第1章 行 列 式

在生产实践和科学研究中，许多变量之间的关系可以直接或近似地用一次函数即线性函数来表示，线性代数主要研究线性函数，其中线性方程组是最基本的内容，而行列式又是解线性方程组的重要工具，它在数学和其他科学分支中都有广泛的应用．本章在二阶、三阶行列式定义的基础上，用归纳的方法给出了 n 阶行列式的定义，然后给出行列式的基本性质及其计算方法，最后给出利用行列式求解一类线性方程组的克莱姆(Cramer)法则．

§1.1 行列式的定义

本节由求解二元和三元线性方程组，引入了二阶和三阶行列式的定义，然后用归纳的方法给出 n 阶行列式的定义，最后介绍了几种常用的特殊行列式．

1.1.1 二阶行列式的定义

在数学发展史上，行列式是通过线性方程组的求解而引出的．以二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, & (1.1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 & (1.2) \end{cases}$$

的求解为例，利用消元法，为消去未知数 x_2，式(1.1)$\times a_{22}$－式(1.2)$\times a_{12}$，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2. \tag{1.3}$$

同样，为消去未知数 x_1，式(1.2)$\times a_{11}$－式(1.1)$\times a_{21}$，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}. \tag{1.4}$$

于是，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，解式(1.3)、式(1.4)，得

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.5}$$

式(1.5)中的分子和分母均为4个数分两对相乘后再相减，为此，我们引入二阶行列式的定义如下：

将 2^2 个元素 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 排成两行两列，用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为**二阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

其中数 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 称为行列式的**元素**，横排称为**行**，竖排称为**列**．元素 a_{ij} 的第一个下标 i 叫作**行标**，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 叫作**列标**，表明该元素位于第 j 列．

从定义可以看出：二阶行列式是一个算式，即行列式的主对角线(从左上角到右下角的实连线)上两元素 a_{11}，a_{22} 的乘积，减去行列式副对角线(从右上角到左下角的虚连线)上两元素 a_{12}，a_{21} 的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

这就是二阶行列式的对角线法则．

现在，上面方程组的解可用行列式来表示，记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,\quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

于是，在 $D\neq 0$ 的条件下，上面方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}.$$

注意到 D 就是方程组的系数所构成的行列式，因此，我们称 D 为方程组的系数行列式，而 D_1，D_2 分别是用方程组右端的常数列来代替 D 中的第 1 列和第 2 列所得到的行列式．

例 1.1 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=4, \\ 2x_1+5x_2=9. \end{cases}$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=1\times 5-2\times 2=1\neq 0,$$

所以方程组有唯一解，又由于

$$D_1=\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 9 & 5 \end{vmatrix}=4\times 5-2\times 9=2,\quad D_2=\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}=1\times 9-4\times 2=1,$$

故方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,\ x_2=\frac{D_2}{D}=1. \qquad \blacksquare$$

1.1.2　三阶行列式的定义

类似地，在用消元法解三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

时，可以引入三阶行列式的定义：

将 3^2 个元素 $a_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$排成三行三列，用记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示这些元素的一种运算关系，称为**三阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.6}$$

由上述定义可见，三阶行列式的展开式有 3！项，每一项均为不同行不同列的三个元素的乘积再冠以正、负号(各为一半).

同样，三阶行列式的计算也可按下图的对角线法则来表示，其中，实连线上三元素的乘积前冠以正号，虚连线上三元素的乘积前冠以负号，这六项的代数和即为三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

另外，三阶行列式的对角线法则还可以用“沙路法则”来记忆：

$$\begin{array}{ccccc} \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right. & \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}\right. \end{array}.$$

$$- \quad - \quad - \qquad + \quad + \quad +$$

同样，若记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则当 $D\neq 0$ 时，上面方程组有唯一解：

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 1.2 计算三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

解 原式 $=4\times2\times6+0\times3\times(-1)+5\times0\times1-5\times2\times(-1)-0\times1\times6-4\times0\times3=58.$

或 原式

$$=\left|\begin{array}{ccc|cc} 4 & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right.$$

$$=4\times2\times6+0\times3\times(-1)+5\times1\times0-5\times2\times(-1)-4\times3\times0-0\times1\times6=58.$$ ■

将式(1.6)按第 1 行的元素提取公因子，可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

$$=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \qquad (1.7)$$

式(1.7)具有两个特点：

(1) 三阶行列式可表示为第 1 行元素分别与一个二阶行列式乘积的代数和；

(2) 元素 a_{11}，a_{12}，a_{13} 后面的二阶行列式是从原三阶行列式中分别划去元素 a_{11}，a_{12}，a_{13} 所在的行与列后剩下的元素按原来顺序所组成的，分别称其为元素 a_{11}，a_{12}，a_{13} 的**余子式**，分别记为 M_{11}，M_{12}，M_{13}，即

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},\quad M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

称 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$ 为元素 a_{1j} 的**代数余子式**，$j=1, 2, 3$.

于是式(1.7)也可表示为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j}. \quad (1.8)$$

式(1.8)称为三阶行列式按第 1 行展开的展开式 .

从式(1.7)可以看出，三阶行列式可以转化为二阶行列式来计算，按照这一规律，我们可以用三阶行列式来计算四阶行列式，以此类推，我们可以用递推定义法给出 n 阶行列式的定义 .

1.1.3　n 阶行列式的定义

定义 1.1　由 n^2 个元素 a_{ij}(i，$j=1, 2, \cdots, n$)排成 n 行 n 列并记为

$$D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

称为 n **阶行列式**，其中横排称为**行**，竖排称为**列** . 它表示一个由确定的递推运算关系所得到的数：

当 $n=1$ 时，规定 $D_1=|a_{11}|=a_{11}$；

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$D_n = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}, \quad (1.9)$$

其中 $A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$，这里 M_{1j} 为 D_n 中划去第 1 行、第 j 列后剩下的元素按原来顺序组成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

并称 M_{1j} 为元素 a_{1j} 的**余子式**，$A_{1j}=(-1)^{1+j}M_{1j}$ 为元素 a_{1j} 的**代数余子式**，$j=1, 2, \cdots, n$.

一般地，用 M_{ij} 来记 D_n 中划去元素 a_{ij} 所在的第 i 行、第 j 列后剩下的元素按原来顺序组成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 a_{ij} 的**余子式**，并称 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的**代数余子式**.

例如，四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

中元素 a_{23} 的余子式和代数余子式分别为

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix},\ A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

注 1：元素 a_{ij} 的 M_{ij} 和 A_{ij}，与 a_{ij} 的大小无关，只与 a_{ij} 在行列式中的位置有关.

由定义可知，n 阶行列式是其元素的乘积构成的代数和，用数学归纳法可以证明它的展开式共有 $n!$ 项，每一项为来自不同行不同列的 n 个元素的乘积，在所有的项中，带正号的项和带负号的项各占一半($n>1$).

注 2：如上定义的行列式，当 $n=2$ 或 $n=3$ 时，与对角线法则定义的是一致的，但当 $n>3$ 时，对角线法则不再成立.

例 1.3 计算 n 阶**下三角形行列式**(主对角线以上的元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 根据 n 阶行列式的定义，每次均按第 1 行展开的方法来降低行列式的阶数，而每次第 1 行都只有第一个元素不为零，故有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & & & \\ a_{32} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= a_{11}a_{22}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{33} & & & \\ a_{43} & a_{44} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n3} & a_{n4} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$= \cdots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

特别地，n 阶**对角行列式**(主对角线以外的元素全为零)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$ ■

例 1.4　计算 n 阶**副下三角形行列式**(副对角线以上的元素全为零)

$$D_n = \begin{vmatrix} & & & & a_{1n} \\ & & & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ & & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解　每次均按第1行展开的方法来降低行列式的阶数，而每次第1行都只有最后一个元素不为零，故有

$$D_n = (-1)^{1+n}a_{1n} \begin{vmatrix} & & & a_{2,n-1} \\ & & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$= (-1)^{n-1}a_{1n}(-1)^{1+(n-1)}a_{2,n-1} \begin{vmatrix} & & & a_{3,n-2} \\ & & a_{4,n-3} & a_{4,n-2} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-3} & a_{n,n-2} \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$=(-1)^{(n-1)+(n-2)}a_{1n}a_{2,n-1}\begin{vmatrix} & & & a_{3,n-2} \\ & & a_{4,n-3} & a_{4,n-2} \\ & \iddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-3} & a_{n,n-2} \end{vmatrix}_{n-2}$$

$$=\cdots=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

特别地，n 阶**副对角行列式**(副对角线以外的元素全为零)

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

例如，

$$\begin{vmatrix} & & & 1 \\ & & 2 & \\ & 3 & & \\ 4 & & & \end{vmatrix}=(-1)^{\frac{4\times3}{2}}\times1\times2\times3\times4=24.$$ ■

练 习 1.1

1. 计算下列二阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$.

2. 计算下列三阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$； (2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & -3 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

3. 求行列式 $\begin{vmatrix} 5 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & x & 0 \\ 1 & 0 & y & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 中元素 x 和 y 的代数余子式 .

4. 计算行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 8 \\ 4 & -9 & 2 & 10 \\ -1 & 6 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

§1.2　行列式的性质与计算

上一节，我们引入了 n 阶行列式的定义，并利用定义简单计算了一些特殊行列式．然而，对于一般的 n 阶行列式，当 n 较大或元素较复杂时，直接用定义计算比较困难．本节我们引入行列式的性质，利用这些性质可以简化行列式的计算．

为了方便行列式的变形，我们规定行列式变换符号如下：

(1) 交换行列式的第 i 行(列)与第 j 行(列)，记为 $r_i \leftrightarrow r_j(c_i \leftrightarrow c_j)$；

(2) 用常数 k 乘以行列式的第 i 行(列)，记为 $kr_i(kc_i)$；

(3) 将行列式第 j 行(列)元素的 k 倍加到第 i 行(列)上，记为 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$.

1.2.1　行列式的性质

定义 1.2　将行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

的行与列互换得到的新的行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为行列式 D 的**转置行列式**，记为 D^{T}.

性质 1.1　行列式与它的转置行列式相等．

注：性质 1.1 可用数学归纳法来证明．此性质说明行列式中行与列具有相同的地位，行列式的行具有的性质，它的列也同样具有．

例 1.5 计算 n 阶**上三角形行列式**(主对角线以下的元素全为零)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由性质 1.1 和例 1.3 可得

$$D=D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{12} & a_{22} & & & \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$ ■

由此可知，上三角形行列式、下三角形行列式和对角行列式都等于其主对角线上元素的乘积．

性质 1.2 交换行列式的两行(列)，行列式变号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{r_i \leftrightarrow r_j} -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 1.2 可用数学归纳法证明，略．

由性质 1.2 易得

推论 若行列式有两行(列)的对应元素相同，则此行列式为零．

证明 交换行列式 D 中相同的两行(列)，则有 $D=-D$，故 $D=0$. ■

性质 1.3 n 阶行列式等于它任意一行(列)的元素与其对应的代数余子式的乘积之和，即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in} \quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{1.10}$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj} \quad (j=1,2,\cdots,n). \tag{1.11}$$

式(1.10)称为行列式按第 i 行展开，式(1.11)称为行列式按第 j 列展开．

性质 1.3 可用数学归纳法证明，略.

例 1.6　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 8 \\ 4 & 0 & -9 & 10 \\ -1 & 0 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

解　因为第 2 列中有 3 个零元素，可按第 2 列展开，得

$$D=2\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 4 & -9 & 10 \\ -1 & 6 & -7 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}.$$

对于上面的三阶行列式，因第 3 行中有 2 个零元素，故按第 3 行展开，得

$$D=-2\cdot 5\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 4 & -9 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}=-150.$$ ■

例 1.7　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}.$$

解　因行列式每行(列)只有两个非零元素，故可选一行(列)展开，化为三角形行列式.

将 D_n 按第 1 列展开得

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}_{n-1}+(-1)^{n+1}y\begin{vmatrix} y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & y & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & x & y \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=x^n+(-1)^{n+1}y^n.$$ ■

注：由此可见，计算行列式时，选择先按零元素多的行或列展开可大大简化行列式的计算，这是计算行列式的常用技巧之一.

推论　行列式某一行(列)的各元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0 \quad (i\neq k), \tag{1.12}$$

或
$$a_{1j}A_{1k}+a_{2j}A_{2k}+\cdots+a_{nj}A_{nk}=0 \quad (j\neq k). \tag{1.13}$$

证　在行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

中将第 k 行元素都换成第 i 行元素，得到行列式

$$\widetilde{D}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

显然 $\widetilde{D}$ 的第 k 行元素的代数余子式与 D 的第 k 行对应元素的代数余子式完全相同，将 $\widetilde{D}$ 按第 k 行展开，并注意到 $\widetilde{D}$ 有两行完全相同，得到

$$\widetilde{D}=a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\cdots+a_{in}A_{kn}=0,$$

即式(1.12)成立．同理可证式(1.13)也成立． ■

性质 1.4　行列式某一行(列)元素的公因子可提到行列式外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n}ka_{ij}A_{ij}=k\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 1　若行列式某一行(列)元素全为零，则此行列式为零．

推论 2　若行列式有两行(列)对应元素成比例，则此行列式为零．

例如，行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$，因为第 1 列与第 2 列对应元素成比例，根据推论 2 知 $D=0$.

性质 1.5　若行列式的某一行(列)的每一个元素都是两个元素的和，则此行列式可以表示为如下两个行列式的和，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　左边 $=\sum_{j=1}^{n}(b_{ij}+c_{ij})A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}A_{ij}+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}A_{ij}=$ 右边． ■

性质 1.6　将行列式某一行(列)元素的 k 倍加到另一行(列)对应位置的元素上，行列式的值不变，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证　左边 $=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{j1} & ka_{j2} & \cdots & ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$
=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.
$$

■

1.2.2 行列式的计算

利用行列式的性质将行列式化为上(下)三角形行列式，或将某行(列)元素尽可能多地化为零后再按该行(列)展开，此乃计算行列式的常用方法.

例 1.8 计算行列式

$$
D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}.
$$

解
$$
D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_3} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal[r_3-3r_1]{r_2-2r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal[r_4-2r_2]{r_3-2r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \end{vmatrix}
$$

$$
\xlongequal{r_4-5r_3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} = -7.
$$

■

例 1.9 计算 n 阶行列式

$$
D_n=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{vmatrix}.
$$

解　注意到行列式的每行元素之和都为 $n+2$，故把第 2 列、第 3 列、…、第 n 列都加到第 1 列，然后各行都减去第 1 行，化为上三角形行列式来计算：

$$D_n \xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} \begin{vmatrix} n+2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n+2 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ n+2 & 1 & 3 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n+2 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{\cdots\cdots \\ r_n-r_1}]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} \begin{vmatrix} n+2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

$$=(n+2)2^{n-1}.$$ ■

例 1.10　计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

解　利用主对角线上的元素将第 1 列除第 1 个元素外的其他元素都化成零，就可化为上三角形行列式：

$$D_n \xlongequal{c_1-\frac{1}{2}c_2} \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-\frac{1}{3}c_3} \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$=\cdots \xlongequal{c_1-\frac{1}{n}c_n} \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

$$=\left(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\right)n!.$$ ■

例 1.11　计算三对角行列式

$$D_5=\begin{vmatrix}5&6&0&0&0\\1&5&6&0&0\\0&1&5&6&0\\0&0&1&5&6\\0&0&0&1&5\end{vmatrix}.$$

解 将行列式按第 1 列展开，得

$$D_5=5D_4-\begin{vmatrix}6&0&0&0\\1&5&6&0\\0&1&5&6\\0&0&1&5\end{vmatrix},$$

对上面的四阶行列式再按第 1 行展开，得 $D_5=5D_4-6D_3$，将此式变形为递推公式

$$D_5-3D_4=2(D_4-3D_3),$$

递推上式可得

$$\begin{aligned}D_5-3D_4&=2(D_4-3D_3)=2^2(D_3-3D_2)\\&=2^3(D_2-3D_1)=2^3(25-6-3\cdot5)=2^5,\end{aligned}$$

即

$$D_5=3D_4+2^5,$$

再递推上式，得

$$\begin{aligned}D_5&=3D_4+2^5=3(3D_3+2^4)+2^5\\&=3^2D_3+3\cdot2^4+2^5\\&=3^2(3D_2+2^3)+3\cdot2^4+2^5\\&=3^3D_2+3^2\cdot2^3+3\cdot2^4+2^5\\&=3^3(3D_1+2^2)+3^2\cdot2^3+3\cdot2^4+2^5\\&=3^4D_1+3^3\cdot2^2+3^2\cdot2^3+3\cdot2^4+2^5\\&=3^4(3+2)+3^3\cdot2^2+3^2\cdot2^3+3\cdot2^4+2^5\\&=3^5+3^4\cdot2+3^3\cdot2^2+3^2\cdot2^3+3\cdot2^4+2^5\\&=3^6-2^6=665.\end{aligned}$$

■

例 1.12 证明范德蒙德(Vandermonde)行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\x_1&x_2&x_3&\cdots&x_n\\x_1^2&x_2^2&x_3^2&\cdots&x_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\x_1^{n-1}&x_2^{n-1}&x_3^{n-1}&\cdots&x_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\quad(n\geqslant2),$$

其中记号“$\prod$”表示连乘，等式右端为所有满足 $1\leqslant j<i\leqslant n$ 的因子(x_i-

x_j)的连乘积，即

$$\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)(x_3-x_2)(x_4-x_2)\cdots$$
$$(x_n-x_2)\cdots(x_{n-1}-x_{n-2})(x_n-x_{n-2})(x_n-x_{n-1}).$$

证　用数学归纳法证明.

当 $n=2$ 时，$D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1=\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant 2}(x_i-x_j)$，结论成立.

当 $n>2$ 时，假设结论对 $n-1$ 阶范德蒙德行列式成立，下面证明对 n 阶范德蒙德行列式结论也成立：在 D_n 中，从第 n 行开始，由下而上依次将每行减去它上一行的 x_1 倍，得

$$D_n\xlongequal[i=n,\ n-1,\ \cdots,\ 2]{r_i-x_1r_{i-1}}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}_n,$$

按第 1 列展开，并提取各列的公因子，得

$$D_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}_{n-1},$$

由归纳假设知

$$\begin{aligned}D_n&=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\\&=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant 2}(x_i-x_j).\end{aligned}$$

由归纳法原理知，结论对所有 $n\geqslant 2$ 都成立. ■

练　　习　　1.2

1. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix}103 & 100 & 204\\ 199 & 200 & 395\\ 301 & 300 & 600\end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix}a-b-c & 2a & 2a\\ 2b & b-c-a & 2b\\ 2c & 2c & c-a-b\end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & -3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 & -3 \\ 1 & -4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$；　(4) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & x \\ 1 & 4 & 4 & x^2 \\ 1 & 8 & -8 & x^3 \end{vmatrix}$.

2. 用行列式的性质证明：

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}=(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b).$$

3. 计算下列 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} n & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & n & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & n & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & n \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & -(n-1) \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & x+1 \end{vmatrix}$.

4. 已知四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 6 & 8 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}=-86,$$

求：(1) $A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}$；

（2）$-4A_{13}+2A_{23}-6A_{33}-4A_{43}$.

§1.3　克莱姆(Cramer)法则

在§1.1 节我们推导出了二、三元线性方程组在系数行列式 $D\neq 0$ 时，必有唯一解 $x_j=\dfrac{D_j}{D}(j=1,2$ 或 $1,2,3)$. 本节我们讨论恰有 n 个方程的 n 元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n,\end{cases} \tag{1.14}$$

当其系数行列式不为零时的求解法，即克莱姆(Cramer)法则，并给出齐次线性方程组有非零解的必要条件.

定理 1.1(克莱姆法则)　若 n 元线性方程组(1.14)的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0,$$

则方程组(1.14)有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中 D_j 是把 D 的第 j 列元素 $a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj}$ 分别换成方程组(1.14)右端的常数项 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，而其余各列保持不变所得到的行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1,j-1}&b_1&a_{1,j+1}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&\cdots&a_{2,j-1}&b_2&a_{2,j+1}&\cdots&a_{2n}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{n,j-1}&b_n&a_{n,j+1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}(j=1,2,\cdots,n).$$

证　将方程组(1.14)的 n 个方程两边依次乘上 D 的第 j 列元素的代数余子式 $A_{1j}, A_{2j}, \cdots, A_{nj}$，再将这 n 个方程相加，可得

$$\begin{aligned}b_1A_{1j}+\cdots+b_nA_{nj}&=(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)A_{1j}+\cdots+\\ &\quad(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)A_{nj}\\ &=(a_{11}A_{1j}+\cdots+a_{n1}A_{nj})x_1+\cdots+(a_{1j}A_{1j}+\cdots+\\ &\quad a_{nj}A_{nj})x_j+\cdots+(a_{1n}A_{1j}+\cdots+a_{nn}A_{nj})x_n.\end{aligned}$$

由行列式的性质 1.3 的式(1.11)及其推论的式(1.13)，可得

$$b_1A_{1j}+\cdots+b_nA_{nj}=D\cdot x_j. \tag{1.15}$$

另一方面，将 D_j 按第 j 列展开，可得

$$D_j=b_1A_{1j}+\cdots+b_nA_{nj}, \tag{1.16}$$

结合式(1.15)和式(1.16)，可得

$$D\cdot x_j=D_j \quad (j=1,2,\cdots,n),$$

因此，当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.14)的唯一解为

$$x_j=\frac{D_j}{D} \quad (j=1,2,\cdots,n).$$ ■

例 1.13 用克莱姆法则解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2+3x_3-x_4=0,\\ x_1+3x_2+2x_3=-1,\\ 2x_2+x_3+x_4=1,\\ 3x_1-x_2-2x_4=0.\end{cases}$$

解 因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&1&3&-1\\1&3&2&0\\0&2&1&1\\3&-1&0&-2\end{vmatrix}=12\neq 0,$$

所以方程组有唯一解．由于

$$D_1=\begin{vmatrix}0&1&3&-1\\-1&3&2&0\\1&2&1&1\\0&-1&0&-2\end{vmatrix}=18,\quad D_2=\begin{vmatrix}2&0&3&-1\\1&-1&2&0\\0&1&1&1\\3&0&0&-2\end{vmatrix}=-12,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2&1&0&-1\\1&3&-1&0\\0&2&1&1\\3&-1&0&-2\end{vmatrix}=3,\quad D_4=\begin{vmatrix}2&1&3&0\\1&3&2&-1\\0&2&1&1\\3&-1&0&0\end{vmatrix}=33,$$

所以，方程组的唯一解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{3}{2},\ x_2=\frac{D_2}{D}=-1,\ x_3=\frac{D_3}{D}=\frac{1}{4},\ x_4=\frac{D_4}{D}=\frac{11}{4}.$$ ■

由例 1.13 的解题过程看出，对于较大的 n，计算量很大，此时克莱姆法则仅具有理论意义，不具有实际意义．对于未知数个数较多的线性方程组求解问题将在第 4 章中继续讨论．

当方程组(1.14)右端的常数项 b_1，b_2，…，b_n 全为零时，即

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0, \end{cases} \tag{1.17}$$

我们称之为齐次线性方程组．而当常数项 b_1，b_2，…，b_n 不全为零时，我们称方程组(1.14)为非齐次线性方程组．

定理 1.2　若线性方程组(1.14)的系数行列式 $D\neq 0$，则线性方程组(1.14)有解，且解唯一．

其逆否命题如下：

定理 1.2′　若线性方程组(1.14)无解或有两个不同的解，则其系数行列式 $D=0$.

对于齐次线性方程组(1.17)，$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 一定是该方程组的解，称其为齐次线性方程组(1.17)的**零解**．而若存在一组不全为零的数为方程组(1.17)的解，则称其为方程组(1.17)的**非零解**．显然，齐次线性方程组(1.17)一定有零解，但不一定有非零解．

将定理 1.2 和定理 1.2′应用于齐次线性方程组，可得如下定理：

定理 1.3　若齐次线性方程组(1.17)的系数行列式 $D\neq 0$，则方程组(1.17)只有零解．

定理 1.4　若齐次线性方程组(1.17)有非零解，则其系数行列式 $D=0$.

例 1.14　当 λ 取何值时，方程组

$$\begin{cases} 3\lambda x_1+3x_2+2x_3=0, \\ x_1+x_2-x_3=0, \\ (4\lambda-1)x_1+3x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

有非零解？

解　因为系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 3\lambda & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4\lambda-1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal{r_3-r_1} \begin{vmatrix} 3\lambda & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ \lambda-1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-5(\lambda-1),$$

由定理 1.4 知 $D=0$，即 $-5(\lambda-1)=0$，故 $\lambda=1$ 时，上述方程组有非零解．　■

练　习　1.3

1. 用克莱姆法则解下列线性方程组：

（1）$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3-x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+x_4=0, \\ 2x_1-6x_2+x_3-3x_4=0, \\ 3x_1-x_3+2x_4=0; \end{cases}$ （2）$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=5, \\ x_1+2x_2-x_3+4x_4=-2, \\ 2x_1-3x_2-x_3-5x_4=-2, \\ 3x_1+x_2+2x_3+11x_4=0. \end{cases}$

2．当 λ 为何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+\lambda x_2+x_3=0, \\ x_1+x_2+\lambda x_3=0 \end{cases}$$

有非零解？

习 题 1

（A）基础题

1．填空题：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}=$________.

（2）$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & x & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$中元素 x 的余子式等于________，代数余子式等于________.

（3）设行列式 $D=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$，则 $M_{41}+M_{42}+M_{43}+M_{44}=$________，$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=$________.

（4）方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}=0$ 的根为________.

（5）$D=\begin{vmatrix} 103 & 100 & 204 \\ 199 & 200 & 395 \\ 301 & 300 & 600 \end{vmatrix}=$________.

（6）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 1 & 2^3 & 3^3 & 4^3 \\ 1 & 2^4 & 3^4 & 4^4 \end{vmatrix}=$________.

2. 选择题：

（1）记 $D=|a_{ij}|$ 为三阶行列式，则行列式 $|-2a_{ij}|=$（　　）.

（A）$2D$；　（B）2^3D；　（C）-2^3D；　（D）$-2D$.

（2）已知 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=1$，则 $\begin{vmatrix} 6a_{11} & -2a_{12} & -10a_{13} \\ -3a_{21} & a_{22} & 5a_{23} \\ -3a_{31} & a_{32} & 5a_{33} \end{vmatrix}=$（　　）.

（A）15；　（B）30；　（C）90；　（D）45.

（3）设 $D_n=\begin{vmatrix} a & & & 1 \\ & a & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & a \end{vmatrix}$，其中未写出的元素都为 0，则 $D_n=$（　　）.

（A）a^n；　（B）a^{n-2}；

（C）a^n+a^{n-2}；　（D）a^n-a^{n-2}.

（4）设行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，则 $\begin{vmatrix} c_1 & b_1+2c_1 & a_1+2b_1+3c_1 \\ c_2 & b_2+2c_2 & a_2+2b_2+3c_2 \\ c_3 & b_3+2c_3 & a_3+2b_3+3c_3 \end{vmatrix}=$（　　）.

（A）$-D$；　（B）D；

（C）$-2D$；　（D）$2D$.

（5）四阶行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}=$（　　）.

（A）$a_1a_2a_3a_4-b_1b_2b_3b_4$；

（B）$a_1a_2a_3a_4+b_1b_2b_3b_4$；

（C）$(a_1a_2-b_1b_2)(a_3a_4-b_3b_4)$；

（D）$(a_2a_3-b_2b_3)(a_1a_4-b_1b_4)$.

3. 计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

4. 计算下列 n 阶行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$；

(2) $\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$.

5. 用克莱姆法则解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

6. 用克莱姆法则求三次多项式 $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$，使得

$$f(-2) = 3，f(-1) = 4，f(1) = 6，f(2) = 19.$$

7. 问 λ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)x_1-2x_2+4x_3=0,\\ 2x_1+(3-\lambda)x_2+x_3=0,\\ x_1+x_2+(1-\lambda)x_3=0\end{cases}$$

有非零解？

（B）提高题

1. 计算行列式 $D_4=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2\end{vmatrix}$.

2. 已知五阶行列式 $D_5=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5\\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2\\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0\end{vmatrix}=27$，求 $A_{41}+A_{42}+A_{43}$ 和 $A_{44}+A_{45}$.

3. 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & & & \\ & a_2 & b_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1}\\ b_n & & & & a_n\end{vmatrix}$.

4. 已知 $D_n=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}$，求 $A_{11}+A_{12}+\cdots+A_{1n}$.

5. 计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix}2 & 0 & \cdots & 0 & 2\\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2\end{vmatrix}$.

6. 计算五阶行列式 $D_5=\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix}$.

7. 证明：$D_n=\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & x & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & a_2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & x+a_1 \end{vmatrix}$

$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$.

第 2 章　矩　　阵

矩阵是线性代数的基本内容和重要工具．作为代数对象(代数系)首要是弄清它的运算性质，因而作为本章的主要内容给出了矩阵的加法、数乘、乘法、转置等运算，进而讨论了其有关性质，介绍了一类特殊矩阵——可逆矩阵及矩阵处理中的技巧——分块矩阵．本章内容的重要作用将在线性代数的后续内容及实际工作或其他学科中看到，突出的体现是抽象的代数对象(如线性空间正交变换、二次型等)可用矩阵表示，从而可以通过对矩阵的研究达到研究其他代数对象的目的．

§2.1　矩阵概念

矩阵的概念是 1850 年首先由希尔维斯特(Sylvester)提出来的，1858 年凯莱(Cayley)建立了矩阵运算规则，从此矩阵逐渐成为数学的一个重要分支．

在生产活动和日常生活中，我们常常用数表表示一些量或关系，如工厂中的产量统计表、市场上的价目表等．

例 2.1　某户居民第二季度每个月水(单位：t)、电(单位：kW・h)、天然气(单位：m^3)的使用情况，可以用一个三行三列的数表表示为

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{水} & \text{电} & \text{气} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 9 & 165 & 14 \\ 10 & 190 & 15 \\ 10 & 210 & 16 \end{pmatrix} \end{array}.$$

由例 2.1 可以看到，对于不同的问题可以用不同的数表来表示，我们将这些数表统称为矩阵．

定义 2.1　由 $m\times n$ 个数排成一个 m 行 n 列，并括以圆括弧(或方括弧)的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列**矩阵**，简称 $m\times n$ 矩阵．矩阵通常用大写字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，…表示．

上述矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，其中 a_{ij}（$i=1$，2，…，m；$j=1$，2，…，n）称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列元素，也可记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

注：矩阵的行数 m 与列数 n 可能相等，也可能不等．

下面介绍常用的几个**特殊矩阵**：

当 $m=1$ 时，即 $\boldsymbol{A}=(a_{11}，a_{12}，\cdots，a_{1n})$称为**行矩阵**．

当 $n=1$ 时，即 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$称为**列矩阵**．

所有元素全为零的 $m\times n$ 矩阵称为**零矩阵**，记作 $\boldsymbol{O}_{m\times n}$或 $\boldsymbol{O}$.

如：$\boldsymbol{O}_{3\times 4}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

当 $m=n$ 时，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

称为 n **阶矩阵**，或 n **阶方阵**．

当 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$为 n 阶方阵，且 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

称为**对角矩阵**．

当对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中对角线上元素全为同一非零常数时，称为 n 阶**数量矩阵**．

如：$\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$.

当对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中对角线上元素全为 1 时，称为 n 阶**单位矩阵**，记作 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{E}$.

如：$\boldsymbol{I}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{I}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

当 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，如果 $i>j$ 时，$a_{ij}=0$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

称为**上三角矩阵**.

当 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵，如果 $i<j$ 时，$a_{ij}=0$，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

称为**下三角矩阵**.

上三角矩阵和下三角矩阵统称为**三角矩阵**.

行阶梯形矩阵：

(1) 如果它既有零行(即元素全为零的行)，又有非零行(即元素不全为零的行)，则所有的零行都位于非零行的下方；

(2) 各非零行的首个非零元素(从左到右的第一个不为零的元素)的列标随着行标的增大而严格增大.

如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

行最简形矩阵：若行阶梯形矩阵满足：

(1) 每个非零行的首个非零元素是"1"；

(2) 且这个"1"所在列的其余元素都是 0，

则称此矩阵为行最简形矩阵.

如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

标准形矩阵：左上角是一个单位矩阵，其余元素全部为 0 的矩阵.

如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

练　习　2.1

1. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3×4 矩阵，若其元素 $a_{ij}=-i+j$，试求出 $\boldsymbol{A}$.

2. 对于下列矩阵，指出它们的类型：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1\\0&4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&4&6\\0&0&0&1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&0&0\\2&1&0\\0&3&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}3&&\\&4&\\&&5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

§2.2　矩阵运算

2.2.1　矩阵的加法

定义 2.2　如果两个矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times p}$满足：

（1）行数和列数分别相同，即 $m=s$，$n=p$；

（2）对应元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}\,(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$，
则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

例如，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0&-5\\-2&1&4\end{pmatrix},$$

那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，当且仅当 $a_{11}=3$，$a_{12}=0$，$a_{13}=-5$，$a_{21}=-2$，$a_{22}=1$，$a_{23}=4$.

定义 2.3　设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，则称矩阵

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11}&a_{12}+b_{12}&\cdots&a_{1n}+b_{1n}\\a_{21}+b_{21}&a_{22}+b_{22}&\cdots&a_{2n}+b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}+b_{m1}&a_{m2}+b_{m2}&\cdots&a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **的和**，记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

同样，我们可以定义矩阵的减法：$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$，称 $\boldsymbol{D}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差.

例 2.2　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&-4\\-2&5&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-3&2\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$.

解
$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0&-4\\-2&5&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2&0+3&-4+4\\-2+0&5-3&1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&3&0\\-2&2&3\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&0&-4\\-2&5&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&3&4\\0&-3&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-2&0-3&-4-4\\-2-0&5+3&1-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-3&-8\\-2&8&-1\end{pmatrix}.$$ ■

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{O}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，不难验证矩阵的加法满足以下运算规则：

（1）加法交换律：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

（2）加法结合律：$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

（3）零矩阵满足：$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$；

（4）记负矩阵 $(-\boldsymbol{A})=(-a_{ij})$，显然有 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$.

2.2.2　矩阵的数乘

定义 2.4　设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\lambda$ 为任意实数，则称矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$ 为数 λ 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**数乘**，其中 $c_{ij}=\lambda a_{ij}$（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$），记作 $\boldsymbol{C}=\lambda\boldsymbol{A}$，即

$$\lambda\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda a_{11}&\lambda a_{12}&\cdots&\lambda a_{1n}\\\lambda a_{21}&\lambda a_{22}&\cdots&\lambda a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\lambda a_{m1}&\lambda a_{m2}&\cdots&\lambda a_{mn}\end{pmatrix}.$$

例 2.3　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&-1&7\\-4&0&5\\2&6&0\end{pmatrix}$，则

$$2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2\times3&2\times(-1)&2\times7\\2\times(-4)&2\times0&2\times5\\2\times2&2\times6&2\times0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6&-2&14\\-8&0&10\\4&12&0\end{pmatrix}.$$ ■

对于常数 k，l 和矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，满足以下运算规则：

（1）数对矩阵的分配律：$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$；

（2）矩阵对数的分配律：$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

（3）数与矩阵的结合律：$(kl)\boldsymbol{A}=k(l\boldsymbol{A})=l(k\boldsymbol{A})$；

（4）数 1 与矩阵乘积满足：$1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

例 2.4 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & 0\\ 1 & 6\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 8 & 2\\ -1 & 7\end{pmatrix}$，求 $3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}$.

解 因为
$$3\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}9 & -6\\ 15 & 0\\ 3 & 18\end{pmatrix},\quad 2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}8 & -6\\ 16 & 4\\ -2 & 14\end{pmatrix},$$
所以
$$3\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -4\\ 5 & 4\end{pmatrix}.$$
■

2.2.3 矩阵的乘法

某地区甲、乙、丙三家商场同时销售两种品牌的家用电器，如果用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示各商场销售这两种家用电器的日平均销售量(单位：台)，用 $\boldsymbol{B}$ 表示两种家用电器的单位售价(单位：千元)和单位利润(单位：千元)：

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc}\text{Ⅰ} & \text{Ⅱ}\end{array} \\ \begin{pmatrix}20 & 10\\ 25 & 11\\ 18 & 9\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \text{甲}\\ \text{乙}\\ \text{丙}\end{array}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{单价} & \text{利润}\end{array}\\ \begin{pmatrix}3.5 & 0.8\\ 5 & 1.2\end{pmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \text{Ⅰ}\\ \text{Ⅱ}\end{array}$$

用矩阵 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{3\times 2}$ 表示这三家商场销售两种家用电器的每日总收入和总利润，那么 $\boldsymbol{C}$ 中的元素分别为

$$\text{总收入：}\begin{cases}c_{11}=20\times 3.5+10\times 5=120,\\ c_{21}=25\times 3.5+11\times 5=142.5,\\ c_{31}=18\times 3.5+9\times 5=108,\end{cases}$$

$$\text{总利润：}\begin{cases}c_{12}=20\times 0.8+10\times 1.2=28,\\ c_{22}=25\times 0.8+11\times 1.2=33.2,\\ c_{32}=18\times 0.8+9\times 1.2=25.2,\end{cases}$$

即 $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\\ c_{31} & c_{32}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\times 3.5+10\times 5 & 20\times 0.8+10\times 1.2\\ 25\times 3.5+11\times 5 & 25\times 0.8+11\times 1.2\\ 18\times 3.5+9\times 5 & 18\times 0.8+9\times 1.2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}120 & 28\\ 142.5 & 33.2\\ 108 & 25.2\end{pmatrix}$，

其中，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 中的第 i 行第 j 列的元素是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素的乘积之和 .

定义 2.5 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}$，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积定义为

$$C=AB=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$（$i=1$，2，…，$m$；$j=1$，2，…，$n$），即乘积矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 行、第 j 列的元素等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素的乘积之和，如下式所示：

$$\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{is} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & b_{sj} & \cdots \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}.$$

由定义 2.5 可知：

（1）只有当左矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数等于右矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数时，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 才能作乘法运算 $\boldsymbol{AB}$；

（2）$\boldsymbol{AB}$ 的行数等于左矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数，$\boldsymbol{AB}$ 的列数等于右矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数．

例 2.5　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}$，计算 $\boldsymbol{AB}$.

解　$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 10 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 2\times9+(-1)\times(-7) & 2\times(-8)+(-1)\times10 \\ -4\times9+0\times(-7) & -4\times(-8)+0\times10 \\ 3\times9+5\times(-7) & 3\times(-8)+5\times10 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 25 & -26 \\ -36 & 32 \\ -8 & 26 \end{pmatrix}.$$ ■

问：在例 2.5 中，能否计算 $\boldsymbol{BA}$?

由于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 有 2 列，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 3 行，$\boldsymbol{B}$ 的列数$\neq\boldsymbol{A}$ 的行数，所以 $\boldsymbol{BA}$ 是无意义的．

例 2.6　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解 $$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2\times2+4\times(-1)&2\times(-2)+4\times1\\1\times2+2\times(-1)&1\times(-2)+2\times1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}2&-2\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2\times2+(-2)\times1&2\times4+(-2)\times2\\-1\times2+1\times1&-1\times4+1\times2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2&4\\-1&-2\end{pmatrix}.$$ ■

由例 2.6 可知，矩阵乘法不满足交换律．一般地，$\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$，因此，在进行矩阵乘法运算时，要注意矩阵的前后位置不要任意调换，否则会出错．特别地，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **可交换**．

在例 2.6 中，$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}$，但是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 因此，在矩阵乘积中，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，则未必有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$.

一般地，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则未必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$，即矩阵乘法消去律一般也不成立．

例如，
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&2\\4&-4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3&1\\2&-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}2&-1\\1&-3\end{pmatrix},$$
则有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}=\begin{pmatrix}-2&-4\\4&8\end{pmatrix}$，但 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$.

可以证明，矩阵乘法满足下列运算律：

（1）乘法结合律：$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

（2）左乘分配律：$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{AC}$;

右乘分配律：$(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{CA}$.

（3）数乘结合律：$k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$，其中 k 是一个常数．

（4）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则 $\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{A}$.

（5）$\boldsymbol{AO}=\boldsymbol{O}$，$\boldsymbol{OA}=\boldsymbol{O}$.

定义 2.6 矩阵的幂为 $\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{A}^1=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$，…，$\boldsymbol{A}^k=\overbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}}^{k个}$,

其中 k 为正整数．

例 2.7　设 $\boldsymbol{A}=(1,\ 2,\ 3)$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$，（1）求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$；（2）设 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{BA}$，求 $\boldsymbol{C}^n$（n 为正整数）.

解　（1）$\boldsymbol{AB}=(1,\ 2,\ 3)\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}=1\times(-1)+2\times1+3\times2=7$，

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}(1,\ 2,\ 3)=\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\1&2&3\\2&4&6\end{pmatrix}.$$

（2）$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}^n&=(\boldsymbol{BA})^n=(\boldsymbol{BA})(\boldsymbol{BA})\cdots(\boldsymbol{BA})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})(\boldsymbol{AB})\cdots(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{A}\\&=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AB})^{n-1}\boldsymbol{A}=7^{n-1}\boldsymbol{BA}=7^{n-1}\begin{pmatrix}-1&-2&-3\\1&2&3\\2&4&6\end{pmatrix}.\end{aligned}$$ ■

定义 2.7　设 $\varphi(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_mx^m$ 为 x 的 m 次多项式，$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，称 $\varphi(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{A}+a_2\boldsymbol{A}^2+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m$ 为**矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 m 次多项式**．

$\boldsymbol{A}$ 的多项式可以像数 x 的多项式一样相乘或分解因式．例如，

$$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^2,$$

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^3=\boldsymbol{I}-3\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}^3,$$

但 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\neq\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2\neq\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$，为什么呢？

2.2.4　矩阵的转置

定义 2.8　将一个 $m\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}$$

的行和列互换，得到的 $n\times m$ 矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**转置矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，即

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$

由定义 2.8 可知，转置矩阵 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 的第 i 行第 j 列的元素等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行第 i 列的元素 .

矩阵的转置满足下列运算规则：

(1) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$；

(3) $(k\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}=k\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$($k$ 为实数)；

(4) $(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

例 2.8　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\\ -3 & 2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$，验证矩阵$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

解　因为

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\\ -3 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 6 & 8\\ 0 & 5\end{pmatrix}，(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}5 & 6 & 0\\ 0 & 8 & 5\end{pmatrix}；$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}4 & 0 & -3\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}，\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}，$$

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0 & -3\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 6 & 0\\ 0 & 8 & 5\end{pmatrix}，$$

所以
$$(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}5 & 6 & 0\\ 0 & 8 & 5\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$ ■

例 2.9　证明：$(\boldsymbol{ABC})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

证明　$(\boldsymbol{ABC})^{\mathrm{T}}=[(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

由例 2.9 可知，矩阵转置的运算规则(4)可以推广到多个矩阵相乘的情况，即
$$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_k)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}_k^{\mathrm{T}}\cdots\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{T}}.$$

定义 2.9　若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=a_{ji}$(i，$j=1$，2，…，n)，那么称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**；若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=-\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=-a_{ji}$(i，$j=1$，2，…，n)，那么称 $\boldsymbol{A}$ 为**反对称矩阵**.

例 2.10　设矩阵 $\boldsymbol{X}=(x_1，x_2，\cdots，x_n)^{\mathrm{T}}$ 满足 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X}=1$，$\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位阵，$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$，证明：$\boldsymbol{H}$ 是对称矩阵，且 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$.

证明　$\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{H}$，

所以 $\boldsymbol{H}$ 是对称矩阵，而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}&=\boldsymbol{H}^2=(\boldsymbol{I}-2\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})^2\\&=\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}+4(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}})\end{aligned}$$

$$=\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X})\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$$
$$=\boldsymbol{I}-4\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}+4\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}.$$ ■

2.2.5 方阵的行列式

定义 2.10 由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素所构成的行列式(各元素位置不变)，称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的**行列式**，记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det\boldsymbol{A}$.

$|\boldsymbol{A}|$ 满足下列运算规律($\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，λ 为数)

(1) $|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|$；

(2) $|\lambda\boldsymbol{A}|=\lambda^n|\boldsymbol{A}|$；

(3) $|\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

定义 2.11 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，把行列式 $|\boldsymbol{A}|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的矩阵

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**，记作 $\boldsymbol{A}^*$.

容易证明：$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$.

事实上，设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix} |\boldsymbol{A}| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |\boldsymbol{A}| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & |\boldsymbol{A}| \end{pmatrix}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

类似可证

$$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}.$$

练 习 2.2

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$，求 $3\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}-2\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$.

2. 计算下列乘积：

（1）$\begin{pmatrix}4&3&1\\1&-2&3\\5&7&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\2\\1\end{pmatrix}$；　　（2）$(1,\ 2,\ 3)\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$；

（3）$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}(-1,\ 2)$；　　（4）$(x_1,\ x_2,\ x_3)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

3. 举反例说明下列命题是错误的：

（1）若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$；

（2）若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ 或 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$；

（3）若 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{AY}$，且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，则 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{Y}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&&\\&3&\\&&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^2=$________，$\boldsymbol{A}^n=$________.

5. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶对称矩阵，证明：$\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵的充分必要条件是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$.

6. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^*=$________.

§2.3　方阵的逆矩阵

定义 2.12　对给定的 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，若存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**可逆矩阵**，且称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**.

定理 2.1　若 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵唯一.

证明　设 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 都是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则有

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{I},$$
$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{BI}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC})=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{IC}=\boldsymbol{C}.$$ ■

因为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵唯一，所以可记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

定理 2.2　$\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，且当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\boldsymbol{A}^*.$$

证明　必要性　由 $\boldsymbol{A}$ 可逆，知 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 存在，且有 $\boldsymbol{AA}^{-1}=\boldsymbol{I}$，从而

$$|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}^{-1}|=1,$$

因此 $|A|\neq 0$.

充分性　因 $AA^*=A^*A=|A|I$，由于 $|A|\neq 0$，则

$$A\left(\frac{A^*}{|A|}\right)=\left(\frac{A^*}{|A|}\right)A=I,$$

由定义 2.12 知，A 可逆，且 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$. ■

当 $|A|\neq 0$ 时，亦称 A 为非奇异矩阵；当 $|A|=0$ 时，亦称 A 为奇异矩阵.

推论　设 A 为 n 阶方阵，若存在 n 阶方阵 B 满足 $AB=I$（或 $BA=I$），则 A 可逆，且 $B=A^{-1}$.

证明　$AB=I\Rightarrow|A||B|=1\Rightarrow|A|\neq 0\Rightarrow A$ 可逆，此时，

$$B=IB=(A^{-1}A)B=A^{-1}(AB)=A^{-1}I=A^{-1}.$$ ■

可逆矩阵的性质：

（1）若 A 可逆，则 A^{-1} 也可逆，且 $(A^{-1})^{-1}=A$.

（2）若 A 可逆，$k\neq 0$，则 kA 可逆，且 $(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$.

（3）若 $A_{n\times n}$ 与 $B_{n\times n}$ 都可逆，则 AB 可逆，且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

（4）若 A 可逆，则 A^{T} 可逆，且 $(A^{\mathrm{T}})^{-1}=(A^{-1})^{\mathrm{T}}$.

（5）若 A 可逆，则 $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$.

例 2.11　求下列矩阵的逆矩阵：

（1）$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}(ad-bc\neq 0)$；（2）$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

解　（1）$A^*=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$，因 $|A|=ad-bc\neq 0$，故 A 可逆，且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

（2）$A^*=\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 9 & 12 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，因 $|A|=6\neq 0$，故 A 可逆，且

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 9 & 12 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$ ■

例 2.12 设 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$满足 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$，求 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{-1}$.

解 $\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}\Rightarrow\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}$

$$\Rightarrow(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I})=\boldsymbol{I},$$

故 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$ 可逆，且$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})^{-1}=\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}$. ■

例 2.13 设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$，求 $\boldsymbol{A}^n$.

解 因$|\boldsymbol{P}|=2\neq0$，故 $\boldsymbol{P}$ 可逆且 $\boldsymbol{P}^{-1}=\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}$.

由 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P\Lambda}$，得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$，从而有 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{P\Lambda}^2\boldsymbol{P}^{-1}$，…，$\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}$.

因为 $$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\Lambda}^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^2\end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{\Lambda}^n=\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix},$$

所以 $$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=\boldsymbol{P\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&2\\1&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2^n\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}\\&=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&2^{n+1}\\1&2^{n+2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&-2\\-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4-2^{n+1}&2^{n+1}-2\\4-2^{n+2}&2^{n+2}-2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}2-2^n&2^n-1\\2-2^{n+1}&2^{n+1}-1\end{pmatrix}.\end{aligned}$$ ■

例 2.14 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$，求$\left|\left(\dfrac{1}{3}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-2\boldsymbol{A}^*\right|$.

解 因为 $$\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I},$$
两边同时左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$，得

$$\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1},$$

所以 $$\left|\left(\frac{1}{3}\boldsymbol{A}\right)^{-1}-2\boldsymbol{A}^*\right|=\left|3\boldsymbol{A}^{-1}-2\cdot\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{-1}\right|=|2\boldsymbol{A}^{-1}|=2^3\ \frac{1}{|\boldsymbol{A}|}=16.$$ ■

例 2.15 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-3$，求$|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|$.

解 $|2\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}^{-1}|=2^n|\boldsymbol{A}^*||\boldsymbol{B}^{-1}|=2^n2^{n-1}\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{2^{2n-1}}{3}$. ■

练 习 2.3

1. 求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$；(3) $\begin{pmatrix}a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n\end{pmatrix}(a_1a_2\cdots a_n\neq 0)$.

2．设 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$($k$ 为正整数)，证明：$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^2+\cdots+\boldsymbol{A}^{k-1}$.

3．设方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$，证明 $\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 都可逆，并求 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 及 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}$.

4．设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，$|\boldsymbol{A}|=\dfrac{1}{2}$，求 $|(2\boldsymbol{A})^{-1}-3\boldsymbol{A}^*|$.

5．设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，证明其伴随阵 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^*$.

6．设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$ 满足关系式 $\boldsymbol{ABC}=\boldsymbol{I}$，则有(　　).

(A) $\boldsymbol{ACB}=\boldsymbol{I}$；　(B) $\boldsymbol{CBA}=\boldsymbol{I}$；　(C) $\boldsymbol{BAC}=\boldsymbol{I}$；　(D) $\boldsymbol{BCA}=\boldsymbol{I}$.

7．设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵为 $\boldsymbol{A}^*$，证明：

(1) 若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}^*|=0$；(2) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.

§2.4　分块矩阵

对于行数和列数较大的矩阵，运算时常采用分块法，使大矩阵的运算化成小矩阵的运算．用若干条横线与纵线将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 划分为若干个小矩阵，称这些小矩阵为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的子矩阵，以子矩阵为元素的矩阵称为分块矩阵．

如

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ \hdashline 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c:c:c:c}1 & 0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{array}\right)=(\boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{B}_2,\ \boldsymbol{B}_3,\ \boldsymbol{B}_4).$$

特点：同行上的子矩阵有相同的“行数”；同列上的子矩阵有相同的“列数”.

1．分块矩阵的加法

设 $\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_{m\times n}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}+\boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1}+\boldsymbol{B}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}+\boldsymbol{B}_{sr}\end{pmatrix}.$$

要求：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同阶，且分块方式相同．

2．分块矩阵的数乘

$$k\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{pmatrix}k\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ k\boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & k\boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix}.$$

3．分块矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}_{m\times l}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1t}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{st}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}_{l\times n}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{B}_{t1} & \cdots & \boldsymbol{B}_{tr}\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{C}_{ij}=(\boldsymbol{A}_{i1}\quad\cdots\quad\boldsymbol{A}_{it})\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{1j}\\ \vdots\\ \boldsymbol{B}_{tj}\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}_{i1}\boldsymbol{B}_{1j}+\cdots+\boldsymbol{A}_{it}\boldsymbol{B}_{tj},$$

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{C}_{11} & \cdots & \boldsymbol{C}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{C}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{C}_{sr}\end{pmatrix}.$$

要求：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 列的划分与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 行的划分相同．

例 2.16　设

$$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ \hdashline -1 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{I}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\left(\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ \hdashline 1 & 0 & 4 & 1\\ -1 & -1 & 2 & 0\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix},$$

则
$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{B}_{22}\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc:cc}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ \hdashline -2 & 4 & 3 & 3\\ -1 & 1 & 3 & 1\end{array}\right).$$
■

4. 分块矩阵的转置

$$\boldsymbol{A}_{m\times n}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1r}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{s1}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & \boldsymbol{A}_{sr}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}.$$

5. 分块对角矩阵

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，若 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵只在对角线上有非零子块，其余子块都为零子块，且在对角线上的子块都是方阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s\end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{A}_1$，$\boldsymbol{A}_2$，…，$\boldsymbol{A}_s$ 都是方阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**分块对角矩阵**.

分块对角矩阵的性质：

(1) $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}_1||\boldsymbol{A}_2|\cdots|\boldsymbol{A}_s|$；

(2) $\boldsymbol{A}$ 可逆$\Leftrightarrow \boldsymbol{A}_i(i=1,2,\cdots,s)$可逆，且

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_s^{-1}\end{pmatrix}.$$

例 2.17　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解　$\boldsymbol{A}=\left(\begin{array}{c|cc}5 & 0 & 0\\ \hline 0 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}$，

其中　$\boldsymbol{A}_1=(5)$，$\boldsymbol{A}_1^{-1}=\left(\dfrac{1}{5}\right)$；$\boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}_2^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{pmatrix}$，

所以　$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{5} & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}.$ ■

例 2.18　设 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$.

证明 设$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，把$\boldsymbol{A}$按列进行分块表示为$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，则

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1&\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2&\cdots&\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_n\end{pmatrix}.$$

因为$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，所以$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j=0(i,j=1,2,\cdots,n)$.

特别地，

$$\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j=0\ (j=1,2,\cdots,n).$$

而
$$\boldsymbol{\alpha}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j=(a_{1j},a_{2j},\cdots,a_{mj})\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{pmatrix}=a_{1j}^2+a_{2j}^2+\cdots+a_{mj}^2=0,$$

解得
$$a_{1j}=a_{2j}=\cdots=a_{mj}=0(j=1,2,\cdots,n),$$

即
$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}.$$ ■

例 2.19 设$\boldsymbol{A}_{m\times m}$与$\boldsymbol{B}_{n\times n}$都可逆，且$\boldsymbol{C}$为$n\times m$矩阵，$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}$，求$\boldsymbol{M}^{-1}$.

解 $|\boldsymbol{M}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\neq0\Rightarrow\boldsymbol{M}$可逆.

设$\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1&\boldsymbol{X}_2\\\boldsymbol{X}_3&\boldsymbol{X}_4\end{pmatrix}$，则由$\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix}$，得

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{X}_1&\boldsymbol{X}_2\\\boldsymbol{X}_3&\boldsymbol{X}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1&\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2\\\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_3&\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_m&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{I}_n\end{pmatrix},$$

即
$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{I}_m,\\\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{O},\\\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_3=\boldsymbol{O},\\\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}_2+\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{I}_n.\end{cases}$$

由于$\boldsymbol{A}_{m\times m}$与$\boldsymbol{B}_{n\times n}$都可逆，解得

$$\begin{cases}\boldsymbol{X}_1=\boldsymbol{A}^{-1},\\\boldsymbol{X}_2=\boldsymbol{O},\\\boldsymbol{X}_3=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1},\\\boldsymbol{X}_4=\boldsymbol{B}^{-1},\end{cases}$$

从而
$$\boldsymbol{M}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\\-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}.$$ ■

练　习　2.4

1. 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 及 s 阶矩阵 $\boldsymbol{B}$ 都可逆，求 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}$ 及 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}$.

2. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵 .

§2.5　初等变换

矩阵的初等变换是线性代数中的基本运算，它在化简矩阵、解线性方程组、求矩阵的逆矩阵等方面起着重要作用 .

定义 2.13　对矩阵作如下三种变换称为矩阵的**初等行变换**：

(1) 交换矩阵的任意两行(交换 i，j 两行，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$)；

(2) 用非零数 k 乘矩阵的某一行(第 i 行乘 k，记作 kr_i)；

(3) 将矩阵的某一行的 k 倍加到另一行上(第 j 行的 k 倍加到第 i 行上，记作 r_i+kr_j).

把定义中的“行”换成“列”，即得初等列变换的定义(所用记号是把 r 换成 c). 矩阵的初等行变换与初等列变换统称为矩阵的**初等变换** .

说明：(1) 矩阵的三种初等变换都是可逆的；

(2) 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经有限次初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **等价**，记为 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

矩阵的等价关系具有以下性质：

(Ⅰ) 反身性：$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{A}$.

(Ⅱ) 对称性：若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{A}$.

(Ⅲ) 传递性：若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}\sim\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{C}$.

例 2.20　试用初等行变换把矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4\\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4\\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9\end{pmatrix}$$

化为行最简形矩阵 .

解 $$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\2&-1&-1&1&2\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+(-3)r_1]{\substack{r_2+(-2)r_1\\ r_3+(-4)r_1}}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&-10&10&-6&-12\\0&3&-3&4&-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4+r_2]{r_3+\left(-\frac{10}{3}\right)r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&0&0&-\dfrac{8}{3}&8\\0&0&0&3&-9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\left(-\frac{3}{8}\right)r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&3&-9\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4+(-3)r_3}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&-3&3&-1&-6\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_1\text{（}\boldsymbol{B}_1\text{ 称为行阶梯形矩阵）}$$

$$\xrightarrow{\left(-\frac{1}{3}\right)r_2}\begin{pmatrix}1&1&-2&1&4\\0&1&-1&\dfrac{1}{3}&2\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1+(-1)r_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&\dfrac{2}{3}&2\\0&1&-1&\dfrac{1}{3}&2\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+\left(-\frac{1}{3}\right)r_3]{r_1+\left(-\frac{2}{3}\right)r_3}\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}_2\text{（}\boldsymbol{B}_2\text{ 称为行最简形矩阵）}.$$

■

说明：对任一矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，都可经有限次初等行变换化为行最简形矩阵.

如果对上述矩阵 $\boldsymbol{B}_2$ 再作初等列变换，可得

$$\boldsymbol{B}_2=\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{c_5+3c_4\\c_5+(-4)c_1\\c_3\leftrightarrow c_4}]{\substack{c_3+c_1\\c_3+c_2\\c_5+(-3)c_2}}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{F},$$

称矩阵 $\boldsymbol{F}$ 为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的**标准形**.

定理 2.3　对任意一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，都可以经过有限次初等变换(行变换或列变换)化为如下的标准形：

$$\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&0&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{O}_{r\times(n-r)}\\\boldsymbol{O}_{(m-r)\times r}&\boldsymbol{O}_{(m-r)\times(n-r)}\end{pmatrix}_{m\times n},$$

其中 r 就是行阶梯形矩阵中非零行的行数.

定义 2.14　单位矩阵经过一次初等变换所得到的矩阵称为**初等矩阵**.

三种初等变换对应三种初等矩阵：

(1) 交换 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行(列)与第 j 行(列)得到的矩阵：

$$\boldsymbol{R}(i,\ j)=\boldsymbol{C}(i,\ j)=\begin{pmatrix}1&&&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&&&\\&&1&&&&&&&&\\&&&0&\cdots&\cdots&\cdots&1&&&\\&&&\vdots&1&&&\vdots&&&\\&&&\vdots&&\ddots&&\vdots&&&\\&&&\vdots&&&1&\vdots&&&\\&&&1&\cdots&\cdots&\cdots&0&&&\\&&&&&&&&1&&\\&&&&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&&&&1\end{pmatrix};$$

(2) 用非零数 k 乘 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行(列)得到的矩阵：

$$\boldsymbol{R}(i(k))=\boldsymbol{C}(i(k))=\begin{pmatrix}1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & k & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix};$$

（3）将 $\boldsymbol{I}$ 的第 i 行元素的 k 倍加到第 j 行上（或将 $\boldsymbol{I}$ 的第 j 列元素的 k 倍加到第 i 列上）得到的矩阵：

$$\boldsymbol{R}(i(k),\ j)=\boldsymbol{C}(j(k),\ i)=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & k & \cdots & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1\end{pmatrix}.$$

容易验证三种初等矩阵都可逆，且它们的逆阵也都是同类型的初等矩阵，即

$$\boldsymbol{R}(i,\ j)^{-1}=\boldsymbol{R}(i,\ j);\ \boldsymbol{R}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{R}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right);\ \boldsymbol{R}(i(k),\ j)^{-1}=\boldsymbol{R}(i(-k),\ j);$$

$$\boldsymbol{C}(i,\ j)^{-1}=\boldsymbol{C}(i,\ j);\ \boldsymbol{C}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{C}\left(i\left(\frac{1}{k}\right)\right);\ \boldsymbol{C}(i(k),\ j)^{-1}=\boldsymbol{C}(i(-k),\ j).$$

对矩阵施行某种初等行（列）变换，只要用相应的初等矩阵左（右）乘该矩阵即可．例如，设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix},$$

交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行和第 3 行，可用 3 阶初等矩阵 $\boldsymbol{R}(1,\ 3)$ 左乘 $\boldsymbol{A}$ 得到，即

$$\boldsymbol{R}(1,\ 3)\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 8 & 9\\ 4 & 5 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

若要将 $\boldsymbol{A}$ 的第 3 列的 (-2) 倍加到第 1 列上，则要用 3 阶初等矩阵 $\boldsymbol{C}(3(-2),\ 1)$

右乘 $\boldsymbol{A}$ 得到，即

$$\boldsymbol{AC}(3(-2),\ 1)=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5&2&3\\-8&5&6\\-11&8&9\end{pmatrix}.$$

一般地，初等变换与初等矩阵的关系如下：

定理 2.4　设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行(列)变换，相当于用相应的 m 阶(n 阶)初等矩阵左(右)乘 $\boldsymbol{A}$.

定理 2.5　可逆矩阵经过初等变换后仍为可逆矩阵，不可逆矩阵经过初等变换后仍为不可逆矩阵 .

定理 2.6　如果 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 可经过有限次初等变换化为单位阵 $\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{I}$.

定理 2.7　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可表示为有限个初等矩阵的乘积 .

证明　必要性　设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，由定理 2.6 知，$\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{I}$，即存在初等矩阵 $\boldsymbol{R}_1$，$\boldsymbol{R}_2$，…，$\boldsymbol{R}_s$，$\boldsymbol{C}_1$，$\boldsymbol{C}_2$，…，$\boldsymbol{C}_t$，使得

$$\boldsymbol{R}_s\cdots\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{C}_2\cdots\boldsymbol{C}_t=\boldsymbol{I},$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 及初等矩阵 $\boldsymbol{R}_1$，$\boldsymbol{R}_2$，…，$\boldsymbol{R}_s$，$\boldsymbol{C}_1$，$\boldsymbol{C}_2$，…，$\boldsymbol{C}_t$ 都可逆，所以

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{R}_1^{-1}\boldsymbol{R}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{R}_s^{-1}\cdot\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{C}_t^{-1}\cdots\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{C}_1^{-1}=\boldsymbol{R}_1^{-1}\boldsymbol{R}_2^{-1}\cdots\boldsymbol{R}_s^{-1}\cdot\boldsymbol{C}_t^{-1}\cdots\boldsymbol{C}_2^{-1}\boldsymbol{C}_1^{-1},$$

由于初等矩阵的逆矩阵仍为初等矩阵，故 $\boldsymbol{A}$ 可表示为有限个初等矩阵的乘积 .

充分性　因为初等矩阵可逆，它们的乘积也可逆，故 $\boldsymbol{A}$ 可逆 .　■

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，则由定理 2.7 知，存在初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_2$，…，$\boldsymbol{P}_l$，使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\cdots\boldsymbol{P}_l$，故有 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{P}_l^{-1}\boldsymbol{P}_{l-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_1^{-1}$，由 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 和 $\boldsymbol{P}_l^{-1}\boldsymbol{P}_{l-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_1^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$ 分别可得

$$\boldsymbol{P}_l^{-1}\boldsymbol{P}_{l-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I},\tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{P}_l^{-1}\boldsymbol{P}_{l-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_1^{-1}\boldsymbol{I}=\boldsymbol{A}^{-1}.\tag{2.2}$$

式(2.1)表明 $\boldsymbol{A}$ 经过一系列初等行变换可化为单位阵 $\boldsymbol{I}$；式(2.2)表明 $\boldsymbol{I}$ 经过同一系列初等行变换可化为 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

用分块矩阵形式将式(2.1)和式(2.2)合并为

$$\boldsymbol{P}_l^{-1}\boldsymbol{P}_{l-1}^{-1}\cdots\boldsymbol{P}_1^{-1}(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{I})=(\boldsymbol{I}\ \vdots\ \boldsymbol{A}^{-1}),$$

故在求 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 时，先构造 $n\times 2n$ 矩阵 $(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{I})$，然后对其施行初等行变换，当把 $\boldsymbol{A}$ 化为单位阵 $\boldsymbol{I}$ 时，竖线后的单位阵 $\boldsymbol{I}$ 就化为了 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I}) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (\boldsymbol{I} \mid \boldsymbol{A}^{-1}).$$

例 2.21 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 1 & 9 \end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解 $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{I})=\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[r_3+3r_1]{r_2+2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+(-2)r_2]{r_1+(-1)r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & -3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2+(-1)r_3]{r_1+3r_3}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -7 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right),$$

所以
$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} -4 & -7 & 3 \\ -3 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
■

例 2.22 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$满足 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{C}+2\boldsymbol{X}$，求 $\boldsymbol{X}$.

解 移项得
$$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C},$$
因为
$$|\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}|=5\neq 0,$$
故 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 可逆，从而

$$\boldsymbol{X}=(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{C}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
■

练 习 2.5

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 3\\1 & 1 & 1\\2 & 3 & 5\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 3\\0 & -1 & 0\\2 & 3 & 5\end{pmatrix}$，则由 $\boldsymbol{A}$ 变换为 $\boldsymbol{B}$ 的一个初等变换为________；由 $\boldsymbol{B}$ 变换为 $\boldsymbol{A}$ 的一个初等变换为__________.

2. 用矩阵的初等变换求方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ 的逆矩阵.

3. k 取何值时，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & k & 0\\1 & -1 & 1\end{pmatrix}$ 可逆，并在 $\boldsymbol{A}$ 可逆的条件下求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

§2.6 矩阵的秩

定义 2.15 在 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中任取 k 行与 k 列($k\leqslant\min\{m, n\}$)，位于这些行、列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 $\boldsymbol{A}$ 中所处的位置次序而得到的 k 阶行列式，称为 $\boldsymbol{A}$ 的 k **阶子式**.

说明：$m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 k 阶子式共有 $C_m^k\cdot C_n^k$ 个.

定义 2.16 若在矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有一个 r 阶子式 D 不为零，且所有的 $r+1$ 阶子式(如果存在的话)全等于零，则称 D 为 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式. 数 r 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**秩**，记作 $R(\boldsymbol{A})$. 并规定零矩阵的秩等于零.

说明：(1) 由行列式按行按列展开的性质知，在 $\boldsymbol{A}$ 中所有的 $r+1$ 阶子式全为零时，所有高于 $r+1$ 阶的子式也全为零(如果存在). 因此，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 中不为零的子式的最高阶数.

(2) 由定义知 $R(\boldsymbol{A})\leqslant\min\{m, n\}$，且有 $R(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=R(\boldsymbol{A})$.

(3) 对 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，当 $R(\boldsymbol{A})=n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为满秩矩阵；当 $R(\boldsymbol{A})<n$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为降秩矩阵. 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $|\boldsymbol{A}|\neq0$，故 $R(\boldsymbol{A})=n$，因此可逆矩阵一定是满秩矩阵，从而 $\boldsymbol{A}$ 可逆$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 非奇异$\Leftrightarrow\boldsymbol{A}$ 满秩.

例 2.23 求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的秩，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 4 & -3 & 12 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 4 & -5 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解 易知 $\boldsymbol{A}$ 的一个二阶子式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}=4\neq 0,$$

而 $\boldsymbol{A}$ 的四个三阶子式都为零，即

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -1 & 4 & -3 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \\ -1 & 4 & 12 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 12 \end{vmatrix}=0,\ \begin{vmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 12 \end{vmatrix}=0,$$

所以 $R(\boldsymbol{A})=2$.

矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为行阶梯形矩阵，很容易观察得出其秩为 $R(\boldsymbol{B})=2$，即为其非零行的行数． ■

定理 2.8 若 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$.

说明：据此定理，我们可以找到一个求 $R(\boldsymbol{A})$的简便方法，先通过初等行变换将 $\boldsymbol{A}$ 化为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $R(\boldsymbol{A})$等于 $\boldsymbol{B}$ 的非零行的行数．

例 2.24 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{pmatrix}$，试求 $R(\boldsymbol{A})$.

解 方法一 直接从矩阵秩的定义出发讨论．

由于
$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}=(x+2)(x-1)^2,$$

故 (1) 当 $x\neq 1$ 且 $x\neq -2$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$，$R(\boldsymbol{A})=3$；

(2) 当 $x=1$ 时，$|\boldsymbol{A}|=0$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$R(\boldsymbol{A})=1$；

（3）当 $x=-2$ 时，$|\boldsymbol{A}|=0$，且 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$，此时有二阶子式 $\begin{vmatrix}-2&1\\1&-2\end{vmatrix}\neq 0$，因此 $R(\boldsymbol{A})=2$.

方法二　利用初等变换求秩.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}x&1&1\\1&x&1\\1&1&x\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}1&1&x\\1&x&1\\x&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-xr_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&1&x\\0&x-1&1-x\\0&1-x&1-x^2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&1&x\\0&x-1&1-x\\0&0&-(x+2)(x-1)\end{pmatrix},$$

因此，（1）当 $x\neq 1$ 且 $x\neq -2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=3$；

（2）当 $x=1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=1$；

（3）当 $x=-2$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2$. ■

练　　习　　2.6

1. 在秩是 r 的矩阵中，有没有等于 0 的 $r-1$ 阶子式？有没有等于 0 的 r 阶子式？

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_nb_1&a_nb_2&\cdots&a_nb_n\end{pmatrix}$，其中 $a_i\neq 0$，$b_i\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$，则 $R(\boldsymbol{A})=$________.

3. 从矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中划去一行得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，则矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的秩的关系为（　　）.

（A）$R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})+1$；

（B）$R(\boldsymbol{A})>R(\boldsymbol{B})$；

（C）$R(\boldsymbol{A})\geqslant R(\boldsymbol{B})\geqslant R(\boldsymbol{A})-1$；

（D）$R(\boldsymbol{B})>R(\boldsymbol{A})-1$.

4. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，则下列结论正确的是（　　）.

（A）$\boldsymbol{A}$ 的所有阶数大于 r 的子式(如果存在)全等于零；

（B）$\boldsymbol{A}$ 没有 $r-1$ 阶的非零子式；

（C）$\boldsymbol{A}$ 的所有 r 阶子式都不等于零；

（D）$\boldsymbol{A}$ 的所有 $r-1$ 阶子式都不等于零.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，$\boldsymbol{P}$ 是三阶初等矩阵，则(　　).

（A）$R(\boldsymbol{PA})<R(\boldsymbol{A})$；　　（B）$R(\boldsymbol{PA})=R(\boldsymbol{A})$；

（C）$R(\boldsymbol{PA})>R(\boldsymbol{A})$；　　（D）$R(\boldsymbol{PA})=3$.

6. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵，$R(\boldsymbol{A})=1$，则(　　).

（A）$R(\boldsymbol{A}^*)=3$；　　（B）$R(\boldsymbol{A}^*)=2$；

（C）$R(\boldsymbol{A}^*)=1$；　　（D）$R(\boldsymbol{A}^*)=0$.

7. 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -3 & -1\\ 2 & -1 & 3 & 1 & -3\\ 7 & 0 & 5 & -1 & -8\end{pmatrix}$的秩，并求一个最高阶非零子式.

习　题　2

（A）基础题

1. 填空题：

（1）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 都是方阵，且 $\boldsymbol{BAC}$ 有意义，则 $\boldsymbol{B}$ 是____阶方阵，$\boldsymbol{C}$ 是____阶方阵.

（2）若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^2$ ________，$\boldsymbol{A}^3$ ________.

（3）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$________，$(\boldsymbol{A}^*)^{-1}=$________.

（4）设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=5$，则 $|\boldsymbol{A}^*|$______，$|2\boldsymbol{A}|$______，$|\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$______.

（5）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵，$|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=-3$，则 $|\boldsymbol{A}^*(2\boldsymbol{B})^{-1}|=$______.

（6）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 5\\ 3 & 4 & t\end{pmatrix}$，且 $R(\boldsymbol{A})$，则 $t=$________.

2．选择题：

（1）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，下列命题正确的是（　　）．

（A）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$；　　（B）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$；

（C）$\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{I}=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})$；　　（D）$(\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$．

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 是方阵，若 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$，则必有（　　）．

（A）$\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$ 时，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$；　　（B）$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$ 时，$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$；

（C）$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq 0$；　　（D）$|\boldsymbol{A}|\neq 0$ 时，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$.

（3）设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵，下列命题正确的是（　　）．

（A）$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}|+|\boldsymbol{B}|$；　　（B）$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$；

（C）$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{BA}|$；　　（D）$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$．

（4）下列矩阵为初等矩阵的是（　　）．

（A）$\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$；　　（B）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$；

（C）$\begin{pmatrix}3&1&2\\1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$；　　（D）$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$．

（5）矩阵$\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}$的标准形是（　　）．

（A）$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$；　　（B）$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$；

（C）0；　　（D）1．

3．解答题：

（1）求与 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\1&-1\end{pmatrix}$可交换的矩阵．

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，满足 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$，$|\boldsymbol{A}|<0$，求 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|$．

（3）设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，求 $|(3\boldsymbol{A})^{-1}-2\boldsymbol{A}^*|$．

（4）求矩阵 $\boldsymbol{X}$，使 $\boldsymbol{AX}=2\boldsymbol{X}+\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&1&-1\\0&1&4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}4&-5\\1&2\\2&3\end{pmatrix}$．

（5）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{ABA}^*=2\boldsymbol{BA}^*+\boldsymbol{I}$，求 $|\boldsymbol{B}|$．

(6) 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & -8 & 6 & -8 & -4 \\ 1 & 5 & -6 & 6 & 3 \\ 2 & 6 & -4 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & -4 & 18 \end{pmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 .

(B) 提高题

1. 填空题：

(1) 设 $\boldsymbol{\alpha}$ 是行矩阵，$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置矩阵，若 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=$________.

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶反对称矩阵，则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

(3) 设 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则 $3\boldsymbol{A}^{*}=$________.

(4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$，则 $\boldsymbol{B}^{-1}=$________.

2. 选择题：

(1) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是反对称矩阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则乘积 $\boldsymbol{AB}$ 是(　　).

(A) 反对称矩阵；　　(B) 对称矩阵；

(C) 非退化矩阵；　　(D) 三角矩阵 .

(2) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵，$\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵，若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$，则(　　).

(A) $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 不可逆；

(B) $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 不可逆，$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆；

(C) $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 可逆；

(D) $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 不可逆 .

(3) 设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，则必有(　　).

(A) 当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=a$；

(B) 当 $|\boldsymbol{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\boldsymbol{B}|=-a$；

(C) 当 $|\boldsymbol{A}|\geqslant 0$ 时，$|\boldsymbol{B}|\geqslant 0$；

(D) 当 $|\boldsymbol{A}|=0$ 时，$|\boldsymbol{B}|=0$.

(4) 设矩阵 $\boldsymbol{A}_{3\times 2}$，$\boldsymbol{B}_{2\times 3}$，则(　　).

(A) $|\boldsymbol{AB}|=0$；　　(B) $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$；

(C) $|\boldsymbol{BA}|=0$；　　(D) $|\boldsymbol{BA}|\neq 0$.

3. 解答题：

（1）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ \lambda & 1\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2$，$\boldsymbol{A}^3$，…，$\boldsymbol{A}^k$；

（2）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & 4 & & \\ 4 & -3 & \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{O}} \\ & & 2 & 0\\ \multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{O}} & 2 & 2\end{pmatrix}$，求 $|\boldsymbol{A}^8|$ 及 $\boldsymbol{A}^4$；

（3）已知矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}^3=2\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^2-2\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$，求 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

第 3 章 向量组的线性相关性

本章将介绍 n 维向量的基本概念及其运算，讨论 n 维向量的线性相关性，给出向量组的秩的概念及向量组的秩与矩阵的秩的关系，并利用矩阵的秩来研究向量组的线性相关性．这些问题是线性代数中的基本内容，也为后面线性方程组解的讨论提供了必要的预备知识．

§3.1 n 维向量及其运算

定义 3.1 n 个数组成的有序数组 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 称为 n **维向量**．数 a_i 称为向量的第 i 个分量，分量都是实数的向量称为**实向量**；分量都是复数的向量称为**复向量**．本章只讨论实向量．

我们常用小写的希腊字母 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}$，…表示向量．

几何上的向量可以看作 n 维向量的特殊情形．平面上的向量称为 2 维向量，空间上的向量称为 3 维向量．当 $n>3$ 时，n 维向量没有直观的几何意义．

向量通常写成一行的形式，称为**行向量**，即 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$．也可写成列的形式，称为**列向量**，即

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

设有两个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，如果它们对应的分量都相等，即 $a_i=b_i(i=1, 2, \cdots, n)$，则称向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ **相等**，记作 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$.

分量都是零的向量称为**零向量**，记作 $\mathbf{0}$，即 $\mathbf{0}=(0, 0, \cdots, 0)$.

注：维数不同的零向量是不相等的．

向量 $(-a_1, -a_2, \cdots, -a_n)$ 称为向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{\alpha}$.

定义 3.2 设有两个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$，$\boldsymbol{\beta}=(b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则称 n 维向量 $(a_1+b_1, a_2+b_2, \cdots, a_n+b_n)$ 为向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的**和**，记作

$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，即

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ \cdots,\ a_n+b_n).$$

利用负向量还可以定义向量的减法，即

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})=(a_1-b_1,\ a_2-b_2,\ \cdots,\ a_n-b_n).$$

定义 3.3　设 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$，$k$ 为实数，称$(ka_1,\ ka_2,\ \cdots,\ ka_n)$为数 k 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**数量乘积**，简称**数乘**，记作 $k\boldsymbol{\alpha}$，即

$$k\boldsymbol{\alpha}=(ka_1,\ ka_2,\ \cdots,\ ka_n).$$

向量的加法和数乘运算统称为向量的线性运算 .

向量的线性运算与行(列)矩阵的运算规律相同，从而也满足下面的运算规律：

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

(3) $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$；

(4) $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$；

(5) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$；

(6) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$；

(7) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$；

(8) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$，

其中 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\gamma}\in\mathbf{R}^n$，$k$，$l\in\mathbf{R}$.

例 3.1　设 $\boldsymbol{\alpha}=(2,\ 1,\ 0,\ -1)$，$\boldsymbol{\beta}=(2,\ 5,\ -3,\ 1)$，$\boldsymbol{\gamma}=(-1,\ 0,\ -2,\ 3)$.

(1) 求 $3\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}$；

(2) 如果有向量$\boldsymbol{x}$ 满足等式 $2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}-2\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，求向量$\boldsymbol{x}$.

解　(1)
$$\begin{aligned}3\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}+2\boldsymbol{\gamma}&=3(2,\ 1,\ 0,\ -1)-(2,\ 5,\ -3,\ 1)+2(-1,\ 0,\ -2,\ 3)\\&=(2,\ -2,\ -1,\ 2).\end{aligned}$$

(2) 由 $2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma}-2\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$，得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=\frac{1}{2}(2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\gamma})\\&=\frac{1}{2}[2(2,\ 1,\ 0,\ -1)+3(2,\ 5,\ -3,\ 1)-(-1,\ 0,\ -2,\ 3)]\\&=\left(\frac{11}{2},\ \frac{17}{2},\ -\frac{7}{2},\ -1\right).\end{aligned}$$ ■

例 3.2　称 n 维向量$\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0,\ 1,\ \cdots,\ 0)^{\mathrm{T}}$，$\cdots$，$\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0,\ 0,\ \cdots,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 为 n 维单位向量组，求 $a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$.

解　由向量的线性运算，得

$$\begin{aligned}&a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n\\=&a_1(1,\ 0,\ \cdots,\ 0)^{\mathrm{T}}+a_2(0,\ 1,\ \cdots,\ 0)^{\mathrm{T}}+\cdots+a_n(0,\ 0,\ \cdots,\ 1)^{\mathrm{T}}\end{aligned}$$

$$=(a_1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}+(0, a_2, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}+\cdots+(0, 0, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$$
$$=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}.$$ ■

练　习　3.1

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 2, 3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0, 3, -1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 及 $2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3$.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(3, 1, 2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(-1, 0, -2)^{\mathrm{T}}$，如果 $2\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\gamma}=3\boldsymbol{\beta}$，求 $\boldsymbol{\gamma}$.

§3.2　向量组的线性相关性

3.2.1　向量组的线性组合

考察线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{3.1}$$

令
$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}(j=1, 2, \cdots, n), \quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则线性方程组(3.1)可表示为如下的向量等式：

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{\beta}. \tag{3.2}$$

于是，方程组(3.1)是否有解，就相当于是否存在一组数 k_1，k_2，…，k_n 使得下列线性关系式成立：

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_n\boldsymbol{\alpha}_n.$$

在探讨这一问题之前，我们先介绍几个有关向量组的概念 .

定义 3.4　设 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，对于任一组实数 k_1，k_2，…，k_s，表达式 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个**线性组合**，k_1，k_2，…，k_s 称为这个线性组合的**系数** .

定义 3.5　给定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 和向量 $\boldsymbol{\beta}$，若存在一组实数 k_1，k_2，…，k_s，使

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$

则称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 的**线性组合**，也称向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ **线性表示**(线性表出).

例 3.3　任何一个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)^{\mathrm{T}}$ 都是 n 维单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1=(1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2=(0, 1, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n=(0, 0, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$ 的线性组合.

因为　$\boldsymbol{\alpha}=a_1\boldsymbol{\varepsilon}_1+a_2\boldsymbol{\varepsilon}_2+\cdots+a_n\boldsymbol{\varepsilon}_n$.

定义 3.6　设两个 n 维向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$；B：$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_t$. 如果向量组 A 中的每一个向量 $\boldsymbol{\alpha}_i(i=1, 2, \cdots, s)$都能由向量组 B 线性表示，则称向量组 A 可以由向量组 B 线性表示. 如果两个向量组 A 与 B 可以互相线性表示，则称这两个向量组**等价**.

例如，对于向量组

(Ⅰ) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 2, 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 4, 5)$；

(Ⅱ) $\boldsymbol{\beta}_1=(2, 6, 8)$，$\boldsymbol{\beta}_2=(-1, -6, -7)$，$\boldsymbol{\beta}_3=(2, 4, 6)$.

容易验证有下面关系：

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3=2\boldsymbol{\alpha}_1+0\boldsymbol{\alpha}_2;$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{2}{3}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_2.$$

由于这两个向量组能互相线性表出，因此，向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)等价.

不难验证向量组之间的等价具有以下性质：

(1) **自反性**：任一向量组与它自身等价.

(2) **对称性**：若向量组 A 与 B 等价，则向量组 B 也与 A 等价.

(3) **传递性**：若向量组 A 与 B 等价，向量组 B 与 C 等价，则向量组 A 与 C 也等价.

我们给出性质(3)的证明.

设向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 可以由向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，即存在一组实数 $k_{ij}(i=1, 2, \cdots, s;\ j=1, 2, \cdots, t)$使

$$\boldsymbol{\alpha}_i=k_{i1}\boldsymbol{\beta}_1+k_{i2}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_{it}\boldsymbol{\beta}_t\quad(i=1, 2, \cdots, s),$$

可用矩阵表示为

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)=(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t)\begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{s1} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{1t} & k_{2t} & \cdots & k_{st} \end{pmatrix}.$$

同理，向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_t$ 可由向量组 C：$\boldsymbol{\gamma}_1$，$\boldsymbol{\gamma}_2$，…，$\boldsymbol{\gamma}_p$ 线性表示，即有

$$(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t) = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_p)\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{t1} \\ l_{12} & l_{22} & \cdots & l_{t2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{1p} & l_{2p} & \cdots & l_{tp} \end{pmatrix}.$$

从而

$$(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s) = (\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \cdots, \boldsymbol{\gamma}_p)\begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{t1} \\ l_{12} & l_{22} & \cdots & l_{t2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{1p} & l_{2p} & \cdots & l_{tp} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_{11} & k_{21} & \cdots & k_{s1} \\ k_{12} & k_{22} & \cdots & k_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{1t} & k_{2t} & \cdots & k_{st} \end{pmatrix},$$

故向量组 A 可由向量组 C 线性表示．

同理可证向量组 C 可由向量组 A 线性表示．因此，向量组 A 与向量组 C 等价．

3.2.2　向量组的线性相关性

定义 3.7　对于向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，如果存在一组不全为零的数 k_1，k_2，…，k_s，使

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}, \tag{3.3}$$

则称向量组 A **线性相关**；否则称为**线性无关**，即式(3.3)成立当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s = 0$.

由上述定义可知：

（1）向量组只含有一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 时，则该向量组线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$. 单个零向量 $\mathbf{0}$ 是线性相关的．进一步可推出，包含零向量的向量组是线性相关的．

（2）仅含有两个向量的向量组线性相关的充要条件是这两个向量的分量对应成比例．两个向量线性相关的几何意义是这两个向量共线．

（3）三个向量线性相关的几何意义是这三个向量共面．

例 3.4　讨论向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (0, 0, 1)$的线性相关性．

解　若 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = 0$，即

$$x_1(1, 0, 0) + x_2(0, 1, 0) + x_3(0, 0, 1) = \mathbf{0},$$

从而，
$$(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0),$$

所以，
$$x_1 = x_2 = x_3 = 0,$$

故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 0, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (0, 1, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (0, 0, 1)$线性无关．■

类似地，我们可证明 n 维单位向量组 $\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (1, 0, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0, 1, \cdots, 0)^{\mathrm{T}}$，…，$\boldsymbol{\varepsilon}_n = (0, 0, \cdots, 1)^{\mathrm{T}}$ 线性无关．

一般地，要判断一个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$，$i=1, 2, \cdots, s$ 的线性相关性，就是考察方程 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$ 有无非零解．按分量写出来就是

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{s1}x_s=0,\\ a_{12}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{s2}x_s=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{sn}x_s=0,\end{cases}\tag{3.4}$$

因此，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是齐次线性方程组(3.4)只有零解．

例 3.5　判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 2, 4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2, 1, 3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1, 0, 2)^{\mathrm{T}}$ 的线性相关性．

解　若 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\mathbf{0}$，即

$$x_1(1, 2, 4)^{\mathrm{T}}+x_2(2, 1, 3)^{\mathrm{T}}+x_3(-1, 0, 2)^{\mathrm{T}}=(0, 0, 0)^{\mathrm{T}},$$

也即

$$\begin{cases}x_1+2x_2-x_3=0,\\ 2x_1+x_2=0,\\ 4x_1+3x_2+2x_3=0.\end{cases}$$

由克莱姆法则，因为系数行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 2\end{vmatrix}=-8\neq 0,$$

所以上述方程组只有零解，故向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 2, 4)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2, 1, 3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1, 0, 2)^{\mathrm{T}}$ 线性无关． ■

定理 3.1　设有 n 个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$，$i=1, 2, \cdots, n$，则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关的充分必要条件是由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 构成的 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0.$$

定理 3.2　向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s(s\geqslant 2)$线性相关的充要条件是该向量组中至少有一个向量可由其余向量线性表示．

证明　充分性　设向量组中至少有一个向量可由其余向量线性表示，不妨设 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\cdots$，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，即存在实数 k_2，k_3，$\cdots$，k_s，使

$$\boldsymbol{\alpha}_1=k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$

从而，
$$-\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$
所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关．

必要性　若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则存在一组不全为零的实数 k_1，k_2，…，k_s，使
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$
不妨设 $k_1\neq0$，所以有
$$\boldsymbol{\alpha}_1=-\frac{k_2}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_2-\frac{k_3}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_3-\cdots-\frac{k_s}{k_1}\boldsymbol{\alpha}_s,$$
即该向量组中至少有一个向量可由其余向量线性表示． ■

定理 3.3　如果一向量组的部分组线性相关，则该向量组也线性相关．

这个定理等价于：如果一个向量组线性无关，则它的任一部分组都线性无关.

定理 3.4　设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，并且表示法是唯一的．

证明　因为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$ 线性相关，所以存在一组不全为零的实数 k_1，k_2，…，k_s，k，使
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s+k\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0},$$
若 $k=0$，则上式变为
$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0},$$
且 k_1，k_2，…，k_s 不全为零，从而 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，这与题设条件向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关相矛盾，所以 $k\neq0$，于是
$$\boldsymbol{\beta}=-\frac{k_1}{k}\boldsymbol{\alpha}_1-\frac{k_2}{k}\boldsymbol{\alpha}_2-\cdots-\frac{k_s}{k}\boldsymbol{\alpha}_s,$$
即 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示．

下证表示法唯一．

如果
$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=l_1\boldsymbol{\alpha}_1+l_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+l_s\boldsymbol{\alpha}_s,$$
则
$$(k_1-l_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-l_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(k_s-l_s)\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}.$$
由于 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，所以
$$k_i-l_i=0\quad(i=1,2,\cdots,s),$$
即
$$k_i=l_i\quad(i=1,2,\cdots,s).$$
■

练　　习　　3.2

1. 将下列向量中的 $\boldsymbol{\beta}$ 表示为其余向量的线性组合：

$\boldsymbol{\beta}=(3,4,5)$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,1)$.

2. 判断下列向量组的线性相关性：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 1, 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-1, 2, -2)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0, 3, -1)$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(-1, 1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, -1, 2, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2, -2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(-5, 3, 1, 4)^{\mathrm{T}}$.

3. 设向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$；$B$：$\boldsymbol{\beta}_1=(3, 3, 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(1, -1, -1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(5, 1, -1)^{\mathrm{T}}$，证明：向量组 A 与向量组 B 等价 .

4. 当 k 为何值时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(k, 1, 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, k, -1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1, -1, k)$线性相关 .

5. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，证明：向量组 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示 .

§3.3　向量组的秩

本节我们介绍向量组的极大线性无关组的概念，由此引入向量组的秩的定义，进而由矩阵的秩与其行(列)向量组的秩的关系给出求向量组的秩及其极大线性无关组的方法 .

3.3.1　极大线性无关组

定义 3.8　设向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1}, \boldsymbol{\alpha}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 满足：

(1) 部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1}, \boldsymbol{\alpha}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 线性无关；

(2) 向量组 A 中的任一向量都可由此部分组线性表示，

则称部分组 $\boldsymbol{\alpha}_{j_1}, \boldsymbol{\alpha}_{j_2}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{j_r}$ 为向量组 A 的一个**极大线性无关组** .

例如，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2, -1, 3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(3, 0, 4)^{\mathrm{T}}$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是它的一个极大线性无关组，$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 也是它的极大线性无关组 .

由此定义容易看出，一个线性无关向量组的极大线性无关组就是它本身；任一向量组与它的极大线性无关组等价，从而向量组的任意两个极大线性无关组都是等价的 .

3.3.2　向量组的秩

定理 3.5　设有两个向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 与 B：$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$. 若向量组 B 能由向量组 A 表示，且 $t>s$，则向量组 B 线性相关 .

证明　设

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1t}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{s1}&k_{s2}&\cdots&k_{st}\end{pmatrix},\tag{3.5}$$

欲证向量组 B 线性相关，只要证明存在不全为零的数 x_1，x_2，…，x_t，使

$$x_1\boldsymbol{\beta}_1+x_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+x_t\boldsymbol{\beta}_t=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_t\end{pmatrix}=\mathbf{0},\tag{3.6}$$

将式(3.5)代入式(3.6)后取

$$\begin{pmatrix}k_{11}&k_{12}&\cdots&k_{1t}\\k_{21}&k_{22}&\cdots&k_{2t}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\k_{s1}&k_{s2}&\cdots&k_{st}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_t\end{pmatrix}=\mathbf{0},\tag{3.7}$$

注意到 $s<t$，则齐次线性方程组(3.7)有非零解，故向量组 B 线性相关． ■

由定理 3.5 易得

推论 1 设向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_t$ 能由向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示，若向量组 B 线性无关，则必有 $s\geqslant t$.

推论 2 两个线性无关的向量组如果等价则它们含有向量的个数相等．

推论 3 任意 $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关．

定义 3.9 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 的极大线性无关组所含向量的个数称为该向量组的**秩**，记为 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$.

我们规定，由零向量组成的向量组的秩为零．

因为一个线性无关组的极大线性无关组就是它本身，所以有

性质 3.1 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关的充要条件是向量组的秩等于向量组所含向量的个数．

由定理 3.5 和定义 3.9 可得

性质 3.2 若向量组 A：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 B：$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示，则

$$R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)\leqslant R(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_t).$$

由性质 3.2 可得

推论 等价的向量组必有相同的秩．

最后，我们给出向量组的秩与矩阵的秩之间的关系．

设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{s\times n}$，称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 的秩为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩；$\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}_n$ 的秩称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列秩．

例如，矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&2&2&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 的行向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1,0)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,2,1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,0,0)$，它的行秩显然是 2，$\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_2=(0,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_3=(1,2,0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}_4=(0,1,0)^{\mathrm{T}}$.

容易验证，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 为列向量组的一个极大线性无关组，所以 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的秩也是 2.

显然，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩也为 2.

从这个例子我们可以看出，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行秩、列秩和矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩都相等．而且我们可以证明这个结论对任意一个矩阵都成立．

定理 3.6　任一矩阵的秩等于它的行秩，也等于它的列秩．

例 3.6　设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,2)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_2=(-1,0,1,-2)^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{\alpha}_3=(2,0,2,3)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\alpha}_4=(-2,1,0,-3)^{\mathrm{T}},$$

试求该向量组的秩以及它的一个极大线性无关组．

解　对矩阵$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$作初等行变换：

$$\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\1&0&0&1\\1&1&2&0\\2&-2&3&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-2r_1]{\substack{r_2-r_1\\r_3-r_1}}\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\0&1&-2&3\\0&2&0&2\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\0&1&-2&3\\0&0&4&-4\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}r_3}\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\0&1&-2&3\\0&0&1&-1\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4+r_3}\begin{pmatrix}1&-1&2&-2\\0&1&-2&3\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

由此可见，该向量组的秩为 3，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是它的一个极大线性无关组．　■

练　习　3.3

1. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(5,2,-3,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4,1,-2,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1,1,$

$-1, -2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3, 4, -1, 2)^{\mathrm{T}}$ 的秩及一个极大线性无关组．

2．求 a 的值使向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(a, 2, 1, 4)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, -3, 1, 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1, 2, 1, 4)$的秩为 2.

3．求矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$的列向量组的一个极大线性无关组．

习　题　3

（A）基础题

1．填空、选择题：

（1）设向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足 $3(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha})+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha})=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha})$，其中 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2, 5, 1, 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(10, 1, 5, 10)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(4, 1, -1, 1)$，则 $\boldsymbol{\alpha}=$________.

（2）当 $k=$________时，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, -1, 2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(0, 1, 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(k, 1, -2)$线性相关．

（3）矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}$的行秩为________.

（4）已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 2, -1, 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2, 0, t, 0)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0, -4, 5, -2)$的秩为 2，则 $t=$________.

（5）已知 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关，则下列说法正确的是(　　).

（A）对于任意一组不全为零的数 k_1，k_2，…，k_s 都有 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$；

（B）$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意两个向量都线性相关；

（C）存在一组不全为零的数 k_1，k_2，…，k_s，使得 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\boldsymbol{0}$；

（D）向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 中任意一个向量都可由其余向量线性表示．

（6）向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，不能由向量组Ⅰ：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示．记向量组Ⅱ：$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$，$\boldsymbol{\beta}$ 则下列正确的是(　　).

（A）$\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由Ⅰ线性表示，也不能由Ⅱ线性表示；

（B）$\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由Ⅰ线性表示，但能由Ⅱ线性表示；

（C）$\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由Ⅰ线性表示，也可由Ⅱ线性表示；

（D）$\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由Ⅰ线性表示，但不能由Ⅱ线性表示．

(7) 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 的秩为 r，则下列正确的是(　　).

(A) 必定 $r<n$；

(B) 任意小于 r 个的部分组线性无关；

(C) 向量组中任意 r 个向量线性无关；

(D) 向量组中任意 $r+1$ 个向量线性相关.

2. 判断下列向量组的线性相关性：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 1, 2, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, 2, 3, -1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1, 1, 0, -2)^{\mathrm{T}}$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, 1, 4, 2)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1, -1, -2, 4)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(-3, 2, 3, -11)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1, 3, 10, 0)$.

3. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，问下列向量组是否线性无关？

(1) $\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$；

(2) $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_3=4\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2+6\boldsymbol{\alpha}_3$.

4. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 4\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}b\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$，问当 b 为何值时，$\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关？

5. 求下列向量组的秩，并判断向量组的线性相关性：

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(3, 2, 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(-3, 5, 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(6, 1, 3)$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(2, 1, 0, 5)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(7, -5, 4, -1)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1, 3, 5, 7)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(10, -1, 9, 11)$.

6. 求下列向量组的秩及一个极大线性无关组，并用极大无关组表示向量组中的其他向量.

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1=(5, 2, -3, 1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(4, 1, -2, 3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1, 1, -1, -2)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(3, 4, -1, 2)$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1, -2, 3, -1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3, -1, 5, -3)$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(2, 1, 2, -2)$，$\boldsymbol{\alpha}_4=(1, 3, -1, -1)$.

7. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$ 有相同的秩，证明：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$，$\boldsymbol{\beta}$ 等价.

(B) 提高题

1. 设 $\boldsymbol{\beta}=(7, -2, a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_1=(2, 3, 5)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(3, 7, 8)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(1, -6, 1)^{\mathrm{T}}$，问：

(1) 当 a 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？

(2) 当 a 为何值时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示？

2. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，且 m 为奇数，试证明：向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，…，$\boldsymbol{\beta}_{m-1}=\boldsymbol{\alpha}_{m-1}+\boldsymbol{\alpha}_m$，$\boldsymbol{\beta}_m=\boldsymbol{\alpha}_m+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关.

3. 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表示，但不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$线性表示，证明：

（1）向量 $\boldsymbol{\alpha}_r$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$线性表示；

（2）向量 $\boldsymbol{\alpha}_r$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_{r-1}$，$\boldsymbol{\beta}$ 线性表示 .

4. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}3\\1\\1\\3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}2\\0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\0\end{pmatrix}$，证明向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 等价 .

5. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 是一组 n 维向量，证明它们线性无关的充分必要条件是：任一 n 维向量都能由它们线性表示 .

第 4 章　线性方程组

在现代科技的众多领域中，许多问题经常可以归结为求解一个线性方程组，这是线性代数的主要内容之一．虽然在中学我们已经学过用加减消元法或代入消元法求解二元或三元一次方程组，在本书第 1 章中，我们学习了应用克莱姆法则求解未知量个数与方程个数相同且系数行列式不为零的线性方程组，但是在许多实际问题中，我们遇到的线性方程组中未知量个数常常是多个，而且线性方程组中未知量的个数与方程的个数也不一定相同，即使二者个数相同系数行列式却为零，这些情况用以前的方法就难以处理了．

本章针对一般形式的线性方程组探讨以下问题：

（1）线性方程组是否有解；（2）如果有解，解是否唯一；（3）如何求解，并写出通解形式．

§4.1　线性方程组的概念

含有 n 个未知量、m 个方程的线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m, \end{cases} \tag{4.1}$$

其中 x_1，x_2，…，x_n 代表 n 个**未知量**，a_{ij} $(i=1, 2, \cdots, m; j=1, 2, \cdots, n)$ 称为线性方程组的**系数**，b_k $(k=1, 2, \cdots, m)$ 称为**常数项**．

称
$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为线性方程组(4.1)的**系数矩阵**，称

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

为线性方程组(4.1)的常数项矩阵，也称为**常数向量**，称

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

为线性方程组(4.1)的未知量矩阵，也称为**未知向量**．此时，线性方程组(4.1)可以用矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}. \tag{4.2}$$

若常数向量

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

中所有分量均为 0，则方程组(4.1)可以用矩阵表示为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，称之为**齐次线性方程组**；若 $\boldsymbol{b}$ 中至少有一个分量不为 0，则称 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 为**非齐次线性方程组**．此时记

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

称为线性方程组(4.1)的**增广矩阵**，线性方程组由其增广矩阵唯一确定．

若引入向量

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix},\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n=\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

则线性方程组(4.1)可以改写成向量方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}. \tag{4.3}$$

定义 4.1 若将一组数 k_1，k_2，…，k_n 依次代入线性方程组(4.1)的 x_1，

x_2，…，x_n 后，每个方程都变成恒等式，则称 $x_1=k_1$，$x_2=k_2$，…，$x_n=k_n$ 为线性方程组(4.1)的一组**解**，称

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\\vdots\\k_n\end{pmatrix}=(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)^{\mathrm{T}}$$

为线性方程组(4.2)的**解向量**，简称**解**.

方程组所有解的全体称为方程组的**解集**.

定义 4.2　若线性方程组(4.1)有解，则称线性方程组是**相容的**，否则称为**不相容的**.

定义 4.3　若两个线性方程组有相同的解集，则称它们为**同解方程组**.

练　　习　　4.1

1. 试写出所给线性方程组的矩阵形式和向量形式：

$$\begin{cases}x_1-x_2+x_3-2x_4=2,\\2x_1-x_3+4x_4=4,\\3x_1+2x_2+x_3=-1,\\4x_1+2x_3-2x_4=3.\end{cases}$$

2. 试问如下向量是否为线性方程组

$$\begin{cases}2x+y-2z=10,\\3x+2y+2z=1,\\5x+4y+3z=4\end{cases}$$

的解向量：

$$\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}k\\2k\\-3k\end{pmatrix}(k\neq1).$$

§4.2　高斯消元法

在第 1 章我们研究了方程的个数与未知量的个数相等，且系数行列式的值不等于零的线性方程组，这类方程组可以利用克莱姆法则来求解．但方程的个数与未知量的个数不相等或系数行列式的值为零时，克莱姆法则失效，这就需要进一步研究线性方程组的一般解法.

在中学里我们学过用加减消元法和代入消元法解二元、三元线性方程组，实际上，这种方法在求解方程组时比克莱姆法则更具有普遍性．下面就来介绍解一般线性方程组的消元法，即高斯消元法．

下面，先看一个例子．

例 4.1 求解线性方程组

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5.\end{cases}$$

解 将第二个方程减去第一个方程的 2 倍，第三个方程减去第一个方程，就变为

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 4x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_2 - x_3 = 4.\end{cases}$$

将第二个方程减去第三个方程的 2 倍，再把第二个方程和第三个方程的次序交换，即得

$$\begin{cases}2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_3 = -6.\end{cases}$$

把 $x_3 = -6$ 代入第二个方程，得 $x_2 = -1$.

再把 $x_3 = -6$，$x_2 = -1$ 代入第一个方程，即得 $x_1 = 9$.

即方程组的解为 $x_1 = 9$，$x_2 = -1$，$x_3 = -6$. ■

分析一下消元法，不难看出，它实际上是反复对线性方程组进行变换，而所作的变换也只是由以下三种基本的变换所构成：

(1) 倍法变换：即用一个非零的数乘某一个方程．

(2) 倍加变换：即把一个方程的倍数加到另一个方程上．

(3) 换位变换：即互换两个方程的位置．

于是，我们给出：

定义 4.4 变换(1)、(2)、(3)称为线性方程组的**初等变换**．

消元的过程就是反复对线性方程组施行初等变换的过程，不难证明，此过程不改变线性方程组的解集．

定理 4.1 线性方程组经过初等变换后总是变成同解的线性方程组．

从例 4.1 可看出，消元法的基本思想是：对线性方程组进行同解变换，逐步消元，最后得到只含一个未知量的方程，求出这个未知量后，再逐步回代，求出其他未知量．

进一步分析，由于线性方程组由其增广矩阵唯一确定，所以对线性方程组进行上述初等变换，相当于对其增广矩阵施行相应的初等行变换，这种解法叫作**高斯消元法**.

例 4.2　求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

解　对增广矩阵实施初等行变换，将其化为行最简形矩阵：

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_2 - 2r_1} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 + r_2]{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2 + r_3]{r_1 - r_3} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

故原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 1, \end{cases}$$

恰为线性方程组的解. ■

例 4.3　求解线性方程组

$$\begin{cases} -3x_1 - 3x_2 + 14x_3 + 29x_4 = -16, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 1, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 7x_4 = -4. \end{cases}$$

解　对增广矩阵实施初等行变换，将其化为行最简形矩阵：

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{cccc:c} -3 & -3 & 14 & 29 & -16 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 7 & -4 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 4 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 14 & 29 & -16 \\ -1 & -1 & 2 & 7 & -4 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+3r_1}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&4&-1&1\\0&0&26&26&-13\\0&0&6&6&-3\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-3r_2]{\frac{1}{13}r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&4&-1&1\\0&0&2&2&-1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{2}r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&4&-1&1\\0&0&1&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-4r_2}\left(\begin{array}{cccc:c}1&1&0&-5&3\\0&0&1&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0\end{array}\right),$$

故原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+x_2\qquad -5x_4=3,\\ \qquad\qquad x_3\ +x_4=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

将含未知量 x_2，x_4 的项移到等式右边，可得

$$\begin{cases}x_1=-x_2+5x_4+3,\\ x_3=\qquad -x_4-\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

其中 x_2，x_4 可以取任意实数 .

显然，只要未知量 x_2，x_4 分别任意取定一组值，如取 $x_2=1$，$x_4=0$，代入上式中即可以得到一组相应的值：$x_1=2$，$x_3=-\dfrac{1}{2}$，从而得到方程组的一个解

$$\begin{cases}x_1=2,\\ x_2=1,\\ x_3=-\dfrac{1}{2},\\ x_4=0.\end{cases}$$

由于 x_2，x_4 可以取任意值，我们称之为**自由未知量** .

任取 $x_2=k_1$，$x_4=k_2$，方程组的解可表示为

$$\begin{cases}x_1=-k_1+5k_2+3,\\ x_2=k_1,\\ x_3=-k_2-\dfrac{1}{2},\\ x_4=k_2,\end{cases}$$

记成向量形式为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-k_1+5k_2+3\\k_1\\-k_2-\frac{1}{2}\\k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-k_1\\k_1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5k_2\\0\\-k_2\\k_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}3\\0\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}5\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\quad(k_1,\ k_2\text{ 为任意实数}),$$

这就是所求线性方程组解的一般表示形式． ■

由第 2 章矩阵的初等变换可知，任意矩阵都可通过初等行变换化为行最简形矩阵，也就是说，增广矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 可以通过初等行变换转化为行最简形矩阵，由此可以得到与原线性方程组同解的形式最为简洁的方程组，进而求出其解．

为便于叙述，我们称上述行最简形矩阵所对应的方程组为**最简形方程组**．

练　习　4.2

用高斯消元法解下列线性方程组：

（1）$\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0,\\2x_1+4x_2-x_3=0,\\3x_1+2x_2+2x_3=0;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}x+2y-3z=6,\\2x-y+4z=2,\\4x+3y-2z=14.\end{cases}$

§4.3　齐次线性方程组

设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0,\end{cases}\tag{4.4}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n),\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},$$

则齐次线性方程组(4.4)的矩阵形式为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，向量形式为 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{0}$.

对于任意一个齐次线性方程组而言，它一定是相容的，因为$\boldsymbol{x}=(0，0，\cdots，0)^{\mathrm{T}}$ 一定是它的解，这样的解称为零解．因此，对于齐次线性方程组而言，重要的是要知道它有没有非零解．这一节我们将讨论齐次线性方程组何时有非零解，以及如何求出所有非零解．

下面先讨论齐次线性方程组解的性质．

性质 4.1 若$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_2$是齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，则$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$也是齐次线性方程组的解．

证明 因为$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1=\boldsymbol{0}，\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{0}，$$

故有
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}，$$

即$\boldsymbol{\xi}_1+\boldsymbol{\xi}_2$是方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解． ■

性质 4.2 若$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}$是齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，$k$ 是实数，则$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}$ 也是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解．

证明 因为$\boldsymbol{\xi}$是齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，所以

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{0}，$$

故有
$$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{\xi})=k\boldsymbol{A}\boldsymbol{\xi}=k\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}，$$

即 $k\boldsymbol{\xi}$ 也是齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解． ■

综合性质 4.1、性质 4.2，不难得到：

性质 4.3 若$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_s$都是齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解，则它们的任意一个线性组合 $k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s$ 也是齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解．

由此可知，如果一个齐次线性方程组有非零解，则它一定有无穷多个解．下面考虑这无穷多个解能否用有限几个解来线性表示呢?

定义 4.5 如果齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解向量$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_s$是线性无关的，且方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的任意一个解向量都可由$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_s$线性表示，则称$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_s$是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的一个**基础解系**．基础解系$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，$\cdots$，$\boldsymbol{\xi}_s$的线性组合$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\xi}_s$(其中 k_1，k_2，$\cdots$，k_s 为任意常数)为该方程组的通解．

下面讨论齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的基础解系．

当含有 n 个未知量的齐次线性方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的系数矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A})=n$ 时，方程组只有零解，此时方程组不存在基础解系．

而当 $R(\boldsymbol{A})<n$ 时，读者可从将齐次线性方程组初等变换转化成最简形方程组求解的过程进行分析，不难证明有下列定理：

定理 4.2　如果含有 n 个未知量的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=r<n$，则该齐次线性方程组的基础解系一定存在，且每个基础解系中含有 $n-r$ 个解向量，记为 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，…，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$，此时齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解可表示成

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}(\text{其中 } k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{n-r}\text{ 为任意常数}).$$

分析定理，可以归纳出求齐次线性方程组的基础解系的一般步骤：

(1) 把齐次线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 通过初等行变换化为行阶梯形矩阵，若 $R(\boldsymbol{A})=n$，则只有唯一零解；若 $R(\boldsymbol{A})=r<n$，则继续进行初等行变换化为行最简形矩阵．

(2) 根据行最简形矩阵写出最简同解方程组．

(3) 保留行最简形矩阵中每一行首个非零元素对应的未知量，将其余的未知量作为自由未知量移到方程组等式右边，写出方程组的一般解．

(4) 分别令自由未知量中的一个为 1 其余全部为 0，求出 $n-r$ 个解向量，这 $n-r$ 个解向量构成齐次线性方程组的一个基础解系．

特别说明，第(4)步可以得到齐次线性方程组的一个基础解系，一个最为简单的基础解系．但基础解系是不唯一的，即齐次线性方程组一定还有其他的基础解系，这一点与向量组的极大线性无关组不唯一相类似．

定理 4.3　如果齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=r<n$，则其任意 $n-r$ 个线性无关的解向量均可构成其基础解系．

例 4.4　求齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3-4x_4-7x_5=0, \\ x_1+x_2-x_3+2x_4+3x_5=0, \\ -x_1-x_2+2x_3-x_4+3x_5=0 \end{cases}$$

的一个基础解系，并用它表示该线性方程组的通解．

解　对系数矩阵施行如下初等行变换：

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 & -4 & -7 \\ 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -3 & -4 & -7 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-2r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_3+r_2]{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 10 & 16 \\ 0 & 0 & -1 & -8 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & -7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\left(-\frac{1}{7}\right)r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 10 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 8 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-8r_3]{r_1-10r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

即得原方程组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1+x_2 \qquad\qquad +6x_5=0, \\ \qquad\qquad x_3 \qquad +5x_5=0, \\ \qquad\qquad\qquad x_4+x_5=0. \end{cases}$$

可得方程组的一般解为

$$\begin{cases} x_1=-x_2-6x_5, \\ x_3=\quad\quad -5x_5, \\ x_4=\quad\quad -x_5 \end{cases}\quad (\text{其中 } x_2,\ x_5 \text{ 为自由未知量}).$$

取自由未知量$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_5 \end{pmatrix}$为$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得方程组的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以方程组的通解为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2=k_1\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}(k_1,\ k_2 \text{ 为任意常数}).$$ ■

例 4.5 已知齐次线性方程组

$$\begin{cases} (\lambda+3)x_1+x_2+2x_3=0, \\ \lambda x_1+(\lambda-1)x_2+x_3=0, \\ 3(\lambda+1)x_1+\lambda x_2+(\lambda+3)x_3=0, \end{cases}$$

求 λ 的值，使方程组有非零解，并求通解．

解 计算系数行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} \lambda+3 & 1 & 2 \\ \lambda & \lambda-1 & 1 \\ 3(\lambda+1) & \lambda & \lambda+3 \end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-1),$$

当 $|\boldsymbol{A}|=\lambda^2(\lambda-1)=0$，即 $\lambda=0$ 或 $\lambda=1$ 时，方程组有非零解．

(1) 当 $\lambda=0$ 时，方程组变成

$$\begin{cases}3x_1+x_2+2x_3=0,\\ \quad\ -x_2+x_3=0,\\ 3x_1\qquad+3x_3=0,\end{cases}$$

其系数矩阵

$$A_1=\begin{pmatrix}3&1&2\\0&-1&1\\3&0&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得同解方程组

$$\begin{cases}x_1=-x_3,\\x_2=x_3,\\x_3=x_3,\end{cases}$$

通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}，k\text{ 为任意常数}.$$

（2）当 $\lambda=1$ 时，方程组变成

$$\begin{cases}4x_1+x_2+2x_3=0,\\ \ x_1\qquad\ +x_3=0,\\ 6x_1+x_2+4x_3=0,\end{cases}$$

其系数矩阵

$$A_2=\begin{pmatrix}4&1&2\\1&0&1\\6&1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得同解方程组

$$\begin{cases}x_1=-x_3,\\x_2=2x_3,\\x_3=x_3,\end{cases}$$

通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}，k\text{ 为任意常数}.$$ ■

例 4.6　设 $\boldsymbol{B}$ 是一个三阶非零矩阵，它的每一列都是齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2-2x_3=0,\\2x_1-x_2+\lambda x_3=0,\\3x_1+x_2-x_3=0\end{cases}$$

的解，求 λ 的值和 $|\boldsymbol{B}|$.

解 由于 $\boldsymbol{B}$ 是一个三阶非零矩阵，所以 $\boldsymbol{B}$ 中至少有一列向量是非零向量．又由于 $\boldsymbol{B}$ 的每一列都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，故该方程组有非零解，其系数矩阵的行列式

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -2\\ 2 & -1 & \lambda\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=5\lambda-5=0,$$

得 $\lambda=1$.

当 $\lambda=1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=2$，方程组的基础解系含 $n-R(\boldsymbol{A})=3-2=1$ 个解向量，因而 $\boldsymbol{B}$ 的 3 个列向量必线性相关，得 $|\boldsymbol{B}|=0$. ■

例 4.7 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $s\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$，求证：$R(\boldsymbol{B})\leqslant n-R(\boldsymbol{A})$（或 $R(\boldsymbol{A})+R(\boldsymbol{B})\leqslant n$）.

分析 $n-R(\boldsymbol{A})$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系所含向量的个数，可将问题转化为齐次线性方程组的解的问题．

证明 设矩阵 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 右端的零矩阵的列分块矩阵分别为

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_m),\ \boldsymbol{O}=(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{0},\ \cdots,\ \boldsymbol{0}),$$

由分块矩阵乘法

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_m)=(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{0},\ \cdots,\ \boldsymbol{0}),$$

$$(\boldsymbol{A\beta}_1,\ \boldsymbol{A\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{A\beta}_m)=(\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{0},\ \cdots,\ \boldsymbol{0}),$$

有

$$\boldsymbol{A\beta}_j=\boldsymbol{0}\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ m),$$

即 $\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_m$ 都是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解向量．

（1）若 $R(\boldsymbol{A})=n$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，即 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，则 $R(\boldsymbol{B})=0=n-R(\boldsymbol{A})$.

（2）若 $R(\boldsymbol{A})=r<n$，记 $\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，则 $\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_m$ 可由向量组 $\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\xi}_{n-r}$ 线性表示，所以，$R(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_m)\leqslant R(\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\xi}_{n-r})$，而 $R(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\beta}_m)=R(\boldsymbol{B})$，$R(\boldsymbol{\xi}_1,\ \boldsymbol{\xi}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\xi}_{n-r})=n-R(\boldsymbol{A})$，故 $R(\boldsymbol{B})\leqslant n-R(\boldsymbol{A})$.

综上所述，必有 $R(\boldsymbol{B})\leqslant n-R(\boldsymbol{A})$. ■

练 习 4.3

1. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\\ 3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0,\\ 5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0\end{cases}$$

的通解．

2．求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1-2x_2-x_3+2x_4+4x_5=0, \\ 2x_1-2x_2-3x_3+2x_5=0, \\ 4x_1-2x_2-7x_3-4x_4-2x_5=0 \end{cases}$$

的一个基础解系．

3．当 λ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x+y+z=0, \\ x+\lambda y-z=0, \\ 2x-y+z=0 \end{cases}$$

只有零解．

§4.4　非齐次线性方程组

非齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{4.5}$$

记

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

非齐次线性方程组(4.5)的**矩阵形式**为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}. \tag{4.6}$$

称 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 为非齐次线性方程组(4.6)的**导出组**(或对应的**齐次线性方程组**)，称矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b})$ 为非齐次线性方程组(4.6)的**增广矩阵**．

记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$，非齐次线性方程组(4.5)的**向量形式**为

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n=\boldsymbol{b}. \tag{4.7}$$

由式(4.7)易知，非齐次线性方程组(4.5)有解的充要条件是 $\boldsymbol{b}$ 可以由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示，从而有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b}$ 等价，故二者秩相等，即 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b})$，即 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{A}\ \vdots\ \boldsymbol{b})$，于是有

定理 4.4　设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵，$\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$是其增广矩阵，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})$，且

（1）当 $R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

（2）当 $R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=r<n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解．

知道了非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的条件，下面进一步讨论．

（1）对于唯一解的情形进一步分析可得如下推论：

推论　非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解的必要条件是它的导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解．

反之，导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解时，非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 可能有唯一解，也可能无解．

（2）对于无穷多解的情形则需要先弄清 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解的结构，为此，先讨论 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解的性质．

性质 4.4　设 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $\boldsymbol{\eta}_1-\boldsymbol{\eta}_2$ 是其对应导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解．

性质 4.5　设 $\boldsymbol{\eta}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，$\boldsymbol{\xi}$ 是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，则 $\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解．

定理 4.5　设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵，$\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$是其增广矩阵，$R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=r<n$ 时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解，**通解**为

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}^*,$$

其中 $\boldsymbol{\eta}^*$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的一个解(称为**特解**)，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，…，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，k_1，k_2，…，k_{n-r}为任意常数．

（3）以上是关于 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的讨论，下面来看看 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解的情形．

方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解即 $\boldsymbol{b}$ 不可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表示，从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$，$\boldsymbol{b}$ 的秩的关系为 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)<R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b})$，进一步分析可知 $R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n,\boldsymbol{b})=R(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)+1$，即 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{A})+1$.

根据以上分析，可以归纳出求非齐次线性方程组通解的一般步骤：

（1）对非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{b})$施行一系列初等行变换化为行阶梯形．若 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{A})+1$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 无解．若 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{A})$，则继续进行初等行变换化为行最简形矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}_1=(\boldsymbol{A}_1\mid\boldsymbol{b}_1)$.

（2）若 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}}_1)=R(\boldsymbol{A}_1)=n$，即 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{A})=n$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 只有唯一解．

（3）若 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}}_1)=R(\boldsymbol{A}_1)=r<n$，即 $R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=R(\boldsymbol{A})=r<n$，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解．此时 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$ 与 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 同解，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解，先写出 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}_1$ 的一

个特解 $\boldsymbol{\eta}^*$，再写出 $\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，…，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$.

（4）记$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\xi}_{n-r}+\boldsymbol{\eta}^*$，即为 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解 .

例 4.8　求下列非齐次线性方程组的全部解 .

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3-x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3+3x_4=3, \\ 3x_1+8x_2-x_3+x_4=1, \\ x_1-9x_2+3x_3+7x_4=7. \end{cases}$$

解　对增广矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})$施行初等行变换：

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=(\boldsymbol{A}\,\vdots\,\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -9 & 3 & 7 & 7 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-3r_1}}\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & -14 & 4 & 8 & 8 \end{array}\right)\xrightarrow[r_4-2r_2]{r_3-r_2}\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1+\frac{5}{7}r_2}\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} & \frac{13}{7} \\ 0 & -7 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{7}r_2}\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & \frac{3}{7} & \frac{13}{7} & \frac{13}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{7} & -\frac{4}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

故 $R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=2$，原方程组有无穷多解 .

于是，得方程组的同解方程组

$$\begin{cases} x_1+\frac{3}{7}x_3+\frac{13}{7}x_4=\frac{13}{7}, \\ x_2-\frac{2}{7}x_3-\frac{4}{7}x_4=-\frac{4}{7}, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x_1=\frac{13}{7}-\frac{3}{7}x_3-\frac{13}{7}x_4, \\ x_2=-\frac{4}{7}+\frac{2}{7}x_3+\frac{4}{7}x_4 \end{cases}$$
（其中 x_3，x_4 为自由未知量）.

对自由未知量$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$取$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，得方程组的一个特解

$$\boldsymbol{\eta}^* = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

同时，方程组的导出组的同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad + \frac{3}{7}x_3 + \frac{13}{7}x_4 = 0, \\ \quad\quad x_2 - \frac{2}{7}x_3 - \frac{4}{7}x_4 = 0, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} x_1 = -\frac{3}{7}x_3 - \frac{13}{7}x_4, \\ x_2 = \frac{2}{7}x_3 + \frac{4}{7}x_4 \end{cases} \text{（其中 } x_3, x_4 \text{ 为自由未知量）}.$$

对自由未知量$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$取$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，得导出组的基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

故所给方程组的通解为

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}^* + k_1\boldsymbol{\xi}_1 + k_2\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} \frac{13}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -\frac{13}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{（}k_1, k_2 \text{ 为任意实数）}.$$

■

例 4.9 当 λ 取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有解？试写出其通解．

解　对非齐次线性方程组的增广矩阵作初等行变换：

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}-2&1&1&-2\\1&-2&1&\lambda\\1&1&-2&\lambda^2\end{array}\right)\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&\lambda^2\\1&-2&1&\lambda\\-2&1&1&-2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3+r_2]{\substack{r_2-r_1\\r_3+2r_1}}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&\lambda^2\\0&-3&3&\lambda-\lambda^2\\0&0&0&\lambda^2+\lambda-2\end{array}\right).$$

当 $\lambda^2+\lambda-2=0$，即 $\lambda=-2$ 或 $\lambda=1$ 时，$R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=2<3$，方程组有解且有无穷多解．

（1）当 $\lambda=-2$ 时，

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&4\\0&-3&3&-6\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{3}r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&4\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&2\\0&1&-1&2\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

同解方程组为

$$\begin{cases}x_1\qquad-x_3=2,\\\qquad x_2-x_3=2,\end{cases}$$

则通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(k\text{ 为任意实数}).$$

（2）当 $\lambda=1$ 时，

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}\to\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&1\\0&-3&3&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{3}r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&1&-2&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\xrightarrow{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc:c}1&0&-1&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right),$$

同解方程组为

$$\begin{cases}x_1\qquad-x_3=1,\\\qquad x_2-x_3=0,\end{cases}$$

则通解为

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}(k\text{ 为任意实数}).$$ ■

例 4.10　当 λ 取何值时，非齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=1,\\x_1+\lambda x_2+x_3=\lambda,\\x_1+x_2+\lambda x_3=\lambda^2\end{cases}$$

(1) 有唯一解；(2) 无解；(3) 有无穷多解，并求其通解．

解　方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix},\ \widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}\lambda & 1 & 1 & 1\\ 1 & \lambda & 1 & \lambda\\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2\end{array}\right),$$

$$|\boldsymbol{A}|=(\lambda-1)^2(\lambda+2).$$

(1) 当 $\lambda\neq1$ 且 $\lambda\neq-2$ 时，$|\boldsymbol{A}|\neq0$，$R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=3$，则方程组有唯一解.

(2) 当 $\lambda=-2$ 时，

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}-2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2 & 4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & -2 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{array}\right),$$

$R(\boldsymbol{A})=2$，$R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=3$，$R(\boldsymbol{A})\neq R(\widetilde{\boldsymbol{A}})$，则方程组无解．

(3) 当 $\lambda=1$ 时，

$$\widetilde{\boldsymbol{A}}=\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc:c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right),$$

$R(\boldsymbol{A})=R(\widetilde{\boldsymbol{A}})=1$，则方程组有无穷多解，其同解方程组为

$$x_1+x_2+x_3=1,$$

即
$$x_1=-x_2-x_3+1,$$

得通解为

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}(k_1,\ k_2\ \text{为任意常数}).$$ ■

例 4.11　设四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵的秩为 3，已知 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 是它的三个解，且

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 4\\ 5\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 4\end{pmatrix},$$

求该方程组的通解．

解　令
$$\boldsymbol{\xi}=2\boldsymbol{\eta}_1-(\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3)=(3,\ 4,\ 5,\ 6)^{\mathrm{T}},$$

由性质 4.4，$\boldsymbol{\xi}$ 是导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解．

因为 $n=4$，$R(\boldsymbol{A})=3$，所以 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含 $n-R(\boldsymbol{A})=4-3=1$ 个解.

由于 $\boldsymbol{\xi}=(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}$ 是非零向量，可以构成导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，因此方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\eta}_1=k(3,4,5,6)^{\mathrm{T}}+(2,3,4,5)^{\mathrm{T}}(k\text{ 为任意常数}). \qquad \blacksquare$$

练　习　4.4

1. 求解下列非齐次线性方程组：

(1) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4=1, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4=-1, \\ x_1-2x_2+x_3+5x_4=5; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3-2x_4=3, \\ x_1-2x_2+3x_3-x_4=1, \\ 3x_1-x_2+5x_3-3x_4=2. \end{cases}$

2. 确定 λ 的值，使非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1, \\ 2x_1+3x_2+\lambda x_3=3, \\ x_1+\lambda x_2+3x_3=2 \end{cases}$$

(1) 有唯一解；(2) 有无穷多解；(3) 无解.

习　题　4

(A) 基础题

1. 判断题：

(1) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 一定有解.　(　　)

(2) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 一定有非零解.　(　　)

(3) 方程个数等于未知量个数的线性方程组一定有唯一解.　(　　)

(4) 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解，则对应的齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解.　(　　)

(5) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $2\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解.　(　　)

(6) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解，$\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 $(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.　(　　)

2. 填空题：

(1) 当 $\lambda=$________时，齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2\lambda x_2 + x_3 = 0\end{cases}$$

有非零解．

（2）设$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，…，$\boldsymbol{\xi}_s$为$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系，则 $k\boldsymbol{\xi}_1-\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_2-\boldsymbol{\xi}_3$，…，$\boldsymbol{\xi}_s-\boldsymbol{\xi}_1$也是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的基础解系的充要条件为________．

（3）设 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，…，$\boldsymbol{\eta}_s$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，若 $k_1\boldsymbol{\eta}_1+k_2\boldsymbol{\eta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\eta}_s$ 也是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解，则 k_1，k_2，…，k_s 应满足的条件是________．

（4）非齐次线性方程组$\begin{cases}x_1-2x_2-x_3=1, \\ 3x_1-x_2-3x_3=2, \\ 2x_1+x_2+ax_3=b\end{cases}$有无穷多解，则 $a=$________，$b=$________．

3．选择题：

（1）四元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 只有零解，则 $R(\boldsymbol{A})=$（　　）．

（A）1；　　（B）2；　　（C）3；　　（D）4．

（2）设五元齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的系数矩阵的秩为 2，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系含有（　　）个向量．

（A）1；　　（B）2；　　（C）3；　　（D）5．

（3）设 $\boldsymbol{\sigma}_1$，$\boldsymbol{\sigma}_2$，$\boldsymbol{\sigma}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，则（　　）也是该方程组的一个基础解系．

（A）可由 $\boldsymbol{\sigma}_1$，$\boldsymbol{\sigma}_2$，$\boldsymbol{\sigma}_3$ 线性表示的向量组；

（B）与 $\boldsymbol{\sigma}_1$，$\boldsymbol{\sigma}_2$，$\boldsymbol{\sigma}_3$ 等秩的向量组；

（C）$\boldsymbol{\sigma}_1$，$\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2$，$\boldsymbol{\sigma}_1+\boldsymbol{\sigma}_2+\boldsymbol{\sigma}_3$；

（D）$\boldsymbol{\sigma}_1-\boldsymbol{\sigma}_2$，$\boldsymbol{\sigma}_2-\boldsymbol{\sigma}_3$，$\boldsymbol{\sigma}_3-\boldsymbol{\sigma}_1$．

（4）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$仅有零解的充要条件是（　　）．

（A）$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关；　　（B）$\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关；

（C）$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关；　　（D）$\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关．

（5）非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 中未知量个数为 n，方程个数为 m，系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r，则（　　）．

（A）当 $r=m$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解；

（B）当 $r=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

（C）当 $m=n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

（D）当 $r<n$ 时，方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多解．

（6）设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的增广矩阵通过初等行变换化为

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

则此线性方程组化为最简方程组中自由未知量的个数为（　　）.

（A）1；　　（B）2；　　（C）3；　　（D）4.

（7）设非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 对应的导出组为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$，则（　　）正确.

（A）若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有唯一解；

（B）若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多组解；

（C）若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多组解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 仅有零解；

（D）若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有无穷多组解，则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 有非零解.

（8）已知 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 是对应的导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，k_1，k_2 为任意常数，则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为（　　）.

（A）$\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)$；　　（B）$\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)$；

（C）$\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2)$；　　（D）$\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}+k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 5×4 矩阵，$R(\boldsymbol{A})=2$，$\boldsymbol{x}_1=(1,2,0,1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{x}_2=(2,1,1,3)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的两个解，$\boldsymbol{x}_3=(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是其导出组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个解，试求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

5. 求参数 λ，μ 的值，使方程组 $\begin{cases} x_1-x_2-3x_3+x_4=1, \\ 2x_1-2x_2-5x_3+3x_4=5, \\ 4x_1-4x_2+3x_3+19x_4=\lambda, \\ x_1-x_2-2x_3+2x_4=\mu \end{cases}$ 有解，并写出解的表达式.

（B）提高题

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系，证明：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$ 也是该方程组的一个基础解系.

2. 已知四元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2，又 $\boldsymbol{\eta}_1$，$\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 是 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个不同的解向量，其中 $\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2=(1,1,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_2+\boldsymbol{\eta}_3=(1,0,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\eta}_3+\boldsymbol{\eta}_1=(2,-1,1,1)^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

3. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&1&2\\0&1&3&1\\1&a&c&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$，如果$\boldsymbol{\eta}$是方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个解，试求$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的通解.

4. 设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_s$是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，非零向量$\boldsymbol{\beta}$不是$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解，试证明：向量组$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}_s$线性无关.

5. 设$\boldsymbol{\eta}^*$是非齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的一个解，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，…，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$是对应的齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的一个基础解系，证明：

（1）$\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，…，$\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关；

（2）$\boldsymbol{\eta}^*$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_2$，…，$\boldsymbol{\eta}^*+\boldsymbol{\xi}_{n-r}$线性无关.

6. 已知$\boldsymbol{\alpha}_1=(1,4,0,2)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(2,7,1,3)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,-1,a)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\beta}=(3,10,b,4)^{\mathrm{T}}$，问$a$，$b$取何值时，（1）$\boldsymbol{\beta}$不能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示？（2）$\boldsymbol{\beta}$能由$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$线性表示？并写出表达式.

第 5 章　特征值、特征向量与二次型

本章首先把几何空间 $\mathbf{R}^3$ 中数量积的概念推广到向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中，使 $\mathbf{R}^n$ 中能引入向量长度、正交等概念．其次讨论：对一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，如何求一个可逆的 n 阶方阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 具有尽可能简单的形式，即矩阵的相似化简问题．最后讨论二次型化为标准形问题，特别是用正交变换将二次型化为标准形的方法，并给出判定二次型正定性的充要条件．

§5.1　正交矩阵

本节我们将引进向量的内积、长度、正交等概念，并介绍它们的性质．

5.1.1　向量内积的定义与性质

定义 5.1　设 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中的实向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix},$$

称实数
$$x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$
为向量 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 的**内积**，记作 $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 或 $[\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}]$.

内积是向量的一种运算，用矩阵形式表示为

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_3\end{pmatrix}=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}.\quad(5.1)$$

例如，向量
$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}1\\3\\2\\4\end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}-1\\5\\2\\1\end{pmatrix},$$

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=1\times(-1)+3\times5+2\times2+4\times1=22.$$

由此可知：$\mathbf{R}^n$ 中的内积与几何空间中的数量积是一致的．易证由定义 5.1 给出的内积$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$具有如下性质：

性质 5.1　(1) 对称性：$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$.

(2) 线性性：$(k\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}, k\boldsymbol{y})=k(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$，其中 $k\in\mathbf{R}$；

$$(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}).$$

(3) 非负(正定)性：$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2\geqslant0$，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})=0$ 的充要条件是$\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$.

类似于几何空间，在 $\mathbf{R}^n$ 中引入向量长度的概念．

定义 5.2　设$\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，称非负实数$\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$为向量$\boldsymbol{x}$ 的**长度**(模或范数)，记为$\|\boldsymbol{x}\|$，即

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}, \tag{5.2}$$

长度为 1 的向量称为单位向量，即当$\|\boldsymbol{x}\|=1$ 时，称$\boldsymbol{x}$ 为**单位向量**．

对于任何非零向量$\boldsymbol{x}$，易证$\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$是单位向量．由非零向量$\boldsymbol{x}$ 得到单位向量$\dfrac{\boldsymbol{x}}{\|\boldsymbol{x}\|}$的过程称为把向量$\boldsymbol{x}$ **单位化**或**标准化**．

例 5.1　设$\boldsymbol{x}=(1, 2, -1)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{y}=(-2, 1, 1)^{\mathrm{T}}$，求：

(1) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$；(2) $\|3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}\|$.

解　(1)
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})&=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})-(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})-(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})\\&=(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})-(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})=6-6=0.\end{aligned}$$

(2) 由于 $3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}=(3, 6, -3)^{\mathrm{T}}-(-4, 2, 2)^{\mathrm{T}}=(7, 4, -5)^{\mathrm{T}}$，所以

$$\|3\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{y}\|=\sqrt{49+16+25}=\sqrt{90}=3\sqrt{10}.$$ ■

5.1.2　向量组的正交化

定义 5.3　对于两个 n 维向量$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$，若满足$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=0$，则称向量$\boldsymbol{x}$ 与$\boldsymbol{y}$ **正交**．

由定义不难看出，零向量与任何同维数向量都正交．

定义 5.4　一组两两正交的非零向量组称为**正交向量组**，简称**正交组**．

例如，$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$是正交向量组．

定义 5.5　由单位向量组成的正交组称为**标准正交组**．

定理 5.1　若 n 维向量组$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$是正交向量组，则向量组$\boldsymbol{x}_1$，

$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$线性无关．

证明　设有一组数 k_1，k_2，…，k_r 使得

$$k_1\boldsymbol{x}_1+k_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{x}_r=\mathbf{0},$$

以$\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}$左乘上式两端，得

$$k_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1=0,$$

又因为$\boldsymbol{x}_1\neq\mathbf{0}$，故$\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1=\|\boldsymbol{x}_1\|^2\neq 0$，所以必有 $k_1=0$.

类似地，可以证明 $k_2=0$，…，$k_r=0$，故向量组$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$线性无关．■

反之，若向量组$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$线性无关，在一般情况下，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$未必是正交向量组．不过，我们可以由线性无关向量组$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$构造出与它等价的标准正交向量组，这种方法称为**标准正交化**．

下面我们介绍如何把线性无关向量组$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$标准正交，这种方法是由施密特(Schmidt)提出的，故称为**施密特正交化方法**．

设向量组$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$线性无关，我们可以用如下办法把向量组$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$标准正交：

取$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{x}_1$；

$$\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{x}_2-\frac{(\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{x}_2)}{(\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_1)}\boldsymbol{y}_1;$$

$$\boldsymbol{y}_3=\boldsymbol{x}_3-\frac{(\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{x}_3)}{(\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_1)}\boldsymbol{y}_1-\frac{(\boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{x}_3)}{(\boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{y}_2)}\boldsymbol{y}_2;$$

……………………

$$\boldsymbol{y}_r=\boldsymbol{x}_r-\frac{(\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{x}_r)}{(\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_1)}\boldsymbol{y}_1-\frac{(\boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{x}_r)}{(\boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{y}_2)}\boldsymbol{y}_2-\cdots-\frac{(\boldsymbol{y}_{r-1},\ \boldsymbol{x}_r)}{(\boldsymbol{y}_{r-1},\ \boldsymbol{y}_{r-1})}\boldsymbol{y}_{r-1}. \tag{5.3}$$

可以证明$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$，…，$\boldsymbol{y}_r$两两正交，且$\boldsymbol{y}_1$，$\boldsymbol{y}_2$，…，$\boldsymbol{y}_r$与$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$等价．然后再把它们单位化，即取

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{y}_1}{\|\boldsymbol{y}_1\|},\ \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{y}_2}{\|\boldsymbol{y}_2\|},\ \cdots,\ \boldsymbol{e}_r=\frac{\boldsymbol{y}_r}{\|\boldsymbol{y}_r\|},$$

就得到 r 个正交单位向量组 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_r$.

例 5.2　试用施密特正交化方法把向量

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$$

标准正交化．

解　先正交化．

取$\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，

$$\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{x}_2-\frac{(\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{x}_2)}{(\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_1)}\boldsymbol{y}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}_3=\boldsymbol{x}_3-\frac{(\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{x}_3)}{(\boldsymbol{y}_1,\ \boldsymbol{y}_1)}\boldsymbol{y}_1-\frac{(\boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{x}_3)}{(\boldsymbol{y}_2,\ \boldsymbol{y}_2)}\boldsymbol{y}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

再把它们单位化，得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{\boldsymbol{y}_1}{\|\boldsymbol{y}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\frac{\boldsymbol{y}_2}{\|\boldsymbol{y}_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3=\frac{\boldsymbol{y}_3}{\|\boldsymbol{y}_3\|}=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$ ■

定义 5.6　设 n 维向量$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$是向量空间 $V(\subset\mathbf{R}^n)$的一个基，如果$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$两两正交，则称$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_r$是 V 的一个**正交基**.

定义 5.7　设 n 维向量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_r$ 是向量空间 $V(\subset\mathbf{R}^n)$的一个基，如果 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_r$ 两两正交，且都是单位向量，则称 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，…，$\boldsymbol{e}_r$ 是 V 的一个**标准正交基**.

例如，$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$就是 $\mathbf{R}^3$ 的一个标准正交基.

例 5.3　已知三维向量空间中，$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$正交，试求 $\boldsymbol{\alpha}_3$，使得 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是三维向量空间的一个正交基.

解　设 $\boldsymbol{\alpha}_3=(x_1,\ x_2,\ x_3)^{\mathrm{T}}\neq\mathbf{0}$，则

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=0,\ (\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=0,$$

即
$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\x_1-2x_2+x_3=0,\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}x_1=-x_3\\x_2=0,\\x_3=x_3,\end{cases}$$

取
$$\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$ ■

注：$k\boldsymbol{\alpha}_3(k\neq 0)$ 均可与 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 构成三维向量空间的一个正交基．

例 5.4　已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，求由 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 扩充成的 $\mathbf{R}^3$ 的一个标准正交基．

解　设非零向量 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 都与 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 正交，则 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足方程 $\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=0$，即 $\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 为齐次线性方程组 $x_1+x_2+x_3=0$ 的解向量．其基础解系为

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

令
$$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},$$

将 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 正交化、单位化，得

$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 为由 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 扩充成的 $\mathbf{R}^3$ 的一个标准正交基．■

5.1.3　正交矩阵及正交变换

定义 5.8　若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$(即 $\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$)，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**正交矩阵**．

若把方阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量记为 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$，则 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 可表示为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\\vdots\\\boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_n)=\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&\ddots&\\&&&1\end{pmatrix},\tag{5.4}$$

由此得

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_j=\delta_{ij}=\begin{cases}1,\ i=j,\\0,\ i\neq j\end{cases}\quad(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

由此，我们得到

定理 5.2　方阵 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量都是单位向量且两两正交．

由于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{I}$ 当且仅当 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T}=\boldsymbol{I}$，所以上述结论对 $\boldsymbol{A}$ 的行向量也成立．由此

可知，正交矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个行(列)向量构成 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$ 的一个标准正交基 .

例 5.5 判断下列矩阵是否为正交矩阵 .

(1) $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$； (2) $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$.

解 (1) 方法一 利用定义 5.8

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & -\frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{8}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵 .

方法二 利用定理 5.2 可以计算 $\boldsymbol{A}$ 的每个列向量都是单位向量，且两两正交，所以 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵 .

(2) 观察第一行 $1^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\neq 1$，所以 $\boldsymbol{B}$ 不是正交矩阵 . ■

定义 5.9 若 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，则称线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Px}$ 为**正交变换** .

例 5.6 证明：正交变换使向量的内积、长度保持不变 .

证明 设 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Px}$ 为正交变换，且 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}_2$，则

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2)=\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_2=(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2),$$

$$\|\boldsymbol{\beta}_1\|=\sqrt{(\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_1)}=\sqrt{\boldsymbol{\beta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}_1}=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}_1}=\sqrt{\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_1}=\|\boldsymbol{\alpha}_1\|.$$ ■

练 习 5.1

1. 求一单位向量与 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 1,\ -1)$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ -1,\ -1)$都正交 .

2. 用施密特正交化方法把下列向量组标准正交化：

(1) $(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$；(2) $(\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. 下列矩阵是否为正交矩阵？并说明理由 .

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$；　　(2) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都为 n 阶正交矩阵，证明：

(1) $|\boldsymbol{A}|=1$ 或 $|\boldsymbol{A}|=-1$；　(2) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{A}^{-1}$、$\boldsymbol{AB}$ 也是正交矩阵 .

§5.2　方阵的特征值与特征向量

数学中诸如方阵的对角化及解微分方程组等问题，都要用到特征值的理论 . 本节主要介绍特征值、特征向量的定义及求法，并且介绍它们的一些性质 .

5.2.1　特征值与特征向量的定义及求法

定义 5.10　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶方阵，若存在数 λ 和非零的 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}, \tag{5.5}$$

则称数 λ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征值**，称向量 $\boldsymbol{x}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的**特征向量** .

例如，方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，有 $\lambda=3$ 及向量 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$，使得

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

这说明 $\lambda=3$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda=3$ 的特征向量 .

式(5.5)也可以写成

$$(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}, \tag{5.6}$$

根据定义 5.10，$\boldsymbol{A}$ 的特征值就是使方程组(5.6)有非零解的 λ，而方程组(5.6)有非零解的充要条件为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0. \tag{5.7}$$

定义 5.11　方程(5.7)称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**特征方程**，方程(5.7)的左端 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|$ 为 λ 多项式，此多项式称为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式** .

因此，$\boldsymbol{A}$ 的特征值就是该特征多项式的根 . 设 λ_0 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，则由

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

可求得非零解 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{p}_0$，$\boldsymbol{p}_0$ 就是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的一个特征向量 .

综上所述，求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量的步骤如下：

（1）计算特征多项式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|$.

（2）求出特征方程 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=0$ 的全部根，即 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

（3）对于 $\boldsymbol{A}$ 的每一个特征值 λ_0，求出齐次线性方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_0\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}_2, \cdots, \boldsymbol{\xi}_r,$$

则对于不全为零的任意常数 $k_1, k_2, \cdots, k_r$，

$$\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\cdots+k_r\boldsymbol{\xi}_r$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的全部特征向量.

例 5.7 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ 的全部特征值和特征向量.

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -1\\ -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

得 $(\lambda-2)(\lambda-4)=0$，解得 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=4$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值为

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=4.$$

当 $\lambda_1=2$ 时，求解方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 对 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$ 进行初等行变换，得

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix},$$

求得基础解系

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},$$

所以 $k_1\boldsymbol{p}_1(k_1\neq 0)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1=2$ 的全部特征向量.

当 $\lambda_2=4$ 时，求解方程组 $(\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，可得基础解系为

$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix},$$

所以 $k_2\boldsymbol{p}_2(k_2\neq 0)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_2=4$ 的全部特征向量. ■

例 5.8 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 的全部特征值和特征向量.

解 $\boldsymbol{A}$ 的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}-1-\lambda & 1 & 0\\ -4 & 3-\lambda & 0\\ 1 & 0 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

得$(2-\lambda)(\lambda-1)^2=0$，解得$\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，所以$\boldsymbol{A}$的全部特征值为

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=1.$$

当$\lambda_1=2$时，求解方程组$(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 对$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}$进行初等行变换，得

$$\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-3&1&0\\-4&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

求得基础解系

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以$k_1\boldsymbol{p}_1(k_1\neq0)$是$\boldsymbol{A}$对应于$\lambda_1=2$的全部特征向量.

当$\lambda_2=\lambda_3=1$时，求解方程组$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，可得基础解系为

$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},$$

所以$k_2\boldsymbol{p}_2(k_2\neq0)$是$\boldsymbol{A}$对应于$\lambda_2=\lambda_3=1$的全部特征向量. ■

例 5.9　求矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&2&0\\-4&1&3\end{pmatrix}$的全部特征值和特征向量.

解　$\boldsymbol{A}$的特征方程为

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix}-2-\lambda&1&1\\0&2-\lambda&0\\-4&1&3-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

得$(-1-\lambda)(2-\lambda)^2=0$，解得$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$，所以$\boldsymbol{A}$的全部特征值为

$$\lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=2.$$

当$\lambda_1=-1$时，求解方程组$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 对$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$进行初等行变换，得

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-1&1&1\\0&3&0\\-4&1&4\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

求得基础解系

$$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

所以$k_1\boldsymbol{p}_1(k_1\neq0)$是$\boldsymbol{A}$对应于$\lambda_1=-1$的全部特征向量.

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，求解方程组 $(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，可得基础解系为

$$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},$$

所以 $k_2\boldsymbol{p}_2+k_3\boldsymbol{p}_3$（$k_2$，$k_3$ 不同时为零）是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的全部特征向量．■

5.2.2 特征值与特征向量的性质

由例 5.9 可知，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 3，即 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=3$，恰为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的迹 $\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=a_{11}+a_{22}+a_{33}=3$，而且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之积为 -4，恰为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $|\boldsymbol{A}|$．这一结论并不是偶然的，它在一般情况下也成立．

定理 5.3 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 的 n 个特征值为 λ_1，λ_2，…，λ_n，则

(1) $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|\boldsymbol{A}|$；

(2) $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$．

证明 (1) 由于 λ_1，λ_2，…，λ_n 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，故

$$\begin{aligned}|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|&=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)\\&=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.\end{aligned}$$

令 $\lambda=0$，得 $|-\boldsymbol{A}|=(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，即 $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$.

(2) 由于

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

的行列式展开式中，主对角线元素的乘积

$$(\lambda-a_{11})(\lambda-a_{22})\cdots(\lambda-a_{nn})$$

是其中的一项，再由行列式定义可知：展开式中的其余项至多包含 $n-2$ 个主对角线上的元素，因此 $|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$ 中含 λ^n 与 λ^{n-1} 的项只能在主对角线元素乘积项中出现，故有

$$|\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|\boldsymbol{A}|.$$

比较以上两式中 λ^{n-1} 的系数可得

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}=\mathrm{tr}\boldsymbol{A}.$$ ■

由定理 5.3 易得

推论 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值非零．

性质 5.2 设 λ_0 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 是方阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_0 的特征向量，则

（1）$k\boldsymbol{x}$（$k\neq 0$）是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 λ_0 的特征向量；

（2）对实数 k，$k\lambda_0$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 的特征值；

（3）对正整数 $m(m\geqslant 2)$，λ_0^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值；

（4）若 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，则$\dfrac{1}{\lambda_0}$是 $\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值；

（5）$\dfrac{|\boldsymbol{A}|}{\lambda_0}(\lambda_0\neq 0)$是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的特征值；

（6）对于多项式 $f(\boldsymbol{x})$，$f(\lambda)$是 $f(\boldsymbol{A})$的特征值．

证明　（1）因为$\boldsymbol{x}$是方阵$\boldsymbol{A}$ 对应于特征值λ_0 的特征向量，由定义可知

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x},$$

而
$$\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{x})=k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=k(\lambda_0\boldsymbol{x})=\lambda_0(k\boldsymbol{x})\quad(k\neq 0),$$
所以 $k\boldsymbol{x}$（$k\neq 0$）是 $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值λ_0 的特征向量．

这说明特征向量不是被特征值唯一决定的，但是特征值是被特征向量唯一决定的．因此一个特征向量只能属于一个特征值．

（2）由题意知 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{x}$．

$$(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=k(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=k(\lambda_0\boldsymbol{x})=(k\lambda_0)\boldsymbol{x},$$

即 $k\lambda_0$ 是 $k\boldsymbol{A}$ 对应于特征向量$\boldsymbol{x}$ 的特征值．

（3）$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{m-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=\lambda_0\boldsymbol{A}^{m-1}\boldsymbol{x}=\lambda_0\boldsymbol{A}^{m-2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})=\lambda_0^2\boldsymbol{A}^{m-2}\boldsymbol{x}=\cdots=\lambda_0^m\boldsymbol{x}$，
即 λ_0^m 是 $\boldsymbol{A}^m$ 的特征值．

（4）～（6）类似可证．　■

定理 5.4　λ_1，λ_2，…，λ_n 是$\boldsymbol{A}$ 的n 个特征值，$\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，…，$\boldsymbol{p}_n$为依次对应的特征向量，若 λ_1，λ_2，…，λ_n 各不相同，则$\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，…，$\boldsymbol{p}_n$线性无关．

证明略．　■

练　习　5.2

1．求下列矩阵的特征值和特征向量：

（1）$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$，这里 a，b，c 为互不相等的实数；

（3）$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

2．已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，-2，3，求：

（1）$2\boldsymbol{A}$ 的特征值；（2）$\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值 .

3. 已知三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，2，3，求 $|\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+7\boldsymbol{A}|$.

4. 若 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 的特征值只能取 1 或 2.

5. 已知矩阵

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & -1 \\ 4 & 7 & -1 \\ -4 & 4 & x \end{pmatrix}$$

的特征值为 $\lambda_1=3$(且 λ_1 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的二重根)和 $\lambda_2=11$，求 x 的值，并求矩阵的特征向量 .

§5.3 矩阵的对角化

本节将讨论一般矩阵与对角矩阵相似的条件，同时还将讨论一种特殊方阵——实对称矩阵与对角矩阵相似的问题 .

5.3.1 一般矩阵的对角化

定义 5.12 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，若有可逆方阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，则称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的**相似矩阵**或称方阵 $\boldsymbol{A}$ 与方阵 $\boldsymbol{B}$ **相似**，记作 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$.

对于相似矩阵，我们有

定理 5.5 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相同，从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相同 .

证明 因为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，故有可逆方阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$，于是

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{I}| &= |\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}-\boldsymbol{P}^{-1}(\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}| \\ &= |\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{P}^{-1}|\cdot|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|\cdot|\boldsymbol{P}| \\ &= |\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|, \end{aligned}$$

即 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相同，从而 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征值相同 . ■

由于对角矩阵的特征值为对角线上的元素，所以由定理 5.5 得

推论 若 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

相似，则 λ_1，λ_2，…，λ_n 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值 .

关于相似矩阵，我们关心的一个问题是：在与 $\boldsymbol{A}$ 相似的矩阵中，最简单的形式是什么？由于对角矩阵是最简单的，于是我们可以考虑：是否任意一个方阵都相似于一个对角矩阵呢？回答是否定的．例如，矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ 没有实的特征值，所以它就不可能和一个对角矩阵相似，因为由定理 5.5 的推论可知：如果它相似于对角矩阵，则必有两个实的特征值．既然有的矩阵可以相似于一个对角矩阵，有的不能，那么如何判断呢？

定义 5.13　若方阵 $\boldsymbol{A}$ 能相似于一个对角矩阵，则称 $\boldsymbol{A}$ **可对角化**．

下面我们给出矩阵相似于对角矩阵的判别方法．

定理 5.6　n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充要条件为 $\boldsymbol{A}$ 具有 n 个线性无关的特征向量．

证明　必要性　若 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，则必存在可逆阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

为对角阵．

将 $\boldsymbol{P}$ 用其列向量表示为

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n),$$

由 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$，得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}$，即

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n)=(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

于是有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

另外，由于 $\boldsymbol{P}$ 可逆，所以 $\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n$ 必是 n 个线性无关的一组向量，即 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n$.

充分性　若 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n$，它们所对应的特征值分别为 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_i=\lambda_i\boldsymbol{p}_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

我们以 $\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n$ 为列向量构造一个 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1,\ \boldsymbol{p}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{p}_n),$$

则 $\boldsymbol{P}$ 必为可逆阵，且

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{AP} &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n) \\
&= (\boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{p}_n) \\
&= (\lambda_1\boldsymbol{p}_1, \lambda_2\boldsymbol{p}_2, \cdots, \lambda_n\boldsymbol{p}_n) \\
&= (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \cdots, \boldsymbol{p}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \\
&= \boldsymbol{P\Lambda},
\end{aligned}$$

从而 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角阵． ■

例 5.10 判定下列矩阵是否相似于对角矩阵．若相似，则求出可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角阵．

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$； （2）$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

解 （1）$\boldsymbol{A}$ 是一个上三角矩阵，其特征值为主对角线上的元素，则特征值 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1$，故 $\boldsymbol{A}$ 不相似于对角矩阵．否则，若 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$，则由定理 5.5 中的推论知，$\boldsymbol{\Lambda}$ 就是单位矩阵，且有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{I}$，从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PIP}^{-1}=\boldsymbol{I}$. 这显然不正确，所以 $\boldsymbol{A}$ 不相似于对角矩阵．

（2）由例 5.9 可知，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征值为 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$.

当 $\lambda_1=-1$ 时，$\boldsymbol{p}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_1=-1$ 的特征向量．

当 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 时，$\boldsymbol{p}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{p}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$是 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\lambda_2=\lambda_3=2$ 的特征向量．

显然 $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$ 线性无关，故由定理 5.6 可知，$\boldsymbol{B}$ 与对角矩阵相似．

取
$$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3)=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 可逆，且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{BP}=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$ ■

说明：在上例中，所求得的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的列向量 $\boldsymbol{p}_i$（即特征向量）应与对

角矩阵上的对角元素 λ_i 相对应.

5.3.2　实对称矩阵的对角化

在矩阵的对角化问题中，实对称矩阵的对角化问题尤为重要，因此，下面我们着重讨论实对称矩阵的对角化问题.

定理 5.7　实对称矩阵的特征值皆为实数，特征向量皆为实向量.

证明略.

定理 5.8　实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于不同特征值的特征向量是相互正交的.

证明　设 λ_1，λ_2 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，它们所对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1=\lambda_1\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\lambda_2\boldsymbol{x}_2.$$

由第一式转置得

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A},$$

所以

$$\lambda_1\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(\lambda_2\boldsymbol{x}_2)=\lambda_2\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2,$$

故

$$(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2=0.$$

由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$，得 $\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2=0$，即 $\boldsymbol{x}_1$ 与 $\boldsymbol{x}_2$ 正交. ■

定理 5.9　若 λ 是实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 r 重特征根，则对应的特征值 λ 恰有 r 个线性无关的特征向量.

证明略.

由定理 5.6、定理 5.7、定理 5.8 和定理 5.9 可以得到

定理 5.10　实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定可以对角化，即存在正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

其中 λ_1，λ_2，…，λ_n 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值.

根据上述定理，可以利用正交矩阵将实对称矩阵化为对角矩阵，其具体步骤为

(1) 求出 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 λ_1，λ_2，…，λ_n；

(2) 对每一个特征值 λ_i，$i=1$，2，…，n，由方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 求出基础解系(特征向量)；

(3) 将属于同一特征值的特征向量正交化、单位化；

(4) 以这些单位向量作为列向量构成一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$.

注：矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中列向量的次序与矩阵 $\boldsymbol{\Lambda}$ 对角线上的特征值的次序相对应.

例 5.11 已知矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix},$$

求正交矩阵 P，使得 $P^{-1}AP=\Lambda$ 为对角矩阵．

解 先求 A 的特征值．由

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&0\\-2&1-\lambda&-2\\0&-2&-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

得
$$(\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)=0,$$

解得 A 的特征值为

$$\lambda_1=1,\ \lambda_2=4,\ \lambda_3=-2.$$

当 $\lambda_1=1$ 时，求解方程组 $(A-I)x=0$. 对 $A-I$ 进行初等行变换，得

$$A-I=\begin{pmatrix}1&-2&0\\-2&0&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+2r_1}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-4&-2\\0&-2&-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{r_2-2r_3}\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&-2&-1\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[-\frac{1}{2}r_2]{r_1-r_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=-x_3,\\x_2=-\dfrac{1}{2}x_3,\end{cases}$$

求得属于特征值 $\lambda_1=1$ 的特征向量为

$$p_1=\begin{pmatrix}-1\\-\dfrac{1}{2}\\1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_2=4$ 时，求解方程组 $(A-4I)x=0$. 对 $A-4I$ 进行初等行变换，得

$$A-4I=\begin{pmatrix}-2&-2&0\\-2&-3&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-r_1}\begin{pmatrix}-2&-2&0\\0&-1&-2\\0&-2&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-r_2]{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}-2&-2&0\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_1-r_2]{-\frac{1}{2}r_1}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3, \\ x_2 = -2x_3, \end{cases}$$

求得属于特征值 $\lambda_2 = 4$ 的特征向量为

$$\boldsymbol{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_3 = -2$ 时，同样可以求出其特征向量为

$$\boldsymbol{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

由定理 5.8 知，属于不同特征值的特征向量两两正交，因此，只需要将 $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$单位化，即可得三个相互正交的单位特征向量

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

以 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 为列向量构造矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & -2 \end{pmatrix}.$$ ■

例 5.12　设 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，求一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵．

解　由

$$|\boldsymbol{A} - \lambda\boldsymbol{I}| = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

得 $$(\lambda-1)(\lambda^2+\lambda-2)=(\lambda-1)^2(\lambda+2)=0,$$
解得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为
$$\lambda_1=-2，\lambda_2=\lambda_3=1.$$

当 $\lambda_1=-2$ 时，求解方程组 $(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 对 $\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 进行初等行变换，得
$$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\-1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$
得同解方程组为
$$\begin{cases}x_1=-x_3,\\x_2=-x_3,\end{cases}$$
求得属于特征值 $\lambda_1=-2$ 的特征向量为
$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$
将 $\boldsymbol{\xi}_1$ 单位化，得
$$\boldsymbol{e}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

当 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 时，求解方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 对 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}$ 进行初等行变换，得
$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
得同解方程组为
$$x_1=-x_2+x_3,$$
求得属于特征值 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量为
$$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}，\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$
将 $\boldsymbol{\xi}_2$，$\boldsymbol{\xi}_3$ 正交化：取
$$\boldsymbol{\eta}_2=\boldsymbol{\xi}_2,$$
$$\boldsymbol{\eta}_3=\boldsymbol{\xi}_3-\frac{(\boldsymbol{\eta}_2,\ \boldsymbol{\xi}_3)}{(\boldsymbol{\eta}_2,\ \boldsymbol{\eta}_2)}\boldsymbol{\eta}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},$$
将 $\boldsymbol{\eta}_2$，$\boldsymbol{\eta}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{e}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}.$$

以 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 为列向量构造矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\end{pmatrix},$$

则 $\boldsymbol{P}$ 为正交矩阵，且

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}-2 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}.$$ ■

例 5.13　设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值为 2，4，…，$2n$，求行列式 $|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}|$.

解　方法一　由定理 5.4 和定理 5.6 知，方阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化，因此，存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵，其中

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}2 & & & \\ & 4 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2n\end{pmatrix},$$

于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1},$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}|&=|\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}-3\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}|=|\boldsymbol{P}|\,|\boldsymbol{\Lambda}-3\boldsymbol{I}|\,|\boldsymbol{P}^{-1}|=|\boldsymbol{\Lambda}-3\boldsymbol{I}|\\&=\begin{vmatrix}-1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 2n-3\end{vmatrix}=(-1)\times1\times3\times\cdots\times(2n-3).\end{aligned}$$

方法二　由题设可知，$\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}$ 的 n 个特征值是 $2-3$，$4-3$，…，$2n-3$，故由定理 5.3 知

$$|\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{I}|=(2-3)(4-3)\cdots(2n-3)=(-1)\times1\times3\times\cdots\times(2n-3).$$ ■

练　习　5.3

1. 对下列矩阵，求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角阵.

（1）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&0\end{pmatrix}$；　　（2）$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&4\\0&1&0\\4&0&2\end{pmatrix}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵，且 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$，证明：$\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 相似．

3. 设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&1&x\end{pmatrix}$与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&y&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$相似，

（1）求 x，y；（2）求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

§5.4 二 次 型

二次型的理论起源于解析几何中对二次曲线和二次曲面的研究，它在线性系统理论等许多领域中都有应用．这一节我们着重介绍它的性质，并且利用前面所学知识将二次型进行化简．

5.4.1 二次型的矩阵表示

定义 5.14 含有 n 个变量 x_1，x_2，…，x_n 的二次齐次多项式

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, \cdots, x_n)&=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n+a_{22}x_2^2+\cdots+\\&\qquad 2a_{2n}x_2x_n+\cdots+a_{nn}x_n^2\\&=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij}=a_{ji})\end{aligned} \tag{5.8}$$

称为 n **元二次型**，简称**二次型**．

当 a_{ij} 都是实数时，这二次型称为实二次型．下面我们只讨论实二次型．

任何二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \quad (a_{ij}=a_{ji})$$

都可以写成如下形式：

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, \cdots, x_n)&=x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)+x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+\\&\qquad a_{2n}x_n)+\cdots+x_n(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)\\&=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\\vdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$=(x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

若记

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \tag{5.9}$$

定义 5.15　式(5.9)为二次型的矩阵表示形式，称矩阵 **A** 为二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$所对应的矩阵．

不难看出，二次型(5.9)的矩阵 **A** 是对称矩阵，且其元素 $a_{ij}=a_{ji}(i\neq j)$是它的 x_ix_j 项系数的一半，a_{ii}是 x_i^2 项的系数，因此，二次型和它的矩阵是相互唯一决定的，这样我们就可以通过二次型的矩阵来研究二次型．

例 5.14　(1) 把二次型 $f(x, y, z)=x^2+2xy+4xz+3y^2+yz+7z^2$ 写成矩阵形式；

(2) 求与矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

相对应的二次型．

解　(1) $f(x, y, z)=(x, y, z)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$；

(2) 矩阵 **A** 对应的二次型为

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4)=x_1^2-2x_1x_3+2x_2^2+6x_2x_4-2x_3^2+8x_3x_4+5x_4^2.$$ ■

5.4.2　化二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为标准形

定义 5.16　如果 $i\neq j$ 时，$a_{ij}=0$，那么二次型(5.8)就称为**标准形**．此时

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{nn}x_n^2=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2. \tag{5.10}$$

求二次型的标准形的过程称为**化标准形**.

显然，二次型的标准形对应于对角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

为了将一个二次型化为标准形，我们作如下的线性变换：

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n, \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n. \end{cases}$$

设 $$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

则上述线性变换可以用矩阵表示为

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}.$$

如果矩阵 $\boldsymbol{C}$ 是非奇异的(即可逆的)，则称此线性变换为从变量 x_1，x_2，…，x_n 到变量 y_1，y_2，…，y_n 的非奇异线性变换．要得到二次型在新变量 y_1，y_2，…，y_n 下的表示式，我们只要把$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 代入$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 中，即

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{y})=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}.$$

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵，可以推出矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 也是对称矩阵，因此，$\boldsymbol{B}$ 就是变换后的二次型的矩阵．

由此可见，化二次型$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为标准形的问题就是对于实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，寻找一个可逆的矩阵 $\boldsymbol{C}$，使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$ 为对角矩阵．这样，二次型

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

经非奇异线性变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 一定可以化为标准形．

下面我们来介绍二次型化标准形的方法．

定理 5.11 对于任意一个 n 元二次型 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，都存在正交变换$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，使得

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P})\boldsymbol{y}=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2,$$

其中 λ_1，λ_2，…，λ_n 是实对称矩阵$\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，$\boldsymbol{P}$ 的 n 个列向量是$\boldsymbol{A}$ 的相应的 n 个单位正交的特征向量．

由以上定理，得到用正交变换将二次型 $f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$化为标准形的

步骤如下：

（1）写出二次型所对应的实对称阵 $\boldsymbol{A}$.

（2）求出方阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值 λ_1，λ_2，…，λ_n.

（3）对每一个特征值 λ_i，$i=1$，2，…，n，由方程组 $(\boldsymbol{A}-\lambda_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 求出其基础解系(特征向量).

（4）将属于同一个特征值的特征向量正交化、单位化.

（5）以这些单位向量作为列向量构成一个正交矩阵 $\boldsymbol{P}$，作正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，即可将二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 化为标准形 $f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$.

例 5.15　用正交变换化二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ 为标准形.

解　二次型对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix},$$

故特征方程

$$|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{I}|=\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 4-\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 4-\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+9\lambda^2=-\lambda^2(\lambda-9)=0$$

的根为 $\lambda_1=\lambda_2=0$，$\lambda_3=9$.

当 $\lambda_1=\lambda_2=0$ 时，由齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-0\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，求得相对应的特征向量为

$$\boldsymbol{\xi}_1=(2, 1, 0)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\xi}_2=(-2, 0, 1)^{\mathrm{T}},$$

将其正交化，令 $\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\xi}_1=(2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\xi}_2-\dfrac{(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\alpha}_1)}{(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1)}\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-\dfrac{2}{5}, \dfrac{4}{5}, 1\right)^{\mathrm{T}}$，

再单位化得 $\boldsymbol{e}_1=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_1}{\|\boldsymbol{\alpha}_1\|}=\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}, 0\right)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{e}_2=\dfrac{\boldsymbol{\alpha}_2}{\|\boldsymbol{\alpha}_2\|}=\left(-\dfrac{2}{3\sqrt{5}}, \dfrac{4}{3\sqrt{5}}, \dfrac{5}{3\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}$.

当 $\lambda_3=9$ 时，由齐次方程组 $(\boldsymbol{A}-9\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，求得相对应的特征向量为 $\boldsymbol{\xi}_3=(1, -2, 2)^{\mathrm{T}}$，单位化得 $\boldsymbol{e}_3=\dfrac{\boldsymbol{\xi}_3}{\|\boldsymbol{\xi}_3\|}=\left(\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)^{\mathrm{T}}$.

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$，故所求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形

$$f=9y_3^2.$$

5.4.3　正定(负定)二次型

定义 5.17　如果对于不全为零的任何实数 x_1，x_2，…，x_n，二次型

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji})$$

的值都是正数，则称此二次型为**正定二次型**，而其对应的矩阵称为**正定矩阵**．反之，如果二次型的值都是负数，则称此二次型为**负定二次型**，其对应的矩阵称为**负定矩阵**．

例如，二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2$ 是正定二次型，而二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=x_1^2+x_2^2$ 就不是正定二次型．

下面介绍一些有关正定二次型的判别定理．

定理 5.12 二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为正定（负定）的充要条件是其矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 都是正数（负数）.

证明 我们仅就正定情况给予证明．

必要性 设二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为正定，则对任意 $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$，

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x} > 0.$$

设 λ_i 是特征向量 $\boldsymbol{x}_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 所对应的特征值，那么

$$\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}} (\lambda_i \boldsymbol{x}_i) = \lambda_i \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_i.$$

由 $\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$ 可得 $\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_i > 0$. 由 $\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}_i > 0$，从而 $\lambda_i \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_i > 0$，所以 $\lambda_i > 0$.

充分性 设 $\lambda_i > 0$，$i=1, 2, \cdots, n$，则由定理 5.11 可知，存在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P} \boldsymbol{y}$，使得

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2.$$

因为 $|\boldsymbol{P}| \neq 0$，所以对任意一组不全为零的数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，通过正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P} \boldsymbol{y}$，得到一组不全为零的数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，从而

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 > 0,$$

即二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为正定二次型． ■

由定理 5.12，我们得到

推论 1 实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的充要条件是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值都是正数．

推论 2 正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵．

定理 5.13（希尔维斯特定理） 二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}$ 是正定的充要条件为实对称矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的各阶顺序主子式 A_{ii} 都大于零，即

$$A_{11} = |a_{11}| = a_{11} > 0, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \cdots, A_{nn} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

证明略.

例 5.16 判别 $f(x, y, z)=5x^2+y^2+5z^2+4xy-8xz-4yz$ 是否正定.

解 二次型对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

其各阶顺序主子式为

$$A_{11}=|a_{11}|=5>0,\ A_{22}=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1>0,\ A_{33}=\begin{vmatrix} 5 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{vmatrix}=1>0,$$

所以二次型是正定的. ■

例 5.17 求 t 的取值范围，使得下面二次型为正定二次型：

$$f(x_1, x_2, x_3)=tx_1^2+tx_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3.$$

解 二次型对应的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} t & 1 & -2 \\ 1 & t & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

其各阶顺序主子式为

$$A_{11}=|a_{11}|=t,\ A_{22}=\begin{vmatrix} t & 1 \\ 1 & t \end{vmatrix}=t^2-1,$$

$$A_{33}=|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} t & 1 & -2 \\ 1 & t & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2t^2-4t-2.$$

要使二次型为正定二次型，由定理 5.13 可知

$$\begin{cases} t>0, \\ t^2-1>0, \\ 2t^2-4t-2>0, \end{cases}$$

解得

$$t>1+\sqrt{2},$$

故当 t 的取值满足 $t>1+\sqrt{2}$ 时，f 为正定二次型. ■

例 5.18 设 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，且满足 $\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+8\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}=\boldsymbol{O}$，证明：$\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵.

证明 令 $f(\lambda)=\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4$，则 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^3-5\boldsymbol{A}^2+8\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{I}$. 设 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值，对应的特征向量为 $\boldsymbol{x}$，即 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$. 由性质 5.2 可知 $f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=f(\lambda)\boldsymbol{x}$.

由已知条件得 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$，则 $f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，从而 $f(\lambda)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$. 再由$\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$，得 $f(\lambda)=0$，解得矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值$\lambda_1=1$，$\lambda_2=\lambda_3=2$ 全部为正值，故 $\boldsymbol{A}$ 为正定矩阵．■

例 5.19 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶正定矩阵，证明：$\boldsymbol{A}^{-1}$也是正定矩阵．

证明 由于 $\boldsymbol{A}$ 正定，所以由定理 5.12 可得，$\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_i>0$，$i=1$，2，…，n. 又 $\boldsymbol{A}$ 为实对称矩阵，故$(\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}$，即 $\boldsymbol{A}^{-1}$为实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^{-1}$的特征值 $u_i=\dfrac{1}{\lambda_i}>0$，$i=1$，2，…，$n$，故 $\boldsymbol{A}^{-1}$也是正定矩阵．■

练 习 5.4

1．用矩阵形式表示下列二次型：

（1）$f(x, y, z)=x^2+4y^2+z^2+4xy+2xz+4yz$；

（2）$f(x, y, z)=x^2+y^2-7z^2-6xz-4yz$.

2．用二次齐次多项式表示下列二次型：

（1）$f(x, y)=(x, y)\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$；

（2）$f(x, y, z)=(x, y, z)\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

3．用正交变换化下面的二次型为标准形：

$$f(x, y, z)=2x^2+3y^2+3z^2+4yz.$$

4．判别下面的二次型是否正定：

$$f(x, y, z)=2x^2+6y^2+4z^2+2xy+2xz.$$

5．设 $f(x, y, z)=x^2+y^2+5z^2+2axy-2xz+4yz$ 为正定二次型，求 a.

6．证明：若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵，则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|>1$，其中 $\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵．

习 题 5

（A）基础题

1．判断题：

（1）设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，如果存在数 λ 和 n 维向量$\boldsymbol{x}$，使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$，则$\boldsymbol{x}$是 $\boldsymbol{A}$ 属于 λ 的特征向量．（　　）

（2）任何方阵和它的转置矩阵有相同的特征值．（　　）

（3）设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，则 $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 有相同的非零特

征值．（　　）

（4）如果 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等变换可化为对角矩阵 $\boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似．（　　）

（5）如果四阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有 4 个特征值 $\lambda_1=\lambda_2=1$，$\lambda_3=\lambda_4=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 与对角矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$ 相似．（　　）

（6）实对称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，如果所有的 $a_{ii}<0(i=1,2,\cdots,n)$，那么 $\boldsymbol{A}$ 是负定矩阵．（　　）

2．填空题：

（1）若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 相似，则 $\boldsymbol{A}=$________．

（2）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$是正交矩阵，则 $ac+bd=$________．

（3）已知三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 -1，1，2，则 $2\boldsymbol{A}$ 的特征值为________，$\boldsymbol{A}^*$ 的特征值为________，$\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I}$ 的特征值为________．

（4）设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=|2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}|=0$，则 $|\boldsymbol{A}-5\boldsymbol{I}|=$________．

（5）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$可对角化，则 x 和 y 应满足的条件为________．

（6）设二次型 $f(x,y,z)=-x^2+2y^2+3z^2+2xy+6xz+2yz$，则二次型对应的矩阵为________．

（7）设二次型 $f(x,y)=x^2+2ty^2-2xy$，则当 t 的取值范围为________时，$f(x,y)$为正定二次型．

3．选择题：

（1）设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & x & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 0，1，2，则 x 的取值为（　　）．

(A) 1；　　(B) 2；　　(C) 3；　　(D) 4．

（2）设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，且 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{O}$，则（　　）．

(A) $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$；

(B) $\boldsymbol{A}$ 有一个不为零的特征值；

(C) $\boldsymbol{A}$ 的特征值全为零；

(D) $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量．

（3）对于 n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$，以下结论正确的是（　　）.

（A）一定有 n 个不同的特征值；

（B）存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 成对角矩阵；

（C）它的特征值一定是正数；

（D）属于不同特征值的特征向量必线性无关，但不一定正交.

（4）设二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 为正定二次型，则下列说法正确的是（　　）.

（A）对任意一个 n 维列向量 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}>0$；

（B）f 的标准形的系数均非负；

（C）$\boldsymbol{A}$ 的特征值皆为正数；

（D）$\boldsymbol{A}$ 的所有子式均大于零.

4. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4=0,\\ x_1+x_2+x_3=0,\\ 3x_1+2x_2+x_4=0\end{cases}$$

的解空间的一个标准正交基.

5. 设方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&0&2\\3&1&x\end{pmatrix}$ 与 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$ 相似，

（1）求 x，y；（2）求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

6. 设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2，-2，1，对应的特征向量依次为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},$$

求 $\boldsymbol{A}$.

7. 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 把下列二次型化为标准形：

（1）$f(x, y)=5x^2+2y^2+4xy$；

（2）$f(x, y, z)=2xy+2xz+2yz$.

8. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵，$\boldsymbol{I}$ 为 n 阶单位矩阵，已知矩阵 $\boldsymbol{B}=\lambda\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$，试证：当 $\lambda>0$ 时，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为正定矩阵.

9. 已知二次型 $f(x, y, z)=tx^2+ty^2+tz^2+2xy+2xz-2yz$，则 t 满足什么条件时，二次型 f 是正定的？

10. 在某国，每年有比例为 p 的农村居民移居城镇，有比例为 q 的城镇居民移居农村. 假设该国总人口数不变，且上述人口迁移的规律也不变. 把 n 年

后农村人口和城镇人口占总人口的比例依次记为 x_n 和 y_n($x_n+y_n=1$).

(1) 求关系式 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 中的矩阵 $\boldsymbol{A}$；

(2) 设目前农村人口与城镇人口相等，即 $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$，求 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

(B) 提高题

1. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和都等于 -6，证明 -6 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，并且 $\alpha=(1,1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 -6 的特征向量 .

2. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，且 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个不同的特征值，证明 $\boldsymbol{B}$ 相似于对角阵 .

3. 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 是实二次型，证明：若有实 n 维向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ 使得 $\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1>0$，$\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2<0$，则必存在实 n 维向量 $\boldsymbol{x}_0\neq\boldsymbol{0}$，使得 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_0=0$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，证明：存在正实数 C，使得对于任意一个实 n 维向量 $\boldsymbol{x}$ 都有 $|\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}|\leqslant C\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，证明：$\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是存在 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵 .

6. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3\ (b>0)$，其中二次型矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12，(1) 求 a，b 的值；(2)求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$，将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形 .

7. 设二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$，试判断其是否正定.

习 题 答 案

第 1 章

练 习 1.1

1.(1) -2;(2) 5.

2.(1) -5;(2) 9.

3. 96,-20.

4. -200.

练 习 1.2

1.(1) 2 000;(2) $(a+b+c)^3$;(3) -9;(4) 120;

(5) $12(x-1)(x-2)(x+2)$.

2. 略.

3.(1) $(2n-1)(n-1)^{n-1}$;(2) $(-1)^{n-1}\dfrac{(n+1)!}{2}$;

(3) $(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$.

4.(1) 0;(2) 86.

练 习 1.3

1.(1) $x_1=0$,$x_2=0$,$x_3=0$,$x_4=0$;(2) $x_1=1$,$x_2=2$,$x_3=3$,$x_4=-1$.

2. $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$.

习 题 1

(A) 基础题

1.(1) -48;(2) 8,-8;(3) -28,0;(4) 1,2,-2;(5) 2000;

(6) 288.

2.(1) C;(2) B;(3) D;(4) A;(5) D.

3.(1) -3;(2) 57;(3) -1080;(4) x^4.

4.(1) $-2\cdot(n-2)!$;(2) $(-1)^{n+1}na_1a_2\cdots a_{n-1}$;(3) $3^{n+1}-2^{n+1}$.

5. $x_1=3$,$x_2=-4$,$x_3=-1$,$x_4=1$.

6. $f(x)=x^3+2x^2+3$.

7. $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$ 或 $\lambda=3$.

（B）提高题

1. $D_4=-3(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$.

2. $A_{41}+A_{42}+A_{43}=-9$，$A_{44}+A_{45}=18$.

3. $a_1a_2\cdots a_n+(-1)^{n+1}b_1b_2\cdots b_n$.

4. $n!\left(1-\dfrac{1}{2}-\cdots-\dfrac{1}{n}\right)$.

5. $2^{n+1}-2$.

6. $1-a+a^2-a^3+a^4-a^5$.

7. 用数学归纳法或展开递推法．

习题 1 部分习题详细解答

第　2　章

练　习　2.1

1. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1 & 2\\ -2 & -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. $\boldsymbol{A}$ 为上三角矩阵；$\boldsymbol{B}$ 为行阶梯形矩阵；$\boldsymbol{C}$ 为下三角矩阵；$\boldsymbol{D}$ 为对角矩阵；$\boldsymbol{F}$ 为单位矩阵．

练　习　2.2

1. $3\boldsymbol{AB}-2\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2 & 13 & 22\\ -2 & -17 & 20\\ 4 & 29 & -2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}6 & 1 & 6\\ 0 & -7 & 4\\ 2 & 5 & -4\end{pmatrix}$.

2.（1）$\begin{pmatrix}35\\ 6\\ 49\end{pmatrix}$；（2）10；（3）$\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 2\\ -3 & 6\end{pmatrix}$；

（4） $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3$.

3.（1） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$；

（2） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix}$；

（3） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&-1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}$.

4．$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}4&&\\&9&\\&&16\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^n=\begin{pmatrix}2^n&&\\&3^n&\\&&4^n\end{pmatrix}$.

5．略．

6．$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}18&0&0\\-12&6&0\\-2&-5&3\end{pmatrix}$.

练 习 2.3

1.（1） $\begin{pmatrix}5&-2\\-2&1\end{pmatrix}$；（2） $\begin{pmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{pmatrix}$；（3） $\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1}&&&\\&\frac{1}{a_2}&&\\&&\ddots&\\&&&\frac{1}{a_n}\end{pmatrix}$.

2．略．

3．$\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I}}{2}$，$(\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{I})^{-1}=\dfrac{(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{I})^2}{4}$.

4．-2.

5．略．

6．D.

7．略．

练 习 2.4

1. $\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{A}^{-1}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}&-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{12} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

练 习 2.5

1. $r_2+\left(-\frac{1}{3}\right)r_1$； $r_2+\frac{1}{3}r_1$.

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $k\neq 0$ 时，$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{k}\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -k & 1 & k \end{pmatrix}$.

练 习 2.6

1. 在秩是 r 的矩阵中，可能存在等于 0 的 $r-1$ 阶子式，也可能存在等于 0 的 r 阶子式．

例如，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，$R(\boldsymbol{\alpha})=3$ 同时存在等于 0 的三阶子式和二阶子式．

2. 1.

3. C.

4. A.

5. B.

6. D.

7. 秩为 3，非零子式为 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

习 题 2

（A）基础题

1.（1）2，3；（2）$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\6&0&0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$；

（3）$-\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&0&-2\\0&-6&0\end{pmatrix}$，$-\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&1\\0&3&0\end{pmatrix}$；

（4）25，40，5；（5）$-\dfrac{1}{6}$；（6）6.

2.（1）C；（2）D；（3）C；（4）A；（5）B.

3.（1）$\begin{pmatrix}2x+y&2x\\x&y\end{pmatrix}$，$x$，$y\in\mathbf{R}$；

（2）0（提示：）；$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}|=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})|=|\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$；

（3）$-\dfrac{11^3}{54}$；（4）$\begin{pmatrix}4&-5\\-4&-7\\3&5\end{pmatrix}$；

（5）$\dfrac{1}{9}$；（6）$R(\boldsymbol{A})=4$.

（B）提高题

1.（1）3；（2）0；（3）$243\begin{pmatrix}1&-2&2\\2&2&1\\-2&1&2\end{pmatrix}$（提示：$(3\boldsymbol{A})(3\boldsymbol{A})^*=|3\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$）；

（4）$\begin{pmatrix}0&\dfrac{1}{2}\\-1&-1\end{pmatrix}$.

2.（1）B；（2）C；（3）D；（4）A.

3.（1）$\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix}1&0\\2\lambda&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^3=\begin{pmatrix}1&0\\3\lambda&1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{A}^k=\begin{pmatrix}1&0\\k\lambda&1\end{pmatrix}$；

（2）$|\boldsymbol{A}^8|=10^{16}$，$\boldsymbol{A}^4=\begin{pmatrix}5^4&0&&\\0&5^4&\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{O}}\\&&2^4&0\\\multicolumn{2}{c}{\boldsymbol{O}}&2^6&2^4\end{pmatrix}$；

(3) $\boldsymbol{B}^{-1}=\frac{1}{10}(\boldsymbol{A}^2+3\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{I})$.

习题 2 部分习题详细解答

第 3 章

练 习 3.1

1. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2=(-1, 1, 3)^{\mathrm{T}}$，$2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3=(8, -5, 10)^{\mathrm{T}}$.

2. $\boldsymbol{\gamma}=(9, 2, 10)^{\mathrm{T}}$.

练 习 3.2

1. $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$.

2. (1) 线性相关；(2) 线性无关.

3. 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1-\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_2$；

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\ \boldsymbol{\beta}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2,$$

向量组 A 与 B 可相互线性表出，故向量组 A 与 B 等价.

4. $k=2$ 或 -1.

5. 略.

练 习 3.3

1. $R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 为极大线性无关组.

2. $a=1$.

3. $(1, 0, 2, 1)^{\mathrm{T}}$，$(1, 2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$，$(2, 1, 3, 0)^{\mathrm{T}}$ 是矩阵的列向量组的一个极大线性无关组.

习 题 3

(A) 基础题

1. (1) $(1, 2, 3, 4)$；(2) -1；(3) 2；(4) 3；(5) C；(6) B；(7) D.

2.（1）线性相关；（2）线性相关.

3.（1）$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性无关；（2）$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$ 线性相关.

4. $b=-1$.

5.（1）$R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)=3$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关；

（2）$R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)=3$，向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关.

6.（1）$R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)=3$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 为极大线性无关组，$\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$；

（2）$R(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)=2$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 为极大线性无关组，$\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_4=-2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$.

7. 略.

（B）提高题

1.（1）$a=15$；（2）$a\neq 15$.

2～5. 略.

习题 3 部分习题详细解答

第 4 章

练 习 4.1

1. $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix};$$

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. $\boldsymbol{\xi}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$是；$\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix} k \\ 2k \\ -3k \end{pmatrix}(k\neq 1)$不是.

练　习　4.2

(1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$；(2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}+k\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k$ 为任意常数．

练　习　4.3

1\. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=k_1\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$k_1$，$k_2$ 为任意常数．

2\. $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3\. $\lambda\neq-1$ 且 $\lambda\neq4$.

练　习　4.4

1\.(1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$($k_1$，$k_2\in\mathbf{R}$)；

(2) 方程组无解．

2\.(1) 当 $\lambda\neq2$ 且 $\lambda\neq-3$ 时，方程组有唯一解；(2) 当 $\lambda=2$ 时，方程组有无穷多解；(3) 当 $\lambda=-3$ 时，方程组无解．

习　题　4

(A) 基础题

1\.(1) √；(2) ×；(3) ×；(4) √；(5) √；(6) √.

2\.(1) 0 或 1；(2) $k\neq1$；(3) $k_1+k_2+\cdots+k_s=1$；(4) $a=-2$，$b=1$.

3.（1）D；（2）C；（3）C；（4）A；（5）A；（6）A；（7）D；（8）B.

4. $\boldsymbol{x}=(1,2,0,1)^{\mathrm{T}}+k_1(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(1,-1,1,2)^{\mathrm{T}}\quad(k_1,k_2\in\mathbf{R})$.

5. 当 $\lambda=49$，$\mu=4$ 时，方程组有解

$\boldsymbol{x}=(10,0,3,0)^{\mathrm{T}}+k_1(1,1,0,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-4,0,-1,1)^{\mathrm{T}}\quad(k_1,k_2\in\mathbf{R})$.

（B）提高题

1. 提示：利用定义证明 .

2. $\boldsymbol{x}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,1\right)^{\mathrm{T}}+k_1(0,1,-1,-1)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,-1,1)^{\mathrm{T}}$ $(k_1,k_2\in\mathbf{R})$.

3.（1）当 $a=c=\frac{1}{2}$时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\left(-\frac{1}{2},1,0,0\right)^{\mathrm{T}}+k_1(1,-3,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2\left(-\frac{1}{2},-1,0,1\right)^{\mathrm{T}}$$

$(k_1,k_2\in\mathbf{R})$.

（2）当 $a=c\neq\frac{1}{2}$时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=\left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)^{\mathrm{T}}+k\left(-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}\quad(k\in\mathbf{R}).$$

或者：

（1）当 $a=c=\frac{1}{2}$时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$\boldsymbol{x}=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}+k_1(1,-3,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2\left(-\frac{1}{2},-1,0,1\right)^{\mathrm{T}}\quad(k_1,k_2\in\mathbf{R})$.

（2）当 $a=c\neq\frac{1}{2}$时，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为

$$\boldsymbol{x}=(1,-1,1,-1)^{\mathrm{T}}+k\left(-1,\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)^{\mathrm{T}}\quad(k\in\mathbf{R}).$$

4. 提示：利用定义证明 .

5. 提示：利用定义证明 .

6.（1）当 $b\neq2$ 时，$\boldsymbol{\beta}$ 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示 .

（2）当 $b=2$ 时，①若 $a\neq1$，$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 唯一线性表示，$\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2$.

② 若 $a=1$，$\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示，表示法不唯一，

$$\boldsymbol{\beta}=(-1-2k)\boldsymbol{\alpha}_1+(2+k)\boldsymbol{\alpha}_2+k\boldsymbol{\alpha}_3,\ k\in\mathbf{R}.$$

习题 4 部分习题详细解答

第 5 章

练 习 5.1

1. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1)$或$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1, 0, 1)$.

2.（1）$\boldsymbol{e}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$；

（2）$\boldsymbol{e}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2=\dfrac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}1\\-3\\2\\1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_3=\dfrac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}-1\\3\\3\\4\end{pmatrix}$.

3.（1）不是；（2）是．

4. 略．

练 习 5.2

1.（1）特征值 $\lambda_1=4$，$\lambda_2=-1$，特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=k_1\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}(k_1\neq0)，\boldsymbol{\xi}_2=k_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}(k_2\neq0)；$$

（2）特征值 $\lambda_1=a$，$\lambda_2=b$，$\lambda_3=c$，特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(k_1\neq0)，\boldsymbol{\xi}_2=k_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}(k_2\neq0)，\boldsymbol{\xi}_3=k_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}(k_3\neq0)；$$

（3）特征值 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=9$，$\lambda_3=0$，特征向量

$$\boldsymbol{\xi}_1=k_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(k_1\neq0)，\boldsymbol{\xi}_2=k_2\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}(k_2\neq0)，\boldsymbol{\xi}_3=k_3\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}(k_3\neq0).$$

2.（1）2，-4，6；（2）1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$.

3．18.

4．略.

5．$x=3$，对应于 3 的特征向量为$\boldsymbol{\xi}_1=k_1\begin{pmatrix}1\\1\\8\end{pmatrix}(k\neq0)$；

对应于 11 的特征向量为$\boldsymbol{\xi}_2=k_2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}(k_2\neq0)$.

练 习 5.3

1.（1）$\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$；（2）$\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

2．略.

3.（1）$x=0$，$y=1$；（2）$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$.

练 习 5.4

1.（1）$f(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 4 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$；

（2）$f(x,y,z)=(x,y,z)\begin{pmatrix}1 & 0 & -3\\ 0 & 1 & -2\\ -3 & -2 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

2.（1）$f(x,y)=2x^2+3y^2+2xy$；

（2）$f(x,y,z)=x^2+5y^2+9z^2+4xy+6xz+12yz$.

3. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，$f=2y_1^2+5y_2^2+y_3^2$.

4. 正定.

5. $-\dfrac{4}{5}<a<0$.

6. 提示：设 λ_i，$i=1$，2，…，n 为 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值，则 $\lambda_i>0$，$i=1$，2，…，n，即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

故

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}| &= \left|\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1}\right| \\ &= |\boldsymbol{P}|\begin{vmatrix} \lambda_1+1 & & & \\ & \lambda_2+1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n+1 \end{vmatrix}|\boldsymbol{P}^{-1}| \\ &= \begin{vmatrix} \lambda_1+1 & & & \\ & \lambda_2+1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n+1 \end{vmatrix}>1. \end{aligned}$$

习　题　5

（A）基础题

1.（1）×；（2）√；（3）√；（4）×；（5）×；（6）×.

2.（1）$\boldsymbol{I}$；（2）0；（3）-2，2，4；2，-2，-1；1，3，4；

（4）-110；（5）$x+y=0$；（6）$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$；

（7）$\left(\dfrac{1}{2}，+\infty\right)$.

3.（1）A；（2）C；（3）B；（4）C.

4. $\boldsymbol{e}_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{e}_2=\dfrac{1}{\sqrt{51}}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

5.（1）$x=1$，$y=-2$；

（2）$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

6. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -4 & 5 & -3 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

7.（1）$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$，$f=y_1^2+6y_2^2$；

（2）$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \dfrac{2}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{6}} & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$，$f=-y_1^2-y_2^2+2y_3^2$.

8. 提示：利用定义证明.

9. $t>2$.

10.（1）$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}$；

（2）$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{2(p+q)}\begin{pmatrix} 2q+(p-q)r^n \\ 2p+(q-p)r^n \end{pmatrix}$，$r=1-p-q$.

（B）提高题

1～5. 略 .

6.（1）$a=1$，$b=2$；

（2）$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$，二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$化为标准形为 $f=2y_1^2+2y_2^2-3y_3^2$.

7. f 为正定二次型 .

习题 5 部分习题详细解答

主要参考文献

樊明书．2009. 线性代数．成都：四川大学出版社．

惠淑荣，张万琴．2009. 线性代数．北京：中国农业大学出版社．

上海交通大学应用数学系．1988. 线性代数．上海：上海交通大学出版社．

同济大学数学系．2003. 线性代数．北京：高等教育出版社．

吴赣昌．2009. 线性代数(农林类). 北京：中国人民大学出版社．

杨儒生，朱平天．1997. 线性代数题解集．南京：江苏教育出版社．

张良云，毕守东．2003. 线性代数．第2版．北京：高等教育出版社．

赵礼峰，等．2012. 线性代数与解析几何．北京：科学出版社．