南京农业大学 2021-2022 学年第二学期微积分 IIB 试卷 A

一. 填空题或选择题（每题 3 分，计 30 分. 选择题正确选项唯一）

1. 空间的点$(-1,2,3)$关于 yoz 平面的对称点的坐标为________________ .

2. 母线平行于 x 轴且过曲线$\begin{cases}2x^2+y^2+z^2=16\\x^2-y^2+z^2=0\end{cases}$ 的柱面方程为________________ .

3. 设$z=f\left(x+y,\ x-y\right)$，函数 f 有连续的偏导数，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________________ .

4. 设$z=f(x,y)$有二阶连续偏导数，在区域$D=\left\{(x,y)\middle|-1\le x\le 1,0\le y\le 1\right\}$上满足

$f(-x,y)=f(x,y)$，则$\iint\limits_D\left(2+\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)dxdy=$ ________________ .

5. 写出直角坐标系下的二次积分$\int_0^1 dy\int_y^1 f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dx$在极坐标系下的先 r 后 θ 的二次积分

________________________________ .

6. 无穷级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{-1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ ________________（填“收敛”或者“发散”）.

7. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\dfrac{1}{3}$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\left(\dfrac{x+1}{2}\right)^n$的收敛半径等于__________ .

8. 设$f\left(x,y\right)$在$\mathbb{R}^2$上可微，且对任意$\left(x,y\right)$均有$\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial x}>0$，$\dfrac{\partial f\left(x,y\right)}{\partial y}<0$，则(　　　)

A. $f\left(0,0\right)>f\left(1,1\right)$； B. $f\left(0,0\right)<f\left(1,1\right)$； C. $f\left(0,1\right)>f\left(1,0\right)$； D. $f\left(0,1\right)<f\left(1,0\right)$.

9. 设$f\left(x\right)$为连续函数，$F\left(u\right)=\int_1^u dy\int_y^u f\left(x\right)dx$，则 $F'\left(2\right)=$(　　　)

10. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，其和$S\neq 0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n+a_{n+1}-a_{n+2}\right)$收敛于(　　　)

A. $S+a_1$　　B. $S+a_2$　　C. $S+a_1-a_2$　　D. $S-a_1+a_2$.

1. $(1,2,3)$；　2. $3y^2-z^2=16$；　3. $2f_2'$；　4. 4；　5. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{\sec\theta}f\left(r\right)rdr$；

6. 发散；　7. 6；　8. D；　9. B；　10. B；

二. 解答题 I . (每题 7 分，计 28 分)

11. 设 $z=f(x,y)$满足$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x$，且$f(x,0)=x^2$，$f(0,y)=y$，求$f(x,y)$.

解：$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial x}=\int 2xdy=2xy+\varphi\left(x\right)\Rightarrow z=\int\left[2xy+\varphi\left(x\right)\right]dx=x^2y+\int\varphi\left(x\right)dx+\psi\left(y\right)$

$\underset{f(0,y)=y}{\overset{f(x,0)}{\Rightarrow}}z=x^2y+x^2+y$

12. 若函数 $f(u,v)$ 有连续的偏导数且 $\dfrac{\partial f(u,v)}{\partial u}=f_1'\neq 1$，由方程 $z=f\left(x+z\ ,\ y\right)$ 确定二元函数 $z=z(x,y)$，求全微分 dz 及二阶混合偏导 z_{xy} .

解：$z=f\left(x+z\ ,\ y\right)\Rightarrow dz=f_1'\left(dx+dz\right)+f_2'dy\Rightarrow dz=\dfrac{1}{1-f_1'}\left(f_1'dx+f_2'dy\right)$…………5分

或 $z=f\left(x+z\ ,\ y\right)\Rightarrow\begin{cases}z_x=f_1'\left(1+z_x\right)\Rightarrow z_x=\dfrac{f_1'}{1-f_1'}\\ z_y=f_1'z_y+f_2'\Rightarrow z_y=\dfrac{f_2'}{1-f_1'}\end{cases}\Rightarrow dz=\dfrac{1}{1-f_1'}\left(f_1'dx+f_2'dy\right)$；

$$\Rightarrow z_{xy}=\left(\frac{f_1'}{1-f_1'}\right)_y'=\left(-1+\frac{1}{1-f_1'}\right)_y'=-\frac{-\left(f_{11}''z_y+f_{12}''\right)}{\left(1-f_1'\right)^2}=\frac{f_{11}''f_2'+f_{12}''\left(1-f_1'\right)}{\left(1-f_1'\right)^3}$$………………2分

13. 已知理想气体的状态方程 $pV=RT\left(R\text{为常量}\right)$， 求证：$\dfrac{\partial p}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial p}=-1$.

证明：设 $F\left(p,V,T\right)=pV-RT$，则 $F_p=V$，$F_V=p$，$F_T=-R$，

则 $\dfrac{\partial p}{\partial V}\cdot\dfrac{\partial V}{\partial T}\cdot\dfrac{\partial T}{\partial p}=\left(-\dfrac{F_V}{F_p}\right)\cdot\left(-\dfrac{F_T}{F_V}\right)\cdot\left(-\dfrac{F_p}{F_T}\right)=-1$.

14. 预造一个无盖长方体容器，已知底部造价为每平米 3 元，侧面造价为每平米 1.5 元，现想用 36 元造一个容积最大的容器，求它的尺寸 .

解：设容器的长、宽、高分别为 x,y,z，则问题为满足条件 $3xy+1.5\cdot 2\cdot\left(xz+yz\right)=36$，即满足条件 $xy+xz+yz=12$ 下，$V=xyz$ 的最大值，

构造 $L\left(x,y,z,\lambda\right)=xyz+\lambda\left(xy+yz+zx\right)$，

则有 $\begin{cases}L_x=yz++\lambda\left(y+z\right)=0\\ L_y=xz++\lambda\left(x+z\right)=0\\ L_z=xy++\lambda\left(x+y\right)=0\\ \quad xy+yz+xz=12\end{cases}\Rightarrow$ 唯一驻点 $x=y=z=2$，此时 $V_{\max}=8$.

三. 解答题 II (第 15-17 题每题 7 分，第 18 题 9 分，第 19 题每题 12 分，计 42 分)

15. 计算 $\int_0^1dx\int_x^1\dfrac{\sin y}{y}dy$.

解：$\int_0^1dx\int_x^1\dfrac{\sin y}{y}dy=\int_0^1\dfrac{\sin y}{y}dy\int_0^y dx=\int_0^1\sin y\,dy=1-\cos 1$

16. 计算$\iint\limits_{D}(x+y)d\sigma$，其中$D=\left\{(x,y)\middle|2y\le x^2+y^2\le 4\right\}$.

解：由于D关于y对称，$\iint\limits_{D}xdxdy=0$………………………………………………………………2分

记$D_1:x^2+y^2\le 4$，$D_2:x^2+y^2\le 2y$．$D=D_1-D_2$.$\iint\limits_{D}ydxdy=\iint\limits_{D_1}ydxdy-\iint\limits_{D_2}ydxdy=0-\iint\limits_{D_2}ydxdy$

$=-\int_{-1}^{1}dx\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}}ydy=-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2-\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)^2\right]dx=-2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx=-\pi$.…… 4分

$\therefore\iint\limits_{D}(x+y)d\sigma=-\pi$……………………………………………………………………………… 1分

或者$D_2:0\le r\le 2\sin\theta,0\le\theta\le\pi$.

$\iint\limits_{D}ydxdy=\iint\limits_{D_1}ydxdy-\iint\limits_{D_2}ydxdy=0-\iint\limits_{D_2}ydxdy=-\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}r\sin\theta\cdot rdr=-\frac{8}{3}\int_0^{\pi}\sin^4\theta d\theta$

$=-\frac{2}{3}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\theta)^2d\theta=-\frac{2}{3}\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos 2\theta+\frac{1}{2}\cos 4\theta\right)d\theta=\cdots=-\pi$.

17. 试问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{3}+(-3)^n}{n\cdot 3^n}$是否收敛？给出结论，并说明理由 .

解：由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{3}+(-3)^n}{n\cdot 3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n\cdot 3^n}+\dfrac{(-3)^n}{n\cdot 3^n}\right)$

而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n\cdot 3^n}\right|\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot 3^n}\le\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}$收敛，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{3}}{n\cdot 3^n}$收敛；

又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$收敛，故级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin\frac{n\pi}{3}+(-3)^n}{n\cdot 3^n}$收敛 .

18. 分别写出 yoz 面上的椭圆$\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$ 及直线 $y=1$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面方程；写出两个曲面的交线在 xoy 面上的投影曲线方程；并求出该投影曲线所围闭区域内两个曲面所围封闭立体的体积 .

解：yoz 面上的椭圆$\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面方程：$\dfrac{x^2+y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1$ ………………1分；

yoz 面上的直线 $y=1$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转曲面方程：$x^2+y^2=1$ ………………………1分；

两个曲面的交线在 xoy 面上的投影曲线方程为$\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$ ……………………………………1分；

$\dfrac{x^2+y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}=1\Rightarrow z=\pm\dfrac{3}{2}\sqrt{4-x^2-y^2}$,记$D:x^2+y^2\le 1$.则

$V=2\iint\limits_{D}\frac{3}{2}\sqrt{4-x^2-y^2}dxdy=3\iint\limits_{D}\sqrt{4-x^2-y^2}dxdy=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{4-r^2}\cdot rdr$

$=3\cdot 2\pi\cdot\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(4-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\left(16-6\sqrt{3}\right)\pi$.……………………………………………………6分

19. 设a_n为曲线$y=x^n$与$y=x^{n+1}\left(n=1,2,\cdots\right)$所围成区域的面积，$\left(1\right)$求$a_n$的表达式 ；

$\left(2\right)\sum_{n=1}^{\infty}a_n$是否收敛，若收敛，求其和 ；$\left(3\right)$求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n+2}$的收敛半径、收敛域，并写出和函数 .

解：$\left(1\right)\ a_n=\int_0^1\left(x^n-x^{n+1}\right)dx=\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}=\frac{1}{\left(n+1\right)\cdot\left(n+2\right)}$;⋯3分

$\left(2\right)\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots=\frac{1}{2}$;⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯3 分

$\left(3\right)\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^{n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}x^{n+2}$，　　$R=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}}{\frac{1}{\left(n+2\right)\left(n+3\right)}}=1$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯1 分；

$x=1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}x^{n+2}$收敛；$x=-1$时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}$收敛，故收敛域$\left[-1,1\right]$⋯⋯⋯⋯1 分；

在$\left[-1,1\right]$上，记$S\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}x^{n+2}$，

则有$S'\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n+1\right)}x^{n+1}$，$S''\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$

$$S'\left(x\right)=S'\left(0\right)+\int_0^x\frac{t}{1-t}dt=\int_0^x\left(-1+\frac{1}{1-t}\right)dt=-x-\ln\left(1-x\right)$$

$$S\left(x\right)=S\left(0\right)+\int_0^x\left[-t-\ln\left(1-t\right)\right]dt=-\frac{1}{2}t^2\Big|_0^x-\left[t\ln\left(1-t\right)\Big|_0^x-\int_0^x td\ln\left(1-t\right)\right]$$

$=-\frac{1}{2}x^2-x\ln\left(1-x\right)-\int_0^x\frac{t}{1-t}dt=-\frac{1}{2}x^2-x\ln\left(1-x\right)+x+\ln\left(1-x\right)$⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯4分；