# 综合测试题 D 答案

**一、选择题**

1. **B**　2. **C**　3. **D**　4. **D**　5. **C**　6. **B**　7. **A**

**二、填空题**

8. $\underline{\dfrac{13}{21}}$　9. $\underline{\dfrac{10}{19}}$　10. **0.5**　11. $\underline{\dfrac{87}{60}}$

12. **12, 75**　13. **≥0.75**　14. $\underline{\dfrac{20}{27}}$　15. $\underline{\dfrac{13}{16}}$

**三、计算题**

16. 设 $B$ ={顾客购买该箱灯泡}，$A_i$ ={该箱灯泡含有 $i$ 只残次品}（$i = 0, 1, 2$）

（1）由全概率公式，有

$$P(B)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B|A_i)$$

$$=0.69\times 1+0.2\times\frac{C_{11}^3}{C_{12}^3}+0.11\times\frac{C_{10}^3}{C_{12}^3}=0.69+0.15+0.06=0.9$$

（2）由贝叶斯公式，有

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}=\frac{0.15}{0.9}=\frac{1}{6}\approx 0.167$$

17. （1）由已知可得

$$P\{X=-1\}=1-P\{X=1\}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

$$P\{Y=-1|X=1\}=1-P\{Y=1|X=1\}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$P\{Y=1|X=-1\}=1-P\{Y=-1|X=-1\}=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

由乘法公式，有

$$P\{X=-1,Y=-1\}=P\{X=-1\}P\{Y=-1|X=-1\}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$P\{X=-1,Y=1\}=P\{X=-1\}P\{Y=1|X=-1\}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P\{X=1,Y=-1\}=P\{X=1\}P\{Y=-1|X=1\}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}P\{Y=1|X=1\}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{6}$$

故（X，Y）的联合分布律为

| Y \ X | $-1$ | $1$ |
|---|---|---|
| $-1$ | $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{2}$ |
| $1$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{6}$ |

（2）要使方程至少有一个实根，只需

$$\Delta=(X+Y)^2-4(X+Y)=(X+Y)(X+Y-4)\geq 0$$

即只需　$X+Y\leq 0$ 或 $X+Y\geq 4$

由于 X 与 Y 都仅取 1，−1 两个值，　故只需 $X+Y\leq 0$

所以方程至少有一个实根的概率为

$$P\{X+Y\leq 0\}=1-P\{X+Y>0\}=1-P\{X=1,Y=1\}=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

18. 记 X 和 Y 的分布函数分别为 $F_X(x),F_Y(y)$，概率密度分别为 $f_X(x),f_Y(y)$。

X 的概率密度为 $f_X(x)=\begin{cases}0.5e^{-0.5x}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$,

当 $y$≤1 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{X^2+1\leq y\}=P\{X^2\leq y-1\}\leq P\{X^2\leq 0\}=0$$

当 $y>1$ 时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{X^2+1\leq y\}=P\{X^2\leq y-1\}\}$$

$$=P\{-\sqrt{y-1}<X<\sqrt{y-1}\}=F_X(\sqrt{y-1})-F_X(-\sqrt{y-1})$$

因此，$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{y-1}}f_X(\sqrt{y-1})+\dfrac{1}{2\sqrt{y-1}}f_X(-\sqrt{y-1}), & y>1\\ 0, & y\leq 1\end{cases}$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{4\sqrt{y-1}}e^{\frac{-\sqrt{y-1}}{2}}, & y>1\\ 0, & y\leq 1\end{cases}$$

19. 零件合格的概率为

$$P\{100-1.302\leq X\leq 100+1.302\}=\Phi(\frac{1.302}{0.6})-\Phi(-\frac{1.302}{0.6})=2\Phi(2.17)-1=0.97$$

零件不合格的概率为

$$P\{|X-100|>1.302\}=1-P\{|X-100|\le 1.302\}=1-0.97=0.03$$

设 Y 表示 100 只这种零件中不合格的零件的个数，则$Y\sim B(100,0.03)$

所以所求事件的概率为

$$P\{Y\ge 3\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}-P\{Y=2\}$$

$$=1-C_{100}^{0}(0.03)^{0}(0.97)^{100}-C_{100}^{1}(0.03)^{1}(0.97)^{99}-C_{100}^{2}(0.03)^{2}(0.97)^{98}$$

$$\approx 0.5802$$

**( 或者利用泊松分布：**$\lambda=np=100\times 0.03=3$

$$P\{Y\ge 3\}=1-\sum_{k=0}^{2}P\{Y=k\}=1-\sum_{k=0}^{2}\frac{3^k}{k!}e^{-3}=1-\frac{17}{2}e^{-3}\approx 0.5768$$ **)**

20. $1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{0}Ae^{x}dx+\int_{0}^{+\infty}Ae^{-x}dx=Ae^{x}\big|_{-\infty}^{0}-Ae^{-x}\big|_{0}^{+\infty}=2A$，得 $A=\frac{1}{2}$

所以 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty.$

（1）$P\{0<X<1\}=\int_{0}^{1}f(x)dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{2}e^{-x}dx=-\frac{1}{2}e^{-x}\big|_{0}^{1}=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$

（2）当 $x<0$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{2}e^{t}dt=\frac{1}{2}e^{t}\big|_{-\infty}^{x}=\frac{1}{2}e^{x}$$

当 $x\geqslant 0$ 时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{2}e^{t}dt+\int_{0}^{x}\frac{1}{2}e^{-t}dt=\frac{1}{2}e^{t}\big|_{-\infty}^{0}-\frac{1}{2}e^{-t}\big|_{0}^{x}=1-\frac{1}{2}e^{-x}$$

所以，$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\ge 0\end{cases}$

（3）$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\frac{1}{2}(\int_{-\infty}^{0}xe^{x}dx+\int_{0}^{+\infty}xe^{-x}dx)$

$$=\frac{1}{2}[(xe^{x}\big|_{-\infty}^{0}-e^{x}\big|_{-\infty}^{0})+(-xe^{-x}\big|_{0}^{+\infty}-e^{-x}\big|_{0}^{+\infty})]=\frac{1}{2}(-1+1)=0$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}[x-E(X)]^{2}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2}f(x)dx=\frac{1}{2}(\int_{-\infty}^{0}x^{2}e^{x}dx+\int_{0}^{+\infty}x^{2}e^{-x}dx)$$

$$=\frac{1}{2}[(x^{2}e^{x}\big|_{-\infty}^{0}-2\int_{-\infty}^{0}xe^{x}dx)+(-x^{2}e^{-x}\big|_{0}^{+\infty}+2\int_{0}^{+\infty}xe^{-x}dx)]=\frac{1}{2}(2+2)=2$$

21. $P\{Y=1 \mid X=0\}=\dfrac{P\{X=0,Y=1\}}{P\{X=0\}}=\dfrac{0.15}{0.15+a}=\dfrac{3}{5}\Rightarrow a=0.1$

$$1=\sum\sum p_{ij}=a+0.25+0.15+0.15+b+0.15\Rightarrow b=0.2$$

（1）X 和 Y 的边缘分布律

| Y \ X | 0 | 1 | 2 | $p_{\bullet j}$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.1 | 0.25 | 0.15 | 0.5 |
| 1 | 0.15 | 0.2 | 0.15 | 0.5 |
| $p_{i\bullet}$ | 0.25 | 0.45 | 0.3 | |

（2）因为 $P\{X=0,Y=0\}=0.1$， $P\{X=0\}P\{Y=0\}=0.25\times 0.5=0.125$

$P\{X=0,Y=0\}\neq P\{X=0\}P\{Y=0\}$，所以 X 和 Y 不相互独立

（3）

| （X，Y） | （0,0） | （0,1） | （1,0） | （1,1） | （2,0） | （2,1） |
|---|---|---|---|---|---|---|
| P | 0.1 | 0.15 | 0.25 | 0.2 | 0.15 | 0.15 |
| $Z=XY^2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 2 |

所以 $Z=XY^2$ 的分布律为

| $Z=XY^2$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| P | 0.65 | 0.2 | 0.15 |

**四、证明题**

22. $P(\overline{AB})=P(\overline{A}\,\overline{B})\Leftrightarrow 1-P(AB)=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

$$\Leftrightarrow P(AB)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

$$\Leftrightarrow 2P(AB)=P(AB)+P(A\overline{B})+P(AB)+P(\overline{A}B)$$

$$\Leftrightarrow P(A\overline{B})+P(\overline{A}B)=0\Leftrightarrow P(A\overline{B})=P(\overline{A}B)=0$$