\
&= \partial_0 [(\partial_0\phi)^2 + (\partial_i\phi)^2] - 2\partial_i(\partial_0\phi\partial_i\phi) + m^2\partial_0(\phi^2) \quad \text{左右对斜线区域积分} \\
\int 0d^4x &= \int d^4x\partial_0 [(\partial_0\phi)^2 + (\partial_i\phi)^2] - 2\partial_i(\partial_0\phi\partial_i\phi) + m^2\partial_0(\phi^2) \\
&= \int_{\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2} n_0 d\mathcal{A} [(\partial_0\phi)^2 + (\partial_i\phi)^2 + m^2\phi^2] - 2 \int_{\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2} d\mathcal{A} (\partial_0\phi\partial_i\phi) \\
&= \int_{\mathcal{M}_1+\mathcal{M}_2} d\mathcal{A} \left[\frac{1}{n_0} \sum_i (\partial_i\phi n_0 - \partial_0\phi n_i)^2 + m^2\phi^2 n^0 \right]
\end{aligned} \tag{10.42}$$



其中 \hat{n} 是欧几里得意义下法向朝外垂直于超曲面 \mathcal{M}_1 的单位矢量，并且由于所设光速 $c = 1$ ，在光锥上，光锥与时间轴成夹角为 45° ， \mathcal{A} 是面元。

由于我们需要证明边界条件的唯一性，我们已设在曲面 \mathcal{M}_2 上的边界条件 $\psi(\mathcal{M}_2)$ ，假设 $\psi(\mathcal{M}_2)$ 可能导致第二个场分布，将两个能量积分作差

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\mathcal{M}_1} d\mathcal{A} \left[\frac{1}{n_0} \sum_i (\partial_i\phi n_0 - \partial_0\phi n_i)^2 + m^2\phi^2 n^0 \right] - \int_{\mathcal{M}_1} d\mathcal{A} [\phi \rightarrow \phi'] \\
&+ \int_{\mathcal{M}_2} d\mathcal{A} \left[\frac{1}{n_0} \sum_i (\partial_i\psi n_0 - \partial_0\psi n_i)^2 + m^2\psi^2 n^0 \right] \\
&- \int_{\mathcal{M}_2} d\mathcal{A} \left[\frac{1}{n_0} \sum_i (\partial_i\psi' n_0 - \partial_0\psi' n_i)^2 + m^2\psi'^2 n^0 \right]
\end{aligned} \tag{10.43}$$

注意到边界条件相同, 即 $\psi = \psi'$, 上式第二行与第三行之差为零, 从而可以得到

$$\int_{\mathcal{M}_1} d\mathcal{A} \left[\frac{1}{n_0} \sum_i (\partial_i \psi n_0 - \partial_0 \psi n_i)^2 + m^2 \psi^2 n^0 \right] = \int_{\mathcal{M}_1} d\mathcal{A} \left[\frac{1}{n_0} \sum_i (\partial_i \psi' n_0 - \partial_0 \psi' n_i)^2 + m^2 \psi'^2 n^0 \right] \quad (10.44)$$

到目前为止, 我们只约束了一个曲面 \mathcal{M}_1 。但是我们可以将这个曲面外推或者内缩, 从而得到对于任一的锥面 \mathcal{M} , 上面的能量积分都成立, 这意味着等式两边的二次型相同。同时, 内部的方向导数项由于处于光锥上, 给定光锥的边界条件即可得到, 因此不需要光锥的法向导数。综上, 有 $\psi = \psi'$, 即相同的边界条件会导致相同的场分布, 其唯一性得证。

现在已有边界条件的唯一性与一致性, 因此我们可以得到边界条件的完备性。即给定光锥上的场分布, 我们可以得到此后场的演化。

P.S. 对于另一种我没有计算成功的方法, 我将其放在了附录最后。

1.11 重整化(传播子部分)

重整化是在考虑量子场论中圈图积分的发散问题中引入的数学处理手段。在微扰处理中的发散行为来自于对实空间中分布(distribution)乘法的处理(例如无质量格林函数在光锥上有 δ 函数, 它将引入一个发散行为), 为了能够消除掉发散, 我们通过引入counterterm来引入一系列参数, 在进行积分时, 通过适当地调节这些参数的取值, 来消除掉积分中的无穷大, 从而得到一个有限的结果。

在整个过程里, 对于参数的选取和调节都是数学意义上的, 不对应于物理图像。重整化的物理图像完全包括于完成重整化之后的结果之中。同时, 值得注意的是, 为了消除掉发散行为而引入的参数可以是不同的。例如srednicki在第14章中介绍了三种方法: Pauli-Villars正则化, 积分截断, 以及维度重整化, 并具体地以维度重整化作例子完成了一个重整化步骤。但是值得注意的是, 任何重整化方法的选择, 在完成重整化之后都将得到相同结果, 这是非常奇妙的, 这意味着重整化这个看似反直觉的方法暗含着一个有意义的结果。

Pauli-Villars正则化: 做代换

$$\frac{1}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \left(\frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2 - i\epsilon} \right)^{2n}$$

这个引入的 Λ 截断因子不改变实空间的积分上限 ∞ , 但是在 $p \rightarrow \infty$ 时额外提供了 $1/p^{2n}$ 的抑制因子, 使得积分结果有限可能。这个时候引入的counterterm系数依赖于 Λ , 通过调节 Λ 和 n 可以消除掉无穷大

积分截断: 对于格林函数 $\int \frac{1}{p^2 + m^2 - i\epsilon}$ 将其积分区域截断至 $\int^\Lambda \frac{1}{p^2 + m^2 - i\epsilon}$, 此时相当

于人为引入了截断频率，之后的步骤同Pauli-Villars正则化来消除无穷大

维度重整化：在srednicki教材中，引入了耦合常数 $g\mu^2$ ，并对维度进行了解析延拓 $d \rightarrow 6 - \epsilon$ ，然后调节counterterm来消除掉无穷大

下面对于 $d = 4$ 时的重整化做出计算

从(14.18)式开始，注意到式中

$$D = x(1-x)k^2 + m^2 \quad \epsilon = 6 - d$$

$$\begin{aligned}
\Pi(k^2) &= \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\bar{q}^2 + D)^2} - Ak^2 - Bm^2 \\
&= \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{1}{2}d)\Gamma(\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2}d)} D^{-(2-\frac{d}{2})} - Ak^2 - Bm^2 \\
g &\rightarrow g\tilde{\mu}^{(\epsilon-2)/2} \quad \alpha = \frac{g^2}{(4\pi)^3} \quad d = 6 - \epsilon \\
&= \frac{\alpha}{2\tilde{\mu}^2} \Gamma(-1 + \frac{\epsilon}{2}) \int_0^1 dx D \left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{D} \right)^{\epsilon/2} - Ak^2 - Bm^2 \\
&= \frac{\alpha}{2\tilde{\mu}^2} 4\pi\tilde{\mu}^2 \Gamma(0 + \frac{\delta}{2}) \int_0^1 dx \left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{D} \right)^{\delta/2} - Ak^2 - Bm^2 \quad \epsilon = 2 + \delta \\
&\approx 2\pi\alpha \left(\frac{2}{\delta} - \gamma \right) \left(1 + \frac{\delta}{2} \int_0^1 dx \ln \left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{D} \right) \right) - Ak^2 - Bm^2 \\
&= 2\pi\alpha \left(\frac{2}{\delta} + \int_0^1 dx \ln \left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{e^\gamma D} \right) \right) - Ak^2 - Bm^2 \quad \mu^2 = \frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{e^\gamma} \\
&= 2\pi\alpha \left(\frac{2}{\delta} - \int_0^1 dx \ln D + 2 \ln \mu \right) - Ak^2 - Bm^2
\end{aligned} \tag{11.1}$$

注意到 $\Pi(-m^2) = 0 \quad \Pi'(-m^2) = 0$

$$\begin{aligned}
\Pi(-m^2) &= 4\pi\alpha \left(\frac{1}{\delta} + 1 + \ln \frac{\mu}{m} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} \right) + Am^2 - Bm^2 = 0 \\
\Pi'(-m^2) &= \frac{-2\pi\alpha}{m^2} \left(-1 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \right) - A = 0
\end{aligned} \tag{11.2}$$

可以得到

$$A = \frac{2\pi\alpha}{m^2} \left(1 - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \right) \tag{11.3}$$

$$B = \frac{2\pi\alpha}{m^2} \left(\frac{2}{\delta} + 2 \ln \frac{\mu}{m} + 3 - \frac{5\pi}{3\sqrt{3}} \right) \quad (11.4)$$

帶回原自能中，直接积出可以得到

$$\Pi(k^2) = -4\pi\alpha \left[r \tanh^{-1}(1/r) + \frac{k^2}{m^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{2} - \frac{5\pi}{6\sqrt{3}} \right] \quad (11.5)$$

其中 $r \equiv \sqrt{1 + \frac{4m^2}{k^2}}$ 做出 $\Pi(k^2)/(k^2 + m^2)$

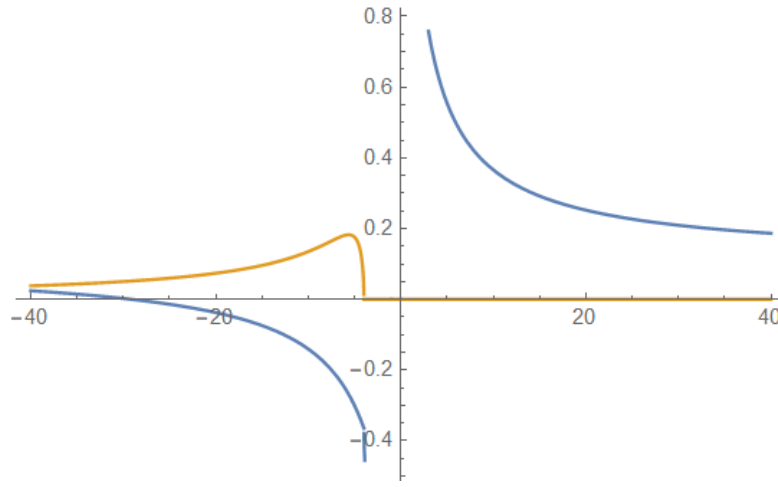


图 1.9:

横坐标为 k^2/m^2 , 蓝线为实部，橙线为虚部

如果我们不令 $d = 6 - \epsilon$, 而是令 $d = 4 - \epsilon$ 也可以计算得到相同的结果，如下

$$\begin{aligned} \Pi(k^2) &= \frac{1}{2}g^2 \int_0^1 dx \frac{\Gamma(2 - \frac{1}{2}d)\Gamma(\frac{d}{2})}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(2)\Gamma(\frac{1}{2}d)} D^{-(2-\frac{d}{2})} - Ak^2 - Bm^2 \\ &= \frac{g^2}{2(4\pi)^2} \Gamma(\frac{\epsilon}{2}) \int_0^1 \left(\frac{4\pi}{D}\right)^{\epsilon/2} - Ak^2 - Bm^2 \\ &= \beta \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma \right) \left(\int_0^1 dx \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \ln \frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{D} \right) \right) \\ &= \beta \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \int_0^1 dx \ln \left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{D} \right) \right) - Ak^2 - Bm^2 \end{aligned} \quad (11.6)$$

应用边界条件 $\Pi(-m^2) = 0 \quad \Pi'(-m^2) = 0$

约定

$$m^2 D_0(x) = m^2(1 - x(1 - x))$$

$$\begin{aligned} (A - B)m^2 &= -\beta \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \int_0^1 dx \ln \left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{m^2 D_0(x)} \right) \right) \\ A &= -\beta \int_0^1 \frac{x(1-x)}{m^2 D_0(x)} \end{aligned} \quad (11.7)$$

直接积分，可以解出

$$\begin{aligned} A &= \frac{\beta}{m^2} \left(1 - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \right) \\ B &= \frac{\beta}{m^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + 3 - \frac{5\pi}{3\sqrt{3}} + \ln \left(\frac{4\pi\tilde{\mu}^2}{m^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (11.8)$$

可以得到

$$\begin{aligned} \Pi(k^2) &= \beta \left(-3 + \frac{5\pi}{3\sqrt{3}} + \int_0^1 dx \ln \left(\frac{m^2}{D} \right) - \frac{k^2}{m^2} \left(1 - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \right) \right) \\ &= \beta \left(-1 + \frac{5\pi}{3\sqrt{3}} - 2r \tanh^{-1}(1/r) - \frac{k^2}{m^2} \left(1 - \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \right) \right) \\ &= -4\pi\alpha \left(r \tanh^{-1}(1/r) + \frac{k^2}{m^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{2} - \frac{5\pi}{6\sqrt{3}} \right) \end{aligned} \quad (11.9)$$

1.12 Pauli-Villars

我们考虑 $d = 6$

$$\begin{aligned} \Pi(k^2) &= \frac{g^2}{2i} \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}((l+k)^2) \Delta(l^2) - Ak^2 - Bm^2 \\ \tilde{\Delta}(p^2) &= \frac{1}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \rightarrow \frac{1}{p^2 + m^2 - i\epsilon} \frac{\Lambda^2}{p^2 + \Lambda^2 - i\epsilon} \end{aligned} \quad (12.1)$$

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \tilde{\Delta}((l+k)^2) \Delta(l^2) = \int \frac{d^d l}{(2\pi)^d} \frac{1}{(l+k)^2 + m^2} \frac{1}{l^2 + m^2} \frac{\Lambda^2}{(l+k)^2 + \Lambda^2} \frac{\Lambda^2}{l^2 + \Lambda^2} \\
& \frac{1}{(l+k)^2 + m^2} \frac{1}{l^2 + m^2} \frac{\Lambda^2}{(l+k)^2 + \Lambda^2} \frac{\Lambda^2}{l^2 + \Lambda^2} \\
& = 3! \Lambda^4 \int dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \delta \left(\sum_i x_i - 1 \right) \left[x_1((l+k)^2 + m^2) + x_2(l^2 + m^2) \right. \\
& \quad \left. + x_3((l+k)^2 + \Lambda^2) + x_4(l^2 + \Lambda^2) \right]^{-4} \\
& = 3! \Lambda^4 \int dx_i \left[(l + (x_1 + x_3)k)^2 + k^2(x_1 + x_3)(1 - x_1 - x_3) + (x_1 + x_2)m^2 + (1 - x_1 - x_2)\Lambda^2 \right]^{-4} \\
& = 3! \Lambda^4 \int dx_i [q^2 + D]^{-4} \\
& q = l + (x_1 + x_3)k, D = k^2(x_1 + x_3)(1 - x_1 - x_3) + (x_1 + x_2)m^2 + (1 - x_1 - x_2)\Lambda^2
\end{aligned} \tag{12.2}$$

则

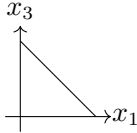
$$\begin{aligned}
\Pi(k^2) &= \frac{1}{2} g^2 I(k^2) - A k^2 - B m^2 \\
I(k^2) &= 3! \Lambda^4 \int dx_i \int \frac{d^d \bar{q}}{(2\pi)^d} [\bar{q}^2 + D]^{-4} \\
&= 3! \Lambda^4 \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{\Gamma(1)}{(4\pi)^3 \Gamma(4)} D^{-1} \\
&= \frac{\Lambda^4}{(4\pi)^3} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_3 \int_0^{1-x_1-x_3} dx_2 \frac{1}{k^2(x_1 + x_3)(1 - x_1 - x_3) + (x_1 + x_2)m^2 + (1 - x_1 - x_2)\Lambda^2}
\end{aligned} \tag{12.3}$$

注意到，由于只有 x_2 是一次的，我们先对 x_2 进行积分

$$A = k^2(x_1 + x_3)(1 - x_1 - x_3) + x_1 m^2 + (1 - x_1)\Lambda^2 \quad B = m^2 - \Lambda^2$$

$$\int_0^{1-x_1-x_3} \frac{dx_2}{A + Bx_2} = \frac{\log(A - B(x_1 + x_3 - 1)) - \log(A)}{B} \tag{12.4}$$

注意到，接下来的积分区域是一个三角形



但是观察我们的积分式

$$\frac{\Lambda^4}{(4\pi)^3 B} \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_3 \log(A - B(x_1 + x_3 - 1)) - \log(A) \quad (12.5)$$

考虑变换 $x_1 + x_3 \rightarrow y, x_1 \rightarrow x$, 它的Jacobian为1。由 $0 \leq x_1 + x_3 \leq 1 \rightarrow 0 \leq y \leq 1, x_3 = y - x \geq 0 \rightarrow x \leq y$ 然后上式积分变为

$$\begin{aligned} & \frac{\Lambda^4}{(4\pi)^3 B} \int_0^1 dy \int_0^y dx \log(A - B(y - 1)) - \log(A) \\ &= \frac{\Lambda^4}{(4\pi)^3 (\Lambda^2 - m^2)} \int_0^1 dy \int_0^y dx \{ \log [Bx + k^2 y(1 - y) + \Lambda^2] - \log [Bx + y(k^2(1 - y) - B) + m^2] \} \end{aligned} \quad (12.6)$$

由

$$\int dx \ln(Bx + C) = \left(\frac{C}{B} + x \right) \ln [Bx + C] - x \quad (12.7)$$

上面的积分第一项变为

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dy \left[\left(\frac{k^2 y(1 - y) + \Lambda^2}{B} + x \right) \ln [Bx + k^2 y(1 - y) + \Lambda^2] - x \right] \Big|_0^y \\ &= \int_0^1 dy \left[\left(y - \frac{\Lambda^2 + k^2 y(1 - y)}{\Lambda^2 - m^2} \right) \ln [\Lambda^2 + y(k^2(1 - y) + m^2 - \Lambda^2)] - y + \frac{k^2 y(1 - y) + \Lambda^2}{\Lambda^2 - m^2} \ln [k^2 y(1 - y) + \Lambda^2] \right] \end{aligned} \quad (12.8)$$

第二项变为

$$\begin{aligned} & \int_0^1 dy \left[\left(\frac{y(k^2(1 - y) - B) + m^2}{B} + x \right) \ln [Bx + y(k^2(1 - y) - B) + m^2] - x \right] \Big|_0^y \\ &= \int_0^1 dy \left[y + \frac{m^2 + k^2 y(1 - y)}{\Lambda^2 - m^2} \ln [m^2 + y(k^2(1 - y) + \Lambda^2 - m^2)] - y - \left(\frac{k^2 y(1 - y) + m^2}{\Lambda^2 - m^2} \right) \ln [k^2 y(1 - y) + m^2] \right] \end{aligned} \quad (12.9)$$

可以发现这两项积分结构上的相似性。由于中间的 y 是易于积分，并且两个之差会消掉，我们将剩下的积分运算交给mathematica

第一个积分

```
In[ ]:= Int1 = Normal@FullSimplify[Assuming[{Λ, k, m} > 0, ∫₀¹ Log[Λ² + y (k² (1 - y) - Λ² + m²)] (y -  $\frac{\Lambda^2 + k^2 y (1 - y)}{\Lambda^2 - m^2}$ ) +  $\frac{\text{Log}[\Lambda^2 + k^2 y (1 - y)]}{\Lambda^2 - m^2}$  (Λ² + k² y (1 - y))] dy]]];
```

第二个积分

```
In[ ]:= Int2 = Normal@FullSimplify[Assuming[{Λ, k, m} > 0, ∫₀¹ Log[m² + y (k² (1 - y) + Λ² - m²)] (y +  $\frac{m^2 + k^2 y (1 - y)}{\Lambda^2 - m^2}$ ) -  $\frac{\text{Log}[m^2 + k^2 (1 - y) y]}{\Lambda^2 - m^2}$  (m² + k² y (1 - y))] dy]]];
```

作差

```
In[ ]:= Fin = FullSimplify[Int1 - Int2];
```

图 1.10:

以上是透过Mathematica计算两个积分并作差，将结果FullSimplify之后存入Fin之中

然后我们乘上 $\frac{\Lambda^4}{\Lambda^2 - m^2}$ 后，在无穷远处展开至一阶

FirstOrder = FullSimplify [Assuming [Λ > 0, Normal [Series [$\frac{\Lambda^4}{\Lambda^2 - m^2}$ Fin, {Λ, ∞, 1}]]]]]

由于Mathematica的Fullsimplify功能令人难以解释，直接计算会包含Λ⁶，所以最后需要人为消去因子，令人高兴的是，高阶的发散性都被消掉了，得到

$$\frac{k \left(2k^2 \log \left(\frac{m}{\Lambda} \right) - k^2 + 3\Lambda^2 + 12m^2 \log \left(\frac{m}{\Lambda} \right) + m^2 \right) + 2 (k^2 + 4m^2)^{3/2} \tanh^{-1} \left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + 4m^2}} \right)}{6k}$$

为了检验展开的正确性，我们希望发散因子仅留存于一阶之中(否则意味着要消除发散行为，我们很可能要展开到高阶项才能获得所有的发散项)，我们再展开到二阶

SecondOrder = FullSimplify [Assuming [Λ > 0, Normal [Series [$\frac{\Lambda^4}{\Lambda^2 - m^2}$ Fin, {Λ, ∞, 2}]]]]]

人为化简后可以得到

$$\frac{k \left(-2 (k^2 + 6m^2) \log \left(\frac{\Lambda}{m} \right) - k^2 + 3\Lambda^2 + m^2 \right) + 2 (k^2 + 4m^2)^{3/2} \tanh^{-1} \left(\frac{k}{\sqrt{k^2 + 4m^2}} \right)}{6k}$$

可以发现，在整理了Λ²的行为后，其发散行为与一阶展开完全一致，这说明我们很可能是对的！

于是我们可以开始进行重整化了。将之前略去的Counterterm加入进来，得到

$$Q = \frac{g^2}{128\pi^3} \left(\frac{(k^2+4m^2)^{3/2} \text{ArcTanh}\left[\frac{k}{\sqrt{k^2+4m^2}}\right]}{3k} + \frac{1}{6} (-k^2 + m^2 + 3\Lambda^2 + 2(k^2 + 6m^2) \text{Log}\left[\frac{m}{\Lambda}\right]) \right) - (Ak^2 + Bm^2);$$

我们可以应用边界条件，令 $Q(k^2 = -m^2) = 0$ ，可以得到含 A, B 的方程

$$\frac{768\pi^3 m^2 (A - B) + g^2 (3\Lambda^2 + (2 + \sqrt{3}\pi) m^2) + 10g^2 m^2 \log\left(\frac{m}{\Lambda}\right)}{768\pi^3} = 0$$

再经求导后，加入第二个边界条件，然后又可解得

$$-\frac{384\pi^3 A m^2 + g^2 (m^2 (-\log\left(\frac{m}{\Lambda}\right)) - \frac{1}{2}\sqrt{3}\pi m^2) + 2g^2 m^2}{384\pi^3 m^2} = 0$$

联立求解Counterterm，能够得到

$$\text{Solve} \left[-\frac{2g^2 m^2 + 384A m^2 \pi^3 + g^2 (-\frac{1}{2}\sqrt{3}m^2 \pi - m^2 \text{Log}\left[\frac{m}{\Lambda}\right])}{384m^2 \pi^3} == 0 \&\& \frac{768(A-B)m^2 \pi^3 + g^2 (m^2 (2+\sqrt{3}\pi) + 3\Lambda^2) + 10g^2 m^2 \text{Log}\left[\frac{m}{\Lambda}\right]}{768\pi^3} == 0, \{A, B\} \right]$$

$$\left\{ \left\{ A \rightarrow \frac{g^2 (-4 + \sqrt{3}\pi + 2\text{Log}\left[\frac{m}{\Lambda}\right])}{768\pi^3}, B \rightarrow \frac{g^2 (-2m^2 + 2\sqrt{3}m^2 \pi + 3\Lambda^2 + 12m^2 \text{Log}\left[\frac{m}{\Lambda}\right])}{768m^2 \pi^3} \right\} \right\}$$

再带回原自能中整理 $Q/\text{Flatten}@\%22/\text{FullSimplify}$

$$\frac{g^2 \left(3k(k^2 + m^2) - \sqrt{3}k(k^2 + 2m^2)\pi + 2(k^2 + 4m^2)^{3/2} \text{ArcTanh}\left[\frac{k}{\sqrt{k^2 + 4m^2}}\right] \right)}{768k\pi^3}$$

约定Srednicki书中相同的记号 $\alpha = \frac{g^2}{(4\pi)^3}, c1 = 3 - \pi\sqrt{3}, c2 = 3 - 2\pi\sqrt{3}$

我们能够解得

$$\frac{1}{12}\alpha(2k^2 f(r) + m^2 c2 + k^2 c1)$$

与维度重整化所得到的结果一致!

1.13 无质量推迟格林函数

$$\begin{aligned}
G_{ret}(x, 0) &= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^3\vec{p} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \int dp^0 \frac{e^{-ip^0x^0}}{(p^0 + i\epsilon)^2 - \omega_{\vec{p}}^2} \\
&= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^3\vec{p} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \int dp^0 \frac{e^{-ip^0x^0}}{[(p^0 + i\epsilon) - \omega_{\vec{p}}][(p^0 + i\epsilon) + \omega_{\vec{p}}]} \quad \text{Residue Theorem} \\
&= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^3\vec{p} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} (-2\pi i) \frac{1}{2\omega_{\vec{p}}} \left(e^{-i\omega_{\vec{p}}x^0} - e^{i\omega_{\vec{p}}x^0} \right) \quad m = 0 \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{p} e^{i\vec{p}\cdot\vec{x}} \frac{1}{2|\vec{p}|} \left(e^{i|\vec{p}|x^0} - e^{-i|\vec{p}|x^0} \right) \quad \text{Spherical Coordinate} \\
&= \frac{-i}{(2\pi)^3} \int p^2 dp d(-\cos\theta) d\phi e^{ip|\vec{x}|\cos\theta} \frac{1}{2p} \left(e^{ipx^0} - e^{-ipx^0} \right) \\
&= \frac{1}{2|x|(2\pi)^2} \int dp d(ip|\vec{x}|\cos\theta) e^{ip\vec{x}\cos\theta} \left(e^{ipx^0} - e^{-ipx^0} \right) \\
&= \frac{1}{2|x|(2\pi)^2} \int_0^\infty dp \left(e^{-ip|\vec{x}|} - e^{ip|\vec{x}|} \right) \left(e^{ipx^0} - e^{-ipx^0} \right) \quad \text{extend to } -\infty \rightarrow \infty \\
&= \frac{1}{4|x|(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty dp \left(e^{-ip|\vec{x}|} - e^{ip|\vec{x}|} \right) \left(e^{ipx^0} - e^{-ipx^0} \right) \\
&= \frac{1}{2|x|(2\pi)^2} \int_{-\infty}^\infty dp \left(e^{ip(|\vec{x}|-x^0)} - e^{ip(|\vec{x}|+x^0)} \right) \\
&= \frac{1}{2|x|(2\pi)} \delta(|\vec{x}| - x^0) \quad x^0 > 0 \\
&= \frac{1}{2\pi} \delta(\vec{x}^2 - (x^0)^2) = \frac{1}{2\pi} \delta(x^2) \quad x^0 < 0, G_{ret} = 0 \\
&= \frac{1}{2\pi} \theta(x^0) \delta(x^2)
\end{aligned} \tag{13.1}$$

在图1.7下面部分讨论时间分类时用到的结论为Jordan引理

Lemma 11.3.1 (Jordan's lemma) *Let C_R be a semicircle of radius R in the upper half of the complex plane (UHP) and centered at the origin. Let f be a function that tends uniformly to zero faster than $1/|z|$ for $\arg(z) \in [0, \pi]$ as $|z| \rightarrow \infty$. Let α be a nonnegative real number. Then*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I_R \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\alpha z} f(z) dz = 0.$$

Proof For $z \in C_R$ we write $z = Re^{i\theta}$, $dz = iRe^{i\theta}d\theta$, and

$$i\alpha z = i\alpha(R \cos \theta + iR \sin \theta) = i\alpha R \cos \theta - \alpha R \sin \theta$$

and substitute in the absolute value of the integral to show that

$$|I_R| \leq \int_0^\pi e^{-\alpha R \sin \theta} R |f(Re^{i\theta})| d\theta.$$

By assumption, $R|f(Re^{i\theta})| < \epsilon(R)$ independent of θ , where $\epsilon(R)$ is an arbitrary positive number that tends to zero as $R \rightarrow \infty$. By breaking up the interval of integration into two equal pieces and changing θ to $\pi - \theta$ in the second integral, one can show that

$$|I_R| < 2\epsilon(R) \int_0^{\pi/2} e^{-\alpha R \sin \theta} d\theta.$$

Furthermore, by plotting $\sin \theta$ and $2\theta/\pi$ on the same graph, one can easily see that $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$ for $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Thus,

$$|I_R| < 2\epsilon(R) \int_0^{\pi/2} e^{-(2\alpha R/\pi)\theta} d\theta = \frac{\pi\epsilon(R)}{\alpha R} (1 - e^{-\alpha R}),$$

which goes to zero as R gets larger and larger. □

图 1.11:

1.14 Lippmann-Schwinger方程

设哈密顿量

$$H = H_0 + V(x)$$

有本征态

$$H\psi_{\vec{k}}^{in} = E(|\vec{k}|)\psi_{\vec{k}}^{in}$$

这个方程有形式解

$$\psi_{\vec{k}}^{in} = \phi_{\vec{k}} + \left(E(\vec{k}) - H_0 + i\epsilon\right)^{-1} V\psi_{\vec{k}}^{in} \quad (14.1)$$

其中 $\phi_{\vec{k}}$ 是自由哈密顿量的本征态(平面波)满足

$$\hat{P}\phi_{\vec{k}} = \hbar\vec{k}\phi_{\vec{k}}$$

为验证(15)确是本征方程的解，我们左右两边同时作用算符

$$E(\vec{k}) - H_0 + i\epsilon$$

并取 $\epsilon \rightarrow 0$ 即可得到本征方程。更详细可见Weinberg Lectures on Quantum Mechanics

为证明其唯一性，首先给出KG方程

$$(\partial^2 + m^2)\phi = 0$$

的通解

$$\phi = \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} \left[a(\vec{k})e^{-i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + b(\vec{k})e^{i\omega t + i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] \quad (14.2)$$

以及光锥上的边界条件 $\psi(t = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}) \equiv \psi(x^1, x^2, x^3)$

通解代入光锥方程 $t = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2}$ 可以得到

$$\int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} \left[a(\vec{k})e^{-i\omega\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} + i\vec{k}\cdot\vec{x}} + b(\vec{k})e^{i\omega\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} + i\vec{k}\cdot\vec{x}} \right] = \psi(\vec{x}) \quad (14.3)$$

做傅里叶变换

$$\begin{aligned}
& \int d^3x \psi(\vec{x}) e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}} \\
&= \int d^3x \int \frac{d^3k}{2\omega} \left[a(\vec{k}) e^{-i\omega \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} + i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} + b(\vec{k}) e^{i\omega \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2} + i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} \right]
\end{aligned} \tag{14.4}$$

注意到积分

$$\begin{aligned}
& \int d^3x e^{i\omega \sqrt{\vec{x}^2} + i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} = 2\pi \int_0^\infty r^2 dr e^{i\omega r} \int_0^\pi d(-\cos \theta) e^{+ikr \cos \theta} \\
&= \frac{2\pi}{ik} \int_0^\infty r dr e^{i\omega r} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \quad \omega^2 = k^2 + m^2 \rightarrow \omega > k \\
&= \frac{2\pi}{ik} \int_0^{i\infty} r dr e^{i\omega r} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \quad \text{change contour} \\
&= \frac{2\pi}{ik} \int_0^\infty (iy) d(iy) e^{i\omega(iy)} (e^{ik(iy)} - e^{-ik(iy)}) \\
&= \frac{-2\pi}{ik} \int_0^\infty y dy (e^{-(k+\omega)y} - e^{(k-\omega)y}) \\
&= \frac{2\pi}{ik} \left(\frac{1}{(k-\omega)^2} - \frac{1}{(k+\omega)^2} \right)
\end{aligned} \tag{14.5}$$

同时

$$\begin{aligned}
& \int d^3x e^{-i\omega \sqrt{\vec{x}^2} + i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{x}} = \frac{2\pi}{ik} \int_0^{-i\infty} r dr e^{-i\omega r} (e^{ikr} - e^{-ikr}) \quad \text{change contour} \\
&= \frac{2\pi}{ik} \int_0^\infty (-iy) d(-iy) e^{-i\omega(-iy)} (e^{ik(-iy)} - e^{-ik(-iy)}) \\
&= \frac{-2\pi}{ik} \int_0^\infty y dy (e^{(k-\omega)y} - e^{-(k+\omega)y}) \\
&= \frac{2\pi}{ik} \left(\frac{1}{(k+\omega)^2} - \frac{1}{(k-\omega)^2} \right)
\end{aligned} \tag{14.6}$$

可以得到

$$\begin{aligned}
& \int d^3x \psi(\vec{x}) e^{i\vec{k}' \cdot \vec{x}} \\
&= \frac{2\pi}{ik} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} \left[(a(\vec{k}) - b(\vec{k})) \left(\frac{1}{(|\vec{k} + \vec{k}'| + \omega)^2} - \frac{1}{(|\vec{k} + \vec{k}'| - \omega)^2} \right) \right] \\
&= \frac{2\pi}{ik} \int \frac{d^3\vec{k}}{2\omega} \left[(a(\vec{k} - \vec{k}') - b(\vec{k} - \vec{k}')) \left(\frac{1}{(|\vec{k}| + \omega)^2} - \frac{1}{(|\vec{k}| - \omega)^2} \right) \right]
\end{aligned} \tag{14.7}$$

我猜测这个公式已知 ψ 的情况下能够解出 a, b ，但不知道如何处理