Московский авиационный институт
(Национальный исследовательский университет)

Институт: «Информационные технологии и прикладная математика»
Кафедра: 806 «Вычислительная математика и программирование»

Курсовой проект
по курсу «Численные методы»

Студент:	Обыденкова Ю. Ю.
Группа:	М8О-308Б-18
Преподаватель:	Черкасов М.А.
Оценка:	
Дата:	

Москва, 2021

Оглавление

1. ЗАДАНИЕ

```
   -----------------------------------------------
308/27  Решить начально-краевую задачу для ДифУрЧаП параболического типа.
     Использовать схему: не явную.
     Осуществить реализацию варианта аппроксимации граничных условий,
     содержащих производные:
      - двухточечная с первым порядком точности


        y'  = 5.8* y''   -  5.20* y  + (x + 1 )/(t +   9 )  ;
         t          xx

        -2 <= x <=   2 ; hx= 0.80000; ht=  0.02500; T_end=  0.10000

       3.00* Y'x (t, -2 )  -  3.00* Y (t, -2 ) =      -40.27433388 + t / ( -4 )

       3.00* Y'x (t,  2 )  =       -28.27433388 + t*t/(  1 ) +    0.400 *t  ;

       y(0,x)=   4 +   6 * sin(     1.57079633 * x )
```

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДУЧП ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

МЕТОД СЕТОК

Рассмотрим решение дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с начально-краевыми условиями:

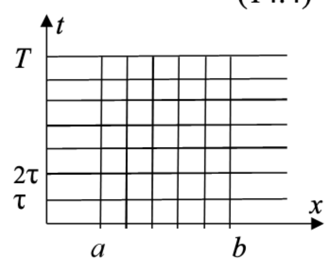
$$\frac{\partial y}{\partial t} = \alpha_1 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \alpha_2 \frac{\partial y}{\partial x} + \alpha_3 y + f(t,x), \quad a \le x \le b, \quad 0 \le \ t \le T, \ \alpha_1 > 0 \qquad (14.1)$$

для $x=a$ $\qquad \varphi_1 \frac{\partial y}{\partial x} + \varphi_2 y = f_1(t)$, (14.2)

для $x=b$ $\qquad \varphi_4 \frac{\partial y}{\partial x} + \varphi_5 y = f_2(t)$, (14.3)

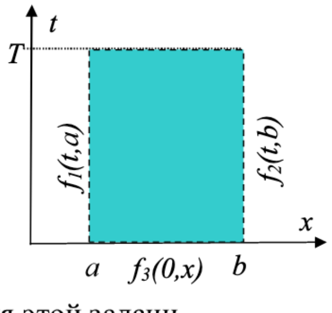
для $t=0$ $\qquad y(0,x) = f_3(x)$. (14.4)

(14.4)



Накроем область сеткой с шагом по x равным h и с шагом по t равным τ. Тогда $x_0=a$, $x_1=a+h$, …, $x_N=b$, $N=(b-a)/N$, $t_0=0$, $t_1=\tau$, $t_2=2\cdot\tau$, $t_M = T = M\cdot\tau$, $M = T/\tau$.

Геометрически область представляет собой «стакан», с трёх сторон которого заданы начальные условия (14.4), слева и справа заданы краевые условия (14.2) и (14.3), а на верхней кромке (при $t=T$) значения функции $y(t,x)$ не известны. Их вычисление и является целью рассматриваемых алгоритмов. Коэффициенты α_i уравнения и φ_i в краевых условиях представляют собой константы (могут быть и равны 0).



Тогда $y(t_k, x_i) = y_i^k$. Назовём её сеточной функцией. Рассмотрим несколько способов решения этой задачи.

НЕЯВНАЯ СХЕМА

В (14.1) производные будем вычислять в узле (x_i ; t_{k+1}). Заменим производные на конечно-разностные соотношения

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{y_i^{k+1} - y_i^k}{\tau} + O(\tau^1)\,; \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{y_{i+1}^{k+1} - 2y_i^{k+1} + y_{i-1}^{k+1}}{h^2} + O(h^2)\,;$$

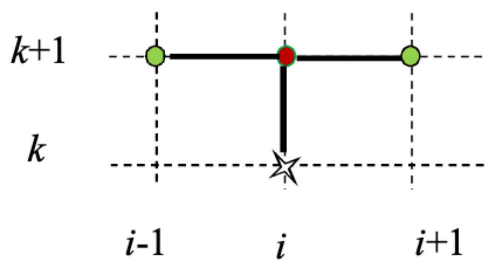
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y_{i+1}^{k+1} - y_{i-1}^{k+1}}{2h} + O(h^2)\,. \qquad (14.11)$$

Подставим эти соотношения в (14.1) и получим для каждой внутренней точки (x_i; t_{k+1}):

$$(2\alpha_1 - h\cdot\alpha_2)\frac{\tau}{2h^2}y_{i-1}^{k+1} + \left(\alpha_3\tau - \frac{2\alpha_1\tau}{h^2} - 1\right)y_i^{k+1} + (2\alpha_1 + h\cdot\alpha_2)\frac{\tau}{2h^2}y_{i+1}^{k+1} =$$

$$= -y_i^k - \tau\cdot f(t_{k+1};x_i) + O(\tau + h^2) \ \ , \ i=1,2,3,\ldots,N\text{-}1. \qquad (14.12)$$

Это уравнение содержит три неизвестных для i=1,3,…,n-1. Решение (14.1) по такой схеме носит название «неявная схема» и имеет графическое изображение:



Осталось дополнить систему (14.12) первым (для i=0, т.е. $x=a$) и последним (для $i=N$, т.е. $x=b$) уравнениями. Можно использовать формулы (14.7), но это ухудшит точность решения:

Для $x=a$ первое уравнение: $(h\varphi_2 - \varphi_1)y_0^1 + \varphi_1 y_1^1 = f_1(t_1) * h$.

Для $x=b$ последнее уравнение: $-\varphi_4 y_{N-1}^1 + (h\varphi_5 + \varphi_4)y_N^1 = f_2(t_1) * h$. (14.13)

Используя (14.8), (14.9), (14.10), мы получим второй порядок точности по h, но эта трёхточечная схема сделает матрицу системы не трёхдиагональной:

Для $x=a$: $(2\,h\,\varphi_2 - 3\,\varphi_1)\,y_0 + 4\,\varphi_1\,y_1\ -\ \varphi_1 y_2\ = 2h\,f_1(t)$.

Для $x=b$: $\varphi_4 y_{N-2} - 4\varphi_4 y_{N-1} + (\,2h\varphi_5 + 3\varphi_4)\,y_{N-2}\ = 2hf_1(t)$. (14.14)

Исправить её не трёхдиагональность можно арифметическими операциями со строками: первой со второй и последней с предпоследней. После такого исправления матрица системы станет трёхдиагональной, но вероятно потеряет свойство диагонального преобладания, что для матриц больших порядков может привести к потерям точности при применении метода прогонки.

Для сохранения трёхдиагональности матрицы системы и второго порядка точности вычислений относительно *h*, разложим y_1^{k+1} в ряд Тейлора в окрестности точки (t_{k+1} ; x_0):

$$y_1^{k+1} = y_0^{k+1} + \frac{\partial y}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{h^2}{2} + O(h^2) . \qquad (14.15)$$

Сюда вместо y``$_{xx}$ подставим его выражение из (14.1) и из полученного соотношения выразим y`$_x$ в точке (t_{k+1};x_0):

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{i=0}^{k+1} = \frac{2\alpha_1}{h(2\alpha_1 - \alpha_2 h)}(y_1^{k+1} - y_0^{k+1}) - \frac{h}{2\alpha_1 - \alpha_2 h} \cdot \left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_0^{k+1} + \frac{\alpha_3 h}{2\alpha_1 - \alpha_2 h} y_0^{k+1} +$$

$$+ \frac{h}{2\alpha_1 - \alpha_2 h} f(t_{k+1}, x_0) + O(h^2) .$$

Учтём, что $\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_0^{k+1} = \frac{(y_0^{k+1} - y_0^k)}{\tau} + O(\tau)$ и получим первое уравнение (для x=x_0) будущей трёхдиагональной системы в случае, когда $\varphi_1 \neq 0$:

$$\left(\frac{2\alpha_1}{h} + \frac{h}{\tau} - \alpha_3 h - \frac{\varphi_2}{\varphi_1}(2\alpha_1 - \alpha_2 h)\right) y_0^{k+1} - \frac{2\alpha_1}{h} y_1^{k+1} =$$

$$= \frac{h}{\tau} y_0^k + h \cdot f(t_{k+1}, x_0) - \frac{2\alpha_1 - \alpha_2 h}{\varphi_1} f_1(t_{k+1}) . \qquad (14.16)$$

Если φ_1=0, то первое уравнение будет выглядеть: $y_0^{k+1} = f_1(t_{k+1}) / \varphi_2$.

Аналогично последнее уравнение (для x=x_N) , будет для $\varphi_4 = 0$ выглядеть: $y_N^{k+1} = f_2(t_{k+1}) / \varphi_5$, а если $\varphi_4 \neq 0$ так:

$$-\frac{2\alpha_1}{h} y_{N-1}^{k+1} + \left(\frac{2\alpha_1}{h} + \frac{h}{\tau} - \alpha_3 h + \frac{\varphi_5}{\varphi_4}(2\alpha_1 + \alpha_2 h)\right) y_N^{k+1} =$$

$$= \frac{h}{\tau} y_N^k + h \cdot f(t_{k+1}, x_N) + \frac{2\alpha_1 + \alpha_2 h}{\varphi_4} f_2(t_{k+1}) . \qquad (14.17)$$

Остальные *N*-1 уравнений для внутренних точек (для *i*=1,2,…,*N*-1) записываются по формуле (14.12).

При программировании неявной схемы надо учесть, что на каждом новом слое приходится решать систему линейных алгебраических уравнений с трёхдиагональной матрицей. Недостаток неявной схемы в необходимости решения трёхдиагональной СЛАУ (например, методом прогонки). Это несколько усложняет программирование, увеличивает количество арифметических операций (а значит ухудшение точности). Но решение получается устойчивым по сравнению с явной схемой. Поэтому вычисления возможно проводить с большим шагом по *t*, а это, даже с учётом метода прогонки, существенно уменьшает общее время вычисления до *t*=*T*, а значит может уменьшаться общее количество арифметических операций.

3. РЕШЕНИЕ

Уравнение теплопроводности: ①

$$y' = 5{,}8 \cdot y''_{xx} - 5{,}20 y + \frac{(x+1)}{(t+9)} \quad (1)$$

- Граничные условия:

$x \in [-2;2]$ $\quad 3y'_x(t,-2) - 3y(t,-2) = -40{,}27433388 + \frac{t}{-4}$

$h_x = 0{,}8$ $\quad 3y'_x(t,2) = -28{,}27433388 + t^2 + 0{,}4t$

$ht = 0{,}025$

$T_{end} = 0{,}1$

- Начальное условие:

$t = 0$

$y(0,x) = 4 + 6\sin(1{,}57079633x)$ (*)

Вычисляем узлы по x:	Вычисляем по t:
$x_0 = -2 + 0{,}8 \cdot 0 = -2$	$t_0 = 0 + 0{,}025 \cdot 0 = 0$
$x_1 = -2 + 0{,}8 \cdot 1 = -1{,}2$	$t_1 = 0 + 0{,}025 \cdot 1 = 0{,}025$
$x_2 = -2 + 0{,}8 \cdot 2 = -0{,}4$	$t_2 = 0 + 0{,}025 \cdot 2 = 0{,}05$
$x_3 = -2 + 0{,}8 \cdot 3 = 0{,}4$	$t_3 = 0 + 0{,}025 \cdot 3 = 0{,}075$
$x_4 = -2 + 0{,}8 \cdot 4 = 1{,}2$	$t_4 = 0 + 0{,}025 \cdot 4 = 0{,}1 = T_{end}$
$x_5 = -2 + 0{,}8 \cdot 5 = 2$	$\overline{t_5 = 0 + 0{,}025 \cdot 5 = 0{,}125}$

На нулевом слое (для t=0) вычисляем y^0_i для $i = 1 \dots n^{=5}$ по формуле (*)

$y^0_0 = 4 + 6\sin(1{,}57079633 \cdot (-2)) = 4$

$y^0_1 = 4 + 6\sin(1{,}57079633 \cdot (-1{,}2)) = -1{,}70633910$

$y^0_2 = 4 + 6\sin(1{,}57079633 \cdot (-0{,}4)) = 0{,}473288486$

$y^0_3 = 4 + 6\sin(1{,}57079633 \cdot (0{,}4)) = 7{,}52671151$

$y^0_4 = 4 + 6\sin(1{,}57079633 \cdot (1{,}2)) = 9{,}70633910$

$y^0_5 = 4 + 6\sin(1{,}57079633 \cdot 2) = 4$

Для вычисления y^k_i на слое $k = 1,2,3,4$ в ур-е (1) подставим формулы численного дифференцирования (14.5):

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{y^{k+1}_i - y^k_i}{0{,}025}; \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y^{k+1}_{i+1} - y^{k+1}_{i-1}}{2 \cdot 0{,}8}; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{y^{k+1}_{i+1} - 2y^{k+1}_i + y^{k+1}_{i-1}}{0{,}8^2}$$

$$\boxed{\frac{y^{k+1}_i - y^k_i}{0{,}025} = 5{,}8\,\frac{y^{k+1}_{i+1} - 2y^{k+1}_i + y^{k+1}_{i-1}}{0{,}8^2} - 5{,}20\,y^{k+1}_i + \frac{x_i + 1}{t_{k+1} + 9}}$$

Итерация 0

②

Система уравнений:

$$
\begin{cases}
-5{,}4 y_0^1 + 3 y_1^1 = -32{,}2245 \\
-4 y_4^1 + 3 y_5^1 = -22{,}611 \\
0{,}226563 y_0^1 - 1{,}58313 y_1^1 + 0{,}226563 y_2^1 = 1{,}70689 \\
0{,}226563 y_1^1 - 1{,}58313 y_2^1 + 0{,}226563 y_3^1 = -0{,}474951 \\
0{,}226563 y_2^1 - 1{,}58313 y_3^1 + 0{,}226563 y_4^1 = -7{,}53059 \\
0{,}226563 y_3^1 - 1{,}58313 y_4^1 + 0{,}226563 y_5^1 = -9{,}71243
\end{cases}
$$

Решение:

$y_0^1 = 5{,}93028$

$y_1^1 = -0{,}0669934$

$y_2^1 = 1{,}13548$

$y_3^1 = 5{,}90489$

$y_4^1 = 6{,}88701$

$y_5^1 = -0{,}649977$

Решение данной системы уравнений было получено по методу прогонки:

```
import numpy as np

def metod_progonki(matrix):
    p = []
    q = []
    p.append(0)
    q.append(0)
    n = len(matrix)
    m = len(matrix[0])
    for i in range(n):
        if i == 0:
            a = 0
        else:
            a = matrix[i][i - 1]
        if i == (n - 1):
            c = 0
        else:
            c = matrix[i][i + 1]
        b = matrix[i][i]
        d = matrix[i][m - 1]
        p_i = float(((-1) * c) / (b + a * p[i]))
        q_i = float((d - a * q[i]) / (b + a * p[i]))
        p.append(p_i)
        q.append(q_i)
```

```
    print(f'P-{p}')
    print(f'Q-{q}')
    x = []
    x.append(q[n])
    for i in range(n - 1, 0, -1):
        x_i = q[i] + p[i] * x[n - i - 1]
        x.append(x_i)
    x.reverse()
    return x


def check_slau(matrix, res):
    eps = 0.000001
    n = len(matrix)
    for i in range(n):
        elem = 0
        for j in range(n):
            elem += matrix[i][j] * res[j]
        if (elem - matrix[i][n] >= eps):
            return 'ERR'
    return 'OK'


matrix1 = [[-5.4, 3, 0, 0, 0, 0, -32.2245],
           [0.226563, -1.58313, 0.226563, 0, 0, 0, 1.70689],
           [0, 0.226563, -1.58313, 0.226563, 0, 0, -0.474951],
           [0, 0, 0.226563, -1.58313, 0.226563, 0, -7.53059],
           [0, 0, 0, 0.226563, -1.58313, 0.226563, -9.71243],
           [0, 0, 0, 0, -3, 3, -22.611]]


print('Результаты по методу прогонки:')
progonka = np.array(metod_progonki(matrix1.copy()))

print('x = ', progonka)
print('Проверка прогонки')
print(check_slau(matrix1, progonka))
```

Результаты выполнения программы:

```
Результаты по методу прогонки:
P-[0, 0.5555555555555555, 0.15547173522943145, 0.14636742857368126,
0.14617264271718733, 0.1461684809550788, 0.0]
Q-[0, 5.967499999999999, -0.24352201503504878, 0.27119086069811754,
4.8981844078135985, 6.981992754592777, -0.65001962685571]
x =  [ 5.93028 -0.06699  1.13548  5.90489  6.88701 -0.64997]
Проверка прогонки
OK
```

Итерация 1

$$\begin{cases} -5{,}4y_0^2+3y_1^2=-32{,}2295 \\ -3y_4^2+3y_5^2=-22{,}6015 \\ 0{,}226563\,y_0^2-1{,}58313\,y_1^2+0{,}226563\,y_2^2=0{,}0675459 \\ 0{,}226563\,y_1^2-1{,}58313\,y_2^2+0{,}226563\,y_3^2=-1{,}13713 \\ 0{,}226563\,y_2^2-1{,}58313\,y_3^2+0{,}226563\,y_4^2=-5{,}90876 \\ 0{,}226563\,y_3^2-1{,}58313\,y_4^2+0{,}226563\,y_5^2=-6{,}89309 \end{cases}$$

Решение:

$y_0^2=6{,}59106$

$y_1^2=1{,}12075$

$y_2^2=1{,}53839$

$y_3^2=4{,}6098$

$y_4^2=4{,}59294$

$y_5^2=-2{,}94088$

Итерация 2

3

$$\begin{cases} -5{,}4y_0^3+3y_1^3=-32{,}2345 \\ -3y_4^3+3y_5^3=-22{,}591 \\ 0{,}226563\,y_0^3-1{,}58313\,y_1^3+0{,}226563\,y_2^3=-1{,}1202 \\ 0{,}226563\,y_1^3-1{,}58313\,y_2^3+0{,}226563\,y_3^3=-1{,}54004 \\ 0{,}226563\,y_2^3-1{,}58313\,y_3^3+0{,}226563\,y_4^3=-4{,}61366 \\ 0{,}226563\,y_3^3-1{,}58313\,y_4^3+0{,}226563\,y_5^3=-4{,}599 \end{cases}$$

$y_0^3=7{,}06435$

$y_1^3=1{,}971$

$y_2^3=1{,}76389$

$y_3^3=3{,}55691$

$y_4^3=2{,}72658$

$y_5^3=-4{,}80374$

Итерация 3

$$\begin{cases} -5{,}4\,y_0^4 + 3y_1^4 = -32{,}2395 \\ -3y_4^4 + 3y_5^4 = -22{,}5795 \\ 0{,}226563 - 1{,}58313\,y_1^4 + 0{,}226563\,y_2^4 = -1{,}97045 \\ 0{,}226563 - 1{,}58313\,y_2^4 + 0{,}226563\,y_3^4 = -1{,}76554 \\ 0{,}226563 - 1{,}58313\,y_3^4 + 0{,}226563\,y_4^4 = -3{,}56075 \\ 0{,}226563 - 1{,}58313\,y_4^4 + 0{,}226563\,y_5^4 = -2{,}73262 \end{cases}$$

$y_0^4 = 7{,}39849$

$y_1^4 = 2{,}57079$

$y_2^4 = 1{,}86798$

$y_3^4 = 2{,}68918$

$y_4^4 = 1{,}20649$

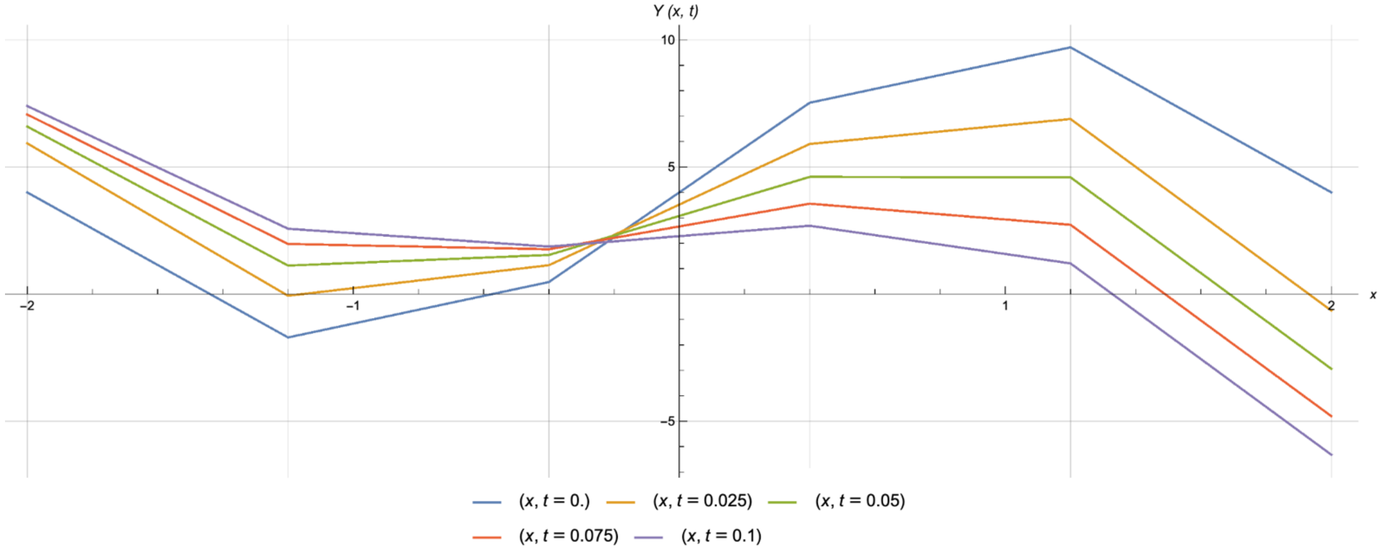
$y_5^4 = -6{,}32$

4. ОТВЕТ

Получим решение задачи:

Y(x,t)	X = -2	X = -1.2	X = -0.4	X = 0.4	X = 1.2	X = 2
t = 0	4	-1.70633	0.47328	7.52671	9.70633	4
t = 0.025	5.93027	-0.06699	1.13547	5.90489	6.88701	-0.64997
t = 0.05	6.59105	1.12074	1.53838	4.60980	4.59294	-2.94087
t = 0.075	7.06434	1.97100	1.76388	3.55690	2.72658	-4.80374
t = 0.1	7.39849	2.57079	1.86798	2.68918	1.20648	-6.320003

График решения:



5. ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКАЯ ЧАСТЬ

При решении дифференциальных уравнений применяются явные и неявные методы. Явными методами решения дифференциальных уравнений называются такие методы, в которых используются значения с предыдущего шага. Эти значения являются аргументом в правой части:

$$y_{i+1} = f(y_i)$$

При применении неявных методов на каждой итерации искомые значения y_{i+1} входят в разностную форму производной и в правую часть уравнения, которое символически можно записать так:

$$f(y_{i+1}) = 0$$

Это заметно усложняет решение, поскольку на каждой итерации приходится решать уравнение или систему уравнений.

Явные методы проще реализовать, достаточно лишь задать рекуррентное соотношение. Однако, неявные методы применимы к сложным дифференциальным уравнениям, что является их особенностью.

6. ВЫВОДЫ

Дифференциальное уравнение параболического типа в частных производных на самом деле является уравнением теплопроводности. Таким образом, ДУ в данной задаче можно привести к виду:

$$u_t = \frac{x+1}{t+9} + 5.8u_{xx} - 5.2u$$

Такие методы, как метод Фурье, метод разделения переменных для решения ДУ в частных производных, имеют решение, которое записывается в виде суммы бесконечного ряда довольно сложной структуры, и нахождение численного значения функции в конкретной точке представляет собой отдельную математическую задачу. Поэтому широкое распространение получили численные методы решения уравнений в частных производных. Самым распространенным методом считается метод сеток.