1. $\begin{cases} A^T=-A \text{ (反对称阵)}. \\ \text{主对角线为0.} \\ \text{且}n\text{为奇数.} \end{cases}$

奇数阶反对称矩阵行列式为0.

(课推公式?)

第一章 行列式

一、填空选择

$D=adf\begin{vmatrix}-b&ce\\b&-ce\\b&c&-e\end{vmatrix}=abcdef\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

1. $D=\begin{vmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{vmatrix}=$ <u>0</u>, $D=\begin{vmatrix}-ab&ac&ae\\bd&-cd&de\\bf&cf&-ef\end{vmatrix}=$ <u>4abcdef</u>.

2. $|A|=\begin{vmatrix}1&2&2&2\\ [illegible]&[illegible]&[illegible]&[illegible]\\1&1&1&1\\1&0&2&2\end{vmatrix}$，则 $A_{21}+A_{22}+A_{23}+A_{24}=$ <u>0</u>，$M_{21}+M_{22}+M_{23}+M_{24}=$ <u>-4</u>.

$\cancel{(-1)^{2+1}M_{21}}$

$=A_{21}+A_{22}-A_{23}+A_{24}$.

$\begin{vmatrix}1&2&2&2\\1&1&1&1\\1&0&2&2\end{vmatrix}$ $\begin{vmatrix}1&2&2&2\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&0&2&2\end{vmatrix}$ $A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}$. $\begin{vmatrix}1&2&2&2\\-1&1&-1&1\\1&1&1&1\\1&0&2&2\end{vmatrix}$

(每行选一个，且不能是同列 $\begin{vmatrix}1&2&2\\2&1&1\\1&1&1\\1&2&2\end{vmatrix}$ 结后相乘).

3. 已知多项式 $f(x)=\begin{vmatrix}2x&x&-1\\1&-2x&1\\3&2&x\end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 中 x^3 的系数为 <u>-4</u>，常数项为 <u>-2</u>.

以最高项展开 —— 方程为三次方程

三次方程最多有三个根.

4. 方程 $\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&2&4&8\\1&-2&4&-8\\1&x&x^2&x^3\end{vmatrix}=0$ 的全部根为 <u>$x_1=2$，$x_2=-2$，$x_3=1$</u>.

系数矩阵行列式不为0.

5. $\lambda=$ <u>D</u> 时，线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1-x_2-x_3=1\\x_1+\lambda x_2+x_3=1\\-x_1+x_2+\lambda x_3=1\end{cases}$ 有唯一解？ $\begin{pmatrix}\lambda&-1&-1\\1&\lambda&1\\-1&1&\lambda\end{pmatrix}$

A. 0　　B. 1　　C. -1　　D. 异于0、1和-1的实数

二、计算题（$n\geq 2$）

6. $\begin{vmatrix}-2&5&-1&3\\1&-9&13&7\\3&-1&5&-5\\2&8&-7&-10\end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix}0&1&2&3\\1&2&3&4\\2&3&4&5\\3&4&5&6\end{vmatrix}$

7: $D\xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2}-\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\2&3&4&5\\3&4&5&6\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-2r_1}-\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&-1&-2&-3\\3&4&5&6\end{vmatrix}=0$

$=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}$

$=-2\begin{vmatrix}-9&13&7\\-1&5&-5\\8&-7&-10\end{vmatrix}-5\begin{vmatrix}1&13&7\\3&5&-5\\2&-7&-10\end{vmatrix}-1\begin{vmatrix}1&-9&7\\3&-1&-5\\2&8&-10\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}1&-9&13\\3&-1&5\\2&8&-7\end{vmatrix}$

$=32+210-52$

$=112$.

312

7. $=0-\begin{vmatrix}1&3&4\\2&4&5\\3&5&6\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1&2&4\\2&3&5\\3&4&6\end{vmatrix}+(-3)\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&4\\2&4&5\end{vmatrix}$

$=-24$.

0

8. $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$

$D=(ax+by)(az+by)(ay+bz)+$

$(ay+bz)(ax+by)(az+bx)+(az+bx)(ay+bz)(ax+by)$

$-(az+bx)(az+bx)(az+bx)-(ay+bz)^3-(ax+by)^3$

$=(a^3+b^3)[3xyz-z^3-x^3-y^3]$

9. $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$

$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}$

$=y^2(x^2-1)+y^2-xy+xy$

$=x^2y^2$

10. $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$

$D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{15}A_{15}$

$=a^4+a^2-2a+1$

11. $D_n=\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$

$D_n=a_{n1}A_{n1}+\cdots a_{nn}A_{nn}$

$=(-1)^{n+1}b\begin{vmatrix} b00 \\ ab00\cdots \\ \cdots \\ 000a \end{vmatrix}+a\begin{vmatrix} ab0 \\ 0a\cdot0 \\ \cdots \\ b00 \end{vmatrix}$

$=a^n+(-1)^{n+1}b$

8. $D=(a+b)(x+y+z)\begin{vmatrix} 1 & ay+bz & az+bx \\ 1 & az+bx & ax+by \\ 1 & ax+by & ay+bz \end{vmatrix}$

9. 法一：从倒数第二行开始每行×(-1)加到下一行

$D=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ -x & -x & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & -y & -y \end{vmatrix}$ 以各列展开

全部加至第一列

再从第一列×(-1)依次加到下一列化为三角行列式、

$$12.\ D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}$$

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1+a_2+\cdots a_n & a_2+\cdots a_n\\ 1+a_1+\cdots a_n & 1+a_2\cdots a_n\\ \vdots & \\ 1+a_1+\cdots a_n & a_2\cdots a_n+1\end{vmatrix}$$

$$=(1+a_1+a_2+\cdots a_n)\underbrace{1\cdot 1\cdot 1}_{n-1}$$

$$=1+a_1+a_2+\cdots+a_n$$

$$13.\ D_n=\begin{vmatrix}x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1\\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1\end{vmatrix}$$

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots a_{n1}A_{n1}$$

$$=x\begin{vmatrix}x & -1 & \cdots & 0\\ 0 & x & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \\ a_{n-1} & a_{n-2} & & x+a\end{vmatrix}+(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ x & -1 & \cdots & 0\\ 0 & x & \cdots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & -1\end{vmatrix}$$

$$=xD_{n-1}+(-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1}$$

$$14.\ \begin{vmatrix}a & & & & & b\\ & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \\ c & & & & & d\end{vmatrix}_{2n\times 2n}$$

$$D_n=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}+\cdots a_{2n}A_{2n}$$

$$=a\begin{vmatrix}a\cdots & a & \cdot\,b\\ & cd & \\ c & & d\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix}a & & b\\ & \begin{matrix}ab\\cd\end{matrix} & \\ c & & d\end{vmatrix}=a^{2n}+c^{2n}$$

A

一行乘=对应提取
一列乘=行提矩阵

$\begin{pmatrix}4\\12\\19\end{pmatrix}$

第二章 矩阵

$AB=(E-\alpha\alpha')(E+2\alpha'\alpha)=E(E+2\alpha\alpha')-\alpha\alpha'(E+2\alpha\alpha')$

一、选择填空

1. 若 A,B,C 为同阶方阵，且 A 可逆，则下列正确的是（ D ）

接置 $A\neq 0$

A. 若 $BA=BC$，则 $A=C$　　B. 若 $AB=CB$，则 $A=C$

C. 若 $AB=0$，则 $B=0$　　D. 若 $BC=0$，则 $C=0$

2. 设 n 维行向量 $\alpha=\left(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2}\right)$，$A=E-\alpha'\alpha, B=E+2\alpha'\alpha$，则 AB 等于（ C ）

A. 0　　B. -E　　C. E　　D. $E+\alpha'\alpha$

3. $\alpha=(1\ \ 2\ \ 3)$，$\beta=\left(1\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{3}\right)$，$A=\alpha'\beta$，则 $A^n=$ $3^{n-1}\alpha^T\beta$.

4. 若矩阵 A,B 满足 $A^{-1}BA=6A+BA$，且 $A=\begin{bmatrix}1/3&0&2\\0&1/4&0\\2&0&1/5\end{bmatrix}$，则 $B=$______.

$A^2-A=2E$.
$\frac{1}{2}A(A-E)=E$
$A^{-1}=\frac{1}{2}(A-E)$

5. 设矩阵 A 满足关系式 $A^2-A-2E=0$，则 $A^{-1}=$ $\frac{1}{2}(A-E)$，$(A+2E)^{-1}=$ $\frac{1}{4}(3E-A)$.

$AA^*=|A|E$.
$|AA^*|=||A|E|$.
$|A||A^*|=|A|^n|E|$.
$|A^*|=|A|^{n-1}$

6. 已知 4 阶方阵 A 的行列式 $|A|=2$，则 $R(A)=$ 4，$|2A'|=$ 32 ($2^4|A|$)，

$|2A^{-1}|=$ 8，$|2A^*|=$ $2^4|A|^{4-1}$ $=128$，$\left|(\frac{1}{4}A)^{-1}-A^*\right|=$ $|2A^{-1}|$ $=2^4|A^{-1}|=8$.

7. 设 A,B 为 n 阶方阵，$|A|=2$，$|B|=-3$，则 $|A^{-1}B^*-A^*B^{-1}|=$ $-\frac{(-5)^n}{6}$.

$=|A^{-1}|B|B^{-1}-|A|A^{-1}B^{-1}|=|-5A^{-1}B^{-1}|=(-5)^n|A^{-1}B^{-1}|$
$=(-5)^n|A^{-1}||B^{-1}|$
$=(-5)^n\frac{1}{|A|}\frac{1}{|B|}$
$=-\frac{(-5)^n}{6}$

8. 设 $A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\vdots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1n}\\\vdots&\vdots&\vdots\\A_{n1}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}$ 则下列正确的是（ C ）

$\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{n1}\\\vdots&&\\a_{1n}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}$

A. A 是 B 的伴随矩阵　　B. B 是 A 的伴随矩阵

C. B 是 A' 的伴随矩阵　　D. B 不是 A' 的伴随矩阵

9. 若矩阵 $A=\begin{pmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\1&1&k&1\\1&1&1&k\end{pmatrix}$ 的秩为 3，则 $k=$ -3.

技小于阶数.

行列式为0.

4. A^{-1}.
$(A\vdots E)\xrightarrow{行}(E\vdots A^{-1})$
求 $A^{-1}B$
$(A\vdots B)\xrightarrow{行}(E\vdots A^{-1}B)$

*没有特别说明, E 或 I 为单位矩阵.

$A=\begin{bmatrix}k&1&1&1\\1&k&1&1\\0&1-k&k-1&0\\0&0&1-k&k-1\end{bmatrix}$　$\begin{pmatrix}k+3&1&1&1\\k+3&k&1&1\\k+3&1&k&1\\k+3&1&1&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k+3&1&1&1\\0&k-1&0&0\\0&0&k-1&0\\0&0&0&k-1\end{pmatrix}$　$k=-3$.

二、计算证明

10. 设 A,B 为同阶方阵，$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$, $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$ 是否成立？何时成立？

$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$ ①

解：

由已知得 $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ ②

①-② $0=BA-AB$

$\therefore AB=BA$.

(能化简前先化简)

11. 设三阶方阵 A,B 满足 $AB=2A+B$，其中 $A=\begin{pmatrix}4&2&3\\1&1&0\\-1&2&3\end{pmatrix}$，求 B.

解：

$AB=2A+B$. $(A-E)B=2A$.

$B=2(A-E)^{-1}A$.

提公因子

$A-E=\begin{pmatrix}3&2&3\\1&0&0\\-1&2&2\end{pmatrix}$

$(A-E \vdots E)\longrightarrow(E \vdots (A-E)^{-1})$

$\begin{pmatrix}3&2&3&\vdots&1&0&0\\1&0&0&\vdots&0&1&0\\-1&2&2&\vdots&0&0&1\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}3&2&3&\vdots&1&0&0\\1&0&0&\vdots&0&1&0\\-1&2&2&\vdots&0&0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}3&2&3&\vdots&1&0&0\\1&0&0&\vdots&0&1&0\\0&2&2&\vdots&0&1&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&0&1&0\\0&2&2&\vdots&0&0&1\\3&2&3&\vdots&1&0&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&0&1&0\\0&2&2&\vdots&0&0&1\\0&2&3&\vdots&1&-3&0\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&0&0&\vdots&0&1&0\\0&2&2&\vdots&0&0&1\\0&0&1&\vdots&1&-3&-1\end{pmatrix}$

A不一定是方阵.

12. 证明：对任意方阵 B 有 $AB=B$，则 $A=E$；对任意的 $X_{n\times1}$ 有 $AX=0$，则 $A=0$.

解：(1) $AB=B$.

取B为可逆阵. 右乘 B^{-1}.

$A=E$.

$AB=B$

$A=B\cdot B^{-1}=E$

(2). 取 $X=\underset{X_1}{\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}}\ \underset{X_2}{(0\,1\,0\cdots0)}\ \cdots\ \underset{X_n}{\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}}$

(2). $X_j=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}_j$. $\therefore AX_j=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{ij}\\\vdots\\a_{nj}\end{pmatrix}=0$. $\therefore$ A的第j列全为0.

取 $X=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$.

$\therefore$ A为零矩阵.

14. 设 $A = I_n - \alpha\alpha'$，α 是 $n\times 1$ 的非零矩阵，证明：$A^2 = A$ 的充要条件是 $\alpha'\alpha = 1$；当 $\alpha'\alpha = 1$ 时，A 是不可逆的.

解：① $A^2=(I_n-\alpha\alpha^T)^2=(I_n-\alpha\alpha^T)(I_n-\alpha\alpha')$

$=I_n-2\alpha\alpha'+\alpha\alpha'\alpha\alpha'$

$=I_n-2\alpha\alpha'+(\alpha'\alpha)(\alpha\alpha')$

$=I_n-(2-\alpha'\alpha)\alpha\alpha'$.

$b\neq 0$. $*\ ab=0 \Rightarrow a=0$

$A^2=A \Leftrightarrow I_n-(2-\alpha'\alpha)\alpha\alpha'=I_n-\alpha\alpha'$

$\Leftrightarrow (1-\alpha'\alpha)\alpha\alpha'=0$. $\alpha\alpha'$非零.

$\Leftrightarrow \therefore \alpha\alpha'=1$

② 当$\alpha\alpha'=1$时，$A^2=A$

假设A可逆，左乘A^{-1}得 $A=AI_n$

又$\because A=I_n-\alpha\alpha'$

$\alpha\alpha'=0$ 求得 $\alpha=0$ 与α非零矛盾.

15. 设 A 与 B 为 n 阶对称矩阵，证明：$AB=BA$ 当且仅当 AB 为对称矩阵.

解：$\because A$, B为对称矩阵

$\therefore BA=B^TA^T=(AB)^T$

$\because BA=AB$

$\therefore (AB)^T=AB$

$\therefore AB$为对称矩阵

$(AB)^T=$

16. 设 A 与 B 均为可逆矩阵，计算 $X=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0\end{pmatrix}$（左乘），$Z=\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & C\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.（待定系数法）一般.

解：$(A \mid E) \xrightarrow{\text{行}} (E \mid A^{-1})$

$A^{-1}(A \mid E)$

$(X \mid E)=\left(\begin{matrix} A & 0 \\ 0 & B\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} E & 0 \\ 0 & E\end{matrix}\right)$

$\xrightarrow[B^{-1}r_2]{A^{-1}r_1} \left(\begin{matrix} E & 0 \\ 0 & E\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1}\end{matrix}\right)$

$(Y \mid E)=\left(\begin{matrix} 0 & A \\ B & 0\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} E & 0 \\ 0 & E\end{matrix}\right)$

$\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2} \left(\begin{matrix} B & 0 \\ 0 & A\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 & E \\ E & 0\end{matrix}\right)$

$\xrightarrow[A^{-1}r_2]{B^{-1}r_1} \left(\begin{matrix} E & 0 \\ 0 & E\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0\end{matrix}\right)$

$(Z \mid E)=\left(\begin{matrix} 0 & A \\ B & C\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} E & 0 \\ 0 & E\end{matrix}\right) \xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}$

$\left(\begin{matrix} B & C \\ 0 & A\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 & E \\ E & 0\end{matrix}\right) \xrightarrow[A^{-1}r_2]{B^{-1}r_1} \left(\begin{matrix} E & B^{-1}C \\ 0 & E\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0\end{matrix}\right)$

$\xrightarrow{r_1 - B^{-1}Cr_2} \left(\begin{matrix} E & 0 \\ 0 & E\end{matrix} \;\middle|\; \begin{matrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & 0\end{matrix}\right)$

17.设 $A_{3\times3}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，$B=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$. 若 $|A|=1$，求 $|B|$.

$$B=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{pmatrix}=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3,\ \alpha_1+3\alpha_2+9\alpha_3)$$

$|AB|=|A||B|$.

$$|B|=|\alpha_1\alpha_2\alpha_3|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=|A|\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\gamma_3-\gamma_1]{\gamma_2-\gamma_1}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&3&8\end{vmatrix}\xlongequal{\gamma_3-3\gamma_2}\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&0&2\end{vmatrix}=2.$$

18.设 $A_{4\times4}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$B=(\alpha_3,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_1)$，$C=A+B$. 若 $|A|=2$，求 $|C|$.

$$C=A+B=(\alpha_1+\alpha_3,\ 2\alpha_2,\ \alpha_3+\alpha_4,\ \alpha_4+\alpha_1)$$

$$=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&2&0&0\\1&0&1&0\\0&0&1&1\end{vmatrix}$$

$=8.$

19.设 n 阶方阵 A 满足 $AA'=E$，$|A|<0$，求 $|A+E|$.

解：

$$|A+E|=|A+AA^T|=|A||E+A^T|$$

$$=|A||(E+A)^T|=|A||E+A|=|A||A+E|$$

$(|A|-1)|A+E|=0$

$\because |A|<0$，$|A|-1\neq0$

$|A+E|=0$

A

第三章　向量的线性相关性

$\begin{pmatrix} 14 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}$

$A\alpha = \begin{pmatrix} b \\ 2b+3 \\ 3b+4 \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

一、填空题

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \alpha=\begin{pmatrix} b \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，$A\alpha$ 与 α 线性相关，则 $b=$ 1 .

都写成列向量

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & t \end{vmatrix}=0$　$t=5$

2. 设 $\alpha_1=(1,1,1), \alpha_2=(1,2,3), \alpha_3=(1,3,t)$，则 $t=$______时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关.

3. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2, \beta_2=\alpha_2+\alpha_3, \beta_3=\alpha_3+k\alpha_1$，则 $k=$ $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix}=0$ 时 β_1,β_2,β_3 线性相关.

$(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$　$-\frac{1}{2}$

4. 已 知 $\alpha_1=(1,1,2,2,1), \alpha_2=(0,2,1,5,-1), \alpha_3=(2,0,3,-1,3), \alpha_4=(1,1,0,4,-1)$, 则

如何求向量组的秩.

$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=$ 3 .

$(\alpha_1^T\alpha_2^T\alpha_3^T\alpha_4^T)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

二、选择题

5. 下列向量组线性无关的是（D）

A: $\alpha_1=(0,1,0), \alpha_2=(1,0,0), \alpha_3=(0,0,0)$ 有0向量.

n+1个n为向量必线性相关

B: $\alpha_1=(0,1,0), \alpha_2=(1,1,-1), \alpha_3=(-1,1,1), \alpha_4=(1,-1,1)$

n个n维向量若行列式为零 则线性相关

C: $\alpha_1=(1,-2,1), \alpha_2=(2,1,1), \alpha_3=(1,-2,1)$

D: $\alpha_1=(2,-1,1), \alpha_2=(0,1,2), \alpha_3=(-2,1,1)$　行列式

6. 已知n维向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$（$\alpha_1\neq0$）线性相关，则下列说法正确的是（C）

A: 对于~~任意~~存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 都有 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$

B: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意两个向量都线性相关　整体线性相关不能推出部分线性相关

C: 存在一组不全为零的数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0$

D: 向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中~~任意~~至少有一个向量都可由其余向量线性表示

7. 向量 β 可由向量组 $\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_m$ 线性表示，不能由向量组 I：$\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_{m-1}$ 线性表示.

记向量组 II：$\alpha_1,\alpha_2\dots,\alpha_{m-1},\beta$，则下列正确的是（ B　若 α_m 可由 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_{m-1}$ 线性表示.

A：α_m 不能由 I 线性表示，也不能由 II 线性表示　① $\alpha_m=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots k_{m-1}\alpha_{m-1}$.

B：α_m 不能由 I 线性表示，但能由 II 线性表示

~~C：~~ α_m 可由 I 线性表示，也可由 II 线性表示　$\beta=\alpha$

~~D：~~ α_m 可由 I 线性表示，但不能由 II 线性表示　② $\beta=k\alpha_1+k\alpha_2+\dots\dots k_{m-1}\alpha_{m-1}+k_m\alpha_m$

8．下面命题正确的是（ C　　断言 $k_m\neq0$、事实若 $k_m=0$、与条件矛盾.

A：任何向量组都有极大无关组　零向量组　$k_m\alpha_m=-(k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots\dots k_{m-1}\alpha_{m-1})+\beta$.

B：等价向量组包含的向量个数相等　秩相等.

C：向量组的任何极大无关组与向量组本身等价

D：矩阵的行、列向量组等价　可以相互线性表示，（只能说矩阵的行、列向量组秩相同）

9．若向量组 $\alpha_1,\alpha_2\dots,\alpha_n$ 的秩为 r，则下列正确的是（ D

~~A：必定 r < n~~　0 向量　　~~B：~~ 任意小于 r 个的部分组线性无关

C：向量组中任意 r 个向量线性无关　D：向量组中任意 r+1 个向量线性相关　定义

10．已知 $\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\ \alpha_3=(3,0,7,14),\ \alpha_4=(1,-2,2,0)$,　任意行初等变换

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 14 & 0 & 10 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$\alpha_5=(2,1,5,10)$，则该向量组的极大无关组为（ B

A：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　B：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$　　C：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_5$　　D：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4,\alpha_5$

三、计算证明

11．证明：向量组 $\alpha_1=(1,2,1),\alpha_2=(0,3,2)$ 与 $\beta_1=(-1,1,1),\beta_2=(2,1,0)$ 等价.

证明：　（α 可用 β 表示　β 可用 α 表示）即可也明等价

$\alpha_1=\beta_1+\beta_2$.

$\alpha_2=2\beta_1+\beta_2$

$\beta_1=\alpha_2-\alpha_1$

$\beta_2=2\alpha_1-\alpha_2$　等价.

12. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，$\beta_1=p\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,\beta_2=\alpha_1+t\alpha_2+2t\alpha_3$，

$\beta_3=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$. 问 p,t 为何值时 β_1,β_2,β_3 线性相关？ → 存在组不全为零的数 $k_1,k_2\ldots k_s$

使得 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+\ldots+k_s\beta_s=0$

$\Leftrightarrow x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=0$ 有非零解.

$\Leftrightarrow x=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix}\neq 0$.

证明：设 α_1,β_1 均为列向量

$\therefore \begin{cases} px_1+x_2+x_3=0 \\ x_1+tx_2+x_3=0 \\ x_1+2tx_2+x_3=0 \\ (\text{行列式等于}0) \end{cases}$ 有非零解 则 $(\beta_1\beta_2\beta_3)=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\begin{pmatrix}p&1&1\\1&t&1\\1&2t&1\end{pmatrix}$

$B=A\cdot H$ 若 H 为可逆阵. 则 $R(B)=R(A)$ 整理 $(px_1+x_2+x_3)\alpha_1+(x_1+tx_2+x_3)\alpha_2+(x_1+2tx_2+x_3)\alpha_3=0$ 线性无关

$R(A)=3$ 要使 $\beta_1\beta_2\beta_3$ 相关 即 $R(B)<3$. 则必有 H 不可逆. $|H|=0$.

$\begin{vmatrix}p&1&1\\1&t&1\\1&2t&1\end{vmatrix}=0$

13. 设三阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 的列向量组线性无关，且 $A\alpha_1=\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$，

$A\alpha_2=\alpha_1+\alpha_2$，$A\alpha_3=\alpha_2+2\alpha_3$，求 $|A|$.

矩阵的列是线性无关的 则矩阵为可逆矩阵

$(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)=(\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+2\alpha_3)$

$\therefore A(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\2&1&1\\1&0&2\end{pmatrix}$

即 $A^2=A\cdot H$ A 可逆 $\therefore A=H$.

$|A|=|H|=\begin{vmatrix}1&1&0\\2&1&1\\1&0&2\end{vmatrix}=-1$.

14. $\alpha_1=(1+a,1,1,1)',\alpha_2=(2,2+a,2,2)',\alpha_3=(3,3,3+a,3)',\alpha_4=(4,4,4,4+a)'$

(1)问 $a=?$ 时 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关. 行列式等于0 (中间过程有疑)

$\alpha_1=(1,1,1,1)$ $\alpha_2=2\alpha_1$ $\alpha_3=3\alpha_1$ $\alpha_4=4\alpha_1$ ∴

(2)当 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关时求秩和一个极大无关组，并将其余向量用该极大线性无关组表示.

(1) $D=\begin{vmatrix}1+a&1&1&1\\2&2+a&2&2\\3&3&3+a&3\\4&4&4&4+a\end{vmatrix}\neq 0$ 时、$\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 无关

$D=\begin{vmatrix}1+a&1&1&1\\2&2+a&2&2\\3&3&3+a&3\\10+a&10+a&10+a&10+a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a&0&0&1\\0&a&0&2\\0&0&a&3\\0&0&0&10+a\end{vmatrix}=a^3(10+a)$

$\therefore a=0$ 或 $a=-10$ 时. $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$ 线性相关

(2). 当 $a=0$ 时. 显然 $R(\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4)=1$

α_1 为其中一个极大无关组

$\alpha_i=i\alpha_1$ $i=2,3,4$.

当 $a=-10$ 时

$\begin{pmatrix}-9&1&1&1\\2&-8&2&2\\3&3&-7&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 而 $\begin{vmatrix}-9&1&1\\2&-8&2\\3&3&-7\end{vmatrix}\neq 0$

$\therefore \alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 构成 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$

极大无关组.

又 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0$

$\therefore \alpha_4=-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3$

$A=\begin{pmatrix}-9&2&3&4\\1&-8&3&4\\1&2&-7&4\\1&2&3&-6\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}1&2&3&-6\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

秩：$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha_4$

$x_1\begin{pmatrix}-9\\1\\1\\1\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}2\\-8\\2\\2\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}3\\3\\-7\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\4\\-6\end{pmatrix}$

$\tilde{A}=A$.

15. A 为 n 阶矩阵，α 为 n 维列向量，$A^{m-1}\alpha \neq 0, A^m\alpha = 0$，证明: $\alpha, A\alpha, \cdots, A^{m-1}\alpha$ 线性无关.

解：$k_1\alpha + k_2A^2\alpha + \cdots k_mA^{m-1}\alpha = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = 0$

设 $k_0\alpha + k_1A\alpha + k_2A^2\alpha + \cdots k_{m-1}A^{m-1}\alpha = 0$

$\alpha(k_1 + k_2A + \cdots k_mA^{m-1}) = 0$

$\because A^{m-1}\alpha \neq 0$

$A^m\alpha = 0$

$\alpha \neq 0 \quad \therefore k_1 + k_2A + \cdots k_mA^{m-1} = 0$

$A^{m+1}\alpha = A(A^m\alpha) = 0$

$A^{m+i}\alpha = 0, \ i = 1, 2, \ldots$ 左乘 A^{m-1}.

$A^{m-1}(k_0\alpha + \cdots k_{m-1}A^{m-1}\alpha) = A^{m-1} \cdot 0 = 0$

$k_0A^{m-1}\alpha + k_1A^m\alpha + \cdots k_{m-1}A^{2m-2}\alpha = 0$, $\cdot \ k_0A^{m-1}\alpha = 0$

16. 已知 $\alpha_1 = (1,2,0), \alpha_2 = (1, a+2, -3a), \alpha_3 = (-1, -b-2, a+2b), \beta = (1,3,-3)$，

$\therefore k_0 = 0$

试讨论当 a, b 为何值时，

左乘 A^{m-2}

（1）β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

优（2）β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 唯一地线性表示，并求出表达式. 系数行列式不等于0时.

（3）β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示，但表达式不唯一，并求出表达式.

设 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 = \beta$. 则 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + (a+2)x_2 - (b+2)x_3 = 3 \\ -3ax_2 + (a+2b)x_3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & a+2 & -b-2 \\ 0 & -3a & a+2b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$

$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & a+2 & -b-2 & 3 \\ 0 & -3a & a+2b & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & -b & 1 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

由此可见，当 $a \neq 0$ 且 $a \neq b$ 时. 此时有唯一解，且 β 由 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 唯一地表示.

当 $a = b$ 时，此时 $\begin{cases} \text{当 } a = 0 \text{ 时. } R(A) = 1, \ R(AB) = 2 \text{ 此时 } \beta \text{ 不能由 } \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \text{ 表示} \\ \text{当 } a \neq 0 \text{ 时. } R(A) = R(AB) = 2 < 3 \ \ \beta \text{ 可由 } \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \text{ 表示但表示不唯一} \end{cases}$

当 $a \neq b$ 时，$(A|b) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ $\therefore a = 0$ 时. $R(A) = 2$. $R(A|b) = 3$

β 不能由 $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ 线性表示

☆ 1. 齐次线性方程组有非零解，行列式=0

7. 11 12.

第四章　线性方程组

一、填空选择

系数行列式等于0

1. 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 有非零解，则 $\lambda=$ 1或-2

2. 方程组 $\begin{cases}x_1 \quad -2x_3=t\\ x_2+x_3=0\\ x_1+2x_2=1\end{cases}$ 有解的充分必要条件是 $t=1$

$\begin{pmatrix}1&0&-2&t\\0&1&1&0\\1&2&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_1}\begin{pmatrix}1&0&-2&t\\0&1&1&0\\0&2&2&1-t\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&t\\0&1&1&0\\0&0&0&1-t\end{pmatrix}$

系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩. $1-t=0$, $t=1$

有解的充要条件是系数矩阵的秩等于增广矩阵的秩 $R(A)=R(\tilde{A})$

3. 当 $a=$ 1 时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_2+x_3=4\\ x_1+ax_2+x_3=3\\ x_1+2x_2-x_3=4\end{cases}$ 无解

有解的充要条件.

$\begin{pmatrix}1&1&1&4\\1&a&1&3\\1&2&-1&4\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&1&4\\0&a-1&0&-1\\0&1&-2&0\end{pmatrix}$

$=b$

$a=1$ 时无解.

☆ 4. 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 及 $\lambda_1\eta_1+\lambda_2\eta_2+\cdots+\lambda_t\eta_t$ 都是 $AX=b(b\neq0)$ 的解向量，则

$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_t=$ 1 结论？

A定为零矩阵

居然出题 ☆ 5. 设任意一 n 个维向量都是齐次线性方程组 $AX=0$ 的解向量，则 $r(A)=$ 0

有解

6. 设 $AX=b$ 有 n 个未知量，m 个方程，$r(A)=r(\tilde{A})=r$，$\tilde{A}$ 为 A 的增广矩阵，则(B)

A：$r=m$ 时方程组有唯一解　　B：$r=n$ 时方程组有唯一解

C：$m=n$ 时方程组有解　　D：$r\geq m$ 时方程组有无穷多解

$r>n$ 无解
$r<n$ 无穷多解

非齐次线性方程组

☆ 7. 已知 β_1,β_2 是 $AX=b$ 的两个不同的解，α_1,α_2 是齐次方程组 $AX=0$ 的基础解系，k_1,k_2 是任意常数，则 $AX=b$ 的通解是（ B ）

$\begin{cases}\varepsilon\\ \beta_1-\beta_2 \text{ 是其导出组 } AX=0 \text{ 的解}\end{cases}$?

$\alpha_1\alpha_2$ 是基础解系

$(\alpha_1\ \alpha_1+\alpha_2)=(\alpha_1\alpha_2)\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ 可逆

通解: $x=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots k_{n-r}\varepsilon_{n-r}+\eta^*$

A：$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　B：$k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$

$(\alpha_1\ \alpha_1-\alpha_2)=(\alpha_1\alpha_2)\begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix}$ 可逆

求特解: $\eta=\beta_1$ 或 β_2

C：$k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}$　　D：$k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)+\dfrac{\beta_1+\beta_2}{2}$ $1-0$

$\varepsilon=\beta_1-\beta_2$.

$\dfrac{\beta_1-\beta_2}{2}+\eta$.

8. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是齐次方程组 $AX=0$ 的基础解系，那么基础解系还可以是（ B ）

个数 线性

A：$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$ 1个　　B：$\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$

$1+0+1-0-0-1=1$.

C：$\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3$ 2个　　D：$\alpha_1,\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_2$

基础解系可以是多个

$(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ (可逆)

$r=3$　$r=3$　$1+1=2$

$(\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3+\alpha_1)=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ 可逆

$R=3$　$R=3$

$(\alpha_1\ \ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3,\ \alpha_3-\alpha_2)=(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$ 不可逆

二、计算证明

9. 解线性方程组（1）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ 3x_1+2x_2+x_3=2 \\ x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+2x_4=4 \end{cases}$ 无解 和（2）$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4=1 \\ 2x_1+x_2+x_3-4x_4=1 \\ 4x_1+2x_2+x_3-2x_4=3 \end{cases}$

一般解

解：1. $\left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&0 \\ 3&2&1&0&2 \\ 0&1&2&3&1 \\ 5&4&3&2&4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4-2r_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&0 \\ 3&2&1&0&2 \\ 0&1&2&3&1 \\ 3&2&1&0&4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_4-r_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1&1&1&1&0 \\ 3&2&1&0&2 \\ 0&1&2&3&1 \\ 0&0&0&0&4 \end{array}\right) \Rightarrow R(A)=3\neq R(\tilde{A})$

$\Rightarrow$ 无解

2. $\left(\begin{array}{cccc|c} 2&1&-1&-1&1 \\ 2&1&1&-4&1 \\ 4&2&1&-2&3 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2&1&-1&-1&1 \\ 0&0&3&0&1 \\ 0&0&0&3&-\frac{2}{3} \end{array}\right) \Rightarrow R(A)=R(\tilde{A})=3$ 有唯一解.

可知. $x_3=\frac{1}{3}$, $x_4=\frac{2}{9}$.

$\Rightarrow$. $2x_1+x_2-\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=1$. 令 $x_1=k$. $x_2=\frac{14}{9}-2k \Rightarrow x=(k,\frac{14}{9}-2k,\frac{1}{3},\frac{2}{9})$

~~10.~~ λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3 \\ x_1+\lambda x_2+x_3=-2 \\ x_1+x_2+\lambda x_3=-2 \end{cases}$（1）无解；（2）有唯一解；

（3）有无穷多解，并且求出此时的通解. 〔方阵〕 Cramer

(1) 解：(1). $|A|\neq 0$ $\lambda\neq 1$ 或 -2.

(2). ① $\lambda=1$ 无穷. $x_1+x_2+x_3=-2$.

② $\lambda=-2$ 无解.

法二. $\tilde{A}=(A\,\vdots\,b)\xrightarrow{\text{行}}\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&\lambda&-2 \\ 0&\lambda-1&1-\lambda&0 \\ 0&0&\cdot&3\lambda-3 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda&1&1&\lambda-3 \\ 1&\lambda&1&-2 \\ 1&1&\lambda&-2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&\lambda&-2 \\ 0&\lambda-1&1-\lambda&0 \\ 0&0&(\lambda+2)(1-\lambda)&3(\lambda-1) \end{array}\right)$.

1° 当 $(\lambda+2)(1-\lambda)=0$ 且 $3(\lambda-1)\neq 0$ 即 $\lambda=-2$ 时. $R(A)\neq R(\tilde{A})$ 故无解.

2° $(\lambda+2)(1-\lambda)=3(\lambda-1)\neq 0$ 时. 即 $\lambda\neq -2$ 且 $\lambda\neq 1$ 时. $R(A)=R(\tilde{A})=3$. $\Rightarrow$ 有唯一解.

3°. $(\lambda+2)(1-\lambda)=0$ 且 $3(\lambda-1)=0$. 即 $\lambda=1$ 时. $R(A)=R(\tilde{A})=2$

$\Rightarrow$ 有无穷解. $\Rightarrow R(\tilde{A})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&-2 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{array}\right)$

$\Rightarrow$. $x_1+x_2+x_3=-2$ 即令 $x_2=k_1$, $x_3=k_2$

$\Rightarrow x_1=-(2+k_1+k_2)$ 取 $\binom{x_2}{x_3}$ 为 $\binom{0}{0}$ $\Rightarrow$ 特解 $\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}$ 对自由未知量 $\binom{x_2}{x_3}$ 取 $\binom{1}{0}$ $\binom{0}{1}$ $\Rightarrow$ 基础解系

$\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\xi_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ 通解 $x=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

?

11. 已知方程组 $AX=b$ 的三个解是 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$，且 $\varepsilon_1=(1,2,3,4)'$，$\varepsilon_2+\varepsilon_3=(3,5,7,9)'$，$r(A)=3$，求该方程组的通解. 求未知量的个数 $=4$.

解：可知 $n=4>R(A)=3$.

$\Rightarrow$ 该方程组有无穷多解.

设 $\eta=2\varepsilon_1-(\varepsilon_2+\varepsilon_3)=\begin{pmatrix}2\\4\\6\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\5\\7\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ 可知 η 为 $Ax=0$ 的一个解. 可知 $Ax=b$ 的导出组 $Ax=0$ 有 $n-R(A)=1$ 个基础解系.

$r(A)=3$.

$Ax=0$ 的基础解系个数 $=1$.

$A\varepsilon_1=b$. $A\varepsilon_2=b$ $A\varepsilon_3=b$

$A\left((\varepsilon_2+\varepsilon_3)-2\varepsilon_1\right)=0$.

$\eta=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\neq\vec{0}$

$\Rightarrow$ η 是 $Ax=0$ 的基础解系.

$\Rightarrow$ $Ax=b$ 通解为

$x=k\eta+\varepsilon_1$

$=k\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$ k 为任意常数

12. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 是非齐次线性方程组 $A_{m\times n}X=b$ 的两个不同解，η 是对应齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个非零解.

证明：（1）$\varepsilon_1,\varepsilon_1-\varepsilon_2$ 线性无关（2）若 $R(A)=n-1$，则 $\eta,\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 线性相关

(1). ε_1 ε_2 是非齐次线性方程组 $A_{m\times n}X=b$ 的两个不同解.

$\Rightarrow$ $\varepsilon_1-\varepsilon_2$ 是其对应导出组 $AX=0$ 的解.

$\Rightarrow$ $A(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=0$

设存在 k_1k_2，使 $k_1\varepsilon_1+k_2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=0$.

$\Rightarrow$ $A[k_1\varepsilon_1+k_2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)]=0$.

$A\,k_2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=k_2\cdot 0=0$.

$\Rightarrow$ $\left.\begin{matrix}Ak_1\varepsilon_1=0\\ A\varepsilon_1=b\neq 0\end{matrix}\right\}\Rightarrow \begin{matrix}k_1=0\\ A\neq 0\end{matrix}$

$\Rightarrow$ $k_2(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=0$

$\therefore k_2=0$.

$\therefore \varepsilon_1,\varepsilon_1-\varepsilon_2$ 线性无关.

(2). $R(A)=n-1$

$\Rightarrow$ $Ax=0$ 的基础解系所含解的个数为 1

$A\eta=0$

且 $A(\varepsilon_1-\varepsilon_2)=0$

$\Rightarrow$ $\eta=k(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$ 且 $k\neq 0$.

$\Rightarrow$ $k\varepsilon_1-k\varepsilon_2-\eta=0$

$\Rightarrow$ $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\eta$ 线性相关.

A

4. 设 $x_1 x_2 x_3 x_4$. $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=0$. $\begin{pmatrix}1&1&-1&1\\1&-1&-1&1\\2&1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

单位化.

第五章　　特征值、特征向量及二次型

$Ax=\lambda x$　　$\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}-4\\0\\-1\\3\end{pmatrix}$

一、填空题

$A^{-1}Ax=A^{-1}(\lambda x)$.　$x=\lambda A^{-1}x$.

1. 设 λ 阶 n 可逆矩阵 A 的一个特征值，则 A^{-1} 的一个特征值为 $\frac{1}{\lambda}$，A^{*} 的一个特征值为 $\frac{|A|}{\lambda}$，A^{m} 的一个特征值为 λ^{m}.

$Ax=\lambda x$　$A^{*}Ax=A^{*}\lambda x$

2. 设3阶方阵A的特征值为 $\lambda_1=-1,\lambda_2=\lambda_3=2$，则 A^{-1} 特征值为 $-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$，$A^{*}$ 的特征值为 $-4,-2,4$，$(A-I)^2$ 的特征值为 $4, 1, 1$.　$|A|Ex=\lambda A^{*}x$

3. $A^2=I$，则 A 的特征值为 ± 1；$A^2-3A-4I=0$，则 A 的特征值为 4和-1.

4. 在 R^4 中与向量 $(1,1,-1,1)'$，$(1,-1,-1,1)'$，$(2,1,1,3)'$ 都正交的一个单位向量为 $\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}4\\0\\1\\-3\end{pmatrix}$.

5. λ 范围为 $(-2,1)$ 时 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2+2\lambda x_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$ 正定.　$A=\begin{pmatrix}1&\lambda&-1\\\lambda&4&2\\-1&2&4\end{pmatrix}$

t 范围为 $(-\infty,-1)$ 时 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=tx_1^2+tx_2^2+tx_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$ 负定.

$B=\begin{pmatrix}t&1&1\\1&t&-1\\1&-1&t\end{pmatrix}$　$t<0$，$t^2-1>0$，三阶<0

二、选择题

可逆阵特征值不能为0.

相似矩阵具有相同特征值.　相似矩阵.

6. 方阵 $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 2\end{bmatrix}$ 相似于矩阵（ C ）

A: $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & -2\end{bmatrix}$　　B: $\begin{bmatrix}1 & 1\\2 & 2\end{bmatrix}$ $|B|=0$　　C: $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$　　D: $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$

$|D|=1$

$A\sim B \Leftrightarrow$ ∃可逆阵P. st. $P^{-1}AP=B$.

$\Rightarrow$ 性质: ① $|A-\lambda E|=|B-\lambda E|$　② 特征值相同　$|A|=|B|$　$\operatorname{tr}A=\operatorname{tr}B$

7. 实二次型 $f=X^{T}AX$ 正定的充要条件是（ A ）

A：对任意的 $X\neq 0$，有 $X'AX>0$　　B：$|A|>0$ 非充要. $\begin{vmatrix}-1&0\\0&-1\end{vmatrix}$

C：存在n阶矩阵C使得 $A=C'C$　　D：A的所有顺序主子式大于零

8. n阶方阵 A 具有 n 个不同的特征值是 A 与对角阵相似的(B)　$A=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$ 对角化.

A：充分必要条件　　B：充分而非必要条件

C：必要而非充分条件　　D：既非充分条件而非必要条件

$P^{-1}AP=\Lambda$.　$P=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{pmatrix}$　特征向量组成

9. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 4\\1 & x & 2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 的特征值为 0，1，2，则 $x=$（ A ）

A：1　　B：2　　C：3　　D：4

$1+x+1=0+1+2$.

$a_{11}+a_{22}+\dots a_{nn}$ = 特征值的和

$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

10．对于n阶方阵A，以下正确的结论是（ D ）

$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

并非所有矩阵都能对角化

A：一定有n个不同的特征值　　B：存在可逆阵B，使得$B^{-1}AB$为对角阵

~~C~~：它的特征值一定是正数　　D：属于不同特征值的特征向量一定线性无关

11．设A是n阶正定矩阵，则$A+I$的行列式 （ A ）。

A：>1　　B：≥ 1　　C：<1　　D：≤ 1

A可对角化，则可逆阵P，使$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

$A=P\Lambda P^{-1}$

$A^n=(P\Lambda P^{-1})(P\Lambda P^{-1})\cdots(P\Lambda P^{-1})$

$=P\Lambda^n P^{-1}$

三、计算证明

12．设3阶方阵A的特征值$\lambda_1=1,\lambda_2=0,\lambda_3=-1$对应的特征向量为

（充要条件）

$$P_1=\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix},P_2=\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix},P_3=\begin{bmatrix}-2\\-1\\-2\end{bmatrix}，求 A,A^5.$$

解：　$AP_1=\lambda_1P_1$，　$AP_2=\lambda_2P_2$．　$AP_3=\lambda_3P_3$．

(AP_1)　$A(P_1P_2P_3)=(AP_1,AP_2\,AP_3)=(\lambda_1P_1\;\lambda_2P_2\;\lambda_3P_3)=(P_1P_2P_3)\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}$

令$P=(P_1P_2P_3)$ 则．$A=P\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}P^{-1}$　　$\therefore A=$

$\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&-2\end{pmatrix}$ 求P^{-1} $\Rightarrow(P\vdots E)\xrightarrow{行}(E\vdots P^{-1})$

$A^5=$

$P^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}&-\frac{2}{3}&2\\-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}&1\\-2&-1&A^2\end{pmatrix}$

13．设方阵$A=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{bmatrix}$和$B=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$相似，求可逆阵$P$，使得$P^{-1}AP=B$．

求特征值．

相同特征值及行列式．

解．$\because A\sim B$．$\therefore A、B$具有相同的特征值 $\therefore |A|=|B|$．

$\therefore -2=2\cdot y(-1)$．　$y=1$．$\therefore B$的特征值为 2，1，-1．

$\mathrm{tr}A=2+0+x$

$\mathrm{tr}B=2+1+(-1)=2$．

$\mathrm{tr}A=\mathrm{tr}B$　$\therefore x=0$．　　$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$．

①当$\lambda=2$时．$(A-2E)x=0$．

$(A-2E)\longrightarrow\begin{pmatrix}0&1&-2\\0&0&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$　得基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

当$\lambda=1$时．$(A-E)x=0$．　基础解系．$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$　$\lambda=-1$时．$\xi_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$．

$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$．

$f(x)$ 是多项式 $A \xrightarrow{\text{特征值}} \lambda$

$f(A)=f(\lambda)$

14．设 3 阶方阵 A 的特征值为 1，-1，2，$B=A^3-5A^2$，求 B 的特征值，$|B|$ 和 $|A-5I|$.

书上 P93 3、 解：$Ax=\lambda x \Rightarrow A^2x=A(Ax)=A(\lambda x)=\lambda(Ax)=\lambda^2 x$.

同理：$A^3x=\lambda^3 x$. $\because B=A^3-5A^2 \Rightarrow$ B 的特征值 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$

$\Rightarrow \lambda_1=1^3-5\cdot1^2=-4 \quad \lambda_2=-6. \quad \lambda_3=-12.$

$\Rightarrow |B|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=(-4)(-6)(-12)=-288$

$|A-5I|=(1-5)(-1-5)(2-5)=-96$

15．求正交矩阵 T，把实对称矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$ 化为对角阵.

解：由 $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2&5-\lambda&-4\\-2&-4&5-\lambda\end{vmatrix} \xrightarrow[r_3+2r_1]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix}2-\lambda&2&-2\\2(\lambda-1)&1-\lambda&0\\2(1-\lambda)&0&1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(1-\lambda)^2+4(1-\lambda)^2+4(1-\lambda)^2$
$=(1-\lambda)^2(2-\lambda+8)=(10-\lambda)(1-\lambda)^2.$

$\Rightarrow \lambda_1=10, \quad \lambda_2=\lambda_3=1$ 则当 $\lambda_1=10. \Rightarrow A-10I=\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-r_3} \begin{pmatrix}-8&2&-2\\4&-1&1\\-2&-4&-5\end{pmatrix}$

$\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_3]{r_1+2r_2} \begin{pmatrix}-2&-4&-5\\4&-1&1\\0&0&0\end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{9}r_2-r_1]{r_2+2r_1} \begin{pmatrix}2&4&5\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$

16．用正交变换，将下列二次型化为标准型.

（1） $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$

（2） $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=2x_1x_2+2x_3x_4$

(1). $A=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&3\end{pmatrix} \Rightarrow |A-\lambda|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&0\\-2&2-\lambda&-2\\0&-2&3-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda)-4(3-\lambda)-4(1-\lambda)=(\lambda+1)(\lambda-5)(2-\lambda)$
$=0.$

$\lambda_1=-1, \lambda_2=5, \lambda_3=2.$ 可求得对应特征向量的基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \quad \xi_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix} \quad \xi_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}.$

单位化：$e_1=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}, \quad e_2=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}, \quad e_3=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow P=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2&1&-2\\2&-2&1\\1&2&2\end{pmatrix}$

正交变换 $x=Py \Rightarrow f=-y_1^2+5y_2^2+2y_3^2$

(2). $A=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix} \Rightarrow |A-\lambda|=\lambda^4-1=0. \quad \lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=\lambda_4=-1. \Rightarrow \xi_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \xi_2=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix}, \quad \xi_3=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \xi_4=\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}.$

$e_1=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad e_2=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \quad e_3=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}. \quad e_4=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$

$P=\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\1&0&1&0\\0&1&0&-1\\0&1&0&1\end{pmatrix} \Rightarrow f=y_1^2+y_2^2-y_3^2-y_4^2.$

17. 设 A 为 $m\times n$ 阶实矩阵, $B=\lambda I+A'A$，证明：$\lambda>0$ 时矩阵 B 为正定矩阵.

定义 证明: $\forall x\neq 0$

$$x^TBx=x^T(\lambda I+A^TA)x$$

$$=\lambda x^Tx+x^TA^TAx$$

$$=\lambda x^Tx+(Ax)^T(Ax) \quad \because x\neq 0 \therefore x^Tx>0 \quad (Ax)^T(Ax)\geq 0$$

$$x^TBx>0 \quad \forall x\neq 0$$

由此可得 B正定

A为实对称阵

18. n 阶矩阵 A 既正定又正交，证明：$A=I$.

证明：因为A为实对称阵

$\therefore \exists$ 正交阵 Q，使得 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

又 $\because$ A正交

$$\therefore I=A^TA=Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}Q^TQ\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}Q^T$$

$$=Q\begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2\end{pmatrix}Q^T$$

$$\therefore \begin{pmatrix}\lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^2\end{pmatrix}=Q^TIQ=I=\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

$\therefore \lambda_i^2=1, \ i=1,2\dots n$

$\therefore \lambda_i=\pm 1, \ i=1,2\dots n$

又 $\because$ A为正定 $\therefore \lambda_i=1$ $i=1,2\dots n$

$$\therefore A=Q\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}Q^T=Q\begin{pmatrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{pmatrix}Q^T=QQ^T=I$$

线性代数模拟试题（一）

一、填空题

1.设 $A=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\-1&2&1&-1\\-1&-3&1&1\\1&0&-3&1\end{bmatrix}$，则 $r(A)=$ __4__

2.设 A 为 3 阶方阵，且 $|A|=3$，则 $(A^*)^{-1}=$ __$\frac{1}{3}A$__（用 A 表示）

3.若 $X\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&2&2\\1&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，则 $X=$ __$-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1&1&2\\1&1&1\end{pmatrix}$__

4.设 $A=\begin{pmatrix}a&a&1\\a&1&a\\1&a&a\end{pmatrix}$，则当 a 满足条件__$a\neq1$ 且 $a\neq-\frac{1}{2}$__时，A 可逆；当 $a=$ __$-\frac{1}{2}$__时，$r(A)=2$.

5.秩相等是两个同维向量组等价的__必要不充分__条件.

6.设 4 阶方阵 A 的 4 个特征值为 3，1，1，2，则 $|A|=$ __6__

7.齐次方程组 $\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+x_4=0\\2x_1-x_2+x_3-3x_4=0\\x_1+x_3-x_4=0\end{cases}$ 的基础解系是__$\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$__.

8.设二次型 $f(x_1,x_2)=2x_1^2+2x_2^2+4kx_1x_2$ 为正定二次型，则 k 的取值范围为__$-1<k<1$__.

二、选择题

9.设 n 阶方阵 A 是奇异阵，则 A 中__C__

（A）必有一列元素为 0　（B）必有两列元素对应成比例

（C）必有一列向量是其余列向量的线性组合

（D）任意一列向量是其余列向量的线性组合

C

10.设 A 和 B 都是 n 阶可逆阵，若 $C=\begin{pmatrix}0&B\\A&0\end{pmatrix}$，则 $C^{-1}=$ ____

（A）$\begin{pmatrix}A^{-1}&0\\0&B^{-1}\end{pmatrix}$　（B）$\begin{pmatrix}0&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}0&A^{-1}\\B^{-1}&0\end{pmatrix}$　（D）$\begin{pmatrix}B^{-1}&0\\0&A^{-1}\end{pmatrix}$

11.若n阶矩阵A的秩为$n-3$（$n \ge 4$），则A的伴随矩阵A^*的秩为 B

（A）$n-2$ （B）0 （C）1 （D）不确定

12.设α_0是非齐次方程组$AX=b$的一个解,$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$是$AX=0$的基础解系，则 B

(A) $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性相关 （B） $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关

（C） $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_r$的线性组合是$AX=b$的解

（D） $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_r$的线性组合是$AX=0$的解

13. n阶方阵A 与对角矩阵相似的充要条件是 C、

（A） 矩阵A有n个特征值 （B）矩阵A的行列式$|A| \ne 0$

（C）矩阵A有n个线性无关的特征向量 （D）矩阵A的秩为n

三、计算与证明

14.设A 和B都是3阶方阵，$AB+I=A^2+B$，其中$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，求$B$.

先化简先化简

$(A-E)B = A^2-I$.

$B = \cancel{A^2}\ (A-E)^{-1}(A^2-I)$.

15 设线性方程组$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=-1\\2x_1+kx_2-2x_3=0\\kx_1+2x_2+x_3=k\end{cases}$，（1） k为何值时，方程组有唯一解、无解；

（2） k为何值时，方程组有无穷多解？并求出其通解.

< 系数矩阵行列式是方阵. Cram .

$$\left(\begin{array}{ccc|}1&2&k\\1&k&2\\-1&-2&1\end{array}\right)$$

16.设向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$的线性无关，非零向量$\beta$与$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$都正交，

证明：向量组$\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$线性无关.

证明：设 $k_0\beta+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots+k_r\alpha_r=0$ ①.

$(\beta, k_0\beta+k_1\alpha_1+\dots+k_r\alpha_r)=(\beta,0)=0$.

$k_0(\beta,\beta)+k_1(\beta,\alpha_1)+\dots k_r(\beta,\alpha_r)=0$. ∵ β与$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_r$都正交

∴ $(\beta,\alpha_i)=0$. $i=1,2,r$. ∴ $k_0(\beta,\beta)=0$. $\beta\neq 0$. ∴ $(\beta,\beta)>0$. ∴ $k_0=0$

代入 ①. $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\dots k_r\alpha_r=0$. 又∵ $\alpha_1\dots\alpha_r$线性无关. ∴ $k_1=k_2=\dots k_r=0$

17 设$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，（1）求$A$的特征值；（2）求其特征值所对应的特征向量.

18.化二次型$f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+4x_2x_3$为标准形.

19.证明：实对称矩阵A为正定矩阵的充要条件是存在可逆矩阵P，使得$A=P'P$.

证明 ⇐ A正定 ⇔ $\forall x\neq 0$ $x^TAx>0$.

⇔ 特征值 >0.

⇔ 顺序主子式 >0

事实上：

$\forall x\neq 0$. ∵ P为可逆阵. ∴ $Px\neq 0$. (若 $Px=0$, 因为P可逆. $P^{-1}Px=0, P^{-1}0 \Rightarrow x=0$.

$x^TAx=x^T(P^TP)x=(Px)^T(Px)>0$

即：因为A为实对称阵, ∃正交阵Q. 使得 $Q^TAQ=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}$

又因为 A正定. ∴ $\lambda_i>0$. $i=1,2,\dots n$. $A=Q\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\ddots&\\&&\lambda_n\end{pmatrix}Q^T=Q\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}Q^T$

$=Q\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\left[Q\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\right]^T$

令 $P=\left[Q\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1}&&\\&\ddots&\\&&\sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}\right]^T$ 可逆)

则 $A=P^TP$

线性代数模拟试题（二）

一、填空题

1. 已知$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -2\end{bmatrix}$，则$A'B=$______

2. 已知$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & 0\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$，则$(A^*)^{-1}=$__________

3. 设A为三阶方阵，$|A|=\dfrac{1}{16}$，则$\left|2A^{-1}-(2A)^{-1}\right|=$________

4. 行列式$\begin{vmatrix}3 & 0 & 4 & 0\\ 2 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -7 & 0 & 0\\ 5 & 3 & 8 & 7\end{vmatrix}$，第四行各元素的代数余子式之和为_______

5. 已知$X_1=(0,1,0)',X_2=(-3,2,2)'$是线性方程组$\begin{cases}x_1-x_2+2x_3=-1\\ 3x_1+x_2+4x_3=-1\\ ax_1+bx_2+cx_3=d\end{cases}$的两个解，

   则此方程组的一般解是__________

6. 设A为4阶方阵，A的4个特征值为-2，-1，1，2，则$|-A|=$________

二、选择题

7. 设 A,B为n阶方阵，满足关系$AB=0$，则必有______

   （A）$A=B=0$　　(B) $A+B=0$

   (C) $|A|=0$或$|B|=0$　　（D）$|A|+|B|=0$

8. 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_S(S\geq 2)$线性相关的充要条件是______

   (A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_S$中至少有一个零向量

   （B）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_S$中至少有两个向量成比例

   （C）$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_S$中至少有一个向量可由其余向量线性表示

   (D) 向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_S$的秩$r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_S)\leq S$

9. 设 A 为 n 阶方阵，且 $|A| = a \neq 0$,则 $|A^*| =$______

(A) a^{n-1}　　(B) $\frac{1}{a}$　　(C) a　　(D) a^n

10. n 阶实对称矩阵 A 为正定矩阵的充要条件是______

(A) 所有 k 级子式为正 $(k=1,2,\cdots n)$　　(B) A 的所有特征值非负

(C) A^{-1} 为正定矩阵　　(D) $r(A)=n$

11. 矩阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ 的秩为______

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

12. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+6x_1x_2+4x_1x_3+x_2^2+2x_2x_3+tx_3^2$ 的秩 2, 则 $t=$______

(A) 0　　(B) 2　　(C) $\frac{7}{8}$　　(D) 1

三、计算证明题

13. 设 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$，求矩阵 X.

14. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & a & 7 & -1 \\ 1 & -1 & -6 & -1 & b \end{pmatrix}$，求 A 的秩 $r(A)$.

15. 已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 (a,b,c)，a,b,c 不全为零，矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$，

且 $AB=0$，求线性方程组 $AX=0$ 的通解.

记 $\beta=(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$ 则 $\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$ 为 $A=0$ 的解. ∵ A 的第一行 $(a,b,c)\neq0$. ∴ $R(A)\geq1$.

∴ $AX=0$ 的基础解系所含向量个数 $=n-R(A)\leq2$. ① 当 $k\neq9$. $\beta_1\beta_3$ 线性无关 此时基础解系所含向量个数 $=2$. 通解为 $k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}3\\6\\k\end{pmatrix}$ ② $k=9$ 时. 此时 $a+2b+3c=0$

i 如果 $R(A)=1$，则方程组等于 $ax_1+bx_2+cx_3=0$. 不妨设 $a\neq0$ 通解为 $k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-\frac{c}{a}\\0\\1\end{pmatrix}$

ii 如果 $R(A)=2$，

16. 设向量组 $\alpha_1=(a,2,10)'$，$\alpha_2=(-2,1,5)'$，$\alpha_3=(-1,1,4)'$，$\beta=(1,\ b,c)'$.

试问：a,b,c 满足什么条件时，

（1）β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且表示法唯一；

（2）β 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示；

（3）β 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，但表示法不唯一.

解： $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$.

$$(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\beta.$$

$$\begin{pmatrix}a&-2&-1\\2&1&1\\10&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\b\\c\end{pmatrix}.$$

(1). 行列式 $\neq0$. $a\neq-4$. Cream.

(2). $a=-4$. $\tilde{A}\longrightarrow$ 行阶梯形.

$a=-4$，且 $1+c-3b\neq0$ 不能

$=0$ 能.

① $|A| \neq 0$. 有唯一解. $k \neq -1, 2$.

$k=-1$.

$k=2$.

17. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + kx_2 - 2x_3 = 0, \\ kx_1 + 2x_2 + x_3 = k \end{cases}$

（1）k 为何值时，方程组有唯一解、无解？

（2）k 为何值时，方程组有无穷多解？并求出它的通解.

18. 设 A, B 均为 n 阶正定矩阵，证明：$kA + lB$ 也是正定矩阵，其中 k, l 为正数.

证明: $\forall x \neq 0$ $x^TAx > 0$.

特征值全大于0.

顺序主子式 > 0.

$\forall x \neq 0$. $x^T(kA + lB)x = kx^TAx + lx^TBx > 0$.

19. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$，问是否存在可逆矩阵 C，使 $C^{-1}AC = \Lambda$ 对角阵. A是否可对角化.

找n个线性无关的特征向量. 即找n个不同的特征值.

找出特征值.

2011年真题

线性代数模拟试题（三）

一、选择题

$A^{-1}A=I$

1. 设 A 是 3 阶方阵，且 $|A|=2$，则 $|2A^{-1}|=$（ A ）

$2^3|A^{-1}|=8|A^{-1}|=8\times\frac{1}{|A|}=4$

A. 4;　　B. 8;　　C. 2;　　D. 16.

2. 设 A 是 $m\times n$ 矩阵，B 是 $n\times m$ 矩阵，则（ B ）

$(AB)_m$　$R(A)\le m,\ \le n$　$R(B)\le m,\ \le n$

(3, 4, 5　$B=(1,1,1), A=(\ )$

A. 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|\neq 0$;　　B. 当 $m>n$ 时，必有行列式 $|AB|=0$;

$R(AB)\le R(A)\le n<m$

C. 当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|\neq 0$;　　D. 当 $n>m$ 时，必有行列式 $|AB|=0$.

$\le R(B)$

3. 设 $\alpha=(1,1)^T,\beta=(1,k)^T$，若矩阵 $\alpha\beta^T$ 相似于 $\begin{pmatrix}3&0\\0&0\end{pmatrix}$，则 $k=$（ B ）

A. 1;　　B. 2;　　C. 3;　　D. 4.

4. 齐次线性方程组 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0\\ x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$ 的系数矩阵记为 A. 若存在 3 阶矩阵 $B\neq O$，使得 $AB=O$，则（ C ）

$$\begin{pmatrix}\lambda&1&\lambda^2\\1&\lambda&1\\1&1&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$AB=0$.

A. $\lambda=-2$ 且 $|B|=0$;　　B. $\lambda=-2$ 且 $|B|\neq 0$;

B记作 $(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)$　$AB=A(\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)=0$.

C. $\lambda=1$ 且 $|B|=0$;　　D. $\lambda=1$ 且 $|B|\neq 0$.

$(A\beta_1 .. A\beta_2\ A\beta_3)$　$B\neq 0\Rightarrow\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$至少有1个不为0. $Ax=0$有非零解 行列式=0.

5. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，向量 β_1 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，而向量 β_2 不能由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，则对于任意常数 k 必有（ A ）

$\lambda=1$,

含有$\alpha_1\alpha_2\alpha_3$不能表示的向量　$k=0$时

$Ax=0$的基础解系 未知数一致

A. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性无关;　　B. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$ 线性相关;

即$Ax=0$ ...... <3

$k=0$时

C. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性无关;　　D. $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$ 线性相关.

∴B的秩小于3.

B为不可逆矩阵，行列式等于0.

6. 设 A 是 $n(n\geq 3)$ 阶可逆方阵，A^* 是其伴随矩阵，又 k 为常数，且 $k\neq 0,\pm 1$，则 $(kA)^*=$（ B ）

A. kA^*　　B. k^nA^*　　C. $k^{-1}A^*$　　D. $k^{n-1}A^*$

二、填空题

7. 已知向量组$\alpha_1=(1,1,0),\alpha_2=(1,3,-1),\alpha_3=(5,3,t)$线性相关，则$t=$__________。

8. 设行列式$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\-7 & 7 & -7\end{vmatrix}$，则$M_{21}+M_{22}+M_{23}=$____________。

9. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$，则$A^3=$______________。

10. 设4阶方阵A的秩为2，则其伴随矩阵A^*的秩为__________。

11. 已知3阶方阵A的特征值为$-1,1,2$，则$(A-I)^2$的特征值为____________。

12. 设二次型$f(x_1,x_2)=2x_1^2+2x_2^2+4kx_1x_2$为正定二次型，则$k$的取值范围为______________。

三、计算题

左乘A.

13. 设矩阵$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\-1 & 1 & 1\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$，矩阵$X$满足$A^*X=A^{-1}+2X$，，其中$A^*$是$A$的伴随矩阵，求矩阵$X$.

14. 计算 5 阶行列式 $D_5=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & & & \\ & 2 & -2 & & \\ & & 3 & -3 & \\ & & & 4 & -4 \end{vmatrix}$.

行和

(加到第一列) 按第一列展开

15. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，设 $\beta_1=\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$ ，$\beta_2=\alpha_2+\alpha_3$ ，$\beta_3=2\alpha_1-\alpha_2+3\alpha_3$，讨论向量组 β_1,β_2,β_3 的线性相关性.

16. 求向量组 $\alpha_1=(1,-1,2,4),\alpha_2=(0,3,1,2),\alpha_3=(3,0,7,14),\alpha_4=(1,-1,2,0)$ 的秩及其一个极大线性无关组.

化为列向量

初等行变换

$(\alpha_1^T\ \alpha_2^T\ \alpha_3^T\ \alpha_4^T)=$

$R(A)=n$. 行列式为零.

17.已知 $\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=a\\(\lambda-1)x_2\quad=1\\x_1+x_2+\lambda x_3=1\end{cases}$ 有解，但解不唯一，(1)求 λ,a；(2)求$Ax=b$的通解

18. 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为$1,-1,0$, 其中 $\lambda_1=1$与$\lambda_3=0$ 的特征向量分别为 $p_1=(1,a,1)^T$, $p_3=(a,a+1,1)^T$, 求矩阵 A.

$\because$ A为实对称阵. $\therefore (P_1, P_3)=0$. 即 $a+a(a+1)+1=0$. 即 $a=-1$.

$\therefore P_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ $P_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

设 $P_2=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$ 为属于特征值 $\lambda_2=-1$ 的特征向量.

$\therefore \begin{cases}(P_1 P_2)=0\\(P_3 P_2)=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=0\\-x_1\quad+x_3=0\end{cases}$ 得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

取 $P_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

$A(P_1 P_2 P_3)=(P_1 P_2 P_3)\begin{pmatrix}\lambda_1&&\\&\lambda_2&\\&&\lambda_3\end{pmatrix}(P_1P_2P_3)^{-1}$

$=$

19. 求正交变换 $x=Qy$ 把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 化为标准形。

矩阵A写出.

$P^{-1}AP=\Lambda$ 求特征值.

求特征值的特征向量.

将特征向量正交化、单位化.

作正交变换 $x=Cy$ 得 f 的标准形.

$f = 17x_1^2 + 14x_2^2 + 14x_3^2 -$

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & \cdot & 4 \end{pmatrix}$$

特征值：$\lambda_1 = 9,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 18$

特征向量 $\xi_1 = (\frac{1}{2}, 1, 1)^T \quad \xi_2 = (-2, 1, 0)^T \quad \xi_3 = (-2, 0, 1)^T$.

正交化：

单位化，$\eta_1 \quad \eta_2 \quad \eta_3$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

之恋、

人文科学、

自然、

动物行为学.

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

从第一列展开：$D_n = 5(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$

$$= 5D_{n-1} - 2\times 3\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 5 & \cdots & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \cdots & & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

P16.

$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$

$x^2 = 5x - 6$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$(x-3)(x-2) = 0$

$D_n - 2D_{n-1} = 3D_{n-1} - 6D_{n-2}$

$D_n - 2D_{n-1} = 3(D_{n-1} - 2D_{n-2})$

$D_5 - \cancel{2D_4} = 3(D_4 - 2D_3)$

$= 3\times 3(D_3 - 2D_2)$

$= 3\times 3^2(D_2 - 2D_1)$

$= 3^3(25-6-10) = 3^3 \times 9 = 3^5 + 2D_4$

$= 3^5 + 2(5D_3 - 6D_2)$

$= 3^5 + 2^2(5D_2 - 6D_1)$