"Can we say, in this case, that the cause of a cause is the relevant cause ?"

– Johnny Rich

2

સુરેખ સહસંબંધ
(Linear Correlation)

વિષયવસ્તુ :

2.1 પ્રસ્તાવના

2.2 સુરેખ સહસંબંધનો અર્થ અને વ્યાખ્યા

2.3 સહસંબંધ અને સહસંબંધાંક

2.4 વિકીર્ણ આકૃતિની રીત

2.5 કાર્લ પિયર્સનની ગુણનપ્રઘાતની રીત

2.6 સહસંબંધાંકના ગુણધર્મો

2.7 સહસંબંધાંકની કિંમતનું અર્થઘટન

2.8 સ્પિયરમૅનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીત

2.9 સહસંબંધાંકના અર્થઘટનમાં રાખવી પડતી સાવચેતી

2.1 પ્રસ્તાવના

ધોરણ 11માં આપણે મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપ, પ્રસારમાન, વિષમતા વગેરે જેવાં પ્રકરણોમાં ફક્ત એક ચલનાં લક્ષણોનો અભ્યાસ કર્યો. અત્યાર સુધી આપણો અભ્યાસ એક ચલના વિતરણ સુધી સીમિત હતો, પરંતુ ઘણી પરિસ્થિતિઓ એવી ઉદ્‌ભવતી હોય છે કે, જેમાં બે કે તેથી વધુ ચલોનો સંયુક્ત અભ્યાસ ઇચ્છનીય અને જરૂરી હોય. દા.ત., આપણે કોઈ કંપનીની કોઈ વસ્તુના વાર્ષિક વેચાણનો અભ્યાસ કરતાં હોઈએ તો સાથ-સાથે કંપનીના નફા વિશે પણ જાણવા ઇચ્છીએ છીએ, કારણ કે તે પરથી આ બે ચલો 'ઉત્પાદિત વસ્તુનું વેચાણ' અને 'તેનાથી થતો નફો' વચ્ચે કેવો અને કેટલો સંબંધ છે તે જાણી શકાય છે. કોઈ વિસ્તારમાં વાર્ષિક વરસાદ અને ચોખાની ઊપજ, વસ્તુનો ભાવ અને તેની માંગ, કુટુંબની આવક અને ખર્ચ, પિતા અને પુત્રની ઊંચાઈ, પતિ અને પત્નીની ઉંમર વગેરે કેટલાંક જાણીતાં ઉદાહરણો છે જેમાં ચલોની જોડ વચ્ચે સંબંધ જોવા મળે છે. તે જ રીતે ઘણી પરિસ્થિતિઓમાં જોઈ શકીએ છીએ કે બે ચલ વચ્ચે સંબંધ હોય છે.

આપણે આ પ્રકરણ અને આ પછીના પ્રકરણમાં બે પરસ્પર સંબંધિત ચલોના સંબંધ વિશે અભ્યાસ કરીશું.

નોંધ :

- એક ચલની માહિતી એકઠી કરી મેળવેલા તેના વિતરણને એક ચલીય (Univariate) વિતરણ કહે છે. દા.ત., કોઈ એક વિષયમાં વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણ, કોઈ કંપનીમાં કામ કરતા વ્યક્તિઓની માસિક આવક, સ્ટેટ ટ્રાન્સપોર્ટ (ST)ની બસોના ડ્રાઇવરની ઉંમરનું વિતરણ.
- કોઈ એકમના બે જુદાં-જુદાં લક્ષણોની એક જ સમયે એકઠી કરેલી માહિતીને દ્વિચલ માહિતી કહે છે અને તે પરથી મેળવેલા તેના વિતરણને દ્વિચલ (Bivariate) વિતરણ કહે છે. દા.ત. કોઈ વસ્તુના ભાવ અને તેનો પુરવઠો, કોઈ એક સમૂહનાં કુટુંબોનો માસિક ખર્ચ અને બચત, પતિની ઉંમર અને પત્નીની ઉંમરનું વિતરણ.
- બેથી વધુ ચલોની કિંમતમાં એક સાથે થતા ફેરફારોનો અભ્યાસ બહુચલીય અને આંશિક સહસંબંધ દ્વારા થઈ શકે છે, પરંતુ અત્રે આપણે ફક્ત બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધનો જ અભ્યાસ કરીશું.

2.2 સુરેખ સહસંબંધનો અર્થ અને વ્યાખ્યા

સૌપ્રથમ આપણે સહસંબંધનો અર્થ સમજીએ. હવે આપણે જાણીએ છીએ કે, ઘણી પરિસ્થિતિમાં બે ચલોની કિંમતોમાં એક સાથે ફેરફાર જોવા મળે છે. બે ચલોની કિંમતોમાં એક સાથે થતા ફેરફારો મુખ્યત્વે બે પ્રકારે થઈ શકે :

જ્યારે,

(1) બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ હોય.

(2) કોઈ અન્ય કારણની અસરને લીધે બંને ચલોની કિંમતમાં ફેરફાર થતા હોય.

કોઈ વિસ્તારમાં વાર્ષિક વરસાદ અને ચોખાની ઊપજનાં ઉદાહરણમાં મોટા ભાગે વરસાદ વધે (અમુક હદ સુધી) તો ચોખાની ઊપજ પણ વધે છે અને વરસાદ ઘટે તો ચોખાની ઊપજ પણ ઘટે છે. તેથી અહીં વરસાદ એ 'કારણ' છે જ્યારે ચોખાની ઊપજ એ 'કાર્ય' છે. તે જ રીતે કોઈ વ્યક્તિની આવક લગભગ સમાન રહેતી હોય ત્યારે તેનો ખર્ચ વધે તો તેની બચત ઘટે છે અને ખર્ચ ઘટે તો બચત વધે છે. અહીં ખર્ચ એ 'કારણ' છે જ્યારે બચત એ 'કાર્ય' છે. ઉપર્યુક્ત બે ઉદાહરણોમાં બંને ચલોમાં થતા ફેરફારો કાર્ય-કારણનો સંબંધ દર્શાવે છે. ક્યારેક બંને ચલો પરસ્પર આધારિત હોય છે અને એટલે કોઈ એક ચલને 'કારણ' અને બીજા ચલને 'કાર્ય' ચોક્કસપણે કહી શકાય નહિ. સામાન્ય રીતે આર્થિક ચલો (Economic Variables)ના કિસ્સામાં આવું બની શકે. દા.ત., માંગ અને પુરવઠો. જો માંગ વધે તો પુરવઠો વધારવાની જરૂર પડે છે, (જે હંમેશાં તાત્કાલિક શક્ય નથી હોતું) અને જ્યારે પુરવઠો વધે ત્યારે ભાવ ઘટવા તરફ જાય છે અને તેને લીધે માંગ વધે છે. આમ, માંગ અને પુરવઠો પરસ્પર આધારિત છે. તે જ રીતે પતિની ઉંમર અને પત્નીની ઉંમર આવા પ્રકારની પરિસ્થિતિનું ઉદાહરણ છે.

રેનકોટનું વેચાણ અને વરસાદ માટેના પગરખાંના વેચાણના ઉદાહરણમાં બંને ચલોની કિંમતો ચોમાસામાં વધે છે. અહીં બંને ચલ વચ્ચે પ્રત્યક્ષ કાર્ય-કારણનો સંબંધ નથી પરંતુ રેનકોટના વેચાણ અને વરસાદ માટેના પગરખાનાં વેચાણમાં થતો ફેરફાર એ ત્રીજા ચલ વરસાદને આભારી છે. આ પરોક્ષ કાર્ય-કારણના સંબંધનું ઉદાહરણ છે.

બે ચલ વચ્ચેના સંબંધનાં ઉદાહરણો જોયા પછી આપણે સહસંબંધની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ આપી શકીએ. જો બે ચલોની કિંમતોમાં પ્રત્યક્ષ કે પરોક્ષ કાર્ય-કારણને લીધે એક સાથે ફેરફારો થતા હોય તો તે બે ચલ વચ્ચે **સહસંબંધ** છે તેમ કહેવાય. જ્યારે બે સહસંબંધિત ચલોની જોડયુક્ત કિંમતોને આલેખપત્ર પર દર્શાવીએ અને તે આલેખમાંનાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર રહેલા હોય અથવા ખૂબ નજીક હોય ત્યારે તેવા સહસંબંધને **સુરેખ સહસંબંધ** કહે છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો બે સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતો ફેરફાર લગભગ અચળ પ્રમાણમાં હોય તો બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

સામાન્ય રીતે પ્રાકૃતિક વિજ્ઞાન જેવા કે ગણિત અને ભૌતિકશાસ્ત્રમાં બે ચલ સંપૂર્ણ સુરેખસંબંધ ધરાવે છે, તેવું જોવા મળે છે. એટલે કે એક ચલમાં ફેરફાર થવાથી બીજા ચલની કિંમતમાં અચળ પ્રમાણમાં ફેરફાર થાય છે.

દા.ત., (1) વર્તુળની ત્રિજ્યા અને પરિઘ

આપણે જાણીએ છીએ કે કોઈ વર્તુળની ત્રિજ્યા r એકમ હોય, તો તેનો પરિઘ $2\pi r$ થાય છે. આમ ત્રિજ્યાના માપને 2π (અચળ) વડે ગુણવાથી તે વર્તુળના પરિઘનું માપ મળે છે. તેથી કહી શકાય કે ત્રિજ્યામાં ફેરફાર થવાથી વર્તુળના પરિઘના માપમાં અચળ પ્રમાણમાં ફેરફાર થાય, જે નીચેના કોષ્ટક પરથી સ્વયં સ્પષ્ટ છે :

ત્રિજ્યા (r)	2	3	5	10
પરિઘ ($2\pi r$)	4π	6π	10π	20π

(2) અચળ ગતિએ કોઈ પદાર્થને અંતર કાપતા લાગતો સમય અને પદાર્થે કાપેલું અંતર

જો કોઈ પદાર્થ કલાકના 50 કિમીની ઝડપે ગતિ કરતો હોય તો તેને લાગતા સમયના ચોક્કસ અચળ પ્રમાણમાં જ તે પદાર્થ અંતર કાપે છે, જે નીચેના કોષ્ટક પરથી સહેલાઈથી સમજી શકાય છે :

પદાર્થને અંતર કાપતા લાગતો સમય (કલાક)	2	3	6	10
પદાર્થે કાપેલું અંતર (કિમી)	100	150	300	500

પરંતુ સામાન્ય રીતે વાણિજ્ય, અર્થશાસ્ત્ર અને સામાજિક વિજ્ઞાનમાં બે ચલોની કિંમતમાં થતા ફેરફારો અચળ પ્રમાણમાં હોતા નથી. દા.ત. જો સતત બે વર્ષ માટે આગળના વર્ષની સરખામણીએ ચાલુ વર્ષે વરસાદમાં 10 % વધારો થયો હોય તો જરૂરી નથી કે પાક પણ બંને વર્ષે સરખા પ્રમાણમાં વધે. આમ થવાનું કારણ એ છે કે, બંને ચલો વરસાદ અને પાક બીજાં ઘણાં પરિબળોની અસર હેઠળ બદલાય છે અને તેથી બંને ચલોમાં થતા ફેરફારોમાં અનિશ્ચિતતા (Chance)નું તત્ત્વ રહેલું હોય છે. તેથી બે સહસંબંધિત ચલોની જોડને અનુરૂપ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર નહિ પરંતુ સુરેખાની આસપાસ હોઈ શકે છે.

આ પ્રકરણમાં આપણે સુરેખ સહસંબંધનો અભ્યાસ કરીશું. હવે પછી આપણે સુરેખ સહસંબંધને સહસંબંધ જ કહીશું.

સહસંબંધના મુખ્યત્વે બે પ્રકાર છે : (1) ધન સહસંબંધ (2) ઋણ સહસંબંધ

(1) ધન સહસંબંધ : જ્યારે બંને સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એક જ દિશામાં થતા હોય ત્યારે તે બે ચલ વચ્ચે ધન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

વસ્તુનો ભાવ અને પુરવઠો, વ્યક્તિની આવક અને ખર્ચ, પતિની ઉંમર અને પત્નીની ઉંમર, કોઈ માર્ગ પર વાહનોની સંખ્યા અને અકસ્માતોની સંખ્યા, કોઈ વસ્તુનું વેચાણ અને તેનાથી થતો નફો, કોઈ વિસ્તારમાં વરસાદ અને પાકની ઊપજ એ ધન સહસંબંધના કેટલાંક ઉદાહરણો છે.

(2) ઋણ સહસંબંધ : જ્યારે બંને સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં થતા હોય ત્યારે તે બે ચલ વચ્ચે ઋણ સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

વસ્તુનો ભાવ અને માંગ, વ્યક્તિનું ખર્ચ અને બચત, શિયાળામાં દિવસનું લઘુતમ તાપમાન અને ગરમ કપડાંનું વેચાણ, સમુદ્રની સપાટીથી કોઈ એક સ્થળની ઊંચાઈ અને તે સ્થળે હવામાં ઑક્સિજનનું પ્રમાણ એ ઋણ સહસંબંધનાં કેટલાંક ઉદાહરણો છે.

2.3 સહસંબંધ અને સહસંબંધાંક

આપણે અગાઉ સહસંબંધનો અર્થ અને તેની વ્યાખ્યાની ચર્ચા કરી. હવે આપણે તેના માપ સહસંબંધાંક વિશે જોઈએ.

બે ચલ વચ્ચેના સુરેખ સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા (Strength)ના માપને સહસંબંધાંક કહે છે. તેને સંકેતમાં r વડે દર્શાવાય છે. સહસંબંધાંક એ બે સહસંબંધિત ચલો વચ્ચેના સુરેખ સંબંધની ઘનિષ્ઠતા કે માત્રા (degree) દર્શાવતું સંખ્યાત્મક માપ છે. આ માપ સૌપ્રથમ કાર્લ પિયર્સને સૂચવ્યું હતું.

સહસંબંધના અભ્યાસની રીતો

બે ચલો વચ્ચે રહેલા સહસંબંધનું સ્વરૂપ અને તે સંબંધની ઘનિષ્ઠતા જાણવા માટે મુખ્યત્વે નીચેની પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ થાય છે :

(1) વિકીર્ણ આકૃતિની રીત (Scatter Diagram Method)

(2) કાર્લ પિયર્સનની ગુણનપ્રઘાતની રીત (Karl Pearson's Product moment Method)

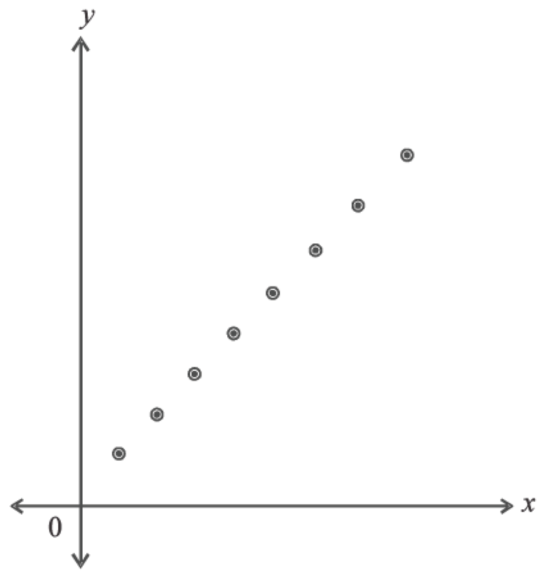
(3) સ્પિયરમૅનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીત (Spearman's Rank Correlation Method)

2.4 વિકીર્ણ આકૃતિની રીત

બે સંબંધિત ચલો વચ્ચેના સહસંબંધના સ્વરૂપની આકૃતિ દ્વારા રજૂઆત માટેની આ એક સરળ રીત છે. બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધનું સ્વરૂપ જાણવા માટે આ એક જ રીતનો વ્યાપક ઉપયોગ થાય છે. તદુપરાંત આ રીત દ્વારા થોડા ઘણા અંશે બે ચલો વચ્ચેના સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતાનો ખ્યાલ પણ મળે છે.

ધારો કે ચલ X અને Y ની n કિંમતોની ક્રમિત જોડ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots\ldots\ldots, (x_n, y_n)$ છે. ચલ X ની કિંમતોને X-અક્ષ અને ચલ Y ની કિંમતોને Y-અક્ષ પર યોગ્ય પ્રમાણમાપ લઈ આલેખમાં નિરૂપણ કરવામાં આવે છે. $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)$ને અનુરૂપ બિંદુઓને આલેખમાં દર્શાવતાં મળતી આકૃતિને વિકીર્ણ આકૃતિ કહે છે.

વિકીર્ણ આકૃતિમાં દર્શાવેલાં બિંદુઓની ઢબ (pattern) પરથી સહસંબંધનું સ્વરૂપ (કે પ્રકાર) જાણી શકાય છે અને થોડા ઘણા અંશે સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતાનો ખ્યાલ પણ મેળવી શકાય છે. હવે વિકીર્ણ આકૃતિ દ્વારા બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધના સ્વરૂપ અને ઘનિષ્ઠતા વિશે કેવી રીતે જાણી શકાય તે આપણે જોઈએ.



જો વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર હોય અને તે સુરેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઉપરની દિશામાં જતી હોય તો તે બે ચલ X અને Y વચ્ચે **સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ** છે તેમ દર્શાવે છે.

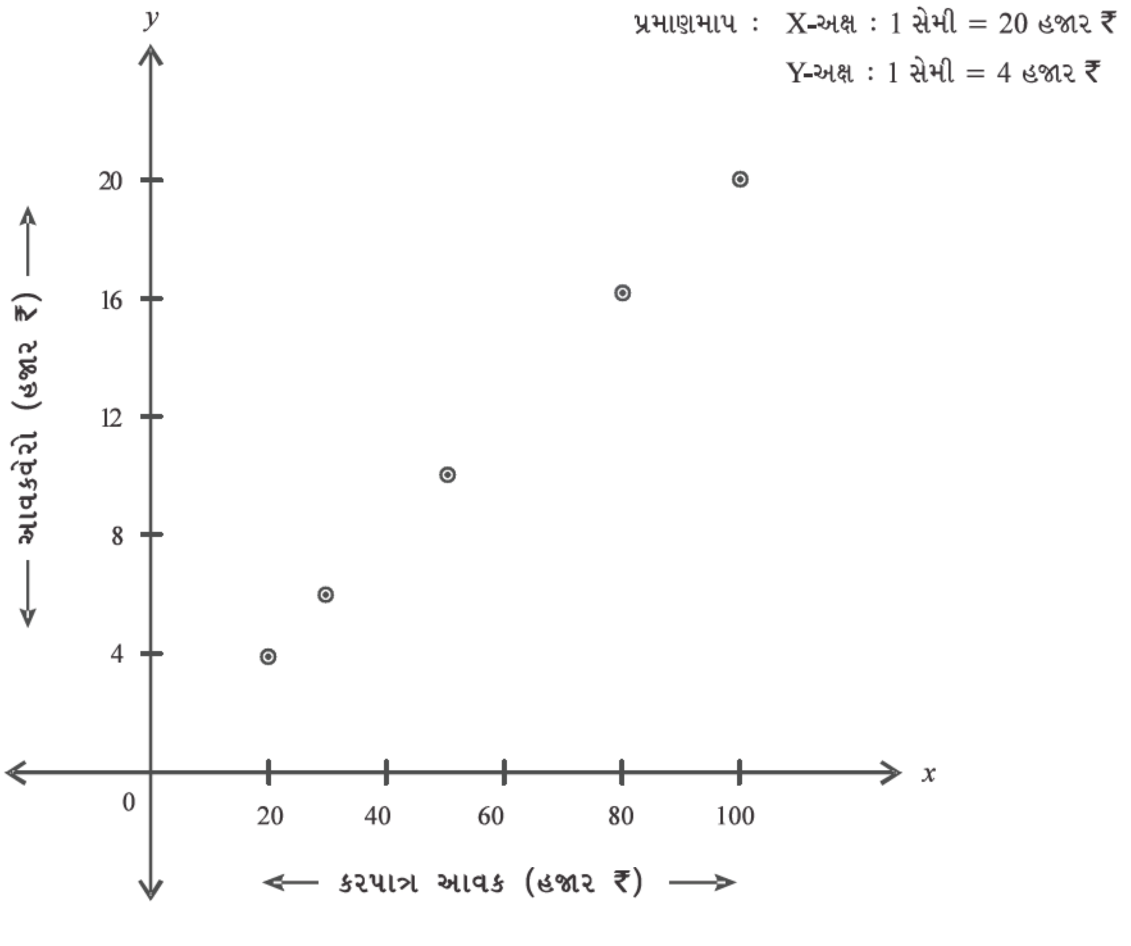
જ્યારે બંને ચલોની કિંમતોમાં થતો ફેરફાર એક જ દિશામાં અને અચળ પ્રમાણમાં થતો હોય ત્યારે આપણને આ પ્રકારની વિકીર્ણ આકૃતિ મળે છે. આ બાબત સમજવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 1 : કુલ આવકમાંથી મૂળ કપાત (Standard deduction) કર્યા બાદ રહેલી આવક પર 20 ટકાના દરે આવકવેરો (income tax) લાગે છે. નીચે પાંચ વ્યક્તિઓની વાર્ષિક કરપાત્ર (taxable) આવક અને તેને ભરવા પડતા આવકવેરાની વીગત આપેલી છે.

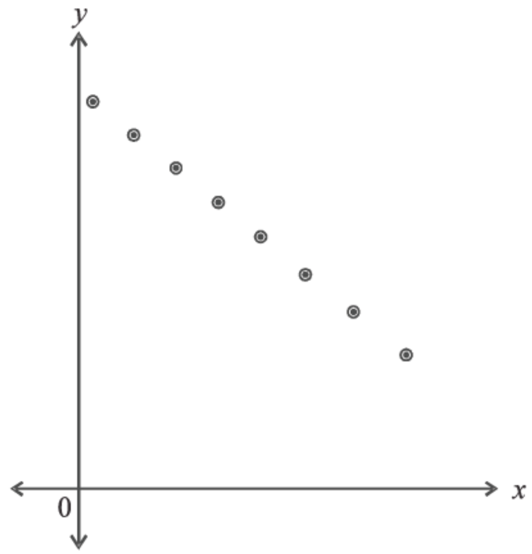
વ્યક્તિ	1	2	3	4	5
કરપાત્ર આવક (હજાર ₹) x	50	30	80	20	100
આવકવેરો (હજાર ₹) y	10	6	16	4	20

આ માહિતી પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને સહસંબંધ વિશે ચર્ચા કરો.

x અને yની ક્રમિત જોડ $(50, 10)$, $(30, 6)$, $(80, 16)$, $(20, 4)$ અને $(100, 20)$ ને અનુરૂપ બિંદુઓ આલેખપત્રમાં દર્શાવતાં આપણને નીચે મુજબ વિકીર્ણ આકૃતિ મળે છે.



આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર છે. આપણે એ પણ જોઈ શકીએ છીએ કે જેમ ચલ X ની કિંમત બદલાય છે તેમ ચલ Y ની કિંમત પણ તે જ દિશામાં અને અચળ પ્રમાણમાં બદલાય છે. (ચકાસો કે, જ્યારે X ની કિંમતને 0.2 (20 %) વડે ગુણવામાં આવે ત્યારે ક્રમિત જોડની તેને અનુરૂપ Y ની કિંમત મળે છે, તેથી અહીં બંને ચલ X અને Y માં સપ્રમાણ ફેરફાર થાય છે.) તેથી, કહી શકાય કે બે ચલ X અને Y વચ્ચે સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ છે.



જો વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર હોય અને તે સુરેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ નીચેની દિશામાં જતી હોય તો બે ચલ X અને Y વચ્ચે **સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ** છે તેમ દર્શાવે છે.

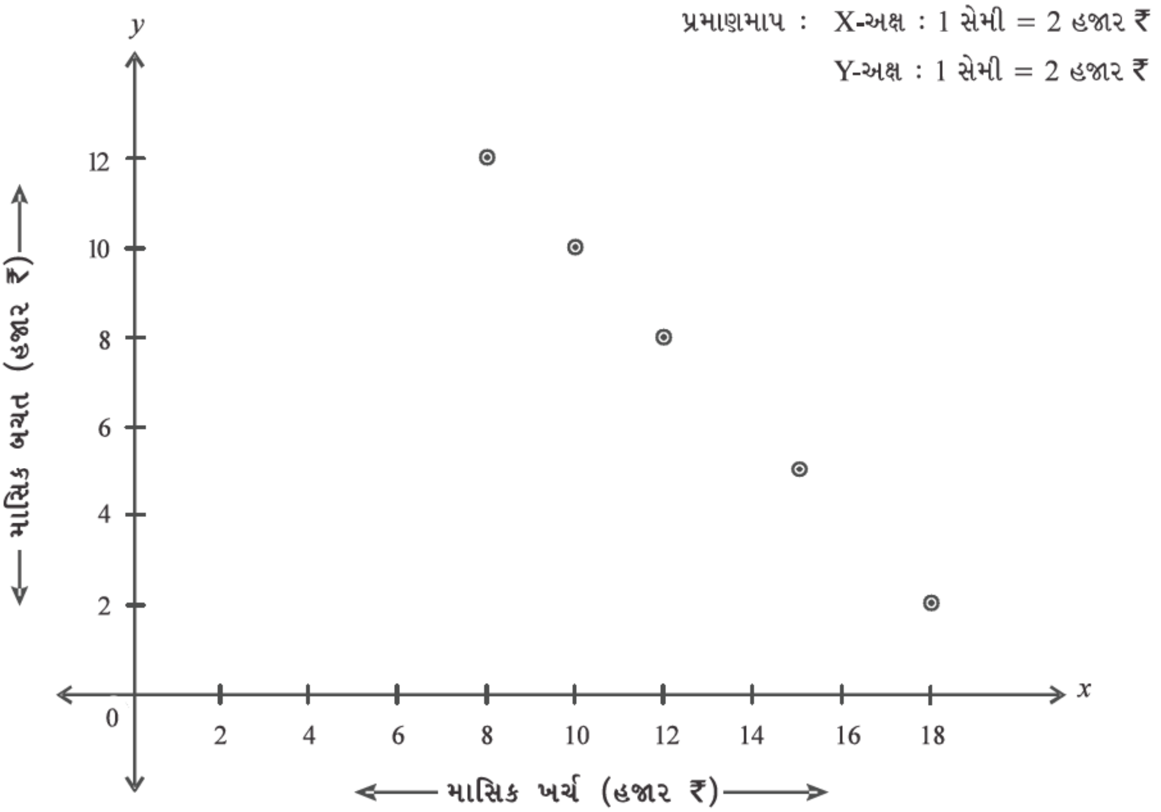
જ્યારે બંને ચલોની કિંમતોમાં થતો ફેરફાર એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં અને અચળ પ્રમાણમાં થતો હોય ત્યારે આપણને આ પ્રકારની વિકીર્ણ આકૃતિ મળે છે. આ બાબત સમજવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 2 : મધ્યમ વર્ગના કુટુંબોના માસિક ખર્ચ અને માસિક બચત વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા લીધેલા 5 કુટુંબોના ખર્ચ અને બચતની વીગત નીચે આપેલી છે. (દરેક કુટુંબની માસિક આવક 20,000 ₹ છે.)

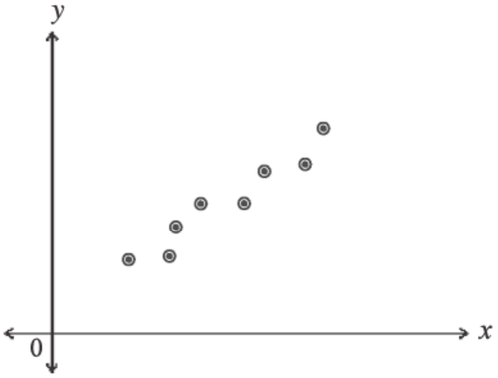
માસિક ખર્ચ (હજાર ₹) x	15	18	8	10	12
માસિક બચત (હજાર ₹) y	5	2	12	10	8

આ માહિતી પરથી માસિક ખર્ચ અને માસિક બચત વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને સહસંબંધ વિશે ચર્ચા કરો.

x અને y ની ક્રમિત જોડ $(15, 5)$, $(18, 2)$, $(8, 12)$, $(10, 10)$ અને $(12, 8)$ ને અનુરૂપ બિંદુઓ આલેખપત્રમાં દર્શાવતા આપણને નીચે મુજબ વિકીર્ણ આકૃતિ મળે છે :



આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર છે. આપણે એ પણ જોઈ શકીએ છીએ કે જેમ ચલ Xની કિંમત બદલાય છે તેમ ચલ Yની કિંમત પણ તેની વિરુદ્ધ દિશામાં અને ચોક્કસ પ્રમાણમાં બદલાય છે. (ચકાસો કે, માસિક આવક સ્થિર હોવાથી માસિક ખર્ચમાં થતા વધારા (કે ઘટાડા)ને લીધે માસિક બચતમાં અચળ પ્રમાણમાં ઘટાડો (કે વધારો) જોવા મળે છે.) તેથી કહી શકાય કે બે ચલ X અને Y વચ્ચે સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ છે.



જો વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર ન હોય પરંતુ કોઈ સુરેખાની આસપાસ હોય અને તે સુરેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ ઉપરની દિશામાં જતી હોય, તો તે બે ચલ X અને Y વચ્ચે **આંશિક ધન સહસંબંધ** છે તેમ દર્શાવે છે.

જ્યારે બંને ચલની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એક જ દિશામાં હોય પણ આ ફેરફારો અચળ પ્રમાણમાં ન હોય ત્યારે આપણને આ પ્રકારની આકૃતિ મળે છે. આ બાબત સમજવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

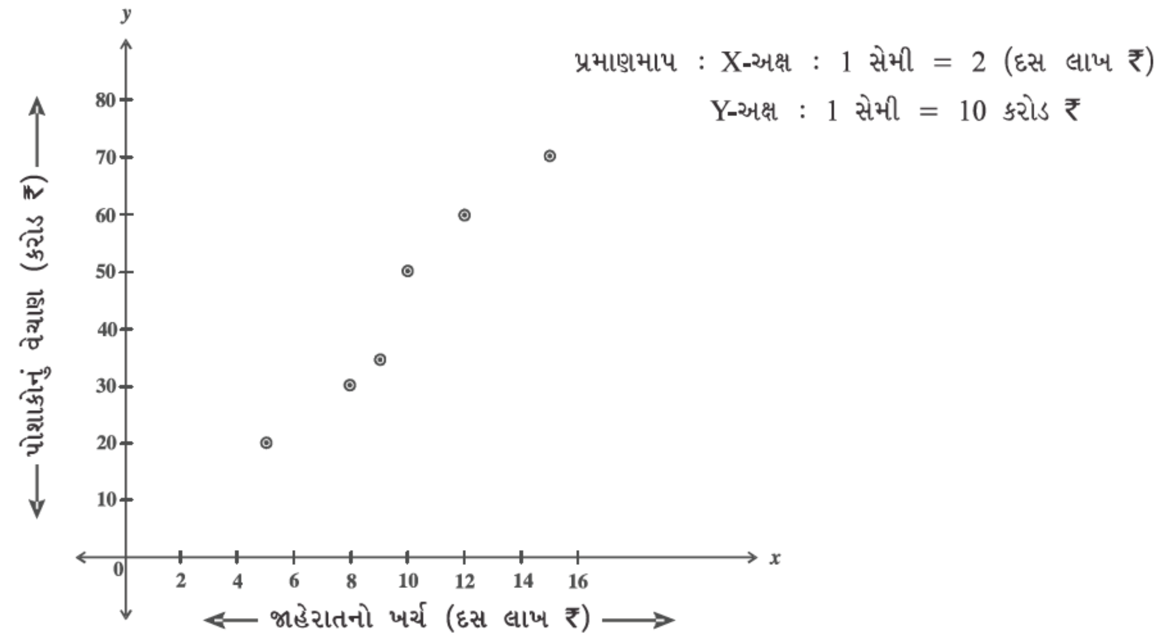
નોંધ : સમષ્ટિના ચલો વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે સામાન્ય રીતે તેમાંથી પ્રમાણસર કદનો નિદર્શ લઈ સહસંબંધાંક મેળવવામાં આવે છે, પરંતુ આપણે ગણતરીની સરળતા ખાતર નિદર્શનું કદ મર્યાદિત અને નાનું રાખીશું.

ઉદાહરણ 3 : એક કંપની તૈયાર પોશાકો બનાવે છે. છેલ્લા છ મહિનામાં થયેલ માસિક જાહેરાત-ખર્ચ (દસ લાખ ₹માં) અને પોશાકોનું વેચાણ (કરોડ ₹માં) નીચે મુજબ છે :

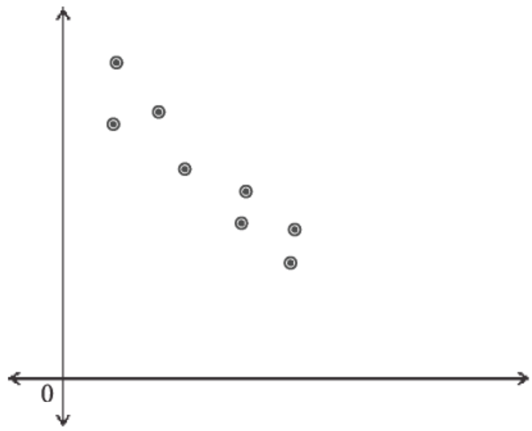
જાહેરાતનું ખર્ચ (દસ લાખ ₹) x	5	8	10	15	12	9
પોશાકોનું વેચાણ (કરોડ ₹) y	20	30	50	70	60	35

આ માહિતી પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને સહસંબંધ વિશે ચર્ચા કરો.

ચલ x અને yની ક્રમિત જોડ $(5, 20)$, $(8, 30)$, $(10, 50)$, $(15, 70)$, $(12, 60)$ અને $(9, 35)$ ને અનુરૂપ બિંદુઓ આલેખપત્રમાં દર્શાવતા આપણને નીચે મુજબ વિકીર્ણ આકૃતિ મળે છે :



વિકીર્ણ આકૃતિમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, બધાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર નથી. અહીં, જાહેરાતના ખર્ચ અને વેચાણમાં થતા ફેરફારો એક જ વધતી જતી દિશામાં થાય છે પરંતુ આ ફેરફારો અચળ પ્રમાણમાં નથી. તેથી બધાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર આવેલાં નથી. તેથી આપણે કહી શકીએ કે બે ચલ X અને Y વચ્ચે આંશિક ધન સહસંબંધ છે.



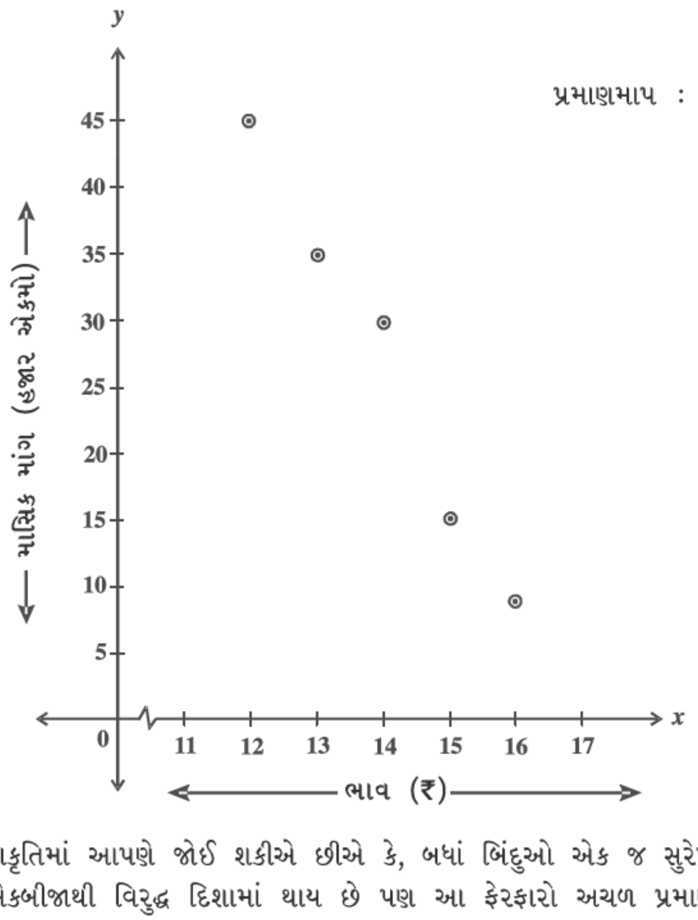
જો વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર ન હોય પરંતુ કોઈ સુરેખાની આસપાસ હોય અને તે સુરેખા ડાબી બાજુથી જમણી બાજુ નીચેની દિશામાં જતી હોય, તો તે બે ચલ X અને Y વચ્ચે **આંશિક ઋણ સહસંબંધ** છે તેમ દર્શાવે છે.

જ્યારે બંને ચલોની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય પણ આ ફેરફારો અચળ પ્રમાણમાં ન હોય ત્યારે આપણને આ પ્રકારની આકૃતિ મળે છે. આ બાબત સમજવા આપણે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 4 : વાહનોના સ્પેરપાર્ટસ બનાવતી એક કંપની રબરના બુશરના ભાવની તેની માંગ પર અસર જાણવા માટે છેલ્લાં 5 મહિના જુદા જુદા ભાવ રાખી તેની માંગ વિશે નીચે મુજબ માહિતી મેળવે છે. આ આપેલી માહિતી પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને સહસંબંધના સ્વરૂપ વિશે ચર્ચા કરો.

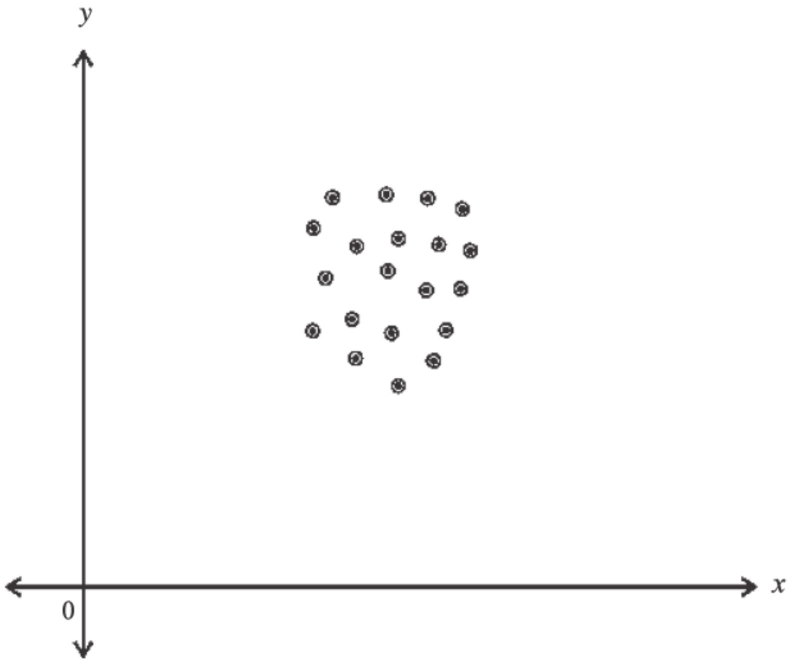
ભાવ (₹) x	12	13	14	15	16
માસિક માંગ (હજાર એકમો) y	45	35	30	15	10

x અને y ની ક્રમિત જોડ $(12, 45), (13, 35), (14, 30), (15, 15)$ અને $(16, 10)$ને અનુરૂપ બિંદુઓ આલેખપત્રમાં દર્શાવતા આપણને નીચે મુજબ વિકીર્ણ આકૃતિ મળે છે :



વિકીર્ણ આકૃતિમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, બધાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર નથી. અહીં ભાવ અને માંગમાં થતા ફેરફારો એકબીજાથી વિરુદ્ધ દિશામાં થાય છે પણ આ ફેરફારો અચળ પ્રમાણમાં નથી, તેથી બધાં બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર આવેલાં નથી. તેથી આપણે કહી શકીએ કે બે ચલ X અને Y વચ્ચે આંશિક ઋણ સહસંબંધ છે.

નોંધ : જ્યારે બિંદુઓ કોઈ સુરેખાની નજીક રહેલાં હોય તો તે વધુ ગાઢ સહસંબંધ સૂચવે છે અને જ્યારે બિંદુઓ કોઈ સુરેખાની આસપાસ દૂર સુધી વિસ્તરેલા હોય તો તે ઓછા ગાઢ સહસંબંધ સૂચવે છે.



જ્યારે વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં બિંદુઓ યાદચ્છિક રીતે વિખરાયેલાં હોય અને કોઈ ચોક્કસ ઢબ (pattern)માં ન હોય ત્યારે તે **સુરેખ સહસંબંધનો અભાવ** સૂચવે છે. જો આ પ્રકારની વિકીર્ણ આકૃતિ મળે તો કહી શકાય કે બે ચલ સુરેખ સંબંધ ધરાવતા નથી અર્થાત્ સુરેખ સહસંબંધનો અભાવ છે.

વિકીર્ણ આકૃતિની રીતના ગુણ અને મર્યાદા

ગુણ :

(1) બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધનું સ્વરૂપ જાણવા માટેની આ એક સરળ રીત છે.

(2) આ રીતમાં ઓછા ગાણિતીય જ્ઞાનની જરૂર પડે છે, કેમકે ફક્ત આલેખમાં બિંદુના નિરૂપણ અંગેની સમજની જ જરૂર પડે છે.

(3) આ રીતથી બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતાનો પણ થોડો ઘણો ખ્યાલ આવે છે.

(4) વિકીર્ણ આકૃતિમાં બિંદુઓ કેવી રીતે વિખરાયેલાં છે તે પરથી બે ચલ વચ્ચેનો સંબંધ સુરેખ છે કે નહિ તે ખ્યાલ આવે છે.

(5) માહિતીમાં કેટલાંક અંતિમ પ્રાપ્તાંકો (extreme observations) હોય તોપણ સહસંબંધનું સ્વરૂપ જાણવામાં કોઈ મુશ્કેલી પડતી નથી.

મર્યાદા :

આ રીતથી સહસંબંધનાં સ્વરૂપ વિશે માહિતી મળે છે અને સંબંધની ઘનિષ્ઠતા અંગે થોડી જાણકારી મળે છે પરંતુ ઘનિષ્ઠતા અંગેનું ચોક્કસ માપ મેળવી શકાતું નથી.

સ્વાધ્યાય 2.1

1. બોલપેન બનાવતી એક કંપની તેની સૌથી વધુ વેચાતી જેલપેનના ભાવ (₹ માં) અને તેના પુરવઠા (હજાર એકમો) વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરે છે. તે પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

ભાવ (₹)	14	16	12	11	15	13	17
માસિક પુરવઠો (હજાર એકમો)	32	50	20	12	45	30	53

2. એક કંપની કારખાનાઓ માટે આર.ઓ. પ્લાન્ટ બનાવે છે. તેના વેચાણ માટે કરેલા જાહેરાતનું ખર્ચ અને આર.ઓ. પ્લાન્ટના વેચાણથી થતા નફાની માહિતી નીચે મુજબ છે.

જાહેરાત ખર્ચ (દસ હજાર ₹)	5	6	7	8	9	10	11
નફો (લાખ ₹)	8	7	9	10	13	12	13

આ માહિતી પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો તથા જાહેરાતના ખર્ચ અને આર.ઓ. પ્લાન્ટના વેચાણથી થતા નફા વચ્ચેના સંબંધનું સ્વરૂપ જણાવો.

3. શિયાળા દરમિયાન કોઈ એક દિવસે જુદાં-જુદાં છ શહેરોનાં દૈનિક ન્યૂનતમ તાપમાન અને ગરમ કપડાંના વેચાણ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે નીચેની માહિતી એકઠી કરવામાં આવી છે.

દૈનિક ન્યૂનતમ તાપમાન (સેલ્સિયસ)	12	20	8	5	15	24
ગરમ કપડાંનું વેચાણ (હજાર એકમો)	35	10	45	70	20	8

આ માહિતી પરથી વિકીર્ણ આકૃતિ દોરો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

*

2.5 કાર્લ પિયર્સનની ગુણનપ્રઘાતની રીત

આપણે અગાઉ જોયું કે બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા દર્શાવતા સંખ્યાત્મક માપને સહસંબંધાંક કહે છે. આ માપ આંકડાશાસ્ત્રી કાર્લ પિયર્સને સૌપ્રથમ સૂચવ્યું હતું. તેથી તેને 'પિયર્સન સહસંબંધાંક' કે 'ગુણનપ્રઘાત આંક' તરીકે પણ ઓળખાય છે. તેને સંકેતમાં r વડે દર્શાવાય છે.

ધારો કે બે ચલ X અને Y પર મેળવેલાં એક નિદર્શના n અવલોકનોની જોડ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots\ldots, (x_n, y_n)$ છે. ચલ X અને Y વચ્ચેના સહસંબંધાંકને $r(x, y)$ અથવા ફક્ત r વડે દર્શાવાય છે અને તે નીચે મુજબ મેળવી શકાય છે :

$$r = \frac{Cov\,(x, y)}{s_x \cdot s_y} = \frac{\text{સહવિચરણ }(x, y)}{(x\text{નું પ્ર.વિ.})\,(y\text{નું પ્ર.વિ.})}$$

જ્યાં,

$$\text{સહવિચરણ}(x, y) = Cov\,(x, y) = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})}{n}$$

$$x\text{નું પ્રમાણિત વિચલન} = s_x = \sqrt{\frac{\Sigma\,(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

$$y\text{નું પ્રમાણિત વિચલન} = s_y = \sqrt{\frac{\Sigma\,(y_i - \bar{y})^2}{n}}$$

$$x\text{નો મધ્યક} = \bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

$$y\text{નો મધ્યક} = \bar{y} = \frac{\Sigma y_i}{n}$$

નોંધ : સરળતા ખાતર, હવે સુરેખ સહસંબંધ અને સુરેખ નિયત સંબંધના અભ્યાસમાં બધાં જ સૂત્રોમાં અનુગ (suffix) i અવગણવામાં આવેલ છે અને સૂત્રો તેમજ ગણતરીમાં X ને બદલે x અને Y ને બદલે y નો ઉપયોગ કર્યો છે.

$Cov(x, y)$, s_x અને s_y ની ઉપર્યુક્ત કિંમતોને r ના ઉપરના સૂત્રમાં મૂકતાં, r નું નીચેનું સ્વરૂપ મળે છે.

$$r = \frac{\Sigma(x - \bar{x})\,(y - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x - \bar{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y - \bar{y})^2}}$$

સામાન્ય રીતે જ્યારે બંને મધ્યકો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પૂર્ણાંક હોય ત્યારે r ના ઉપર્યુક્ત સૂત્રનો ઉપયોગ થાય છે.

નીચે $Cov(x, y)$, s_x અને s_y નાં વૈકલ્પિક સૂત્રો આપેલાં છે.

$$Cov(x, y) = \frac{\Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n}$$

$$s_x = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$s_y = \sqrt{\frac{\Sigma y^2}{n} - \overline{y}^2}$$

સહસંબંધાંક r માટેનાં બીજાં કેટલાંક સૂત્રો નીચે મુજબ છે :

જ્યારે $\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})$, x નું પ્ર.વિ s_x, y નું પ્ર.વિ s_y અને n જેવા માપ જાણતા હોઈએ ત્યારે r નું નીચેનું સૂત્ર વાપરી શકાય છે :

$$r = \frac{\Sigma(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{n \cdot s_x \cdot s_y}$$

જ્યારે Σxy, મધ્યકો $\overline{x}$ અને $\overline{y}$, x અને y ના પ્ર.વિ અને n જેવા માપ જાણતાં હોઈએ ત્યારે r નું નીચેનું સૂત્ર વાપરી શકાય છે :

$$r = \frac{\Sigma xy - n\overline{x}\,\overline{y}}{n \cdot s_x \cdot s_y}$$

જ્યારે $\Sigma x, \Sigma y, \Sigma xy, \Sigma x^2, \Sigma y^2$ અને n જેવા માપો જાણતા હોઈએ ત્યારે r નું નીચેનું સૂત્ર વાપરી શકાય છે.

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

સામાન્ય રીતે જ્યારે મધ્યક $\overline{x}$ અથવા $\overline{y}$ અથવા બંને અપૂર્ણાંક હોય ત્યારે ઉપરના સૂત્રનો ઉપયોગ થાય છે.

કાર્લપિયર્સનના સહસંબંધાંકની ધારણાઓ

કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક નીચેની ધારણાઓ પર આધારિત છે.

(1) બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સંબંધ છે.

(2) બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ છે. જો આ પ્રકારનો સંબંધ ન હોય, તો સહસંબંધ અર્થહીન છે.

2.6 સહસંબંધાંકના ગુણધર્મ

(1) સહસંબંધાંકની કિંમત –1 થી 1 સુધીના અંતરાલમાં હોય છે.

એટલે કે, $-1 \le r \le 1$

(2) સહસંબંધાંક એકમરહિત માપ છે.

બે ચલોના એકમો ગમે તે હોય પણ r નો કોઈ એકમ હોતો નથી.

(3) X અને Y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક તથા Y અને X વચ્ચેનો સહસંબંધાંક સરખા હોય છે.

એટલે કે, $r(x, y) = r(y, x)$

(4) ઊગમબિંદુ (origin) અને માપ (scale)ના પરિવર્તનથી સહસંબંધાંક બદલાતો નથી.

સમજૂતી : ધારો કે ચલ X અને Y વચ્ચે સહસંબંધાંક મેળવવો છે. તે માટે સૌપ્રથમ આપણે નવા રૂપાંતરિત ચલ u અને v વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

$$u = \frac{x-A}{c_x} \quad \text{અને} \quad v = \frac{y-B}{c_y}$$

જ્યાં A, B, c_x અને c_y એ અનુકૂળ વાસ્તવિક અચળાંકો છે અને $c_x > 0$ તથા $c_y > 0$

હવે સહસંબંધાંકના આ ગુણધર્મ પરથી કહી શકાય કે u અને v વચ્ચેનો સહસંબંધાંક તથા X અને Y વચ્ચેનો સહસંબંધાંક સરખા થાય. એટલે કે, $r(u, v) = r(x, y) = r$

(5) $r(-x,\ y) = -r(x,\ y)$

$r(x,\ -y) = -r(x,\ y)$

એટલે કે, જો બે ચલમાંથી કોઈ પણ એક ચલની કિંમતોના ચિહ્નો બદલવામાં આવે તો સહસંબંધાંકનું ચિહ્ન પણ બદલાય છે.

$r(-x,\ -y) = r(x,\ y)$

એટલે કે, જો બંને ચલોની કિંમતોના ચિહ્નો બદલવામાં આવે, તો સહસંબંધાંકનું ચિહ્ન બદલાતું નથી.

સમજૂતી માટે વધારાની માહિતી

જો ચલની કિંમતમાં કોઈ અચળ સંખ્યા, ઉમેરવામાં કે બાદ કરવામાં આવે તો તેને ઊગમબિંદુ પરિવર્તન કહે છે, કારણ કે આમ કરવાથી તેને અનુરૂપ આલેખમાં ઊગમબિંદુનું સ્થાન બદલાય છે. અહીં બિંદુઓ $(x,\ y)$ના આલેખમાં સ્થાન બદલાય છે પરંતુ તેઓના એકબીજાને સાપેક્ષ સ્થાનો બદલાતાં નથી તેથી ઊગમબિંદુ પરિવર્તનથી સહસંબંધાંક rની કિંમત બદલાતી નથી.

તે જ રીતે ચલની કિંમત સાથે કોઈ પણ ધન અચળ સંખ્યા ગુણવા કે ભાગવામાં આવે તો તેને માપ (સ્કેલ) પરિવર્તન કહે છે, કારણ કે, આમ કરવાથી તેને અનુરૂપ આલેખમાં અક્ષ પરના એકમદીઠ માપ બદલાય છે. આમ કરવાથી પણ બિંદુઓ $(x,\ y)$ના એકબીજાને સાપેક્ષ સ્થાનો બદલાતાં નથી તેથી માપ (સ્કેલ) પરિવર્તનથી સહસંબંધાંક rની કિંમત બદલાતી નથી.

2.7 સહસંબંધાંકની કિંમતનું અર્થઘટન

આપણે જાણીએ છીએ કે સહસંબંધાંક બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધનો પ્રકાર અને ઘનિષ્ઠતા દર્શાવે છે. સહસંબંધાંકની કિંમત મેળવ્યા બાદ તેનું અર્થઘટન કરવું જરૂરી છે. સહસંબંધાંકના ચિહ્ન પરથી સહસંબંધનો પ્રકાર અને તેની કિંમત પરથી સંબંધની ઘનિષ્ઠતા જાણી શકાય છે.

સહસંબંધાંકની કિંમતના અર્થઘટન વખતે આપણે એ ધ્યાન રાખવાનું છે કે, સહસંબંધાંકની કિંમત સહસંબંધનો પ્રકાર અને ઘનિષ્ઠતા દર્શાવે છે પણ તે કાર્ય-કારણના સંબંધનો નિર્દેશ કરતી નથી. ખરેખર તો આપણે બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો કે અન્ય પ્રકારનો સંબંધ છે એ ધારી લીધું છે. r ની કિંમત બે ચલ વચ્ચે કાર્ય-કારણનો સંબંધ છે તેમ દર્શાવતી નથી. આ બાબત ધ્યાનમાં રાખી આપણે r ની કિંમતનું અર્થઘટન કેવી રીતે થઈ શકે તે જોઈશું.

$r = 1$નું અર્થઘટન :

જો $r = 1$ હોય તો આપણે કહી શકીએ કે, બે ચલ વચ્ચે સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ છે. જ્યારે એક ચલની કિંમતમાં થતા વધારા (કે ઘટાડા)ને લીધે બીજા ચલની કિંમતમાં પણ અચળ પ્રમાણમાં વધારો (કે ઘટાડો) થતો હોય ત્યારે $r = 1$ થાય છે. આવા ચલો માટે વિકીર્ણ આકૃતિમાં આપણને બધાં જ બિંદુઓ વધતી દિશામાં એક જ સુરેખા પર મળે છે. (જુઓ ઉદાહરણ 1)

$r = -1$નું અર્થઘટન :

જો $r = -1$ હોય તો આપણે કહી શકીએ કે, બે ચલ વચ્ચે સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ છે. જ્યારે એક ચલની કિંમતમાં થતા વધારા (કે ઘટાડા)ને લીધે બીજા ચલની કિંમતમાં પણ અચળ પ્રમાણમાં ઘટાડો (કે વધારો) થતો હોય ત્યારે $r = -1$ થાય છે. આવા ચલો માટે વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ ઘટતી દિશામાં એક જ સુરેખા પર મળે છે. (જુઓ ઉદાહરણ 2)

$r = 0$નું અર્થઘટન :

જો $r = 0$ થાય તો આપણે કહી શકીએ કે, બે ચલો વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધ નથી. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો $r = 0$ એ સહસંબંધનો અભાવ દર્શાવે છે અને તેથી બે ચલો વચ્ચે સુરેખ સંબંધ નથી તેમ કહેવાય. આવા ચલો માટે વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં બિંદુઓ યાદચ્છિક રીતે વિખરાયેલાં (કોઈ સુરેખા પર કે તેની નજીક નહિ) જોવા મળે છે.

અત્રે નોંધવું જરૂરી છે કે r ની કિંમત ફક્ત સુરેખ સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા દર્શાવે છે. તેથી જ્યારે $r = 0$ હોય, તો આપણે ફક્ત એ કહી શકીએ કે બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધનો અભાવ છે. પરંતુ સુરેખ સિવાયનો બીજો કોઈ સહસંબંધ

હોઈ શકે. વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં બિંદુઓ કેવી રીતે વિખરાયેલાં છે તે પરથી સુરેખ સિવાયના સહસંબંધના પ્રકાર વિશે થોડો ખ્યાલ આવે છે.

આંશિક સહસંબંધનું અર્થઘટન

($0 < r < 1$ અને $-1 < r < 0$ નું અર્થઘટન) :

જો r ની કિંમત 0 થી 1 ની વચ્ચે અથવા -1 થી 0 ની વચ્ચે હોય એટલે કે જો $|r| < 1$ હોય તો આપણે કહી શકીએ કે બે ચલ વચ્ચે આંશિક સહસંબંધ છે. જ્યારે $|r|$ ની કિંમત 1ની નજીક હોય તો આપણે કહી શકીએ કે, બે ચલ વચ્ચેનો સંબંધ સંપૂર્ણ સુરેખ સંબંધની નજીકનો છે અને સંબંધ વધુ ગાઢ પ્રમાણમાં છે. આવા સંબંધ વખતે આપણે એક ચલની કિંમતમાં થતા ફેરફારની અસર બીજા ચલની કિંમતમાં કેવી થશે તેનો વિશ્વસનીય અંદાજ મેળવી શકીએ છીએ. જ્યારે $|r|$ની કિંમત 0ની નજીક હોય તો આપણે કહી શકીએ કે સુરેખ સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા ખૂબ જ ઓછી છે અને બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સંબંધનો લગભગ અભાવ છે. આ પરિસ્થિતિમાં આપણે એક ચલની કિંમતમાં થતા ફેરફારની અસર બીજા ચલની કિંમત પર કેવી થશે તેનો વિશ્વસનીય અંદાજ મેળવી શકીએ નહિ.

સહસંબંધાંક r નું અર્થઘટન

વધુ ગાઢ ←	ઓછો ગાઢ →	← ઓછો ગાઢ	વધુ ગાઢ →

-1	0	1
↓	↓	↓
સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ	**સુરેખ સહસંબંધનો અભાવ**	**સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ**

નોંધ :

(1) સામાન્ય રીતે આપણે r ની ગણતરીની શરૂઆત મધ્યક $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ શોધવાથી કરીએ છીએ, પરંતુ તે જરૂરી નથી. આપણે અચલ A, B, c_x, c_y $\left(c_x > 0,\ c_y > 0\right)$ ની અનુકૂળ કિંમતો લઈ r ની ગણતરી શરૂ કરી શકીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે આ અચલાંકોની કોઈ પણ કિંમત લઈ શકાય છે, તેનાથી r ની કિંમત બદલાતી નથી.

(2) બે ચલની આપેલી માહિતી માટે કાર્લ પિયર્સનના કોઈ પણ સૂત્રથી સહસંબંધાંક r ની કિંમત સરખી જ મળે છે.

ઉદાહરણ 5 : એક સામાન્ય જ્ઞાન માટેની સ્પર્ધાત્મક પરીક્ષામાં પરીક્ષા અગાઉ છેલ્લા દિવસોની તૈયારીની પરીક્ષાના પરિણામ પર અસર જાણવા લગભગ સમાન બૌદ્ધિક ક્ષમતા ધરાવતા સાત ઉમેદવારોનો એક નિદર્શ લઈ નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરવામાં આવે છે :

છેલ્લા ત્રણ દિવસમાં વાચન (કલાક)	25	38	30	28	34	40	36
પરીક્ષામાં મેળવેલા ગુણ	65	75	68	70	72	79	75

આ માહિતી પરથી છેલ્લા ત્રણ દિવસમાં વાચનના કલાકો અને પરીક્ષામાં મેળવેલા ગુણ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

અહીં $n = 7$, વાચન(x) માટે તેનો મધ્યક $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{231}{7} = 33$, ગુણ$(y)$ માટે તેનો મધ્યક

$$\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{504}{7} = 72$$

અહીં, બંને મધ્યકો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પૂર્ણાંક હોવાથી r આપણે નીચે મુજબ મેળવી શકીએ.

	વાચન (કલાક) x	ગુણ y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
	25	65	–8	–7	56	64	49
	38	75	5	3	15	25	9
	30	68	–3	–4	12	9	16
	28	70	–5	–2	10	25	4
	34	72	1	0	0	1	0
	40	79	7	7	49	49	49
	36	75	3	3	9	9	9
કુલ	**231**	**504**	**0**	**0**	**151**	**182**	**136**

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})\ (y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$$

$$= \frac{151}{\sqrt{182} \cdot \sqrt{136}}$$

$$= \frac{151}{\sqrt{182 \times 136}}$$

$$= \frac{151}{\sqrt{24752}}$$

$$= \frac{151}{157.3277}$$

$$= 0.9598$$

$$\therefore\ r \simeq 0.96$$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 1 ની ખૂબ નજીક છે. તેથી વાચનના કલાકો અને ગુણ વચ્ચે વધુ ગાઢ ધન સહસંબંધ છે. તે પરથી કહી શકાય કે સામાન્ય રીતે છેલ્લા દિવસોમાં વાચનના કલાકો વધુ હોય તો પરીક્ષામાં ગુણ પણ વધુ પ્રાપ્ત થાય છે.

ઉદાહરણ 6 : એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓની ગુજરાતી વિષયમાં આવડત અને આંકડાશાસ્ત્ર વિષયમાં આવડત વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા છ વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લઈ નીચેની માહિતી મેળવેલ છે.

ગુજરાતીમાં ગુણ x	65	72	66	70	72	69
આંકડાશાસ્ત્રમાં ગુણ y	90	95	88	92	85	90

આ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીઓના બંને વિષયના ગુણ વચ્ચે સહસંબંધાંક ગણો.

અહીં, $n=6,\ \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{414}{6} = 69,\ \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{540}{6} = 90$

અહીં બંને મધ્યકો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ પૂર્ણાંક હોવાથી આપણે r નીચે મુજબ મેળવી શકીએ.

	ગુજરાતીમાં ગુણ x	આંકડાશાસ્ત્રમાં ગુણ y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$
	65	90	–4	0	0	16	0
	72	95	3	5	15	9	25
	66	88	–3	–2	6	9	4
	70	92	1	2	2	1	4
	72	85	3	–5	–15	9	25
	69	90	0	0	0	0	0
કુલ	**414**	**540**	**0**	**0**	**8**	**44**	**58**

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2}\cdot\sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{44}\cdot\sqrt{58}}$$

$$= \frac{8}{\sqrt{2552}}$$

$$= \frac{8}{50.5173}$$

$$= 0.1584$$

$$\therefore\ r \simeq 0.16$$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 0ની નજીક છે. તેથી વિદ્યાર્થીઓના બંને વિષયોના ગુણ વચ્ચે ઓછો ગાઢ ધન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 7 : મોબાઇલ ફોનનું ઉત્પાદન કરતી એક કંપનીએ છેલ્લા છ માસમાં વેચેલા મોબાઇલ (હજાર એકમમાં) અને તેનાથી થયેલ નફા (લાખ ₹માં)ની વીગત નીચે આપેલી છે.

વેચાયેલા મોબાઇલ ફોનની સંખ્યા (હજાર એકમમાં) x	3	8	12	5	7	5
નફો (લાખ ₹) y	6	10	15	10	9	8

આ પરથી વેચાયેલાં મોબાઇલ ફોનની સંખ્યા અને નફો વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

અહીં, $n=6,\ \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{40}{6} = 6.67,\ \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{58}{6} = 9.67$

અહીં, $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ અપૂર્ણાંક છે અને X અને Y ની કિંમતો બહુ મોટી નથી તેથી આપણે r નીચે મુજબ મેળવી શકીએ.

વેચાયેલાં મોબાઈલ ફોનની સંખ્યા (હજાર એકમો) x	નફો (લાખ ₹) y	$x\ y$	x^2	y^2
3	6	18	9	36
8	10	80	64	100
12	15	180	144	225
5	10	50	25	100
7	9	63	49	81
5	8	40	25	64
કુલ 40	**58**	**431**	**316**	**606**

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{6(431) - (40)(58)}{\sqrt{6(316) - (40)^2} \cdot \sqrt{6(606) - (58)^2}}$$

$$= \frac{2586 - 2320}{\sqrt{1896 - 1600} \cdot \sqrt{3636 - 3364}}$$

$$= \frac{266}{\sqrt{296} \cdot \sqrt{272}}$$

$$= \frac{266}{\sqrt{80512}}$$

$$= \frac{266}{283.7464}$$

$$= 0.9375$$

$$\therefore\ r \simeq 0.94$$

અહીં, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 1 ની નજીક છે તેથી મોબાઈલ ફોનના વેચાણ અને તેનાથી થતા નફા વચ્ચે વધુ ગાઢ ધન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 8 : ઉત્તર ભારતના કોઈ એક શહેરમાં અઠવાડિક ન્યૂનતમ તાપમાન (સેલ્સિયસમાં) અને તે અઠવાડિયા દરમિયાન હીટરના થયેલા વેચાણ (સો એકમોમાં)ની નીચે પાંચ અઠવાડિયાની આપેલી માહિતી પરથી ન્યૂનતમ તાપમાન અને હીટરના વેચાણ વચ્ચે સહસંબંધાંકની ગણતરી કરો.

ન્યૂનતમ તાપમાન (સેલ્સિયસમાં) x	3	4	6	7	9
હીટરની માંગ (સો એકમો) y	16	15	14	11	9

અહીં, $n=5$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{29}{5} = 5.8$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{65}{5} = 13$

અહીં, એક મધ્યક અપૂર્ણાંક છે અને x અને y ની કિંમતો બહુ મોટી ન હોવાથી, આપણે r નીચે મુજબ મેળવીશું.

	ન્યૂનતમ તાપમાન (સેલ્સિયસ) x	હીટરની માંગ (સો એકમો) y	xy	x^2	y^2
	3	16	48	9	256
	4	15	60	16	225
	6	14	84	36	196
	7	11	77	49	121
	9	9	81	81	81
કુલ	**29**	**65**	**350**	**191**	**879**

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{5(350) - (29)(65)}{\sqrt{5(191) - (29)^2} \cdot \sqrt{5(879) - (65)^2}}$$

$$= \frac{1750 - 1885}{\sqrt{955 - 841} \cdot \sqrt{4395 - 4225}}$$

$$= \frac{-135}{\sqrt{114} \cdot \sqrt{170}}$$

$$= \frac{-135}{\sqrt{19380}}$$

$$= \frac{-135}{139.2121}$$

$$= -0.9697$$

$$\therefore \ r \simeq -0.97$$

અહીં, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત -1ની ખૂબ જ નજીક છે. તેથી ન્યૂનતમ તાપમાન અને હીટરના વેચાણ વચ્ચે વધુ ગાઢ ઋણ સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

આપણે ઉદાહરણ (7) અને (8)માં જોયું કે બંને મધ્યકો પૂર્ણાંક ન હતા અને ચલ x અને y ની કિંમતો બહુ મોટી ન હતી. તેથી આપણે નીચે જણાવેલ સૂત્ર પરથી r ની ગણતરી કરી.

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

પરંતુ જ્યારે બંને ચલની કિંમતો મોટી અને/અથવા અપૂર્ણાંક હોય ત્યારે xy, x^2, y^2 ની ગણતરી વધુ મુશ્કેલ બને છે અને તેથી r ની ગણતરી કંટાળાજનક બને છે. તેથી સહસંબંધાંક rની ગણતરી સહેલી બને તે માટે એક ટૂંકી રીતનો ઉપયોગ થાય છે. આ ટૂંકી રીત r ના ગુણધર્મ (નં. 4) પર આધારિત છે.

આ ગુણધર્મ અનુસાર r ના સૂત્રમાં x ને બદલે u અને y ને બદલે v મૂકવાથી સહસંબંધાંક r શોધવા માટેનું ટૂંકી રીતનું સૂત્ર નીચે મુજબ મળે.

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

હવે આપણે ટૂંકી રીત દ્વારા r શોધવા માટેનાં કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 9 : એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓના ઊંચાઈ (સેમીમાં) અને વજન (કિગ્રામાં) વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે 6 વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લઈ નીચેની માહિતી મેળવવામાં આવે છે. તે પરથી વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ અને વજન વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

ઊંચાઈ (સેમી) x	155	165	158	162	153	160
વજન (કિગ્રા) y	53	63	56	60	52	60

અહીં $n = 6$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{953}{6} = 158.83$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{344}{6} = 57.33$

અહીં, બંને મધ્યકો $\bar{x}$ અને $\bar{y}$ અપૂર્ણાંક છે અને ચલ X અને Y ની કિંમતો મોટી છે, તેથી આપણે r ની ગણતરી કરવા માટે ટૂંકી રીતને અગ્રિમતા આપીશું.

આપણે ઊગમબિંદુ પરિવર્તન માટે $A = 158$ અને $B = 57$ લઈશું અને પ્રમાણમાપ બદલવા કોઈ અનુકૂળ કિંમત નથી તેથી $c_x = 1$, $c_y = 1$ લઈશું.

આપણે નવા ચલ u અને v ને નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીશું.

$$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-158}{1} = x - 158$$

$$v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-57}{1} = y - 57$$

નોંધ : અહીં ફક્ત ઊગમબિંદુ પરિવર્તન જ કરેલ છે પરંતુ માપનું પરિવર્તન કરેલ નથી તેથી આપણે નવા ચલ u અને v નીચે મુજબ પણ વ્યાખ્યાયિત કરી શકીએ.

$u = x - A = x - 158$; $v = y - B = y - 57$

	ઊંચાઈ (સેમી) x	વજન (કિગ્રા) y	$u = x - 158$	$v = y - 57$	uv	u^2	v^2
	155	53	–3	–4	12	9	16
	165	63	7	6	42	49	36
	158	56	0	–1	0	0	1
	162	60	4	3	12	16	9
	153	52	–5	–5	25	25	25
	160	60	2	3	6	4	9
કુલ	**953**	**344**	**5**	**2**	**97**	**103**	**96**

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{6(97) - (5)(2)}{\sqrt{6(103) - (5)^2} \cdot \sqrt{6(96) - (2)^2}}$$

$$= \frac{582 - 10}{\sqrt{618 - 25} \cdot \sqrt{576 - 4}}$$

$$= \frac{572}{\sqrt{593} \cdot \sqrt{572}}$$

$$= \frac{572}{\sqrt{339196}}$$

$$= \frac{572}{582.4054}$$

$$= 0.9821$$

$$\therefore \; r \simeq 0.98$$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 1ની ખૂબ નજીક છે. તેથી વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ અને વજન વચ્ચે વધુ ગાઢ ધન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 10 : એક વિસ્તારની સમાન પ્રકારની વસ્તુનું ઉત્પાદન કરતી છ જુદી જુદી ફેક્ટરીના કામદારોની સરેરાશ માસિક આવક (₹ માં) અને ફેક્ટરીમાં ઓવરટાઈમને લીધે થતી આવક (₹ માં) વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે નીચે મુજબ માહિતી મેળવવામાં આવે છે. તે પરથી સરેરાશ માસિક આવક અને ઓવરટાઈમથી થતી આવક વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

વર્ષ	2011	2012	2013	2014	2015	2016
સરેરાશ માસિક આવક (₹) x	14,900	15,100	15,000	15,500	15,700	15,800
ઓવરટાઈમથી થતી આવક (₹) y	100	105	115	160	220	255

અહીં, $n = 6,\ \ \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{92000}{6} = 15333.33,\ \ \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{955}{6} = 159.17$

આપણે એ પણ જોઈ શકીએ છીએ કે, X ની કિંમતો 100ના ગુણકમાં છે અને Y ની કિંમતો 5ના ગુણકમાં છે. તેથી આપણે A = 15,300, B = 160, c_x = 100 અને c_y = 5 લઈશું.

આપણે હવે નવા ચલ u અને v નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

$$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-15300}{100} \text{ અને } v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-160}{5}$$

નોંધ : x કિંમતો 100ના ગુણકમાં હોવાથી આપણે A (= 15,300) પણ 100 ના ગુણકમાં પસંદ કરીએ છીએ. તે જ રીતે y કિંમતો 5ના ગુણકમાં હોવાથી B (= 160) પણ 5ના ગુણકમાં પસંદ કરીએ છીએ.

	સરેરાશ માસિક આવક (₹) x	ઓવરટાઈમથી થતી આવક (₹) y	$u = \frac{x-15300}{100}$	$v = \frac{y-160}{5}$	uv	u^2	v^2
	14,900	100	–4	–12	48	16	144
	15,100	105	–2	–11	22	4	121
	15,000	115	–3	–9	27	9	81
	15,500	160	2	0	0	4	0
	15,700	220	4	12	48	16	144
	15,800	255	5	19	95	25	361
કુલ	**92,000**	**955**	**2**	**–1**	**240**	**74**	**851**

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{6(240) - (2)(-1)}{\sqrt{6(74) - (2)^2} \cdot \sqrt{6(851) - (-1)^2}}$$

$$= \frac{1440 + 2}{\sqrt{444 - 4} \cdot \sqrt{5106 - 1}}$$

$$= \frac{1442}{\sqrt{440} \cdot \sqrt{5105}}$$

$$= \frac{1442}{\sqrt{2246200}}$$

$$= \frac{1442}{1498.7328}$$

$$= 0.9621$$

$$\therefore\ r \simeq 0.96$$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 1ની ખૂબ નજીક છે. તેથી સરેરાશ માસિક આવક અને ઓવરટાઈમથી થતી આવક વચ્ચે વધુ ગાઢ ધન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 11 : ગુજરાત રાજ્યના છ શહેરો માટે વસ્તીની ગીચતા (ચોરસ કિમી દીઠ) અને મૃત્યુદર (દર હજારે)ના આશરે આંકડા નીચે મુજબ છે.

શહેર	A	B	C	D	E	F
ગીચતા (ચોરસ કિમી દીઠ) x	200	500	400	700	600	300
મૃત્યુદર (દર હજારે) y	10	12	10	15	9	12

આ માહિતી પરથી વસ્તીની ગીચતા અને મૃત્યુદર વચ્ચે સહસંબંધાંક મેળવો.

અહીં, $n=6$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{2700}{6} = 450$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{68}{6} = 11.33$

આપણે એ પણ જોઈ શકીએ છીએ કે, X ની કિંમતો 100ના ગુણકમાં છે અને Y ની કિંમતો નાની છે. તેથી આપણે $A = 500$, $B = 12$, $c_x = 100$ અને $c_y = 1$ લઈશું.

અહીં હવે નવા ચલ u અને v નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

$$u = \frac{x-A}{c_x} = \frac{x-500}{100} \text{ અને } v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-12}{1} = y - 12$$

	ગીચતા (ચો કિમી દીઠ) x	મૃત્યુદર (દર હજારે) y	$u = \frac{x-500}{100}$	$v = y-12$	uv	u^2	v^2
	200	10	–3	–2	6	9	4
	500	12	0	0	0	0	0
	400	10	–1	–2	2	1	4
	700	15	2	3	6	4	9
	600	9	1	–3	–3	1	9
	300	12	–2	0	0	4	0
કુલ	**2700**	**68**	**–3**	**–4**	**11**	**19**	**26**

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{6(11) - (-3)(-4)}{\sqrt{6(19) - (-3)^2} \cdot \sqrt{6(26) - (-4)^2}}$$

$$= \frac{66 - 12}{\sqrt{114 - 9} \cdot \sqrt{156 - 16}}$$

$$= \frac{54}{\sqrt{105} \cdot \sqrt{140}}$$

$$= \frac{54}{\sqrt{14700}}$$

$$= \frac{54}{121.2436}$$

$$= 0.4454$$

$$\therefore \ r \simeq 0.45$$

અહીં, આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 1ની અતિનજીક નથી. તેથી વસ્તીની ગીચતા અને મૃત્યુદર વચ્ચે સામાન્યથી ઓછો ગાઢ ધન સહસંબંધ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 12 : ટ્રકના ટાયર બનાવતી કંપનીઓના વેચાણ (કરોડ ₹માં) અને નફા (હજાર ₹માં) વચ્ચેના સંબંધના અભ્યાસ માટે મેળવેલી છેલ્લા વર્ષની માહિતી નીચે મુજબ મેળવેલી છે.

વેચાણ (કરોડ ₹) x	1.6	2.2	1.9	2.0	2.3	1.7	2.4	1.8	2.1
નફો (હજાર ₹) y	4200	5500	6000	6200	6100	4900	5900	5000	6700

આ પરથી વેચાણ અને નફા વચ્ચે સહસંબંધાંક ગણો.

અહીં, $n=9$, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{18}{9} = 2$, $\bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{50500}{9} = 5611.11$

ચલ X ની કિંમતો અપૂર્ણાંક છે અને તેમાં દશાંશ ચિહ્ન પછી એક જ અંક છે તેથી X ની કિંમતોને આપણે 10 વડે ગુણીશું (એટલે કે, $\frac{1}{10} = 0.1$ વડે ભાગીશું) કે જેથી તે કિંમતો પૂર્ણાંક થાય અને Y ની કિંમતો 100ના ગુણકમાં હોવાથી આપણે $A = 2$, $B = 5600$, $c_x = 0.1$, $c_y = 100$ લઈશું.

હવે નવા ચલ u અને v નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

$$u = \frac{x-A}{c_x} = 10\,(x - 2.0) = \frac{x-2.0}{0.1} \text{ અને } v = \frac{y-B}{c_y} = \frac{y-5600}{100}$$

	વેચાણ (કરોડ ₹) x	નફો (હજાર ₹) y	$u=10(x-2.0)$	$v=\frac{y-5600}{100}$	uv	u^2	v^2
	1.6	4200	–4	–14	56	16	196
	2.2	5500	2	–1	–2	4	1
	1.9	6000	–1	4	–4	1	16
	2.0	6200	0	6	0	0	36
	2.3	6100	3	5	15	9	25
	1.7	4900	–3	–7	21	9	49
	2.4	5900	4	3	12	16	9
	1.8	5000	–2	–6	12	4	36
	2.1	6700	1	11	11	1	121
કુલ	**18**	**50,500**	**0**	**1**	**121**	**60**	**489**

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{9(121) - (0)(1)}{\sqrt{9(60) - (0)^2} \cdot \sqrt{9(489) - (1)^2}}$$

$$= \frac{1089 - 0}{\sqrt{540 - 0} \cdot \sqrt{4401 - 1}}$$

$$= \frac{1089}{\sqrt{540} \cdot \sqrt{4400}}$$

$$= \frac{1089}{\sqrt{2376000}}$$

$$= \frac{1089}{1541.4279}$$

$$= 0.7065$$

$$\therefore \quad r \simeq 0.71$$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, r ની કિંમત 1થી સાધારણ દૂર છે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે વેચાણ અને નફા વચ્ચે સામાન્ય કરતાં વધુ ગાઢ ધન સહસંબંધ છે.

પ્રવૃત્તિ

ઉપર ઉદાહરણ - 12માં આપેલી વીગત પરથી $A = 1.8$, $B = 6000$, $c_x = 0.05$ અને $c_y = 100$ લઈ ફરીથી સહસંબંધાંક r ની ગણતરી કરો અને તમે જોશો કે r ની કિંમત સરખી (= 0.71) જ મળશે.

ઉદાહરણ 13 : કોઈ એક શાળાની પરીક્ષામાં વિદ્યાર્થીઓએ આંકડાશાસ્ત્રમાં મેળવેલા ગુણ (*X*) અને અર્થશાસ્ત્રમાં મેળવેલાં ગુણ (*Y*) વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે દસ વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લેતાં નીચે મુજબ વીગતો મળે છે.

$$\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 120,\ \Sigma(x-\bar{x})^2 = 80,\ \Sigma(y-\bar{y})^2 = 500$$

આ પરથી r ની કિંમત શોધો.

અહીં, $n = 10$ અને જે વીગતો આપેલી છે તે પ્રમાણે r નું નીચેનું સૂત્ર યોગ્ય છે.

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})\,(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$$

$$= \frac{120}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{500}}$$

$$= \frac{120}{\sqrt{40000}}$$

$$= \frac{120}{200}$$

$$\therefore \quad r = 0.6$$

ઉદાહરણ 14 : નીચેની વીગતો પરથી સહસંબંધાંક r શોધો.

(1) $n = 20,\ Cov(x, y) = -50,\ s_x = 15,\ s_y = 8$

(2) $n = 10,\ \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 60$, **$X$ નું વિચરણ = 25, Y નું વિચરણ = 36**

(3)

વીગત	x	y
અવલોકનોની સંખ્યા	25	
મધ્યક	40	50
મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો	120	160
મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના ગુણાકારોનો સરવાળો	100	

(4) $n = 10,\ \Sigma xy = 1500$, **$X$ નો મધ્યક = 12, Y નો મધ્યક = 15, X નું પ્ર.વિ. = 9, Y નું પ્ર.વિ. = 5**

(1) અહીં $n = 20,\ Cov(x, y) = -50,\ s_x = 15,\ s_y = 8$

આ બધી કિંમતોને નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{Cov(x, y)}{s_x \cdot s_y}$$

$$= \frac{-50}{(15)\ (8)}$$

$$= \frac{-50}{120}$$

$$= -0.4167$$

$$\therefore\ r \simeq -0.42$$

(2) અહીં, $n = 10,\ \Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 60$

Xનું વિચરણ $= s_x^2 = 25 \quad \therefore\ s_x = 5$

Yનું વિચરણ $= s_y^2 = 36 \quad \therefore\ s_y = 6$

જરૂરી કિંમતોને નીચેના અનુરૂપ સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n\, s_x s_y}$$

$$= \frac{60}{10(5)\ (6)}$$

$$= \frac{60}{300}$$

$$\therefore\ r = 0.2$$

(3) અહીં, $n = 25,\ \bar{x} = 40,\ \bar{y} = 50,\ \ \Sigma(x-\bar{x})^2 = 120,\ \Sigma(y-\bar{y})^2 = 160$ અને $\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 100$

આ બધી કિંમતોને નીચેના અનુકૂળ સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})\ (y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$$

$$= \frac{100}{\sqrt{120} \cdot \sqrt{160}}$$

$$= \frac{100}{\sqrt{19200}}$$

$$= \frac{100}{138.5641}$$

$$= 0.7217$$

$$\therefore\ r \simeq 0.72$$

(4) અહીં $n = 10,\ \Sigma xy = 1500,\ \bar{x} = 12,\ \bar{y} = 15,\ s_x = 9$ અને $s_y = 5$

આ બધી કિંમતોને નીચેના અનુકૂળ સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{\Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n \cdot s_x \cdot s_y}$$

$$= \frac{1500 - 10\,(12)\,(15)}{10\,(9)\,(5)}$$

$$= \frac{1500 - 1800}{450}$$

$$= \frac{-300}{450}$$

$$= -0.6667$$

$$\therefore\ r \simeq -0.67$$

ઉદાહરણ 15 : એક કંપનીનાં છ વર્ષનાં વેચાણ અને નફા વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરવામાં આવે છે.

X = વાર્ષિક વેચાણ (લાખ ₹ માં)

Y = વાર્ષિક નફો (દસ હજાર ₹ માં)

$$\boldsymbol{n = 6,\ \Sigma x = 58,\ \Sigma y = 40,\ \Sigma xy = 431,\ \Sigma x^2 = 606,\ \Sigma y^2 = 316}$$

આ પરથી X અને Y વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

આપેલી કિંમતોને નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)\,(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{6(431) - (58)\,(40)}{\sqrt{6(606) - (58)^2} \cdot \sqrt{6(316) - (40)^2}}$$

$$= \frac{2586 - 2320}{\sqrt{3636 - 3364} \cdot \sqrt{1896 - 1600}}$$

$$= \frac{266}{\sqrt{272} \cdot \sqrt{296}}$$

$$= \frac{266}{\sqrt{80512}}$$

$$= \frac{266}{283.7464}$$

$$= 0.9375$$

$$\therefore\ r \simeq 0.94$$

કાર્લ પિયર્સનની રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ

ગુણ :

(1) આ રીત દ્વારા બે ચલ વચ્ચેના સહસંબંધનો પ્રકાર તેમજ તેમની વચ્ચેના સંબંધની ઘનિષ્ઠતા પણ જાણી શકાય છે.

(2) બે ચલ વચ્ચેના સુરેખ સહસંબંધને માપવા માટેની આ સૌથી પ્રચલિત રીત છે.

(3) તે સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા (વધુ, સામાન્ય કે ઓછી)ને એક સંખ્યામાં દર્શાવે છે.

મર્યાદાઓ :

(1) આ રીત એ ધારણા પર આધારિત છે કે બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધ છે. તેથી જો બે ચલ વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધ ન હોય છતાં આ રીતનો ઉપયોગ કરીને સહસંબંધાંક શોધવામાં આવે, અને તેના આધારે સંબંધ વિશેનું અર્થઘટન કરવામાં આવે તો તે અર્થઘટન ગેરમાર્ગે દોરશે.

(2) સહસંબંધની કિંમત પર અંતિમ અવલોકનો (અતિ મોટાં અથવા અતિ નાનાં અવલોકનો)ની ખૂબ જ અસર થાય છે.

(3) આ રીતે મળતા સહસંબંધાંકનું ખૂબ સાવચેતીપૂર્વક અર્થઘટન થાય એ જરૂરી છે. નહિતર બે ચલ વચ્ચેના સંબંધ વિશે ગેરસમજ થવાની શક્યતા રહે છે.

સ્વાધ્યાય 2.2

1. એક સોસાયટીમાં રહેતાં 7 કુટુંબોમાંથી મેળવેલા નિદર્શમાં પિતાની ઊંચાઈ (સેમીમાં) અને તેમના પુખ્ત વયના પુત્રની ઊંચાઈ (સેમીમાં)ની નીચે આપેલી માહિતી પરથી સહસંબંધાંક ગણો.

પિતાની ઊંચાઈ (સેમી)	170	169	168	167	166	165	164
પુત્રની ઊંચાઈ (સેમી)	172	168	170	168	165	167	166

2. નાસ્તા બનાવતી એક સ્થાનિક ગૃહ ઉદ્યોગ કંપની દરેક નાસ્તા 100 ગ્રામના પેકેટમાં વેચે છે. એક નવા પ્રકારની વેફરની કિંમત નિર્ધારણ માટે તેના ભાવ અને માંગનો પ્રાથમિક અભ્યાસ કરતાં નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

વેફરનો ભાવ (₹)	24	26	32	33	35	30
માંગ (હજાર પેકેટ)	27	24	22	20	15	24

આ માહિતી પરથી વેફરનો ભાવ અને તેની માંગ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

3. એક શાળાની પરીક્ષામાં બે વિષયો નામાપદ્ધતિ અને આંકડાશાસ્ત્રમાં દસ વિદ્યાર્થીઓના નિદર્શમાંથી મેળવેલા ગુણની માહિતી પરથી બંને વિષયોના ગુણ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

નામા પદ્ધતિમાં ગુણ	60	80	50	80	95	40	70	40	35	90
આંકડાશાસ્ત્રમાં ગુણ	50	75	60	85	90	40	65	30	45	70

4. એક શહેરમાં રહેતા બાળકોની ગણિત અને તર્કવિદ્યાની ક્ષમતા વચ્ચેનો સંબંધ મેળવવા એક શૈક્ષણિક સંસ્થા જુદી જુદી શાળામાંથી પસંદ કરેલાં છ બાળકોને ગણિત અને તર્કવિદ્યા આધારિત વીસ કોયડા ઉકેલવા માટે આપે છે. તે બાળકો દ્વારા સાચા ઉકેલ મેળવ્યા હોય તેવા કોયડાની સંખ્યા નીચે આપેલી છે.

ગણિત આધારિત ઉકેલ મેળવ્યો હોય તે કોયડાની સંખ્યા	12	8	9	10	8	11
તર્કવિદ્યા આધારિત ઉકેલ મેળવ્યો હોય તે કોયડાની સંખ્યા	11	10	4	7	13	16

આ માહિતી પરથી બાળકોની બંને પ્રકારના કોયડા ઉકેલવાની ક્ષમતા વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

5. નીચેની માહિતી પરથી મૂડીરોકાણ (કરોડ ₹માં) અને નફો (દસ લાખ ₹માં) વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

કંપની	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
મૂડીરોકાણ (કરોડ ₹)	15	22	12	10	17	20	14
નફો (દસ લાખ ₹)	9	12	8	6	10	9	10

6. કોઈ એક શાળામાંથી પસંદ કરેલા પાંચ વિદ્યાર્થીઓના પ્રતિદિન અભ્યાસના સરેરાશ કલાકો અને ઊંઘના સરેરાશ કલાકોની માહિતી નીચે મુજબ પ્રાપ્ય છે.

અભ્યાસના કલાકો	10	5	7	5	3
ઊંઘના કલાકો	6	9	7	8	10

આ પરથી અભ્યાસના કલાકો અને ઊંઘના કલાકો વચ્ચે સહસંબંધાંક ગણો.

7. નીચે આપેલ ઉંમર (વર્ષમાં) અને લોહીના દબાણ (મિમિમાં)ની વીગતો પરથી ઉંમર અને લોહીના દબાણ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

ઉંમર (વર્ષ)	58	55	65	52	48	68	62	56
લોહીનું સિસ્ટોલિક દબાણ (મિમિ)	130	150	150	130	140	158	155	140

8. એક એન્જિનીઅર એસૉસિએશન જુદી જુદી ફેક્ટરીમાં થતા ઉત્પાદન અને એકમ દીઠ ઉત્પાદન ખર્ચ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા છ ફેક્ટરીના ઉત્પાદન (હજાર એકમોમાં) અને ઉત્પાદનના એકમ દીઠ ખર્ચની માહિતી નીચે મુજબ મેળવે છે.

ઉત્પાદન (હજાર એકમો)	15	20	35	24	18	31
એકમ દીઠ ઉત્પાદન-ખર્ચ (₹)	95	90	75	80	87	70

આ પરથી ઉત્પાદન અને એકમદીઠ ઉત્પાદન-ખર્ચ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

9. જુદાં જુદાં છ શહેરોના લોકોની માથાદીઠ વાર્ષિક આવક (₹માં) અને ભાવના સૂચક આંકની વીગત પરથી સહસંબંધાંક શોધો.

શહેર	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
માથાદીઠ વાર્ષિક આવક (₹)	32,000	29,000	40,000	36,000	30,000	39,000
ભાવનો સૂચક આંક	120	100	250	180	110	220

10. એક શહેરના કુટુંબોમાં વાહન ચલાવનારા સભ્યોની સંખ્યા અને તેમનો અઠવાડિક પેટ્રોલનો વપરાશ (લિટરમાં) વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા માટે નીચે માહિતી આપેલી છે.

કુટુંબમાં વાહન ચલાવનારા સભ્યોની સંખ્યા	3	5	2	4	3	6	1
અઠવાડિક પેટ્રોલનો વપરાશ (લિટર)	11.5	21	14.5	15.5	7	22.5	10

આ માહિતી પરથી કુટુંબદીઠ વાહન ચલાવતા સભ્યોની સંખ્યા અને પેટ્રોલના વપરાશ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

11. એક ગ્રામ્ય વિસ્તારમાં ખાતરના વપરાશ અને મકાઈની ઊપજ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરવામાં આવી છે.

ખાતરનો વપરાશ (ક્વિન્ટલ)	1.5	2.1	0.9	1.8	1.1	1.2
હેક્ટરદીઠ મકાઈની ઊપજ (ક્વિન્ટલ)	60	95	50	75	45	75

આ પરથી ખાતરના વપરાશ અને મકાઈની ઊપજ વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

12. એક જિલ્લામાં છેલ્લાં દસ વર્ષમાં પડેલા વરસાદ સેમીમાં (X) અને પાકની ઊપજ હેક્ટરદીઠ ટનમાં (Y) ની વીગતો પરથી સહસંબંધાંક શોધો.

$n = 10$, $Cov(x, y) = 30$, X નું પ્રમાણિત વિચલન $= 5$ અને Y નું વિચરણ $= 144$

13. એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓમાંથી દસ વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લઈ તેમની ઊંચાઈ સેમીમાં (X) અને વજન કિગ્રામાં (Y)ની માહિતી પરથી નીચેની વીગતો મળેલ છે.

$\bar{x} = 160$, $\bar{y} = 55$, $\Sigma xy = 90000$, $s_x = 25$, $s_y = 10$

આ પરથી ઊંચાઈ અને વજન વચ્ચેના સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

14. નીચેનાં પરિણામો પરથી સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

(1) $\Sigma(x-\bar{x})^2 = 72$, $\Sigma(y-\bar{y})^2 = 32$, $\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 45$

(2) $n = 6$, $\Sigma x = 16$, $\Sigma y = 51$, $\Sigma xy = 154$, $\Sigma x^2 = 52$, $\Sigma y^2 = 471$

15. નીચેની માહિતી પરથી r ની કિંમત શોધો.

વીગત	x	y
મધ્યક	60	95
મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના વર્ગોનો સરવાળો	920	1050
મધ્યકમાંથી લીધેલા વિચલનોના ગુણાકારોનો સરવાળો	−545	

*

2.8 સ્પિયરમૅનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીત

આપણે બે ચલ વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધવા માટે કાર્લ પિયર્સનની રીતનો અભ્યાસ કર્યો. સ્પષ્ટ છે કે જ્યારે ચલ સંખ્યાત્મક હોય ત્યારે એટલે કે જ્યારે બંને ચલોને સંખ્યાત્મક રીતે માપી શકાય ત્યારે આ રીતનો ઉપયોગ થાય છે, પરંતુ ધંધાકીય, ઔદ્યોગિક અને સામાજિક વિજ્ઞાનના સમસ્યાઓમાં કેટલીક પરિસ્થિતિ એવી હોય છે જ્યારે આપણે ગુણાત્મક ચલ (ગુણધર્મ)નો અભ્યાસ કરીએ છીએ. દા.ત., સુંદરતા, પ્રામાણિકતા, આવડત, નૈતિકતા, વકતૃત્વ, સંગીત, નૃત્યમાં કૌશલ્ય વગેરે. આ પરિસ્થિતિમાં આ લક્ષણો (ગુણાત્મક ચલ કે ગુણધર્મો)ને સંખ્યાત્મક સ્વરૂપે માપી શકાતા નથી, પરંતુ તેઓને ગુણવત્તા અનુસાર ગોઠવી ક્રમ આપી શકાય છે. આ રીતે મળતાં બે લક્ષણોના ક્રમોની જોડ પરથી મેળવેલા ચાર્લ્સ સ્પિયરમૅને સૂચવેલા સહસંબંધાંકને સ્પિયરમૅનનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક કહેવાય છે.

સહસંબંધનું માપ જાણવા માટે સ્પિયરમૅનના ક્રમાંક સહસંબંધાંકની ગણતરીના કેટલાંક ઉદાહરણ નીચે આપેલા છે :

(1) એક જૂથમાં વ્યક્તિઓની પ્રામાણિકતા અને સમયપાલનની નિયમિતતા અનુસાર તેઓને ક્રમ આપી આ બે ગુણધર્મો વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ.

(2) એક સૌંદર્ય સ્પર્ધામાં જુદા જુદા સ્પર્ધકોને તેમના સ્પર્ધામાં દેખાવને આધારે બે નિર્ણાયકોએ આપેલા ક્રમ પરથી બંને નિર્ણાયકોના નિર્ણય વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ.

કેટલીક વખતે માહિતીમાં સંખ્યાત્મક ચલ હોય (જેમકે ઊંચાઈ, વજન) તોપણ તેમનાં અવલોકનોની કિંમત અનુસાર તેમને ક્રમ આપી ક્રમાંક સહસંબંધાંક મેળવવામાં આવે છે. સામાન્ય રીતે જ્યારે બે ચલોની કિંમતોમાં પ્રસાર વધુ હોય ત્યારે કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક મેળવવાને બદલે ક્રમાંક સહસંબંધાંક મેળવાય છે કારણ કે વધુ પ્રસાર વાળાં અવલોકનો માટે કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંક કરતાં ક્રમાંક સહસંબંધાંક વધુ સ્થિર (stable) છે.

રીત : ધારો કે બે ગુણધર્મો X અને Y નાં અવલોકનોની જોડને નીચે મુજબ ક્રમ આપેલા છે :

અવલોકનો	1	2	....	i	....	n
X ને આધારે ક્રમ	R_{x_1}	R_{x_2}	....	R_{x_i}	....	R_{x_n}
Y ને આધારે ક્રમ	R_{y_1}	R_{y_2}	....	R_{y_i}	....	R_{y_n}

ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવા માટે નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ થાય છે.

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d_i^2}{n(n^2-1)}$$

જ્યાં, $d_i = R_{x_i} - R_{y_i}$, $i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n$ માટે સરળતા ખાતર આપણે d_i ને બદલે d, R_{x_i} ને બદલે R_x અને R_{y_i} ને બદલે R_y લખીશું.

તેથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવા માટેનું સૂત્ર નીચે મુજબ લખી શકાય.

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

જ્યાં $d = R_x - R_y = X$ અને Y ના ક્રમાંકોનો તફાવત

$\Sigma d^2 = X$ અને Y ના ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો

જ્યારે અવલોકનોની n જોડ સંખ્યાત્મક ચલની હોય ત્યારે સામાન્ય રીતે એક ચલના સૌથી મોટા અવલોકનને ક્રમ 1, ત્યાર બાદ તેનાથી નાના પણ બાકીનાં અવલોકનોથી મોટા હોય તેવા અવલોકનને ક્રમ 2, એ મુજબ બધાં જ અવલોકનોને ક્રમ આપવામાં આવે છે, તે જ રીતે બીજા ચલની કિંમતોને પણ ક્રમ આપવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ આ ક્રમો પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક મેળવવામાં આવે છે.

આપણે બે સંખ્યાત્મક ચલો વચ્ચેનો સંબંધ શોધવા માટે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધીએ છીએ પણ કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક વધુ ચોક્કસ ગણાય છે, કારણ કે તેમાં ક્રમ નહિ પરંતુ મૂળ અવલોકનોનો ઉપયોગ થાય છે.

અહીં નોંધવું જરૂરી છે કે, ક્રમાંક સહસંબંધાંક એ બીજું કાંઈ નહિ પણ બે ગુણધર્મો (કે સંખ્યાત્મક ચલો)ને આપેલા ક્રમો વચ્ચેનો કાર્લ પિયર્સનનો સહસંબંધાંક છે. તેથી કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંકની જેમ જ ક્રમાંક સહસંબંધાંકનું અર્થઘટન કરી શકાય છે.

સામાન્ય રીતે સ્પિયરમૅનની રીતે મેળવેલ ક્રમાંક સહસંબંધાંક અને કાર્લ પિયર્સનની રીતે મેળવેલ સહસંબંધાંકની કિંમત સમાન હોતી નથી, પરંતુ જ્યારે બે ચલની કિંમતો એ પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓની જ કોઈ ગોઠવણી હોય ત્યારે કાર્લ પિયર્સનની રીત દ્વારા અને સ્પિયરમૅનની રીતે મેળવેલા સહસંબંધાંકની કિંમત સરખી થાય છે.

ઉદાહરણ 16 : એક કંપનીના બે મૅનેજરે તેમની કંપનીમાં નોકરી કરતા વ્યક્તિઓમાંથી પસંદ કરેલા સાત વ્યક્તિઓને તેમના કારભારની આવડતને આધારે નીચે મુજબ ક્રમ આપેલા છે :

વ્યક્તિ	A	B	C	D	E	F	G
મૅનેજર 1 એ આપેલ ક્રમ	6	7	5	4	3	2	1
મૅનેજર 2 એ આપેલ ક્રમ	7	6	5	2	4	1	3

આ માહિતી પરથી બંને મૅનેજરે કરેલા મૂલ્યાંકન વચ્ચેનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

અહીં $n = 7$ અને ક્રમ આપેલા જ છે તેથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવા આપણે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીએ.

વ્યક્તિ	મૅનેજર 1 એ આપેલ ક્રમ R_x	મૅનેજર 2 એ આપેલ ક્રમ R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
A	6	7	–1	1
B	7	6	1	1
C	5	5	0	0
D	4	2	2	4
E	3	4	–1	1
F	2	1	1	1
G	1	3	–2	4
કુલ	**–**	**–**	**0**	**12**

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(12)}{7(49-1)}$$

$$= 1 - \frac{72}{336}$$

$$= 1 - 0.2143$$

$$= 0.7857$$

$$\therefore\ r \simeq 0.79$$

અહીં r ની કિંમત 1 ની નજીક છે એટલે કે તે ઘનિષ્ઠ ધન સહસંબંધ દર્શાવે છે. તેથી કહી શકાય કે, બંને મૅનેજરે નોકરી કરતા વ્યક્તિઓને આપેલા ક્રમો વચ્ચે વધુ સામ્યતા જોવા મળે છે.

ઉદાહરણ 17 : જુદી જુદી બ્રાંડના મોબાઇલ ફોનનું વેચાણ કરતી એક વિવિધ શાખા ધરાવતી દુકાનના માલિકે મોબાઇલ ફોનના એક નિષ્ણાત વ્યક્તિને 10 જુદા-જુદા મોબાઇલ ફોનના કૅમેરા અને તેની બૅટરીની કાર્યક્ષમતા ચકાસી તેમને ક્રમ આપવાનું કાર્ય સોંપ્યું અને તે નિષ્ણાત વ્યક્તિ દ્વારા જુદી જુદી બ્રાંડના મોબાઇલને મળેલ ક્રમ નીચે મુજબ છે :

મોબાઇલ ફોન	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
કૅમેરા માટે ક્રમ	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
બૅટરી માટે ક્રમ	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

આ માહિતી પરથી મોબાઇલના કૅમેરા અને બૅટરીની કાર્યક્ષમતા વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

અહીં $n = 10$ અને ક્રમ આપેલા જ છે. તેથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવા નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીએ.

મોબાઇલ ફોન	**કૅમેરા માટે R_x**	**બૅટરી માટે R_y**	$d = R_x - R_y$	d^2
A	3	6	–3	9
B	5	4	1	1
C	8	9	–1	1
D	4	8	–4	16
E	7	1	6	36
F	10	2	8	64
G	2	3	–1	1
H	1	10	–9	81
I	6	5	1	1
J	9	7	2	4
કુલ	**–**	**–**	**0**	**214**

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(214)}{10(100-1)}$$

$$= 1 - \frac{1284}{990}$$

$$= 1 - 1.2970$$

$$= -0.2970$$

$$\therefore \ r \simeq -0.30$$

અહીં r ની કિંમત ઋણ અને 0ની નજીક છે તેથી તે આંશિક ઋણ સહસંબંધ દર્શાવે છે. તેથી કહી શકાય કે નિષ્ણાત વ્યક્તિના મત મુજબ તેણે ચકાસેલા મોબાઇલ ફોનમાં કૅમેરો કાર્યક્ષમ હોય, તો તેની બૅટરી ઓછી કાર્યક્ષમ જણાય છે. જ્યારે બૅટરી કાર્યક્ષમ હોય તો કૅમેરો ઓછો કાર્યક્ષમ જણાય છે.

ઉદાહરણ 18 : એક શાળાના પ્રિન્સિપાલે શાળાના બાળકોના ગણિતના જ્ઞાન અને ઇતિહાસ વિષયની વીગતો યાદ રાખવા વચ્ચેનો સમય જાણવા પાંચ વિદ્યાર્થીઓનો એક નિદર્શ લઈ તેમની બંને વિષયોની એક કસોટી યોજી. આ પાંચ વિદ્યાર્થીઓના ગણિત અને ઇતિહાસ વિષયમાં મેળવેલા ગુણને આધારે તેઓને નીચે મુજબ ક્રમ આપવામાં આવે છે. આ માહિતી પરથી બંને વિષયોના ક્રમો વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

વિદ્યાર્થી	A	B	C	D	E
ગણિતમાં ક્રમ	2	5	1	4	3
ઇતિહાસમાં ક્રમ	4	1	5	2	3

અહીં, $n = 5$ અને ક્રમ આપેલા છે જ તેથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવા માટે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીએ.

વિદ્યાર્થી	R_x	R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
A	2	4	–2	4
B	5	1	4	16
C	1	5	–4	16
D	4	2	2	4
E	3	3	0	0
કુલ	**–**	**–**	**0**	**40**

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6(40)}{5(25-1)}$$

$$= 1 - \frac{240}{120}$$

$$= 1 - 2$$

$$\therefore \; r = -1$$

આમ, પાંચ વિદ્યાર્થીઓનો ગણિત અને ઇતિહાસમાં દેખાવ તદ્દન ઊલ્ટા ક્રમમાં હોવાથી આપણને $r = -1$ મળે છે.

ઉદાહરણ 19 : એક સંગીત-સ્પર્ધામાં પાંચ ગાયકો A, B, C, D અને E ને તેમની ગીત ગાવાની કુશળતાને આધારે બે નિર્ણાયકો મૂલવે છે. પાંચ ગાયકોને નીચે મુજબ ક્રમ આપેલા છે.

ક્રમ	1	2	3	4	5
નિર્ણાયક 1	C	A	B	E	D
નિર્ણાયક 2	B	C	D	A	E

આ પરથી બંને નિર્ણાયકોના નિર્ણયો વચ્ચેની સામ્યતા ક્રમાંક સહસંબંધાંક પરથી શોધો.

અહીં $n=5$, પાંચ ગાયકોને મળેલા ક્રમ અનુસાર આપેલી માહિતીને ફરીથી નીચે મુજબ ગોઠવીએ.

ગાયક	A	B	C	D	E
નિર્ણાયક 1 એ આપેલ ક્રમ	2	3	1	5	4
નિર્ણાયક 2 એ આપેલ ક્રમ	4	1	2	3	5

ગાયક	R_x	R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
A	2	4	–2	4
B	3	1	2	4
C	1	2	–1	1
D	5	3	2	4
E	4	5	–1	1
કુલ	**–**	**–**	**0**	**14**

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(14)}{5(25-1)}$$

$$= 1 - \frac{84}{120}$$

$$= 1 - 0.7$$

$$\therefore \ r = 0.3$$

અહીં r ની કિંમત ધન અને 0 ની નજીક છે તેથી તે આંશિક ધન સહસંબંધ દર્શાવે છે. તેથી કહી શકાય કે બંને નિર્ણાયકોમાં સહમતી ઓછી છે એટલે કે તેમના અભિપ્રાય પ્રમાણમાં જુદા પડે છે.

ઉદાહરણ 20 : એક શાળાના આંકડાશાસ્ત્ર અને નામાપદ્ધતિ વિષયના શિક્ષકોએ તેમની શાળાના વિદ્યાર્થીઓમાંથી આઠ વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લઈ બંને વિષયોમાં વિદ્યાર્થીઓની આવડત વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા નીચે મુજબ માહિતી એકઠી કરી.

વિદ્યાર્થી	1	2	3	4	5	6	7	8
આંકડાશાસ્ત્રમાં ગુણ x	78	36	98	25	75	82	90	62
નામાપદ્ધતિમાં ગુણ y	84	51	91	60	68	62	86	55

આ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીઓને મળતા આંકડાશાસ્ત્રના ગુણ અને નામાપદ્ધતિના ગુણ વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક ગણો.

અહીં $n = 8$ અને આપણને સંખ્યાત્મક ચલ (બંને વિષયોમાં ગુણ) આપેલા છે. તેથી સૌપ્રથમ બંને વિષયોમાં ગુણ અનુસાર ક્રમ આપવા પડશે.

આંકડાશાસ્ત્રના વિષયમાં રોલ નંબર 3 ધરાવતાં વિદ્યાર્થીના સૌથી વધુ 98 ગુણ છે તેથી તેને ક્રમ 1 આપવામાં આવે છે. ત્યાર બાદ રોલ નંબર 7 ધરાવતા વિદ્યાર્થીના ગુણ 90 છે તેથી તેને ક્રમ 2 એમ એક પછી એક વિદ્યાર્થીઓને ક્રમ આપવામાં આવે છે. તે જ રીતે નામાપદ્ધતિના ગુણને આધારે પણ વિદ્યાર્થીઓને ક્રમ આપવામાં આવે છે.

હવે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીએ.

રોલ	આંકડાશાસ્ત્ર		નામા પદ્ધતિ		$d = R_x - R_y$	d^2
નંબર	ગુણ	ક્રમ R_x	ગુણ	ક્રમ R_y		
1	78	4	84	3	1	1
2	36	7	51	8	–1	1
3	98	1	91	1	0	0
4	25	8	60	6	2	4
5	75	5	68	4	1	1
6	82	3	62	5	–2	4
7	90	2	86	2	0	0
8	62	6	55	7	–1	1
કુલ	–	–	–	–	**0**	**12**

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(12)}{8(64-1)}$$

$$= 1 - \frac{72}{504}$$

$$= 1 - 0.1429$$

$$= 0.8571$$

$$\therefore \ r \simeq 0.86$$

અહીં r ની કિંમત 1 ની વધુ નજીક છે તેથી કહી શકાય કે, આંકડાશાસ્ત્ર અને નામાપદ્ધતિના ગુણ પરથી મેળવેલા ક્રમો વચ્ચે ગાઢ ધન સહસંબંધ છે. એટલે કે સામાન્ય રીતે કોઈ વિદ્યાર્થીના આંકડાશાસ્ત્રમાં વધુ (ઓછા) ગુણ હોય, તો તે વિદ્યાર્થીના નામાપદ્ધતિમાં પણ ગુણ વધુ (ઓછા) હોય છે. (હંમેશાં દરેક વિદ્યાર્થીની બાબતમાં આવું ન પણ હોય)

અવલોકનોમાં ગાંઠ (જ્યારે અવલોકનો સમાન હોય) :

જ્યારે ચલ X અથવા Y અથવા બંને ચલનાં અવલોકનોની અમુક કિંમતો સમાન હોય ત્યારે તેવા અવલોકનોને ક્રમ આપવા માટે સમસ્યા ઉદ્ભવે છે. જ્યારે X અથવા Y ચલનાં અવલોકનો સમાન હોય તો તેને આપણે 'ગાંઠ' (Tie) ઉદ્ભવે છે તેમ કહીશું. આવા કિસ્સામાં પુનરાવર્તન પામતા બધાં અવલોકનોને તેમને અનુરૂપ ક્રમોની સરેરાશ (મધ્યક) જેટલો ક્રમ ગાંઠમાંના દરેક અવલોકનને આપવામાં આવે છે અને ત્યાર બાદ આવતાં અવલોકનોને સરેરાશ ક્રમમાં ઉપયોગમાં લીધેલા છેલ્લા ક્રમ પછીનો ક્રમ આપવામાં આવે છે. આપણે એક ઉદાહરણ લઈ આ બાબત સમજીએ. ધારો કે એક ચલનાં અવલોકનો 37, 60, 42, 78, 42, 50, 66, 42, 60 છે. અહીં સૌથી મોટું અવલોકન 78 છે તેથી તેને આપણે ક્રમ 1 આપીશું. ત્યાર બાદનું અવલોકન 66 છે તેથી તેને ક્રમ 2 આપીશું. હવે ત્યાર બાદનું અવલોકન 60 છે. પણ તે બે વખત પુનરાવર્તન પામે છે. તેથી તેઓને અનુરૂપ ક્રમો (ક્રમ 3 અને ક્રમ 4)ની સરેરાશ $\frac{3+4}{2} = 3.5$ એ દરેક અવલોકન (60)ને ક્રમ તરીકે આપવામાં આવે છે. હવે પછીનું અવલોકન 50 છે, તેને ક્રમ 5 આપીશું, કેમકે ક્રમ 3 અને ક્રમ 4નો અગાઉ ઉપયોગ થઈ ચૂક્યો છે. હવે પછીનું અવલોકન 42 છે અને તે ત્રણ વખત પુનરાવર્તન પામે છે. તેથી તેમના અનુરૂપ ક્રમો (ક્રમ 6, ક્રમ 7, ક્રમ 8)ની સરેરાશ $\frac{6+7+8}{3} = 7$ એ દરેક અવલોકન (42)ને ક્રમ તરીકે આપવામાં આવે છે. હવે આખરમાં અવલોકન 37 છે. તેને ક્રમ 9 આપવામાં આવે છે, કેમકે ક્રમ 6, ક્રમ 7 અને ક્રમ 8નો અગાઉ ઉપયોગ થઈ ચૂક્યો છે. આ જ રીતે બીજા ચલની કિંમતોને પણ ક્રમ આપવામાં આવે છે.

હવે જ્યારે ગાંઠ પડે (અમુક અવલોકનો સમાન હોય) ત્યારે ક્રમાંક સહસંબંધાંકની ગણતરી કરવાના સૂત્રમાં સુધારો કરવાની જરૂર પડે છે. એવો સુધારો 'CF' (Correction Factor) થી કરવાનો હોય છે.

'CF' શોધવા માટે પ્રત્યેક પુનરાવર્તન પામતાં અવલોકનના સમૂહ દીઠ $\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$ પદ Σd^2 માં ઉમેરવામાં આવે છે. જ્યાં, m = અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે તે સંખ્યા. આવા પુનરાવર્તન પામતા પ્રત્યેક અવલોકન સમૂહ માટે મેળવેલ $\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$ પદોનો સરવાળો એટલે 'CF'. એટલે કે $CF = \Sigma\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$

આમ, જ્યારે ક્રમ આપવામાં ગાંઠ ઉદ્ભવે (એટલે કે અમુક અવલોકનો સમાન હોય) ત્યારે ક્રમાંક સહસંબંધાંકનું સૂત્ર નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$r = 1 - \frac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$$

જ્યાં, સુધારો (CF) = $\Sigma\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$

અને m = અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે તે સંખ્યા.

ઉદાહરણ 21 : ઉદાહરણ 5માં આપેલી વીગત પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક ગણો.

આપણે અગાઉ સમજ્યા તે મુજબ બંને ચલોને ક્રમ આપીશું. અહીં Y ચલમાં અવલોકન 75 બે વખત પુનરાવર્તન પામે છે. સૌથી મોટું અવલોકન 79 છે. તેને ક્રમ 1 આપી ત્યાર બાદ આવતા અવલોકન 75ને ક્રમ 2 અને ક્રમ 3ની સરેરાશ એટલે કે $\frac{2+3}{2} = 2.5$ ક્રમ તે દરેકને આપીશું.

હવે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીએ.

	વાચન (કલાક) x	X નો ક્રમ R_x	ગુણ y	Y નો ક્રમ R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
	25	7	65	7	0	0
	38	2	75	2.5	–0.5	0.25
	30	5	68	6	–1	1
	28	6	70	5	1	1
	34	4	72	4	0	0
	40	1	79	1	0	0
	36	3	75	2.5	0.5	0.25
કુલ	–	–	–	–	**0**	**2.5**

'CF' મેળવવાની ગણતરી નીચે મુજબ છે.

પુનરાવર્તિત અવલોકન	અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે તે સંખ્યા (m)	$\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$
75	2	$\left(\frac{2^3-2}{12}\right) = 0.5$
–	–	$\mathbf{CF} = \Sigma\left(\frac{m^3-m}{12}\right) = \mathbf{0.5}$

$$r = 1 - \frac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6[2.5+0.5]}{7(49-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(3)}{336}$$

$$= 1 - \frac{18}{336}$$

$$= 1 - 0.0536$$

$$= 0.9464$$

$$\therefore\ r \simeq 0.95$$

નોંધ : અહીં જોઈ શકાય છે કે સ્પિયરમૅનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીતથી મેળવેલી r ની કિંમત એ ઉદાહરણ 5માં મેળવેલા કાર્લ પિયર્સનની રીતથી મેળવેલી r ની કિંમતથી જુદી પડે છે.

ઉદાહરણ 22 : વિદ્યાર્થીઓની અર્થશાસ્ત્ર વિષયની સમજ અને તેમની નૃત્ય કલા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે આઠ વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લઈ તેમની કસોટી કરવામાં આવે છે અને તેમને મળતાં ગુણ નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી બંને વિષયોના ગુણ વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંકની ગણતરી કરો.

અર્થશાસ્ત્રમાં ગુણ	60	30	10	20	30	50	30	40
નૃત્ય કલામાં ગુણ	80	20	60	40	12	28	20	15

અર્થશાસ્ત્રમાં ગુણને આધારે ક્રમ આપીએ તો સૌથી વધુ ગુણ 60 છે તેથી તેનો ક્રમ 1, 50 ગુણનો ક્રમ 2, 40 ગુણનો ક્રમ 3 થશે. હવે 30 ગુણ આવે છે જે ત્રણ વખત પુનરાવર્તન પામે છે. તેથી તેઓને અનુરૂપ ક્રમો (ક્રમ 4, ક્રમ 5, ક્રમ 6)ની સરેરાશ $\frac{4+5+6}{3} = 5$ એ દરેક ગુણ 30નો ક્રમ થશે. હવે 30 ગુણ બાદ 20 ગુણ આવે છે, તેથી તેનો ક્રમ 7 થશે અને છેલ્લે સૌથી ઓછા ગુણ 10 નો ક્રમ 8 થશે. તે જ રીતે નૃત્ય કલામાં ગુણને આધારે ક્રમ આપીએ તો સૌથી વધુ ગુણ 80 છે તેથી તેનો ક્રમ 1 થશે. 60 ગુણનો ક્રમ 2, 40 ગુણનો ક્રમ 3, 28 ગુણનો ક્રમ 4 થશે. હવે ગુણ 20 બે વખત પુનરાવર્તન પામે છે તેથી તેને અનુરૂપ ક્રમો (ક્રમ 5, ક્રમ 6)ની સરેરાશ $\frac{5+6}{2} = 5.5$ એ દરેક ગુણ 20નો ક્રમ થશે. હવે 15 ગુણ આવે છે તેથી તેનો ક્રમ 7 અને છેલ્લે સૌથી ઓછા ગુણ 12નો ક્રમ 8 થશે.

હવે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીએ.

	અર્થશાસ્ત્રમાં ગુણ x	X નો ક્રમ R_x	નૃત્ય કલામાં ગુણ y	Y નો ક્રમ R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
	60	1	80	1	0	0
	30	5	20	5.5	–0.5	0.25
	10	8	60	2	6	36
	20	7	40	3	4	16
	30	5	12	8	–3	9
	50	2	28	4	–2	4
	30	5	20	5.5	–0.5	0.25
	40	3	15	7	–4	16
કુલ	–	–	–	–	**0**	**81.5**

'CF' મેળવવાની ગણતરી નીચે મુજબ છે.

પુનરાવર્તિત અવલોકન	અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે તે સંખ્યા (m)	$\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$
30	3	$\left(\frac{3^3-3}{12}\right)=2$
20	2	$\left(\frac{2^3-2}{12}\right)=0.5$
–	–	**CF = 2.5**

$$r = 1-\frac{6\left[\Sigma d^2+CF\right]}{n(n^2-1)}$$

$$= 1-\frac{6[81.5+2.5]}{8(64-1)}$$

$$= 1-\frac{6(84)}{504}$$

$$= 1-\frac{504}{504}$$

$$= 1-1$$

$$= 0$$

અહીં $r = 0$ મળે છે તેથી કહી શકાય કે અર્થશાસ્ત્ર અને નૃત્યકલાના ગુણના ક્રમો વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધનો અભાવ છે. એટલે કે આપેલા સમૂહના વિદ્યાર્થીઓના અર્થશાસ્ત્ર અને નૃત્ય કલામાં પરીક્ષા-દેખાવ (performance) સુરેખ સંબંધની દૃષ્ટિએ સ્વતંત્ર છે.

ઉદાહરણ 23 : એક ઇલેક્ટ્રિક સાધનોનું માર્કેટિંગ કરતી એજન્સી LED ફિટીંગ્સના વેચાણ અને નફા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા જુદી જુદી ઇલેક્ટ્રિક કંપનીના વેચાણ અને નફાની માહિતી નીચે મુજબ મેળવે છે. આ માહિતી પરથી વેચાણ (હજાર એકમોમાં) અને નફા (લાખ ₹માં) વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક ગણો.

વેચાણ (હજાર એકમો)	25	58	215	72	58	25	90	162
નફો (લાખ ₹)	65	140	500	115	65	65	220	340

અહીં $n = 8$ અને વેચાણના અવલોકન 25 અને 58 બંને બે વખત પુનરાવર્તન પામે છે અને નફાનું અવલોકન 65 ત્રણ વખત પુનરાવર્તન પામે છે. તેથી આગળના ઉદાહરણમાં ચર્ચા કરી તે મુજબ અહીં વેચાણ અને નફાની કિંમતોને આધારે ક્રમ આપી આપણે નીચે મુજબ કોષ્ટક બનાવીશું.

	વેચાણ (હજાર એકમો) x	X નો ક્રમ R_x	નફો (લાખ ₹) y	Y નો ક્રમ R_y	$d = R_x - R_y$	d^2
	25	7.5	65	7	0.5	0.25
	58	5.5	140	4	1.5	2.25
	215	1	500	1	0	0
	72	4	115	5	–1	1
	58	5.5	65	7	–1.5	2.25
	25	7.5	65	7	0.5	0.25
	90	3	220	3	0	0
	162	2	340	2	0	0
કુલ	–	–	–	–	**0**	**6**

'CF' મેળવવાની ગણતરી નીચે મુજબ છે.

પુનરાવર્તિત અવલોકન	અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે તે સંખ્યા (m)	$\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$
25	2	$\left(\frac{2^3-2}{12}\right) = 0.5$
58	2	$\left(\frac{2^3-2}{12}\right) = 0.5$
65	3	$\left(\frac{3^3-3}{12}\right) = 2$
–	–	**CF = 3**

$$r = 1 - \frac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6[6+3]}{8(64-1)}$$

$$= 1 - \frac{54}{504}$$

$$= 1 - 0.1071$$

$$= 0.8929$$

$$\therefore \; r \simeq 0.89$$

અહીં r ની કિંમત 1 ની વધુ નજીક છે. તેથી કહી શકાય કે વેચાણ અને નફાના ક્રમો વચ્ચે ગાઢ ધન સહસંબંધ છે.

નોંધ :

(1) ક્રમાંકો R_x અને R_y ના તફાવતોનો સરવાળો હંમેશાં શૂન્ય થાય છે. એટલે કે, $\Sigma d = \Sigma(R_x - R_y) = 0$

(2) જો બે ચલો x અને y ની પ્રત્યેક જોડ માટે $R_x = R_y$ થાય તો d ની દરેક કિંમત શૂન્ય થાય અને તેથી $\Sigma d^2 = 0$ થાય. આ સંજોગોમાં r ની કિંમત 1 થશે.

(3) જો x અને y ચલોના ક્રમાંકો એકબીજાથી તદ્દન ઊલટા ક્રમમાં હોય (જુઓ ઉદાહરણ 18)તો $r = -1$ થાય.

પ્રવૃત્તિ

તમારા વર્ગના યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલા કોઈ પણ દસ વિદ્યાર્થીઓએ આંકડાશાસ્ત્ર અને અર્થશાસ્ત્ર વિષયોમાં પ્રથમ કસોટીમાં મેળવેલા ગુણની માહિતી એકઠી કરો અને તે પરથી બંને વિષયોના ગુણ વચ્ચે કાર્લ પિયર્સન અને સ્પિયરમૅનની રીતે સહસંબંધાંક શોધો અને સરખાવો.

ઉદાહરણ **24 : એક ટ્રાન્સપોર્ટ કંપની માટે ડ્રાઇવરનો વાહન ચલાવવાનો અનુભવ (વર્ષમાં) અને તેના દ્વારા થયેલા અકસ્માતની સંખ્યા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા આઠ ડ્રાઇવરના વાહન ચલાવવાના અનુભવ (વર્ષ) અને અકસ્માતની સંખ્યાને આપેલા ક્રમો પરથી ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 126 થાય છે. આ પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો :**

અહીં $n = 8$ અને ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 126 છે. એટલે કે $\Sigma d^2 = 126$ છે.

$$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6(126)}{8(64-1)}$$

$$= 1 - \frac{756}{504}$$

$$= 1 - 1.5$$

$$r = -0.5$$

ઉદાહરણ **25 : એક જિલ્લાના જુદી જુદી શાળામાંથી પસંદ પામેલા દસ વિદ્યાર્થીઓને તેમની રમતગમત પ્રવૃત્તિ અને સામાન્ય જ્ઞાનના કૌશલ્ય પરથી ક્રમ આપવામાં આવે છે અને તે પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક 0.2 મળે છે. પાછળથી એવું માલૂમ પડ્યું કે એક વિદ્યાર્થીના આ બે ગુણધર્મોના ક્રમાંકોનો તફાવત 2 ને બદલે 3 લેવાઈ ગયો હતો. ક્રમાંક સહસંબંધાંકની સુધારેલી કિંમત શોધો.**

અહીં, $n = 10$

d ની ખોટી કિંમત $= 3$

d ની સાચી કિંમત $= 2$

હવે, $r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$

$\therefore \quad 0.2 = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{10(100-1)}$

$\therefore \quad 0.2 = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{990}$

$\therefore \quad \frac{6\Sigma d^2}{990} = 1 - 0.2$

$\therefore \quad \frac{6\Sigma d^2}{990} = 0.8$

$\therefore \quad \Sigma d^2 = \frac{0.8 \times 990}{6}$

$\therefore \quad \Sigma d^2 = 132$

એક તફાવત 2 ને બદલે 3 લેવાયો હતો તેથી Σd^2 ની સુધારેલી કિંમત નીચે મુજબ મળે.

સુધારેલ $\Sigma d^2 = 132 -$ (ખોટો $d)^2 +$ (સાચો $d)^2$

$= 132 - 3^2 + 2^2$

$= 132 - 9 + 4$

$= 127$

$\therefore$ ક્રમાંક સહસંબંધાંકની સુધારેલી કિંમત નીચે મુજબ મળે :

$r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$

$= 1 - \frac{6(127)}{10(100-1)}$

$= 1 - \frac{762}{990}$

$= 1 - 0.7697$

$= 0.2303$

$\therefore r \simeq 0.23$

સ્પિયરમૅનના ક્રમાંક સહસંબંધની રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ

ગુણ :

(1) આ રીત સમજવામાં સરળ છે.

(2) ક્રમાંક સહસંબંધાંકની ગણતરી કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંકની ગણતરી કરતા સહેલી છે.

(3) ગુણાત્મક માહિતી આપેલી હોય ત્યારે સહસંબંધાંક શોધવાની આ એક જ રીત છે.

(4) જ્યારે માહિતીમાં પ્રસાર વધુ હોય અથવા અંતિમ અવલોકનો માહિતીમાં હોય ત્યારે કાર્લ પિયર્સનની રીતને બદલે સ્પિયરમૅનની રીતના ઉપયોગને અગ્રિમતા આપવામાં આવે છે.

મર્યાદાઓ :

(1) અવલોકનોની મૂળ કિંમતોને બદલે તેના ક્રમનો ઉપયોગ થતો હોવાથી હંમેશાં કેટલીક માહિતીનો લોપ થાય છે. તેથી આ રીતે મળતા સહસંબંધાંકની કિંમત કાર્લ પિયર્સનની રીતથી મળતા સહસંબંધાંક જેટલી ચોક્કસ હોતી નથી.

(2) જ્યારે અવલોકનોની સંખ્યા વધુ હોય અને ક્રમ ન આપેલા હોય તો ક્રમ આપવાનું કાર્ય કંટાળાજનક બને છે.

(3) માહિતી દ્વિચલ આવૃત્તિ-વિતરણ સ્વરૂપમાં હોય ત્યારે આ રીતનો ઉપયોગ કરવામાં આવતો નથી. (આ પરિસ્થિતિમાં કાર્લ પિયર્સનની રીતનો ઉપયોગ થાય છે અને ઉચ્ચતર કક્ષાએ તમે તેનો અભ્યાસ કરશો.)

સ્વાધ્યાય 2.3

1. બે બજાર વિશ્લેષકો, છેલ્લાં કેટલાંક સમયમાં કરેલા વિકાસને આધારે છ કંપનીઓને નીચે મુજબ ક્રમ આપે છે.

કંપની	A	B	C	D	E	F
વિશ્લેષક 1 દ્વારા ક્રમ	5	2	1	4	3	6
વિશ્લેષક 2 દ્વારા ક્રમ	6	4	3	2	1	5

આ પરથી બંને વિશ્લેષકોના મૂલ્યાંકન વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધો.

2. એક નિદર્શમાં આપેલા જુદા જુદા નવ ગામોએ 'સ્વચ્છતા અભિયાન' અને 'બેટી બચાવો અભિયાન' અંગે કરેલાં કાર્યોને આધારે એક અધિકારી તેમને નીચે મુજબ ક્રમ આપે છે.

ગામ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
સ્વચ્છતા અભિયાન માટે ક્રમ	4	8	7	1	9	5	6	2	3
બેટી બચાવો અભિયાન માટે ક્રમ	6	8	5	1	9	7	3	4	2

આ પરથી બંને અભિયાનની કામગીરી વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

3. એક રાજ્યની ટાઉન પ્લાનિંગ સમિતિએ કરેલા સર્વે પરથી નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

શહેર	A	B	C	D	E
વસ્તી (લાખ)	57	45	14	18	8
વસ્તી વધારાનો દર (દર હજારે)	13	20	10	15	5

આ માહિતી પરથી શહેરોની વસ્તી અને વસ્તી-વધારાના દર વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

4. એક સાયન્સ કોલેજના વિદ્યાર્થીઓમાંથી લીધેલા દસ વિદ્યાર્થીઓના એક નિદર્શ પરથી નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

વિદ્યાર્થી	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ગણિતમાં ગુણ	39	65	62	90	82	75	25	98	36	78
આંકડાશાસ્ત્રમાં ગુણ	47	53	58	86	62	68	60	91	51	84

આ પરથી વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગણિત અને આંકડાશાસ્ત્રનાની ક્ષમતા વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

5. નીચે આપેલી પતિ અને પત્નીની ઊંચાઈ વિશેની માહિતી પરથી તેમની ઊંચાઈ વચ્ચેનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક ગણો.

પતિની ઊંચાઈ (સેમી)	156	153	185	157	163	191	162
પત્નીની ઊંચાઈ (સેમી)	154	148	162	157	162	170	154

6. એક ઈન્ટરવ્યૂમાં ઉમેદવારોના દેખાવ (Performance)ને આધારે બે ઈન્ટરવ્યૂ લેનારા વ્યક્તિઓએ તેઓને નીચે મુજબ ગુણ આપે છે. તે પરથી ઈન્ટરવ્યૂ લેનાર બે વ્યક્તિના મૂલ્યાંકન વચ્ચેનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

ઉમેદવાર	A	B	C	D	E	F	G	H
પ્રથમ વ્યક્તિ દ્વારા અપાયેલ ગુણ	28	44	10	28	47	35	19	40
બીજી વ્યક્તિ દ્વારા અપાયેલ ગુણ	32	45	25	32	41	32	24	38

7. બે નિર્ણાયકો, દસ સ્પર્ધકોને એક સૌંદર્ય-સ્પર્ધામાં ક્રમ આપે છે અને તે પરથી તેમના ક્રમાંકોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 214 મળે છે. આ પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

8. દસ વિદ્યાર્થીઓએ કોઈ બે વિષયોમાં મેળવેલા ગુણ પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક 0.5 મળે છે. પાછળથી એવી ખબર પડે છે કે, એક વિદ્યાર્થીના ક્રમનો તફાવત 7 હોવો જોઈતો હતો, પરંતુ ભૂલથી તે 3 લેવાયો હતો. તો ક્રમાંક સહસંબંધાંકની સુધારેલી કિંમત શોધો.

*

2.9 સહસંબંધાંકના અર્થઘટનમાં રાખવી પડતી સાવચેતી

સહસંબંધાંક એ બે ચલ વચ્ચેના સુરેખ સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતા દર્શાવતું માપ છે. rનું ખોટું અર્થઘટન બે ચલ વચ્ચેના સંબંધ અંગે આપણને ગેરમાર્ગે દોરી શકે છે. સાવચેતીરૂપે નીચે આપેલાં કેટલાક મુદ્દાને ધ્યાનમાં રાખવા જોઈએ :

(1) સહસંબંધાંક એ ફક્ત સુરેખ સંબંધની ઘનિષ્ઠતા દર્શાવતું માપ છે. પણ તેનાથી બે ચલ વચ્ચે કાર્યકારણનો સંબંધ છે કે નહિ તે અંગે કોઈ જ ખ્યાલ આવતો નથી અને તેના પરથી બે ચલોમાંથી કયો ચલ સાપેક્ષ (કાર્યસ્વરૂપ) અને કયો ચલ નિરપેક્ષ (કારણ સ્વરૂપ) છે તે વિશે કોઈ જાણકારી મળતી નથી.

અનુભવથી સહસંબંધાંકનું યોગ્ય અર્થઘટન કરી શકાય છે અને તે માટે તપાસકર્તાને અભ્યાસ હેઠળના બે ચલ વિશે અને તેને અસર કરતાં પરિબળો વિશે પૂરતું જ્ઞાન હોવું જરૂરી છે. એવાં ઘણાં ઉદાહરણો આપી શકાય જેમાં બે ચલો વચ્ચે કોઈ અર્થપૂર્ણ સંબંધ ન હોય પરંતુ બે ચલો પરનાં અવલોકનો પરથી ગણેલા સહસંબંધાંક $|r|$ની કિંમત 1ની ખૂબ નજીક હોય. સામાન્ય રીતે ચલો વચ્ચેના કાર્યકારણ સંબંધની પૂર્વ જાણકારી વગર જ્યારે r ની ગણતરી કરવામાં આવે ત્યારે આમ બને છે. દા.ત., એક શહેરમાં માર્ગ-અકસ્માતમાં મૃત્યુ પામતી વ્યક્તિઓની સંખ્યા અને તે જ ગાળામાં તુવેરદાળના ભાવની માહિતી પરથી તેમની વચ્ચે r ની કિંમત 1ની નજીક (ગાઢ સહસંબંધ) મળી શકે, પરંતુ અહીં તેમની વચ્ચે કોઈ અર્થપૂર્ણ સંબંધ હોઈ શકે નહિ. તેથી આ પ્રકારના સહસંબંધને અર્થહીન (nonsense) અથવા ભ્રામક (spurious) સહસંબંધ કહે છે.

(2) ક્યારેક બે ચલો વચ્ચે સહસંબંધ ન હોય છતાં બીજાં કારણોની હાજરીને લીધે $|r|$ ની કિંમત 1ની નજીક મળી શકે છે. દા.ત., ચોખા અને શેરડીની ઊપજ વચ્ચે ગાઢ ધન સહસંબંધ જોવા મળી શકે છે, પરંતુ આ બે ચલો વચ્ચે કોઈ પ્રત્યક્ષ સંબંધ નથી. આમ થવાનું કારણ બંને ચલો પર બાહ્ય પરિબળો જેવાં કે હવામાન, સિંચાઈપદ્ધતિ, ખાતર વગેરેનો સાનુકૂળ પ્રભાવ હોઈ શકે.

(3) જ્યારે $r = 0$ હોય ત્યારે આપણે ફક્ત એટલું જ કહી શકીએ કે બે ચલો વચ્ચે સુરેખ સહસંબંધ નથી. બીજી રીતે કહીએ તો સુરેખ સંબંધનો અભાવ છે. પણ બે ચલો વચ્ચે સુરેખ સિવાયનો (દ્વિઘાતી કે બીજા કોઈ પ્રકારનો) સહસંબંધ હોઈ શકે છે. દા.ત.

x	–4	–3	–2	–1	1	2	3	4
y	16	9	4	1	1	4	9	16

ઉપરના ઉદાહરણ માટે કાર્લ પિયર્સનની રીતે r શોધવામાં આવે તો તેની કિંમત શૂન્ય મળે છે. તેથી આપણે એવું અર્થઘટન કરી શકીએ કે બે ચલ વચ્ચે સહસંબંધ નથી. પરંતુ આ ખોટું અર્થઘટન છે. ચલ X અને Yની કિંમતો જોતાં માલૂમ પડે છે કે તેમની વચ્ચે $Y = X^2$ સંબંધ જોવા મળે છે. આ સંબંધ સુરેખ નહિ પણ દ્વિઘાતી છે. આમ, બંને ચલ વચ્ચે સંપૂર્ણ દ્વિઘાતી સંબંધ હોવા છતાં આપણને $r = 0$ મળે છે. તેથી ઉપરના ઉદાહરણ પરથી આપણે સમજી શકીએ છીએ કે $r = 0$ એ ફક્ત સુરેખ સહસંબંધ નથી એવું દર્શાવે છે. પણ બીજા કોઈ પ્રકારનો સહસંબંધ હોઈ શકે છે.

(4) જે વિસ્તાર, વર્ગ કે સમયગાળા દરમિયાન માહિતી મેળવી હોય તે માટે જ સહસંબંધાંકની કિંમતનું અર્થઘટન સીમિત રાખવું યોગ્ય ગણાય. તે અર્થઘટનને આવા વિસ્તાર કે વર્ગની અથવા સમયગાળાની બહારની માહિતી માટે યોગ્ય ચકાસણી કર્યા સિવાય લાગુ પાડવું જોઈએ નહિ અન્યથા ગેરસમજ ઊભી થઈ શકે છે.

દા.ત., એક કંપની કોઈ નવી વસ્તુનું ઉત્પાદન શરૂ કરે છે અને તેના વેચાણ માટે જાહેરાત કરે તો શરૂઆતમાં સામાન્ય રીતે વસ્તુની ગુણવત્તા સારી હોય તો જાહેરાત-ખર્ચ વધવાની સાથે તે વસ્તુનું વેચાણ પણ વધે છે. પરંતુ એક સમય મર્યાદા બાદ વધુ જાહેરાત-ખર્ચ કરવામાં આવે તોપણ તેના વેચાણમાં ખાસ ફેરફાર થતો નથી. શરૂઆતના ઉત્પાદન સમયે જાહેરાત-ખર્ચ અને વેચાણ વચ્ચે સામાન્ય રીતે ગાઢ ધન સહસંબંધ જોવા મળે પરંતુ અમુક સમય પછી આમ ન પણ બને. એટલે જાહેરાત-ખર્ચ અને વેચાણ વચ્ચે ગાઢ ધન સહસંબંધ છે તે અર્થઘટન તેના સમયગાળાની બહારની માહિતી માટે લાગુ પાડી શકાય નહિ.

કેટલાંક ઉદાહરણો :

ઉદાહરણ 26 : નીચે આપેલ પરિણામો પરથી સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

$$Cov\,(x, y) : s_x^2 = 3:5 \quad \text{અને} \quad s_x : s_y = 1:2$$

અહીં, $Cov\,(x, y) : s_x^2 = 3:5 \qquad \therefore \quad \dfrac{Cov(x, y)}{s_x^2} = \dfrac{3}{5}$

અને $s_x : s_y = 1:2 \qquad \therefore \quad \dfrac{s_x}{s_y} = \dfrac{1}{2}$

હવે, $$r = \frac{Cov(x, y)}{s_x\ s_y} = \frac{Cov(x, y)}{s_x^2} \times \frac{s_x}{s_y}$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{10}$$

$$\therefore \quad r = 0.3$$

ઉદાહરણ 27 : એક દ્વિચલ માહિતી પરથી નીચેનાં પરિણામો મળે છે.

$n = 10$, $\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 72$, $s_x = 3$ અને $\Sigma(y-\bar{y})^2 = 160$ આ પરથી સહસંબંધાંક શોધો.

આપેલી વીગત પરથી સૌપ્રથમ આપણે s_y શોધીશું.

$$s_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{160}{10}} = \sqrt{16} = 4$$

હવે, નીચેના સૂત્રમાં જરૂરી કિંમતો મૂકતાં,

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n s_x s_y}$$

$$= \frac{72}{10(3)(4)}$$

$$= \frac{72}{120}$$

$$\therefore \quad r = 0.6$$

ઉદાહરણ 28 : એક શિક્ષણવિદ્દે મોબાઇલ ફોનમાં સોશિયલ મીડિયાના વપરાશ અને પરિક્ષાના પરિણામ વચ્ચે સંબંધ જાણવા એક પ્રયોગ કર્યો. તે માટે પસંદ થયેલા દસ વિદ્યાર્થીઓના સમૂહમાં તેઓએ છેલ્લા અઠવાડિયામાં મોબાઇલ ફોનમાં 'સોશિયલ મીડિયા' પર ગાળેલો સમય x (કલાકમાં) અને પછી તરત લેવાયેલ 50 ગુણની પરીક્ષામાં મેળવેલ ગુણ y પરથી નીચેનાં પરિણામો મળે છે.

$\Sigma x = 133$, $\Sigma y = 220$, $\Sigma x^2 = 2344$, $\Sigma y^2 = 6500$ અને $\Sigma xy = 3500$

પાછળથી માલૂમ પડ્યું એ X અને Y નાં અવલોકનોની એક જોડ $(15, 25)$ ને બદલે $(13, 20)$ લેવાઈ હતી. આ પરથી X અને Y વચ્ચે સહસંબંધાંકની સાચી કિંમત શોધો.

અહીં $n = 10$, $\Sigma x = 133$, $\Sigma y = 220$, $\Sigma x^2 = 2344$, $\Sigma y^2 = 6500$ અને $\Sigma xy = 3500$

ખોટી જોડ : $(13, 20)$

સાચી જોડ : $(15, 25)$

હવે ઉપર્યુક્ત માપોની સુધારેલી કિંમતો નીચે મુજબ મેળવીએ.

$\Sigma x = 133 - 13 + 15 = 135$

$\Sigma y = 220 - 20 + 25 = 225$

$\Sigma x^2 = 2344 - (13)^2 + (15)^2 = 2344 - 169 + 225 = 2400$

$\Sigma y^2 = 6500 - (20)^2 + (25)^2 = 6500 - 400 + 625 = 6725$

$\Sigma xy = 3500 - (13 \times 20) + (15 \times 25) = 3500 - 260 + 375 = 3615$

હવે, આ સુધારેલી કિંમતો નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{10(3615) - (135)(225)}{\sqrt{10(2400) - (135)^2} \cdot \sqrt{10(6725) - (225)^2}}$$

$$= \frac{36150-30375}{\sqrt{24000-18225}\cdot\sqrt{67250-50625}}$$

$$= \frac{5775}{\sqrt{5775}\cdot\sqrt{16625}}$$

$$= \frac{5775}{\sqrt{96009375}}$$

$$= \frac{5775}{9798.4374}$$

$$= 0.5894$$

$\therefore \quad r \simeq 0.59$

ઉદાહરણ 29 : (1) જો બે ચલ X અને Y વચ્ચે સહસંબંધાંક 0.5 હોય, તો નીચેનાની કિંમત શોધો. (i) $r\ (x, -y)$ (ii) $r\ (-x, y)$ (iii) $r\ (-x, -y)$

અહીં $r\ (x, y) = 0.5$

સહસંબંધાંકના ગુણધર્મ (નં. 5) પરથી,

(i) $r(x, -y) = -r(x, y) = -0.5$

(ii) $r(-x, y) = -r(x, y) = -0.5$

(iii) $r(-x, -y) = r(x, y) = 0.5$

(2) જો $r(x, y) = 0.8$ હોય તો નીચેના માટે $r(u, v)$ શોધો.

(i) $u = x-10$ અને $v = y+10$

(ii) $u = \frac{x-5}{3}$ અને $v = 2y+7$

(iii) $u = \frac{2x-3}{10}$ અને $v = \frac{10-y}{100}$

(iv) $u = \frac{5-x}{2}$ અને $v = \frac{5+y}{2}$

(v) $u = \frac{20-x}{3}$ અને $v = \frac{20-y}{7}$

અહીં, $r(x, y) = 0.8$

સહસંબંધાંકના ગુણધર્મ (4 અને 5)પરથી, u અને v ને વ્યાખ્યાયિત કરતાં $r(u, v)$ ની કિંમત X અને Y ના સહગુણકોના ચિહ્નો પર આધારિત રહેશે. એટલે કે $r(u, v) = r(x, y)$ અથવા $-r(x, y)$ થશે.

(i) $r\ (x-10, y+10) = r(u, v) = 0.8$

(ii) $r\left(\frac{x-5}{3}, 2y+7\right) = r(u, v) = 0.8$

(iii) $r\left(\frac{2x-3}{10}, \frac{10-y}{100}\right) = r(u, v) = -0.8$

(iv) $r\left(\frac{5-x}{2}, \frac{5+y}{2}\right) = r(u, v) = -0.8$

(v) $r\left(\frac{20-x}{3}, \frac{20-y}{7}\right) = r(u, v) = 0.8$

ઉદાહરણ 30 : MBA ઇંન્સ્ટિટ્યૂટના વિદ્યાર્થીઓના એક જૂથ દ્વારા શાળા કક્ષાએ અંતિમ વર્ષમાં અને સ્નાતક કક્ષાના અંતિમ વર્ષમાં પરીક્ષાના પરિણામો વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટેના પ્રોજેક્ટ દરમિયાન તેમણે લીધેલા નિદર્શના દસ વિદ્યાર્થીઓએ ધોરણ 12 માં મેળવેલા ગુણની ટકાવારી (x) અને સ્નાતક કક્ષાના અંતિમ વર્ષમાં મેળવેલા ગુણની ટકાવારી (y)ની માહિતી પરથી નીચેનાં પરિણામો મળે છે.

$$n = 10, \Sigma(x-65) = -2,\ \Sigma(y-60) = 2,\ \Sigma(x-65)^2 = 176,\ \Sigma(y-60)^2 = 140, \Sigma(x-65)(y-60) = 141$$

આ પરથી ધોરણ 12 અને સ્નાતક કક્ષાના અંતિમ વર્ષના ગુણની ટકાવારી વચ્ચે સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

અહીં $\Sigma(x-65) = -2 \neq 0 \qquad \therefore A = 65$

$\Sigma(y-60) = 2 \neq 0 \qquad \therefore B = 60$

(અહીં વિચલનોનો સરવાળો શૂન્ય નથી, તેથી $65 \neq \bar{x}$ અને $60 \neq \bar{y}$)

હવે, $u = (x-65)$ અને $v = (y-60)$ વ્યાખ્યાયિત કરીએ.

તેથી, $\Sigma(x-65) = \Sigma u = -2,\ \Sigma(y-60) = \Sigma v = 2$

$\Sigma(x-65)^2 = \Sigma u^2 = 176,\ \Sigma(y-60)^2 = \Sigma v^2 = 140$

$\Sigma(x-65)(y-60) = \Sigma uv = 141$

ઉપર્યુક્ત કિંમતોને નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{10(141) - (-2)(2)}{\sqrt{10(176) - (-2)^2} \cdot \sqrt{10(140) - (2)^2}}$$

$$= \frac{1414}{\sqrt{1756} \cdot \sqrt{1396}}$$

$$= \frac{1414}{\sqrt{2451376}}$$

$$= \frac{1414}{1565.6871}$$

$$= 0.9031$$

$$\therefore \quad r \simeq 0.90$$

ઉદાહરણ 31 : કિશોરવયનાં બાળકોની ઉંમર વર્ષમાં (X) અને તેમની પ્રોટીનની દૈનિક જરૂરિયાત ગ્રામમાં (Y) વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા રાજ્યના આરોગ્ય વિભાગે મેળવેલા દસ બાળકોના નિદર્શમાંથી નીચેની માહિતી મળે છે.

$$\Sigma x = 140,\ \Sigma y = 150,\ \Sigma(x-10)^2 = 180,\quad \Sigma(y-15)^2 = 215, \Sigma(x-10)(y-15) = 60$$

આ પરથી X અને Y વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

અહીં, $\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{140}{10} = 14,\quad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{150}{10} = 15$

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે ચલ x માટે વિચલનો મધ્યક $(\overline{x}=14)$ માંથી લીધેલા નથી. તેથી ઉકેલ મેળવવા માટે $u=(x-A)=(x-10)$ અને $v=(y-B)=(y-15)$ વ્યાખ્યાયિત કરવું અનુકૂળ રહેશે.

આપણને નીચેની માહિતી આપેલી છે.

$\Sigma(x-10)^2=\Sigma u^2=180,\ \Sigma(y-15)^2=\Sigma v^2=215,\ \Sigma(x-10)(y-15)=\Sigma uv=60$

હવે, r ના યોગ્ય સૂત્રનો ઉપયોગ કરવા સૌપ્રથમ Σu અને Σv ની કિંમતો આપણે શોધવી પડશે.

$\Sigma u=\Sigma(x-10)=\Sigma x-\Sigma 10=\Sigma x-n(10)=140-10(10)=140-100=40$

$\Sigma v=\Sigma(y-15)=\Sigma y-\Sigma 15=\Sigma y-n(15)=150-10(15)=150-150=0$

$\left\{\because\ \Sigma k=\underbrace{k+k+k+\text{..........}+k}_{n \text{ વખત}}=nk\ \text{ જ્યાં, } k \text{ અચળ}\right\}$

ઉપર્યુક્ત કિંમતોને નીચેના સૂત્રમાં મૂકતાં,

$$r = \frac{n\Sigma uv-(\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2-(\Sigma u)^2}\cdot\sqrt{n\Sigma v^2-(\Sigma v)^2}}$$

$$= \frac{10(60)-(40)(0)}{\sqrt{10(180)-(40)^2}\cdot\sqrt{10(215)-(0)^2}}$$

$$= \frac{600-0}{\sqrt{1800-1600}\cdot\sqrt{2150-0}}$$

$$= \frac{600}{\sqrt{200}\cdot\sqrt{2150}}$$

$$= \frac{600}{\sqrt{430000}}$$

$$= \frac{600}{655.7439}$$

$$= 0.9150$$

$$\therefore\quad r \simeq 0.92$$

ઉદાહરણ 32 : બે જુદા જુદા વિષયોમાં વિદ્યાર્થીઓની ક્ષમતા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે એક શાળાના બાળકોમાંથી સાત વિદ્યાર્થીઓનો એક નિદર્શ લેવામાં આવે છે. આ સાત વિદ્યાર્થીઓએ બે વિષયોમાં મેળવેલાં ગુણની માહિતી પરથી તેમને આપેલા ક્રમોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 25.5 મળે છે. વધુમાં એ પણ જાણવા મળે છે કે, કોઈ એક વિષયમાં બે વિદ્યાર્થીઓના ગુણ સરખા છે અને બાકી બધા જ ગુણ જુદા-જુદા છે. આ પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

અહીં $n = 7$ અને $\Sigma d^2=25.5$

બે વિદ્યાર્થીઓના એક વિષયમાં ગુણ સરખા છે. $(\therefore\ m=2)$ તેથી આપણે કહી શકીએ કે, અવલોકનોને ક્રમ આપવામાં ગાંઠ પડે છે અને તેથી CF મેળવવા માટે $\left(\frac{m^3-m}{12}\right)$ પદ એક જ વખત લેવું પડશે.

સુધારો $CF = \left(\frac{m^3-m}{12}\right) = \left(\frac{2^3-2}{12}\right) = 0.5$

$$r = 1-\frac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$$

$$= 1-\frac{6[25.5+0.5]}{7(49-1)}$$

$$= 1-\frac{6(26)}{336}$$

$$= 1-\frac{156}{336}$$

$$= 1 - 0.4643$$

$$= 0.5357$$

$$\therefore \quad r \simeq 0.54$$

સારાંશ

- **સહસંબંધ :** બે ચલની કિંમતોમાં એક સાથે ફેરફારો થતા હોય અને તેમની વચ્ચે પ્રત્યક્ષ કે પરોક્ષ કાર્યકારણનો સંબંધ હોય.
- **સુરેખ સહસંબંધ :** બે ચલની કિંમતોમાં થતો ફેરફાર અચળ પ્રમાણમાં હોય એટલે કે બે સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોની જોડ દર્શાવતાં બિંદુઓ એક સુરેખા પર હોય.
- **ધન સહસંબંધ :** સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એક જ દિશામાં હોય.
- **ઋણ સહસંબંધ :** સહસંબંધિત ચલોની કિંમતોમાં થતા ફેરફારો એકબીજાની વિરુદ્ધ દિશામાં હોય.
- **સહસંબંધાંક :** બે ચલ વચ્ચેના સુરેખ સહસંબંધની ઘનિષ્ઠતાનું સંખ્યાત્મક માપ r એટલે સહસંબંધાંક.
- **વિકીર્ણ આકૃતિ :** સુરેખ સહસંબંધ અને તેનો પ્રકાર (ધન કે ઋણ) જાણવાની એક સરળ પદ્ધતિ.
- **કાર્લ પિયર્સનની રીત :** બધા જ પ્રાપ્તાંકોનો ઉપયોગ કરી બે ચલ વચ્ચેના સુરેખ સહસંબંધનો પ્રકાર અને ઘનિષ્ઠતાનું માપ (r) શોધવા માટેની શ્રેષ્ઠ રીત.
- **સ્પિયરમૅનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીત :** ગુણાત્મક ચલો વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધવા માટેની રીત. જ્યારે સંખ્યાત્મક ચલોમાં પ્રસાર વધુ હોય ત્યારે સહસંબંધાંક મેળવવાની ઇચ્છનીય રીત.
- બે ચલ વચ્ચે કાર્યકારણનો સંબંધ પ્રસ્થાપિત (સાબિત) ન કરી શકાય પરંતુ તે છે એ ધારણા હેઠળ સહસંબંધનો અભ્યાસ કરવામાં આવે છે.
- $r = 0$ એ ફક્ત સુરેખ સહસંબંધનો અભાવ છે તેમ સૂચવે છે, પરંતુ અન્ય પ્રકારનો સહસંબંધ હોઈ શકે છે.

પ્રકરણની એક ઝલક

સહસંબંધ

- **સુરેખ સહસંબંધ**
  - **રીતો**
    - **વિકીર્ણ આકૃતિની રીત** — સહસંબંધનો ફક્ત પ્રકાર જ જાણી શકાય
    - **કાર્લ પિયર્સનની રીત** — સહસંબંધાંક શોધવાની શ્રેષ્ઠ રીત
    - **સ્પિયરમૅનની રીત** — ગુણાત્મક ચલો વચ્ચેનો સહસંબંધાંક શોધવાની રીત
- **વક્રીય સહસંબંધ**

સૂત્રોની યાદી

કાર્લ પિયર્સનની રીત :

સહસંબંધાંક $= r$

(1) $r = \dfrac{\text{સહ. વિચરણ}}{(X\text{નું પ્ર. વિ.})(Y\text{નું પ્ર. વિ.})} = \dfrac{Cov(X,Y)}{s_x \cdot s_y}$

જ્યાં, $Cov(X,Y) = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{n} = \dfrac{\Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n}$

$s_x = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$ અને $s_y = \sqrt{\dfrac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n}}$

(2) $r = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2} \cdot \sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$

(3) $r = \dfrac{n\Sigma xy - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n\Sigma x^2 - (\Sigma x)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma y^2 - (\Sigma y)^2}}$

(4) $r = \dfrac{n\Sigma uv - (\Sigma u)(\Sigma v)}{\sqrt{n\Sigma u^2 - (\Sigma u)^2} \cdot \sqrt{n\Sigma v^2 - (\Sigma v)^2}}$ જ્યાં, $u = x - A$ અથવા $\dfrac{x-A}{c_x}$, $v = y - B$ અથવા $\dfrac{y-B}{c_y}$

$$\left.\begin{array}{l} (5)\ r = \dfrac{\Sigma(x-\bar{x})\ (y-\bar{y})}{n \cdot s_x \cdot s_y} \\[2ex] (6)\ r = \dfrac{\Sigma xy - n\bar{x}\,\bar{y}}{n \cdot s_x \cdot s_y} \end{array}\right\}$$ ખાસ કરીને ટૂંકા દાખલા માટે

સ્પિયરમૅનની ક્રમાંક સહસંબંધની રીત :

(7) $r = 1 - \dfrac{6\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$ જ્યારે અવલોકનો પુનરાવર્તિત ન થતા હોય.

(8) $r = 1 - \dfrac{6\left[\Sigma d^2 + CF\right]}{n(n^2-1)}$ જ્યારે અમુક અવલોકનો પુનરાવર્તિત થતા હોય.

જ્યાં $d = x$ નો ક્રમ $-$ y નો ક્રમ $= R_x - R_y$

$CF =$ સુધારો $= \Sigma\left(\dfrac{m^3-m}{12}\right)$

$m =$ કોઈ અવલોકન જેટલી વખત પુનરાવર્તન પામે તે સંખ્યા

સ્વાધ્યાય 2

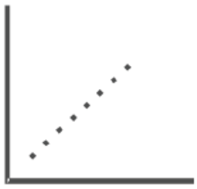
વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. સહસંબંધના સંદર્ભમાં જે આકૃતિમાં જોડયુક્ત બિંદુઓ (x,y) દર્શાવવામાં આવે તે આકૃતિને તમે શું કહેશો ?

(a) સ્તંભાલેખ (b) વર્તુળ આકૃતિ (c) વિકીર્ણ આકૃતિ (d) આવૃત્તિ વક્ર

2. જો X અને Y વચ્ચે નીચે મુજબ વિકીર્ણ આકૃતિ મળે તો બે ચલ કેવો સહસંબંધ ધરાવે છે ?



(a) સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ (b) આંશિક ધન સહસંબંધ

(c) સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ (d) આંશિક ઋણ સહસંબંધ

3. જો X અને Y વચ્ચે નીચે મુજબ વિકીર્ણ આકૃતિ મળે તો તે બે ચલ કેવો સહસંબંધ ધરાવે છે ?

(a) સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ (b) આંશિક ધન સહસંબંધ

(c) સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ (d) આંશિક ઋણ સહસંબંધ

4. વિકીર્ણ આકૃતિમાં બધાં જ બિંદુઓ એક જ સુરેખા પર આવેલાં હોય તો r ની કિંમત શું થાય ?

(a) 0 (b) 1 અથવા -1 (c) 0.5 (d) -0.5

5. સહસંબંધાંક rનો વિસ્તાર શું છે ?

(a) $-1 < r < 1$ (b) 0 થી 1 (c) $-1 \le r \le 1$ (d) -1 થી 0

6. જો ચલ 'વજન'નો એકમ કિગ્રા અને ચલ 'ઊંચાઈ'નો એકમ સેમી હોય, તો તેમની વચ્ચેના સહસંબંધાંકનો એકમ વિશે શું કહી શકાય ?

(a) કિગ્રા (b) સેમી (c) કિમી (d) એકમ ન હોય

7. જો બે ચલ વચ્ચે અચળ પ્રમાણમાં એકબીજાથી વિરુદ્ધ દિશામાં ફેરફાર થતા હોય, તો તે બે ચલ વચ્ચે કેવા પ્રકારનો સહસંબંધ મળે ?

(a) આંશિક ધન સહસંબંધ (b) સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ

(c) સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ (d) આંશિક ઋણ સહસંબંધ

8. કાર્લ પિયર્સનના સહસંબંધાંક ગણવાના સૂત્રમાં અંશ શું દર્શાવે છે ?

(a) X અને Y ના વિચરણોનો ગુણાકાર (b) X અને Y નું સહવિચરણ

(c) X નું વિચરણ (d) Y નું વિચરણ

9. નીચેના પૈકી r ની કઈ કિંમત શક્ય નથી ?

(a) 0.99 (b) -1.07 (c) -0.85 (d) 0

10. જો $u = \frac{x-A}{c_x}$ અને $v = \frac{y-B}{c_y}$, $c_x > 0, c_y > 0$ હોય તો નીચેના પૈકી કયુ વિધાન સાચું છે ?

(a) $r(x, y) \neq r(u, v)$ (b) $r(x, y) > r(u, v)$ (c) $r(x, y) = r(u, v)$ (d) $r(x, y) < r(u, v)$

11. જો $r(x, y) = 0.7$ હોય, તો $r(x+0.2, y+0.2)$ ની કિંમત કેટલી થાય ?

(a) 0.7 (b) 0.9 (c) 1.1 (d) –0.7

12. જો $r(-x, y) = -0.5$ હોય, તો $r(x, -y)$ ની કિંમત કેટલી થાય ?

(a) 0.5 (b) –0.5 (c) 1 (d) 0

13. જો $\Sigma d^2 = 0$ હોય, તો ક્રમાંક સહસંબંધાંકની કિંમત કેટલી થાય ?

(a) 0 (b) –1 (c) 1 (d) 0.5

14. ક્રમાંક સહસંબંધની રીતમાં જો પ્રત્યેક અવલોકનની જોડ માટે પ્રચલિત સંકેતોમાં $R_x = R_y$ હોય, તો r ની કિંમત શું થાય ?

(a) 0 (b) –1 (c) 1 (d) 0.1

15. ક્રમાંક સહસંબંધની રીતમાં બે ચલના ક્રમાંકોના તફાવતોનો સરવાળો શું થાય ?

(a) 0 (b) –1 (c) 1 (d) કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા

16. ક્રમાંક સહસંબંધની રીતમાં જો બે ચલોના ક્રમ એકબીજાથી ઊલટા ક્રમમાં હોય, તો r ની કિંમત શું થાય ?

(a) $r = 0$ (b) $r = -1$ (c) $r = 1$ (d) $r = 0.1$

17. ક્રમાંક સહસંબંધમાં પુનરાવર્તન પામતા પ્રત્યેક અવલોકન માટે પ્રચલિત સંકેતોમાં Σd^2 માં કયું પદ ઉમેરવામાં આવે છે ?

(a) $\frac{m^2-1}{12}$ (b) $\frac{m^3-m}{12}$ (c) $\frac{6m^3-m}{12}$ (d) $n(n^2-1)$

18. જ્યારે કોઈ વસ્તુના ભાવ સ્થિર હોય ત્યારે તે વસ્તુના વેચાયેલા એકમોની સંખ્યા અને તેનાથી થતી આવક વચ્ચે કેવો સહસંબંધ થશે ?

(a) સંપૂર્ણ ધન (b) આંશિક ધન (c) સંપૂર્ણ ઋણ (d) આંશિક ઋણ

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. સહસંબંધની વ્યાખ્યા આપો.

2. સહસંબંધાંકની વ્યાખ્યા આપો.

નીચે આપેલ પ્રશ્ન 3થી 6માં ચલની આપેલી જોડ વચ્ચે ધન સહસંબંધ છે કે ઋણ સહસંબંધ છે તે જણાવો.

3. જીવન વીમાની કોઈ એક યોજના હેઠળ વીમો ઉતરાવતી વખતે પુખ્ત વયની વ્યક્તિની ઉંમર અને જીવન વીમાનું પ્રીમિયમ

4. કોઈ દેશમાં બહુસ્વીકૃત વસ્તુનું છેલ્લાં પાંચ વર્ષનું વાર્ષિક વેચાણ અને તેનાથી થતો નફો

5. કોઈ દેશમાં સામાન્ય વ્યક્તિની આવક સ્થિર હોય ત્યારે ફુગાવાનો દર અને તે દેશના સામાન્ય વ્યક્તિની ખરીદશક્તિ

6. સમુદ્ર સપાટીથી સ્થળની ઊંચાઈ અને હવામાં ઑક્સિજનનું પ્રમાણ

7. ક્રૂડ ઑઇલની વાર્ષિક આયાત અને તે જ સમયગાળામાં થતાં લગ્નોની સંખ્યા વચ્ચેના સહસંબંધ વિશે શું કહી શકાય ?

8. X અને Y વચ્ચે સહસંબંધાંક 0.4 છે. હવે X ના પ્રત્યેક અવલોકનમાં 5 ઉમેરવામાં આવે અને Y ના પ્રત્યેક અવલોકનોમાંથી 10 બાદ કરવામાં આવે તો આ ફેરફાર બાદ સહસંબંધાંક શું થશે ?

9. વિકીર્ણ આકૃતિની મુખ્ય મર્યાદા શું છે ?

10. જો $n\left(n^2-1\right)$ની કિંમત Σd^2ની કિંમત કરતાં છ ગણી હોય, તો rની કિંમત શું થાય ?

11. જો સહવિચરણનું મૂલ્ય ઋણ હોય, તો સહસંબંધાંક rનું ચિહ્ન શું થાય ?

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ધન સહસંબંધનો અર્થ ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

2. ઋણ સહસંબંધનો અર્થ ઉદાહરણ સહિત સમજાવો.

3. કાર્લ પિયર્સનની રીતની ધારણાઓ લખો.

4. વિકીર્ણ આકૃતિની વ્યાખ્યા આપો.

5. અર્થહીન સહસંબંધ એટલે શું ?

6. કાર્ય-કારણનો સંબંધ સમજાવો.

7. સમજાવો : સંપૂર્ણ ધન સહસંબંધ

8. સમજાવો : સંપૂર્ણ ઋણ સહસંબંધ

9. ક્રમાંક સહસંબંધની જરૂર ક્યારે પડે છે ?

10. કયા સંજોગોમાં કાર્લ પિયર્સનની રીતે અને ક્રમાંક સહસંબંધની રીતે મેળવેલા સહસંબંધાંક સરખા થાય છે ?

11. જો $Cov(x, y)=120,\ s_x=12,\ s_y=15$ હોય તો rની કિંમત શોધો.

12. જો $\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})=-65,\ s_x=3,\ s_y=4$ અને $n=10$ હોય, તો rની કિંમત શોધો.

13. અવલોકનોની 10 જોડ માટે $\Sigma d^2=120$ હોય, તો ક્રમાંક સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. વિકીર્ણ આકૃતિની રીત સમજાવો.
2. વિકીર્ણ આકૃતિની રીતના ગુણ અને મર્યાદા જણાવો.
3. સહસંબંધાંકના ગુણધર્મો લખો.
4. કાર્લ પિયર્સનની રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ જણાવો.
5. $r=1$, $r=-1$ અને $r=0$નું અર્થઘટન કરો.
6. સ્પિયરમૅનના ક્રમાંક સહસંબંધની રીત સમજાવો.
7. સ્પિયરમૅનના ક્રમાંક સહસંબંધની રીતના ગુણ અને મર્યાદાઓ જણાવો.
8. આંશિક સહસંબંધનું અર્થઘટન તમે કેવી રીતે કરશો ?
9. સહસંબંધાંકના અર્થઘટનમાં રાખવી પડતી સાવચેતી જણાવો.
10. બે ચલ વરસાદ મિમિમાં (X) અને પાકની ઊપજ ક્વિન્ટલ/હેક્ટર (Y) વિશે નીચેની માહિતી મળે છે.

    $n=10,\ \bar{x}=120,\ \bar{y}=150,\ s_x=30,\ s_y=40$ અને $\Sigma xy=189000$ આ પરથી સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.
11. અવલોકનોની 9 જોડ માટે નીચેની માહિતી મળે છે.

    $\Sigma x=51,\ \Sigma y=72, \Sigma x^2=315,\ \Sigma y^2=582,\ \Sigma xy=408$ આ પરથી સહસંબંધાંક શોધો.
12. એક નૃત્ય સ્પર્ધામાં આઠ સ્પર્ધકોને બે નિર્ણાયકોએ આપેલા ક્રમ પરથી નીચેની માહિતી મળે છે.

    $\Sigma\left(R_x-R_y\right)^2=126$

    જ્યાં, R_x અને R_y એ બે નિર્ણાયકો દ્વારા સ્પર્ધકોને મળેલા ક્રમ દર્શાવે છે. આ પરથી સ્પિયરમૅનનો ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.
13. નોકરી માટે આવેલા પાંચ ઉમેદવારોને ઇન્ટરવ્યુને આધારે બે નિષ્ણાતોએ આપેલા ક્રમ (3, 5), (5, 4), (1, 2), (2, 3) અને (4, 1) છે. આ માહિતી પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

વિભાગ E

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. એક રોગચાળાના સમય દરમિયાન નાક પર પહેરવાના માસ્કની વેચાણ કિંમત અને તેની માંગ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા એકઠી કરાયેલી માહિતી નીચે મુજબ છે.

ભાવ (₹)	38	45	40	42	35
માંગ (એકમો)	103	92	97	98	100

આ પરથી માસ્કના ભાવ અને ભાવ વચ્ચે કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક શોધો.

2. એક અનુસ્નાતક કક્ષાના અભ્યાસમાં વિદ્યાર્થીઓના માનવ સંસાધન સંચાલન અને વ્યક્તિત્વ વિકાસ જેવા વિષયોમાં તેમની ક્ષમતા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા પાંચ વિદ્યાર્થીઓનો નિદર્શ લઈ નીચે મુજબ માહિતી મેળવવામાં આવે છે.

વિદ્યાર્થી	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
માનવસંશાધન સંચાલનમાં ગુણ	45	25	40	20	45
વ્યક્તિત્વ વિકાસમાં ગુણ	47	23	17	35	48

આ માહિતી પરથી બંને વિષયોના ગુણ વચ્ચે કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક ગણો.

3. એક વિક્રેતા વિવિધ બ્રાંડની લિપસ્ટિકને તેમની લોકપ્રિયતા અનુસાર શૉકેસમાં પ્રદર્શિત કરવા ઇચ્છે છે. તેથી જુદી જુદી બ્રાંડની લિપસ્ટિકને ક્રમ આપવા બે નિષ્ણાત પ્રેયલ અને નિશીને આમંત્રિત કરે છે.

લિપસ્ટિક	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
પ્રેયલે આપેલ ક્રમ	5	6	7	1	3	2	4
નિશીએ આપેલ ક્રમ	5	7	6	2	1	4	3

આ પરથી બંને નિષ્ણાતોએ આપેલા નિર્ણયો વચ્ચેની સામ્યતા જાણવા ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

4. અમદાવાદ શહેરમાં ચ્હાના ભાવ અને કૉફીના ભાવ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે એક વેપારી છેલ્લા છ મહિનામાં ચ્હા અને કૉફીના ભાવો વિશે નીચે મુજબ માહિતી મેળવે છે.

ચ્હાનો કિગ્રા દીઠ ભાવ (₹)	340	370	450	320	300	360
કૉફીનો 100 ગ્રામ દીઠ ભાવ (₹)	190	215	200	180	163	175

આ પરથી ચ્હા અને કૉફીના ભાવો વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

5. એક વિદેશી ફળની સ્થાનિક બજારમાં ખૂબજ અનિશ્ચિત માંગ જોવા મળે છે. ફળોનો એક વિક્રેતા તે વિદેશી ફળનો ભાવ અને પુરવઠા વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા નીચે મુજબ છેલ્લા દસ મહિનાના સરેરાશ ભાવ અને પુરવઠાની વીગતો મેળવે છે.

સરેરાશ એકમ દીઠ ભાવ (₹)	65	68	43	38	77	48	35	30	25	50
પુરવઠો (સો એકમો)	52	53	42	60	45	41	37	38	25	27

આ માહિતી પરથી સરેરાશ ભાવ અને પુરવઠા વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

6. ઓછા સમયના અંતરે વિદ્યાર્થીઓની પરીક્ષા લેવામાં આવે તો પરિણામો વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા એક શિક્ષકે છેલ્લા બે અઠવાડિયામાં લીધેલી બે પરીક્ષાના પરિણામ પરથી સાત વિદ્યાર્થીઓના નીચે મુજબ ક્રમ મળે છે.

વિદ્યાર્થી	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
પ્રથમ પરીક્ષામાં ક્રમ	5	1	2	3.5	3.5	7	6
દ્વિતીય પરીક્ષામાં ક્રમ	7	1	4	6	5	3	2

આ પરથી બંને પરીક્ષાના પરિણામો વચ્ચે સામ્યતા જાણવા ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

વિભાગ F

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. આઠ જિલ્લામાં ખાતરનો વપરાશ (ટનમાં) અને ઉત્પાદકતા (ટનમાં)ની માહિતી નીચે આપેલ છે.

ખાતર (ટન)	15	18	20	25	29	35	40	38
ઉત્પાદકતા (ટન)	85	93	95	105	115	130	140	145

કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક શોધો.

2. એક મોટા શહેરનાં છ બાળકોએ વિડિયો ગેમ્સ રમવામાં ગાળેલા અઠવાડિક સરેરાશ કલાકો અને એક પરીક્ષામાં તેમણે મેળવેલા મૂલ્યાંકન ગુણ (Grade Point)ની નીચેની માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક શોધો.

વિડિયો ગેમ્સ રમવામાં ગાળેલા અઠવાડિક સરેરાશ કલાકો	43	47	45	50	40	51
પરીક્ષામાં મેળવેલા મૂલ્યાંકન ગુણ	5.2	4.9	5.0	4.7	5.4	4.3

3. નીચેની માહિતી પરથી વસ્તીની ગીચતા (ચોરસ કિમીદીઠ) અને મૃત્યુદર (દર હજારે) વચ્ચે કાર્લ પિયર્સનની રીતે સહસંબંધાંક શોધો.

શહેર	A	B	C	D	E	F	G
ગીચતા (ચો કિમી દીઠ)	750	600	350	500	200	700	850
મૃત્યુદર (દર હજારે)	30	20	15	20	10	25	50

4. ઈલેક્ટ્રિક પંખાનું ઉત્પાદન કરતી કંપનીઓની જાહેરાત-ખર્ચ અને વેચાણ વચ્ચેના સંબંધનો અભ્યાસ કરવા નીચેની માહિતી એકઠી કરવામાં આવી છે. આ માહિતી પરથી કંપનીઓના જાહેરાત-ખર્ચ અને વેચાણ વચ્ચેનો સહસંબંધાંક કાર્લ પિયર્સનની રીતે મેળવો.

કંપની	A	B	C	D	E	F
જાહેરાત ખર્ચ (લાખ ₹)	140	120	80	100	80	180
ઈલેક્ટ્રિક પંખાનું વેચાણ (કરોડ ₹)	35	45	15	40	20	50

5. એક ડૉક્ટર તેમના એક સંશોધન કાર્ય માટે માતાના વજન અને જન્મ સમયે તેના બાળકના વજન વચ્ચેનો સંબધ જાણવા એક વિસ્તારના અમુક મેટરનીટી હોમમાંથી સાત માતા અને તેમના બાળકના વજન વિશે માહિતી મેળવે છે.

માતાનું વજન (કિગ્રા)	59	72	66	64	77	66	60
બાળકનું વજન (કિગ્રા)	2.5	3.4	3.1	2.7	2.8	2.3	3.0

આ માહિતી પરથી માતા અને બાળકના વજન વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

6. અમદાવાદમાં દિવસનું મહત્તમ તાપમાન અને આઇસક્રીમના વેચાણ વચ્ચેનો સંબંધ જાણવા માટે નીચેની માહિતી મેળવવામાં આવી છે.

મહત્તમ તાપમાન (સેલ્સિયસ)	35	42	40	39	44	40	45	40
આઇસક્રીમનું વેચાણ (કિગ્રા)	600	680	750	630	920	750	900	720

આ પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક ગણો.

7. વિદેશમાં અભ્યાસ કરવા માટે જરૂરી પ્રવેશ પરીક્ષા ઑનલાઇન લેવાય છે. તે ઑનલાઇન પરીક્ષા (જેમાં ખોટા જવાબ પડે તો ઋણ ગુણ મળે તે પદ્ધતિ છે)માં નિદર્શમાં પસંદ થયેલ પાંચ વિદ્યાર્થીઓએ આપસૂઝ આવડત (reasoning ability) અને ઇંગ્લિશ બોલવાની આવડતમાં મેળવેલા ગુણ નીચે મુજબ છે.

વિદ્યાર્થી	A	B	C	D	E
આપસૂઝ આવડતમાં ગુણ	5	5	5	5	5
ઇંગ્લિશ બોલવાની આવડતમાં ગુણ	2	–2	–2	0	2

આ પરથી વિદ્યાર્થીઓની આપસૂઝ આવડત અને ઇંગ્લિશ બોલવાની આવડત વચ્ચે ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.

8. એક નૃત્યની સ્પર્ધામાં બે નૃત્યના ગુરુ, છ નૃત્યકાર A, B, C, D, E અને F ને તેમના નૃત્ય પરથી નીચે મુજબ ક્રમ આપે છે.

ક્રમ	1	2	3	4	5	6
પહેલા ગુરુ દ્વારા	B	F	A	C	D	E
બીજા ગુરુ દ્વારા	F	A	C	B	E	D

આ પરથી બંને ગુરુના મૂલ્યાંકન વચ્ચે સહસંબંધાંક શોધો.

9. બે ચલ ફુગાવો (X) અને વ્યાજદર (Y) માટે નીચેની માહિતી મળે છે.

$$n=50,\ \Sigma x=500,\ \Sigma y=300,\ \Sigma x^2=5450,\ \Sigma y^2=2000,\ \Sigma xy=3090$$

પાછળથી જાણવા મળ્યું કે, અવલોકનની એક જોડ (10, 6) ભૂલથી વધારાની લેવાઈ ગઈ હતી. આ અવલોકનની જોડને માહિતીમાંથી કાઢીને સહસંબંધાંકની કિંમત શોધો.

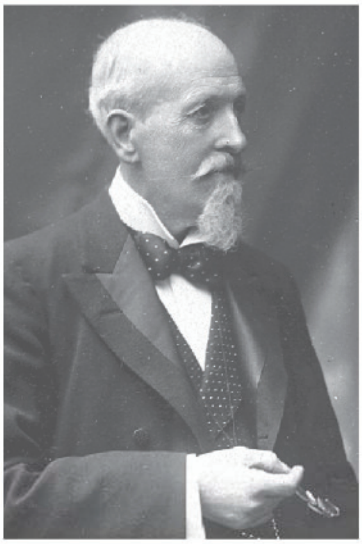
10. દસ પેઢી માટે વેચાણ (X) અને ખર્ચ (Y) વિશે નીચે મુજબ માહિતી મળે છે.

$$\bar{x}=58,\ \bar{y}=14,\ \Sigma(x-65)^2=850,\ \Sigma(y-13)^2=32,\ \Sigma(x-65)(y-13)=0$$

આ પરથી સહસંબંધાંક શોધો.

11. 10 વ્યક્તિઓ દૈનિક કૅલરી X લે છે અને તેમનું વજન Y કિગ્રા છે. તે માહિતી પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક 0.6 મળે છે. પાછળથી ચકાસણી કરતાં માલૂમ પડ્યું કે, એક વ્યક્તિના X અને Y ચલોના ક્રમોની વચ્ચેનો તફાવત 4ને બદલે 2 લેવાયો હતો, તો ક્રમાંક સહસંબંધાંકની સાચી કિંમત શોધો.

12. 10 વ્યક્તિઓ માટે આરોગ્યનો આંક (health index) x અને અપેક્ષિત આયુષ્ય (Life expectancy) y વિશે માહિતી મેળવવામાં આવી છે. ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધવા આ માહિતીને ક્રમ આપવામાં આવે છે અને બધા ક્રમોના તફાવતોના વર્ગોનો સરવાળો 42.5 મળે છે. આરોગ્ય આંક 70 માહિતીમાં ત્રણ વખત અને અપેક્ષિત આયુષ્ય 45 માહિતીમાં બે વખત પુનરાવર્તન પામે છે, તો આ માહિતી પરથી ક્રમાંક સહસંબંધાંક શોધો.



Charles Edward Spearman
(1863 –1945)

Charles Edward Spearman was an English psychologist known for work in statistics, as a pioneer of factor analysis and for Spearman's rank correlation coefficient. He also did seminal work on models for human intelligence, including his theory that disparate cognitive test scores reflect a single General intelligence factor and coining the term g factor.

After serving army for 15 years, he went on to study for a Ph.D. in experimental psychology. Spearman joined University College London and stayed there until he retired in 1931. Initially he was Reader and head of the small psychological laboratory. In 1911 he was promoted to the Grote professorship of the Philosophy of Mind and Logic. His title changed to Professor of Psychology in 1928 when a separate Department of Psychology was created.

His many published papers cover a wide field, but he is especially distinguished by his pioneer work in the application of mathematical methods to the analysis of the human mind and his original studies of correlation in this sphere.