综合测试题 C 答案

一、选择题

1. B　2. C　3. A　4. D　5. A　6. B　7. D

二、填空题

8. $\frac{30}{91}$　　9. $\frac{1}{4}$　　10. 0.2；3　　11. $\frac{2}{3}$

12. 8；46　　13. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \end{bmatrix}$　　14. $\geq \frac{3}{4}$　　15. 0.5

三、计算题

16. 设 A_i ={任意取出一个零件是第 i 台机床生产的}，（i = 1, 2）

B={任意取出一个零件是合格品}

(1) $P(B)=\sum_{i=1}^{2}P(A_i)P(B|A_i)=\frac{2}{3}(1-0.03)+\frac{1}{3}(1-0.02)=0.973$

(2) $P(A_2|\overline{B})=\frac{P(A_2)P(\overline{B}|A_2)}{\sum_{i=1}^{2}P(A_i)P(\overline{B}|A_i)}=\frac{\frac{1}{3}\times 0.02}{\frac{2}{3}\times 0.03+\frac{1}{3}\times 0.02}=0.25$

17. 因为 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}, 2<x<5\\ 0,\end{cases}$，所以 $P\{X>3\}=\int_3^5 \frac{1}{3}dx=\frac{2}{3}.$

设 Y 表示 3 次独立观测中观测值大于 3 的次数，则 $Y \sim B(3,\frac{2}{3}).$

故所求概率 $P\{Y\geq 2\}=C_3^2(\frac{2}{3})^2(1-\frac{2}{3})+C_3^3(\frac{2}{3})^3(1-\frac{2}{3})^0=\frac{20}{27}.$

18. (1) $P\{X\geq 3\}=\int_3^{+\infty}f(x)dx=\int_3^{+\infty}\frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}dx=-e^{-\frac{1}{3}x}|_3^{+\infty}=e^{-1}$

(2) 解法一：由（1）知，一只元件在 3 年内停止工作的概率 $p=1-e^{-1}$

设 Y 为 3 年内损坏的元件的个数，则 $Y \sim B(5,1-e^{-1})$

故所求概率为 $P\{Y\geq 1\}=1-P\{Y=0\}=1-C_5^0p^0(1-p)^5=1-e^{-5}$

解法二：设事件 A=“仪器在 3 年内停止工作”，

A_i =“元件 i 能正常工作 3 年以上” (i =1, 2, 3, 4, 5)

则所求概率

$$P(A)=P(\bigcup_{i=1}^{5}\overline{A_i})=P(\overline{\bigcap_{i=1}^{5}A_i})=1-P(\bigcap_{i=1}^{5}A_i)=1-(e^{-1})^5=1-e^{-5}$$

19.（1）因为$\sum_i \sum_j p_{ij}=1$，所以 3a+0.7=1，得 $a=0.1$

Y \ X	0	1	2	P.j
0	0.1	0.25	0.15	0.5
1	0.15	0.2	0．15	0.5
Pi.	0.25	0.45	0.3	1

（2）

Z	−1	0	1
P	0.15	0.45	0.4

20. 记 X 和 Y 的分布函数分别为$F_X(x), F_Y(y)$，概率密度分别为 $f_X(x), f_Y(y)$。

已知 X 的概率密度为 $f_X(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{8}}, -\infty<x<+\infty$，

当 y≤0 时，$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=0,$

当 $y>0$时，

$$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(X^2\le y)=P(-\sqrt{y}\le X\le\sqrt{y})=F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y})$$

因此，

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y}}f_X(\sqrt{y})+\dfrac{1}{2\sqrt{y}}f_X(-\sqrt{y}), & y>0,\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{8}}, & y>0,\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

21.（1）$\int_0^1 \dfrac{c}{\sqrt{1-x^2}}dx=1$，得$c=\dfrac{2}{\pi}$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\begin{cases}0, & x<0\\ \dfrac{2}{\pi}\int_0^x \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\dfrac{2}{\pi}\arcsin x, & 0\le x<1\\ 1, & x\ge 1\end{cases}$$

（2）$E(X)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{2}{\pi}\int_0^1 d\sqrt{1-x^2}=\frac{2}{\pi}$

$E(X^2)=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{x^2-1+1}{\sqrt{1-x^2}}dx=-\frac{2}{\pi}\int_0^1 d\sqrt{1-x^2}+\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{2}$

$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}(or\,\frac{\pi^2-8}{2\pi^2})$

22.（1）(必要性)

因为 A,B 相互独立，所以 $P(AB)=P(A)P(B)$.

从而 $P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$,

$P(B|\overline{A})=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\frac{P(B)-P(A)P(B)}{1-P(A)}=\frac{P(B)(1-P(A))}{1-P(A)}=P(B)$.

故 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$.

(充分性)

$P(B|A)=P(B|\overline{A})\Rightarrow\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$

$\Rightarrow P(AB)[1-P(A)]=P(A)[P(B)-P(AB)]$

$\Rightarrow P(AB)-P(A)P(AB)=P(A)P(B)-P(A)P(AB)$

$\Rightarrow P(AB)=P(A)P(B)$

（2）因为 $f(x)$是偶函数，所以有$\int_{-\infty}^0 f(x)dx=0.5$，且有

$F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}f(x)dx=\int_a^{+\infty}f(x)dx=1-\int_{-\infty}^a f(x)dx=1-F(a)$

又 $F(a)=\int_{-\infty}^a f(x)dx=\int_{-\infty}^0 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx=0.5+\int_0^a f(x)dx$

故 $F(-a)=1-F(a)=0.5-\int_0^a f(x)dx$