GTQRBF

# ઘન અને ઘનમૂળ

પ્રકરણ

**7**

## 7.1 પ્રાસ્તાવિક

ભારતના મહાન અને મેધાવી ગણિતશાસ્ત્રી એસ. રામાનુજન વિશે એક રસપ્રદ વાર્તા પ્રચલિત છે. એકવાર એક બીજા પ્રખ્યાત ગણિતશાસ્ત્રી પ્રોફેસર જી. એચ. હાર્ડી, એસ. રામાનુજનને મળવા આવેલ હતા. તે જે વાહનમાં (ટેક્સી) આવેલ તે વાહન પર 1729 અંક લખેલ હતો. બંને ગણિતશાસ્ત્રી જ્યારે ચર્ચા કરતા હતા ત્યારે વાત વાતમાં પ્રોફેસર હાર્ડીએ 1729 અંકને 'ડલ અંક' (A Dull Number) તરીકે રજૂ કર્યો. એસ. રામાનુજને પ્રત્યુત્તરમાં કહ્યું કે 1729 એક ખરેખર રસપ્રદ અંક છે. તેમણે નીચે મુજબ ગણતરી કરી જણાવ્યું કે 1729 એક એવો સૌથી નાનામાં નાનો અંક છે કે, જેને જુદી જુદી બે સંખ્યાના ઘનના સરવાળા તરીકે બે રીતે રજૂ કરી શકાય. તેમણે નીચે મુજબ રજૂઆત કરી બતાવી.

$$1729 = 1728 + 1 = 12^3 + 1^3$$

$$1729 = 1000 + 729 = 10^3 + 9^3$$

ત્યારથી 1729 એ હાર્ડી-રામાનુજન સંખ્યા તરીકે હાલ પણ પ્રચલિત છે. જો કે અંક 1729 ની આ ખાસિયત તો રામાનુજનના સમય પહેલાં 300 થી પણ વધારે વર્ષોથી જાણીતી હતી.

**હાર્ડી-રામાનુજન સંખ્યા**

1729 એ નાનામાં નાની હાર્ડી-રામાનુજન સંખ્યા છે. આવી ઘણી બધી સંખ્યાઓ હોય છે. જેમ કે 4104 (2, 16; 9, 15) 13832 (18, 20; 2, 24), કૌંસમાં આપેલ સંખ્યાનો ઉપયોગ કરી ચકાસો.

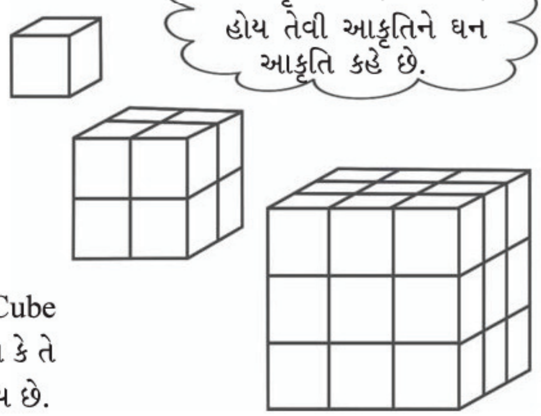
તમને કદાચ પ્રશ્ન થશે કે એસ. રામાનુજનને આ ખબર કેમ પડી ? તેનો જવાબ એ છે કે એસ. રામાનુજનને અંકો બહુ જ ગમતા હતા. તેઓએ પોતાના જીવનમાં અંકો સાથે ઘણા બધા પ્રયોગો કર્યા. તેમણે એવા ઘણા અંકો શોધી કાઢ્યા કે તેને કોઈ બે જુદી જુદી સંખ્યાના વર્ગના સરવાળા સ્વરૂપે રજૂ કરી શકાય અને સાથે સાથે તેને બે જુદી જુદી સંખ્યાના ઘનના સરવાળા સ્વરૂપે રજૂ કરી શકાય.

અહીં ઘન માટે ઘણી રસપ્રદ પેટર્ન છે. ચાલો આપણે ઘન અને ઘનમૂળ તેમજ તેની સાથે જ જોડાયેલ બીજી રસપ્રદ જાણકારી મેળવીએ.

## 7.2 ઘન

આપણે જાણીએ છીએ કે 'ઘન' શબ્દનો ઉપયોગ ભૂમિતિમાં થાય છે. ઘન એ એવી નક્કર આકૃતિ છે કે, જેની તમામ બાજુઓનાં માપ સમાન હોય છે. 1 સેમી બાજુવાળા કેટલા ઘનની મદદથી 2 સેમી બાજુવાળો એક ઘન બને ? 1 સેમી બાજુવાળા કેટલા ઘનની મદદથી 3 સેમી બાજુવાળો એક ઘન બને ? 1, 8, 27, ... સંખ્યાઓ માટે વિચારો.

જે આકૃતિને ત્રણ-પરિમાણ હોય તેવી આકૃતિને ઘન આકૃતિ કહે છે.



આવી સંખ્યાઓને **'પૂર્ણઘન કે ઘન સંખ્યા'** (Perfect Cubes or Cube Numbers) કહે છે. તમે કહી શકો કે તેનું નામ ઘન સંખ્યા કેમ છે ? કેમ કે તે એક જ પ્રકારની સંખ્યાને પોતાની જ સાથે ત્રણ વાર ગુણવાથી પ્રાપ્ત થાય છે.

આપણે નોંધીએ કે $1 = 1 \times 1 \times 1 = 1^3$; $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$; $27 = 3 \times 3 \times 3 = 3^3$. અહીં, $5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ તેથી આપણે કહી શકીએ કે 125 એ એક ઘન સંખ્યા છે.
શું 9 એ ઘન સંખ્યા છે ? ના, કેમ કે $9 = 3 \times 3$ અને એવી કોઈ બીજી પ્રાકૃતિક સંખ્યા નથી કે જેને પોતાની જ સાથે ત્રણ વાર ગુણવાથી સંખ્યા 9 આવે. આ ઉપરાંત આપણે જાણીએ છીએ કે $2 \times 2 \times 2 = 8$ અને $3 \times 3 \times 3 = 27$. તેથી કહી શકાય કે 9 એ ઘન સંખ્યા નથી.
નીચેના કોષ્ટક-1માં 1 થી 10 સંખ્યાના ઘન આપેલ છે.

**કોષ્ટક-1**

729, 1000, 1728 પણ પૂર્ણઘન છે.

| સંખ્યા | ઘન |
|---|---|
| 1 | $1^3 = 1$ |
| 2 | $2^3 = 8$ |
| 3 | $3^3 = 27$ |
| 4 | $4^3 = 64$ |
| 5 | $5^3 =$ .......... |
| 6 | $6^3 =$ .......... |
| 7 | $7^3 =$ .......... |
| 8 | $8^3 =$ .......... |
| 9 | $9^3 =$ .......... |
| 10 | $10^3 =$ .......... |

પૂર્ણ કરો.

1 થી 1000 સુધીની સંખ્યાઓમાં ફક્ત દસ સંખ્યાઓ જ એવી છે કે જે પૂર્ણઘન સંખ્યા છે. (તમે જાતે ચકાસણી કરો). 1 થી 100 સુધીની સંખ્યાઓમાં કેટલી સંખ્યાઓ એવી છે કે જે પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ?
બેકી સંખ્યાઓના ઘનનું નિરીક્ષણ કરો. શું તે બેકી સંખ્યા જ છે ? એકી સંખ્યાઓના ઘન વિશે તમે શું કહી શકો છો ?

નીચે કોષ્ટક-2માં 11 થી 20 સંખ્યાઓના ઘન આપેલ છે.

**કોષ્ટક-2**

| સંખ્યાઓ | ઘન |
|---|---|
| 11 | 1331 |
| 12 | 1728 |
| 13 | 2197 |
| 14 | 2744 |
| 15 | 3375 |
| 16 | 4096 |
| 17 | 4913 |
| 18 | 5832 |
| 19 | 6859 |
| 20 | 8000 |

અમે બેકી, તેથી અમારા ઘન પણ બેકી

અમે એકી, તેથી અમારા ઘન પણ એકી

એવી સંખ્યા વિચારો કે જેનો એકમનો અંક 1 હોય. આવી સંખ્યાનો ઘન શોધો. તમે એવી સંખ્યા કે જેનો એકમનો અંક 1 હોય, તેના ઘન કરવાથી મળતી સંખ્યાના એકમના અંક વિશે શું કહી શકો ? તેવી જ રીતે એકમનો અંક 2, 3, 4... વગેરે હોય તેવી અન્ય સંખ્યાઓ લઈ તેનો ઘન કરવાથી મળતી સંખ્યાના એકમના અંક વિશે વિચારો.

**પ્રયત્ન કરો**

નીચે આપેલી સંખ્યાના ઘન કરવાથી મળતી સંખ્યાનો એકમનો અંક શોધો.

(i) 3331 (ii) 8888 (iii) 149 (iv) 1005

(v) 1024 (vi) 77 (vii) 5022 (viii) 53

### 7.2.1 કેટલીક રસપ્રદ પૅટર્ન (Patterns)

**1. ક્રમિક એકી સંખ્યા ઉમેરવી**

નીચે આપેલી ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળાની પૅટર્ન જુઓ.

5DPAUG

$$1 = 1 = 1^3$$
$$3 + 5 = 8 = 2^3$$
$$7 + 9 + 11 = 27 = 3^3$$
$$13 + 15 + 17 + 19 = 64 = 4^3$$
$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5^3$$

શું આ રસપ્રદ નથી ? હવે તમે કહી શકો કે $10^3$ને ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા તરીકે દર્શાવવા કેટલી ક્રમિક એકી સંખ્યા જોઈએ ?

**પ્રયત્ન કરો**

ઉપરની જેવી પૅટર્નનો ઉપયોગ કરી નીચે આપેલ સંખ્યાને ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા તરીકે દર્શાવો.

(a) $6^3$ (b) $8^3$ (c) $7^3$

નીચેની પૅટર્ન જુઓ.

$$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3$$
$$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3$$
$$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3$$

ઉપરની પૅટર્ન જોઈ નીચેની સંખ્યાની કિંમત શોધો.

(i) $7^3 - 6^3$ (ii) $12^3 - 11^3$ (iii) $20^3 - 19^3$ (iv) $51^3 - 50^3$

**2. ઘન અને તેના અવિભાજ્ય અવયવ**

નીચે આપેલ સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવીકરણ અને તેના ઘન વિશે વિચારો.

ઘનમાં દરેક અવિભાજ્ય અવયવ ત્રણ વાર આવે છે.

| સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવ | સંખ્યાના ઘનના અવિભાજ્ય અવયવ |
|---|---|
| $4 = 2 \times 2$ | $4^3 = 64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^3 \times 2^3$ |
| $6 = 2 \times 3$ | $6^3 = 216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^3$ |
| $15 = 3 \times 5$ | $15^3 = 3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 = 3^3 \times 5^3$ |
| $12 = 2 \times 2 \times 3$ | $12^3 = 1728 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 2^3 \times 3^3$ |

$$\begin{array}{r|l} 2 & 216 \\ \hline 2 & 108 \\ \hline 2 & 54 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

ખાસ નોંધો કે દરેક અવિભાજ્ય અવયવ ઘનના અવયવીકરણ વખતે ત્રણ વાર આવે છે.

શું તમને યાદ છે કે, $a^m \times b^m = (a \times b)^m$

કોઈ પણ સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવીકરણ વખતે જો દરેક અવયવ ત્રણ વાર આવે તો શું તે સંખ્યા પૂર્ણઘન હોય ? વિચારો શું 216 પૂર્ણઘન છે ?

અહીં, $216 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

દરેક અવયવ ત્રણ વાર આવે છે $216 = 2^3 \times 3^3 = (2 \times 3)^3$

$= 6^3$ તે પૂર્ણઘન છે.

શું 729 પૂર્ણઘન છે ? અહીં $729 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{3 \times 3 \times 3}$

અવયવોના ત્રણનાં જોડકાં બનાવી શકાય.

હા, 729 એ પૂર્ણઘન છે.

ચાલો 500 માટે ચકાસણી કરીએ.

500ના અવિભાજ્ય અવયવો $2 \times 2 \times \underline{5 \times 5 \times 5}$ છે.

અવયવ 5 ત્રણ વાર આવે છે. પણ અવયવ 2 બે જ વાર આવે.

તેથી 500 પૂર્ણઘન નથી.

**ઉદાહરણ 1 :** શું 243 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ?

**ઉકેલ :** આપણે જાણીએ છીએ કે $243 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times 3 \times 3$

તેથી 243 પૂર્ણઘન નથી. કેમ કે અવયવ 3 ત્રણ વાર આવે છે, પરંતુ બીજી વાર અવયવ 3 માત્ર બે જ વાર છે.

## પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલી સંખ્યામાંથી કઈ સંખ્યા પૂર્ણઘન છે ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** 400 | **2.** 3375 | **3.** 8000 | **4.** 15625 |
| **5.** 9000 | **6.** 6859 | **7.** 2025 | **8.** 10648 |

### 7.2.2 નાનામાં નાનો ગુણક કે જેથી પૂર્ણ ઘન સંખ્યા મળે

રાજે પ્લાસ્ટિકનો એક લંબઘન બનાવ્યો જેની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 15 સેમી, 30 સેમી, 15 સેમી છે.

અનુએ રાજને પ્રશ્ન કર્યો કે આવા કેટલા લંબઘન સાથે મળે તો મળતો ઘન પૂર્ણઘન હોય ? શું રાજ તે તું કહી શકે ?

રાજે કહ્યું કે આપેલ લંબઘનનું ઘનફળ $15 \times 30 \times 15 = 3 \times 5 \times 2 \times 3 \times 5 \times 3 \times 5$

$= 2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5}$

અહીંયા મળેલ અવિભાજ્ય અવયવોમાં 2 માત્ર એક જ વાર આવે છે. તેથી આપણે તે ત્રણ વાર આવે તે માટે $2 \times 2$ વડે ગુણવા જોઈએ. તેથી આવા 4 લંબઘન એકસાથે રાખવાથી મળતો ઘન એ પૂર્ણઘન હશે.

**ઉદાહરણ 2 :** શું 392 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ? જો ના, તો એવી નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા શોધો કે જેને 392 સાથે ગુણવાથી મળતી નવી સંખ્યા પૂર્ણઘન હોય.

**ઉકેલ :** $392 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 7 \times 7$

અહીં અવિભાજ્ય અવયવ 7 એ ત્રણ વાર આવતો નથી. તેથી 392 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા નથી. તેને પૂર્ણઘન બનાવવા માટે હજુ એક વાર 7 જોઈએ. તેથી આ કિસ્સામાં

$392 \times 7 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2744$ મળે, જે પૂર્ણઘન સંખ્યા છે.

તેથી 7 એ એવી નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે કે જેને 392 સાથે ગુણવાથી મળતી નવી સંખ્યા 2744 પૂર્ણઘન સંખ્યા મળે.

**ઉદાહરણ 3 :** શું 53240 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ? જો ના, તો એવી નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા શોધો કે, જેનાથી 53240ને ભાગવાથી મળતું ભાગફળ પૂર્ણઘન હોય.

**ઉકેલ :** અહીં $53240 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{11 \times 11 \times 11} \times 5$

આ અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં અવયવ 5 ત્રણ વાર આવતો નથી. તેથી કહી શકાય કે 53240 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા નથી. અવયવ 5 એ માત્ર એક જ વાર આવે છે. તેથી જો આપણે આપેલ સંખ્યાને 5 વડે ભાગીએ તો મળતું ભાગફળ પૂર્ણઘન સંખ્યા હોય.

તેથી $53240 \div 5 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{11 \times 11 \times 11}$

તેથી નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા 5 એવી સંખ્યા છે કે જેના વડે 53240ને ભાગવાથી મળતી સંખ્યા 10648 એ પૂર્ણઘન હોય.

**ઉદાહરણ 4 :** શું 1188 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ? જો ના, તો એવી નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા શોધો, કે જેનાથી 1188ને ભાગવાથી મળતું ભાગફળ પૂર્ણઘન હોય.

**ઉકેલ :** અહીં $1188 = 2 \times 2 \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times 11$

આ અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં અવયવ 2 અને અવયવ 11 ત્રણ વાર આવતા નથી. તેથી સંખ્યા 1188 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા નથી. અહીં 1188ના અવયવીકરણમાં અવયવ 2 માત્ર બે જ વાર અને અવયવ 11 માત્ર એક જ વાર આવે છે. તેથી જો 1188ને $2 \times 2 \times 11 = 44$ વડે ભાગતાં મળતા ભાગફળના અવિભાજ્ય અવયવ 2 અને 11 નહીં હોય.

આમ, નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા કે જેના વડે 1188 ને ભાગતાં પૂર્ણઘન મળે તે 44 છે અને પરિણામે મળતી પૂર્ણઘન સંખ્યા $1188 \div 44 = 27$ $(=3^3)$ છે.

**ઉદાહરણ 5 :** શું 68600 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ? જો ના, તો એવી નાનામાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા શોધો કે, જેનાથી 68600 ને ગુણવાથી મળતી નવી સંખ્યા પૂર્ણઘન હોય.

**ઉકેલ :** અહીં $68600 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$.

અહીં અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં અવયવ 5 એ ત્રણ વાર આવતો નથી. તેથી 68600 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા નથી. તેને પૂર્ણઘન બનાવવા માટે આપણે તેને 5 વડે ગુણીશું.

$68600 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$

$= 343000$ જે પૂર્ણઘન સંખ્યા છે.

અહીં નોંધીએ કે 343 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે. ઉદાહરણ 5 પરથી આપણે જાણી શકીએ છીએ કે 343000 પણ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે.

## વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યા પૂર્ણઘન સંખ્યા છે ?

(i) 2700 (ii) 16000 (iii) 64000 (iv) 900 (v) 125000 (vi) 36000 (vii) 21600 (viii) 10000 (ix) 27000000 (x) 1000

તમે આ પૂર્ણઘન સંખ્યાઓમાં કઈ પેટર્નનું નિરીક્ષણ કર્યું ?

## સ્વાધ્યાય 7.1

1. નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યા પૂર્ણઘન નથી ?
   (i) 216 (ii) 128 (iii) 1000 (iv) 100 (v) 46656
2. એવી નાનામાં નાની સંખ્યા શોધો કે જેથી તેને નીચે આપેલ સંખ્યા સાથે ગુણવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણઘન હોય.
   (i) 243 (ii) 256 (iii) 72 (iv) 675 (v) 100
3. એવી નાનામાં નાની સંખ્યા શોધો કે જેના વડે નીચે આપેલ સંખ્યાને ભાગવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણઘન હોય.
   (i) 81 (ii) 128 (iii) 135 (iv) 192 (v) 704
4. પરિક્ષિતે 5 સેમી, 2 સેમી, 5 સેમી માપ લઈ એક પ્લાસ્ટિકનો લંબઘન બનાવ્યો છે. તો આવા કેટલા લંબઘન સાથે રાખવાથી મળતો ઘન એ પૂર્ણઘન હોય ?

## 7.3 ઘનમૂળ

જો એક ઘનનું ઘનફળ 125 સેમી$^3$ હોય તો, આપણે તેની બાજુની લંબાઈ વિશે શું કહી શકીએ ? આ ઘનની બાજુની લંબાઈ જાણવા માટે આપણે એવી સંખ્યાની જરૂર પડે કે જે સંખ્યાનો ઘન 125 હોય.

જેવી રીતે વર્ગમૂળ શોધવું એ વર્ગ કરવાની પ્રક્રિયાની વ્યસ્ત પ્રક્રિયા છે, તેવી જ રીતે ઘનમૂળ શોધવાની ક્રિયા પણ ઘન કરવાની ક્રિયાની વ્યસ્ત પ્રક્રિયા છે.

આપણે જાણીએ છીએ $2^3 = 8$. તેથી 8નું ઘનમૂળ 2 છે.

સંકેતમાં તેને $\sqrt[3]{8} = 2$થી દર્શાવાય. '$\sqrt[3]{\ }$' ઘનમૂળનો સંકેત દર્શાવે છે.

નીચેના કોષ્ટક માટે વિચારો.

| વિધાન | અનુમાન | વિધાન | અનુમાન |
|---|---|---|---|
| $1^3 = 1$ | $\sqrt[3]{1} = 1$ | $6^3 = 216$ | $\sqrt[3]{216} = 6$ |
| $2^3 = 8$ | $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$ | $7^3 = 343$ | $\sqrt[3]{343} = 7$ |
| $3^3 = 27$ | $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$ | $8^3 = 512$ | $\sqrt[3]{512} = 8$ |
| $4^3 = 64$ | $\sqrt[3]{64} = 4$ | $9^3 = 729$ | $\sqrt[3]{729} = 9$ |
| $5^3 = 125$ | $\sqrt[3]{125} = 5$ | $10^3 = 1000$ | $\sqrt[3]{1000} = 10$ |

### 7.3.1 અવિભાજ્ય અવયવીકરણની રીતે ઘનમૂળ

સંખ્યા 3375 માટે વિચારો, આપણે તેનું ઘનમૂળ અવિભાજ્ય અવયવીકરણની રીતે શોધીશું.

અહીં $3375 = \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{5 \times 5 \times 5} = 3^3 \times 5^3 = (3 \times 5)^3$

તેથી 3375 નું ઘનમૂળ $= \sqrt[3]{3375} = 3 \times 5 = 15$

તેવી જ રીતે $\sqrt[3]{74088}$ નું ઘનમૂળ મેળવવા માટે

$$74088 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times \underline{3 \times 3 \times 3} \times \underline{7 \times 7 \times 7} = 2^3 \times 3^3 \times 7^3 = (2 \times 3 \times 7)^3$$

આમ, $\sqrt[3]{74088} = 2 \times 3 \times 7 = 42$

**ઉદાહરણ 6 :** 8000 નું ઘનમૂળ શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં 8000 ના અવિભાજ્ય અવયવો $\underline{2\times2\times2}\times\underline{2\times2\times2}\times\underline{5\times5\times5}$ છે.

તેથી $\sqrt[3]{8000} = 2 \times 2 \times 5 = 20$

**ઉદાહરણ 7 :** 13824 નું ઘનમૂળ અવિભાજ્ય અવયવીકરણની રીતે શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં,

$13824 = \underline{2\times2\times2}\times\underline{2\times2\times2}\times\underline{2\times2\times2}\times\underline{3\times3\times3} = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 3^3$

તેથી, $\sqrt[3]{13824} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$

## વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા $m$ માટે, $m^2 < m^3$ ? આ વિધાન ખરું છે કે ખોટું તે કહો.

### 7.3.2 ઘન સંખ્યાનું ઘનમૂળ

જો તમને ખબર હોય કે આપેલ સંખ્યા પૂર્ણઘન છે, તો નીચે આપેલ પદ્ધતિથી આપણે ઘનમૂળ શોધી શકીએ.

**સોપાન 1** કોઈ એક પૂર્ણઘન સંખ્યા 857375 માટે, જમણી બાજુથી ત્રણ-ત્રણ સંખ્યા લઈને નીચે મુજબ જૂથ બનાવીશું.

| 857 | 375 |
|---|---|
| ↓ | ↓ |
| બીજું જૂથ | પ્રથમ જૂથ |

હવે આપણે આપેલ ઘન સંખ્યાનું ઘનમૂળ નીચે આપેલ ક્રમિક પગલાં મુજબ મેળવીશું.

આપણને 375 અને 857 એવાં બે જૂથ મળ્યા કે દરેક જૂથમાં ત્રણ-ત્રણ સંખ્યા હોય.

**સોપાન 2** પ્રથમ જૂથ એટલે કે 375નો એકમના અંક આપેલ સંખ્યાના ઘનમૂળનો એકમનો અંક મળશે. પ્રથમ જૂથમાં આવેલ સંખ્યા 375 માં એકમનો અંક 5 છે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે જો સંખ્યાનો એકમનો અંક 5 હોય તો તેવી સંખ્યાના ઘનમૂળ તરીકે જે સંખ્યા મળે તેનો એકમનો અંક પણ 5 હોય. તેથી અહીં આપણને ઘનમૂળની સંખ્યાનો એકમનો અંક 5 મળે છે.

**સોપાન 3** હવે બીજું જૂથ લઈએ જે 857 છે. ઉપરાંત આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે $9^3 = 729$ અને $10^3 = 1000$. તેમજ $729 < 857 < 1000$. તેથી દશકના અંક તરીકે નાનામાં નાની સંખ્યા 729 નો એકમનો અંક લઈશું. તેથી આપણને $\sqrt[3]{857375} = 95$ મળશે.

**ઉદાહરણ 8 :** અનુમાન કરીને 17576નું ઘનમૂળ શોધો.

**ઉકેલ :** અહીં સંખ્યા 17576 આપેલ છે.

**સોપાન 1** સૌ પ્રથમ આપણે સંખ્યા 17576ના જમણી બાજુથી શરૂ કરી ત્રણ-ત્રણનાં જૂથ બનાવીશું. અહીં, 576 અને 17 એમ બે જૂથ બને છે. 576 માં ત્રણ અને 17માં બે સંખ્યા રહે છે.

**સોપાન 2** હવે સંખ્યા 576 લો. તેમાં એકમનો અંક 6 છે. તેથી ઘનમૂળમાં પણ એકમનો અંક 6 મળશે.

**સોપાન 3** હવે બીજું જુથ 17 છે. 2 નો ઘન 8 છે અને 3 નો ઘન 27 છે. તેમજ 17 એ 8 અને 27 ની વચ્ચે આવેલી સંખ્યા છે. તેમજ 2 અને 3માં નાની સંખ્યા 2 છે. સંખ્યા 2માં એકમનો અંક 2 પોતે જ છે. તેથી 17576ના ઘનમૂળમાં દશકના અંક તરીકે 2ને લેતાં,

$\sqrt[3]{17576} = 26$ (ચકાસો)

## સ્વાધ્યાય 7.2

**1.** નીચે આપેલી દરેક સંખ્યાનું ઘનમૂળ અવિભાજ્ય અવયવીકરણની રીતે શોધો.

(i) 64 (ii) 512 (iii) 10648 (iv) 27000

(v) 15625 (vi) 13824 (vi) 110592 (viii) 46656

(ix) 175616 (x) 91125

**2.** નીચેનું વિધાન ખરું છે કે ખોટું તે કહો :

(i) કોઈપણ એકી સંખ્યાનો ઘન બેકી સંખ્યા હોય.

(ii) પૂર્ણ ઘન સંખ્યાના અંતિમ બે અંકો શૂન્ય ન હોય.

(iii) જો કોઈ સંખ્યાનો વર્ગ કરતાં એકમનો અંક 5 આવે તો ઘન કરતાં મળતી સંખ્યાના છેલ્લા બે અંક 25 આવે.

(iv) એવી કોઈ પૂર્ણઘન સંખ્યા ના મળે કે જેનો એકમનો અંક 8 હોય.

(v) બે અંકોવાળી સંખ્યાનો ઘન કરતાં મળતી સંખ્યા ત્રણ અંકોની પણ હોય.

(vi) બે અંકોવાળી સંખ્યાનો ઘન કરતાં સાત કે તેથી વધુ અંકોની સંખ્યા પણ મળે.

(vii) એક અંકની સંખ્યાનો ઘન કરવાથી એક અંકની સંખ્યા પણ મળે.

**3.** જો તમને એમ કહેવામાં આવે કે 1331 એ પૂર્ણઘન સંખ્યા છે. શું તમે અવિભાજ્ય અવયવીકરણની પ્રક્રિયા વિના જ તેનું ઘનમૂળ શોધી શકો ? તેવી જ રીતે 4913, 12167, 32768ના ઘનમૂળનું અનુમાન કરો.

## આપણે શું ચર્ચા કરી ?

**1.** સંખ્યાઓ જેવી કે 1729, 4104, 13832 એ **હાર્ડી-રામાનુજન સંખ્યા** તરીકે જાણીતી છે. આવી સંખ્યાને બે સંખ્યાઓના ઘનના સરવાળા તરીકે બે અલગ રીતે રજૂ કરી શકાય.

**2.** કોઈ સંખ્યાને તેની જ સાથે ત્રણ વાર ગુણવાથી મળતી સંખ્યાને તે **સંખ્યાનો ઘન** કહે છે

જેમ કે 1, 8, 27, ... વગેરે.

**3.** જો કોઈ સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં દરેક અવયવ ત્રણવાર આવે તો તેવી સંખ્યા **પૂર્ણઘન સંખ્યા** હોય છે.

**4.** સંકેત ' $\sqrt[3]{\ }$ ' ને ઘનમૂળ કહે છે. જેમ કે $\sqrt[3]{27} = 3$.