"Normal Distribution is father of all probability distributions. For larger sample size almost all theoritical distributions follow normal distribution".

– Unknown

3

પ્રામાણ્ય-વિતરણ
(Normal Distribution)

વિષયવસ્તુ :

3.1 પ્રામાણ્ય વિતરણ : પ્રસ્તાવના, સંભાવના ઘટત્વ વિધેય

આપણે અસતત યાદચ્છિક ચલ માટેના સંભાવના વિતરણનો અભ્યાસ અગાઉના પ્રકરણમાં કર્યો. હવે આપણે સતત યાદચ્છિક ચલ માટેના સંભાવના વિતરણનો અભ્યાસ કરીશું. આપણે જાણીએ છીએ કે જે યાદચ્છિક ચલ X વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણ R માં અથવા તેના કોઈ પણ અંતરાલમાં કોઈ પણ કિંમત ધારણ કરી શકે તેમ હોય તો તેવા ચલને સતત યાદચ્છિક ચલ કહેવાય. જો સતત યાદચ્છિક ચલ X એ એક નિશ્ચિત અંતરાલ a થી b ની વચ્ચેની કોઈ પણ કિંમત ધારણ કરી શકે તેમ હોય તો તેને સંકેતમાં $a < x < b$ વડે દર્શાવીશું. સતત યાદચ્છિક ચલની કિંમત કોઈ એક નિશ્ચિત અંતરાલની વચ્ચે હોવાની સંભાવના મેળવવાના વિધેયને તે ચલનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય (Probability Density Function) કહે છે અને તે નીચેની બે શરતોનું સમાધાન કરે છે.

(1) યાદચ્છિક ચલની કિંમત નિશ્ચિત અંતરાલમાં હોય તેની સંભાવના અનૃણ હોય છે.

(2) યાદચ્છિક ચલ નિશ્ચિત અંતરાલની વચ્ચેની કોઈ પણ કિંમત ધારણ કરે તેની કુલ સંભાવના 1 હોય છે.

આમ યાદચ્છિક ચલ X ની કિંમત નિશ્ચિત અંતરાલ a થી b ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના શોધવા માટે સંભાવના ઘટત્વ વિધેયનો ઉપયોગ કરી શકાય અને તેને સંકેતમાં $P(a < x < b)$ વડે દર્શાવાય. અહીં એ નોંધવું જરૂરી છે કે સતત યાદચ્છિક ચલ X ની એક નિશ્ચિત કિંમત માટે સંભાવના ઘટત્વ વિધેય દ્વારા મેળવેલ સંભાવના હંમેશાં શૂન્ય (0) થાય છે એટલે કે $P(x = a) = 0$ થાય. આમ, તમામ સતત સંભાવના ઘટત્વ વિધેય દ્વારા મેળવાતી સંભાવનાઓ $P(a < x < b)$ અને $P(a \le x \le b)$ સમાન થાય એટલે કે $P(a < x < b) = P(a \le x \le b)$ થાય.

સતત યાદચ્છિક ચલનાં સંભાવના વિતરણોમાં પ્રામાણ્ય વિતરણ અતિ મહત્ત્વનું અને આંકડાશાસ્ત્રનાં ઉચ્ચત્તર અભ્યાસમાં સૌથી વધુ ઉપયોગી હોય તેવું વિતરણ છે. તેની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે આપી શકાય.

જો યાદચ્છિક ચલ X એ μ (મ્યૂ) મધ્યક તેમજ σ (સિગ્મા) પ્રમાણિત વિચલનવાળો ચલ હોય અને તેનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ; -\infty < x < \infty$$

$$-\infty < \mu < \infty$$

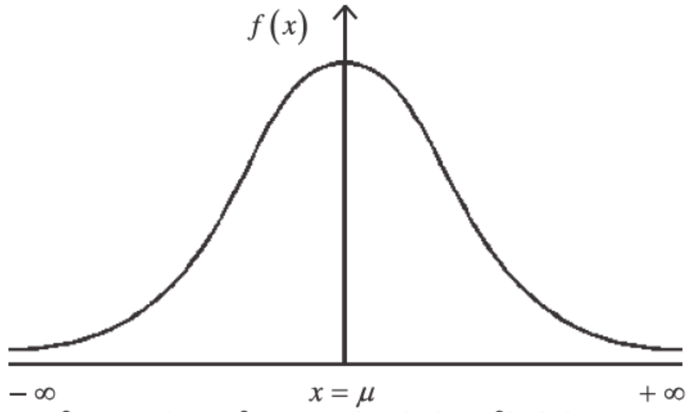
$$0 < \sigma < \infty$$

જ્યાં $\pi = 3.1416$ અને $e = 2.7183$ અચળાંકો છે

હોય તો યાદચ્છિક ચલ X ને પ્રામાણ્ય ચલ અને $f(x)$ ને પ્રામાણ્ય ચલનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય વડે દર્શાવાય છે.

આ પ્રામાણ્ય ચલ X ના વિતરણને પ્રામાણ્ય વિતરણ કહે છે અને તેને સંકેતમાં $N(\mu, \sigma^2)$ કહે છે.

પ્રામાણ્ય ચલ X ની જુદી જુદી કિંમતોને અનુરૂપ સંભાવના ઘટત્વ વિધેય $f(x)$ ની કિંમતો શોધી જે વક્ર દોરવામાં આવે છે તેને પ્રામાણ્ય વક્ર કહેવામાં આવે છે જેને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :



પ્રામાણ્ય વક્ર આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે સંપૂર્ણ ઘંટાકાર હોય છે જે દર્શાવે છે કે પ્રામાણ્ય વિતરણ સંમિત વિતરણ છે.

3.2 પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ અને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણ

(Standard Normal Variable and Standard Normal Distribution)

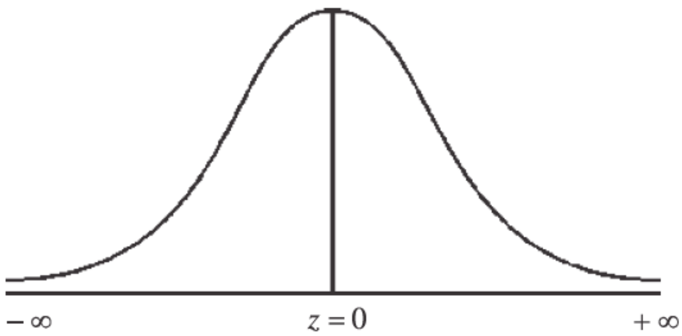
જો પ્રામાણ્ય યાદચ્છિક ચલ X નો મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચલન σ હોય, તો યાદચ્છિક ચલ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ કહેવામાં આવે છે અને તેનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે છે :

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \;; -\infty < z < \infty$$

અહીં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે, યાદચ્છિક પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z નું સંભાવના ઘટત્વ વિતરણ એ મધ્યક શૂન્ય (0) અને પ્રમાણિત વિચલન 1 વાળું પ્રામાણ્ય વિતરણ છે.

નોંધ : પ્રકરણનાં અભ્યાસ દરમિયાન હવેથી આપણે યાદચ્છિક પ્રામાણ્ય ચલ X ને ફક્ત પ્રામાણ્ય ચલ X તેમજ યાદચ્છિક પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z ને બદલે પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z કહીશું.

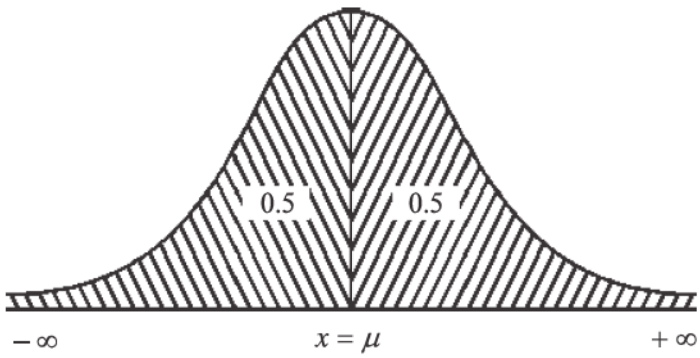
પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z ની જુદી જુદી કિંમતોને અનુરૂપ પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ઘટત્વ વિધેય $f(z)$ ની કિંમતોને આલેખ પર દર્શાવતા નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો સંપૂર્ણ ઘંટાકાર વક્ર મળે છે :



આ વક્રને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્ર કહેવામાં આવે છે અને તે $Z=0$ ની બંને બાજુ સંમિત હોય છે.

3.3 પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્રના કોષ્ટક પરથી સંભાવના (ક્ષેત્રફળ) શોધવા માટેની પદ્ધતિ

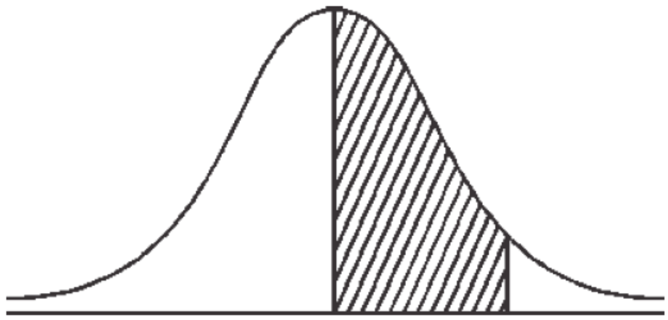
આપણે જાણીએ છીએ કે, પ્રામાણ્ય વક્ર એ પ્રામાણ્ય ચલનાં સંભાવના ઘટત્વ વિધેયનો વક્ર છે અને તેને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય છે :



આ વક્ર અને X-અક્ષ વચ્ચે આચ્છાદિત પ્રદેશનું કુલ ક્ષેત્રફળ (સંભાવના) 1 થાય છે. પ્રામાણ્ય વક્ર એ પ્રામાણ્ય ચલ X નાં મધ્યક μ ની બંને બાજુ સંમિત હોય છે તેથી $X=\mu$ માટેની શિરોલંબ રેખા પ્રામાણ્ય વક્રના ક્ષેત્રફળ (સંભાવના)ના

બે સમાન ભાગ કરે છે. $X=\mu$ ની જમણી બાજુનું ક્ષેત્રફળ (સંભાવના) 0.5 થાય તેને સંકેતમાં $P(X \ge \mu)=0.5$ વડે દર્શાવીશું. જ્યારે $X=\mu$ ની ડાબી બાજુનું ક્ષેત્રફળ (સંભાવના) પણ 0.5 થાય તેને સંકેતમાં $P(X \le \mu)=0.5$ વડે દર્શાવીશું.

પ્રામાણ્ય વક્રમાં પ્રામાણ્ય ચલની X ની કિંમત મધ્યક (μ) અને તેની કોઈ કિંમત a $(a>\mu)$ ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના એ પ્રામાણ્ય વક્રમાં x-અક્ષ અને $X=\mu$ તેમજ $X=a$ માટેની શિરોલંબ રેખાઓ વચ્ચેના આચ્છાદિત પ્રદેશનાં ક્ષેત્રફળ જેટલી હોય છે તેને આકૃતિમાં નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :



આને સંકેતમાં $P(\mu \le X \le a)$ વડે દર્શાવાય.

પ્રામાણ્ય વક્ર હેઠળના પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ મેળવવા માટે સૌપ્રથમ પ્રામાણ્ય ચલ X ને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z માં રૂપાંતર કરવામાં આવે છે. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z ની જુદી જુદી ધન કિંમતો માટે પ્રામાણ્ય વક્રના 0 થી Z સુધીનાં ક્ષેત્રફળનાં કોષ્ટક તૈયાર કરવામાં આવેલ છે અને આ કોષ્ટક પરથી ક્ષેત્રફળ મેળવી શકાય છે.

નોંધ : પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલની જુદી જુદી કિંમતો માટેનું કોષ્ટક પુસ્તકના છેલ્લા પાના પર આપેલું છે.

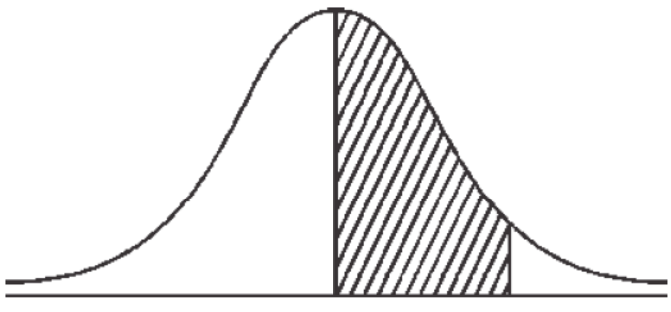
ધારો કે પ્રામાણ્ય ચલ Xની કિંમત મધ્યક μ અને અચળાંક a $(a>\mu)$ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના શોધવાની હોય તો તેને સંકેતમાં આપણે $P(\mu \le X \le a)$ વડે દર્શાવીશું. હવે જો પ્રામાણ્ય ચલ Xનું પ્રમાણિત વિચલન σ હોય, તો

જ્યારે $X=\mu$ હોય ત્યારે $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{\mu-\mu}{\sigma}=\frac{0}{\sigma}=0$ થાય અને

જ્યારે $X=a$ હોય ત્યારે $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{a-\mu}{\sigma}=z_1$ (કહીએ)

આમ, $P(\mu \le X \le a)=P(0 \le Z \le z_1)$

= પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી $Z=0$ થી $Z=z_1$ માટે મળતું ક્ષેત્રફળ



ઉદાહરણ 1 : એક પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક 10 અને પ્રમાણિત વિચલન 2 છે, તો (1) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 10 અને 12 ની વચ્ચે હોય, (2) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 8 અને 10 ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના શોધો.

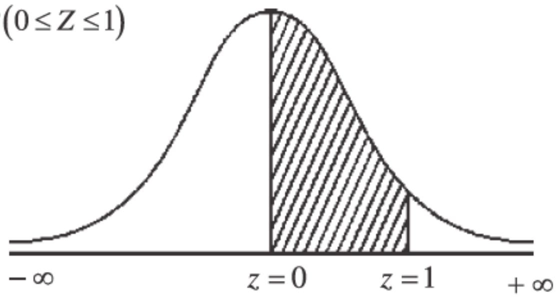
અહીં મધ્યક $\mu = 10$ અને પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 2$ છે.

(1) પ્રામાણ્ય ચલ Xની કિંમત 10 અને 12 ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના શોધવાની છે એટલે કે $P(10 \le X \le 12)$ શોધવું છે.

$\therefore P(10 \le X \le 12) = P\left(\frac{10-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{12-\mu}{\sigma}\right)$

$= P\left(\frac{10-10}{2} \le Z \le \frac{12-10}{2}\right)$

$= P(0 \le Z \le 1)$



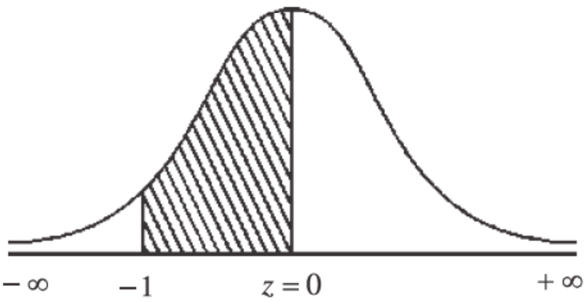
$= 0.3413$ (પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી)

(2) પ્રામાણ્ય ચલ Xની કિંમત 8 અને 10ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના શોધવાની છે એટલે કે $P(8 \le X \le 10)$ શોધવું છે.

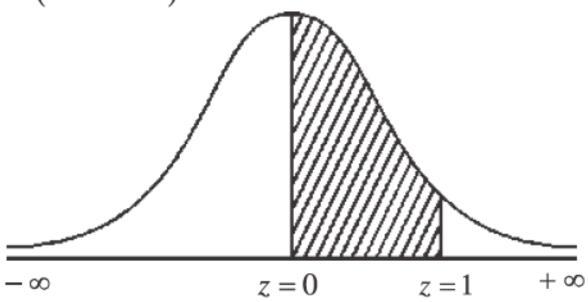
$\therefore P(8 \le X \le 10) = P\left(\frac{8-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{10-\mu}{\sigma}\right)$

$= P\left(\frac{8-10}{2} \le Z \le \frac{10-10}{2}\right)$

$= P(-1 \le Z \le 0)$



=



$= P(0 \le Z \le 1)$ ($\because$ સંમિતતા)

$= 0.3413$ (પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી)

ઉદાહરણ 2 : એક પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક 20 અને વિચરણ 16 છે, તો નીચેની સંભાવના શોધો. (1) પ્રામાણ્ય ચલ Xની કિંમત 26 થી ઓછી હોય. (2) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 14 થી વધુ હોય.

અહીં મધ્યક $\mu = 20$ અને વિચરણ $\sigma^2 = 16$ છે.

$\therefore$ પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 4$ થાય.

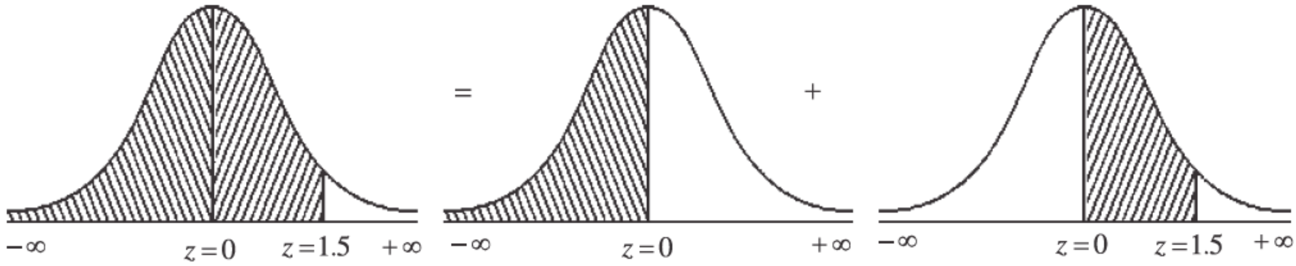
(1) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 26 થી ઓછી હોવાની સંભાવના

$= P(X \le 26)$

$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{26-\mu}{4}\right)$

$= P\left(Z \le \frac{26-20}{4}\right)$

$= P(Z \le 1.5)$



$= P(-\infty < Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1.5)$

$= 0.5 + 0.4332$ (પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી)

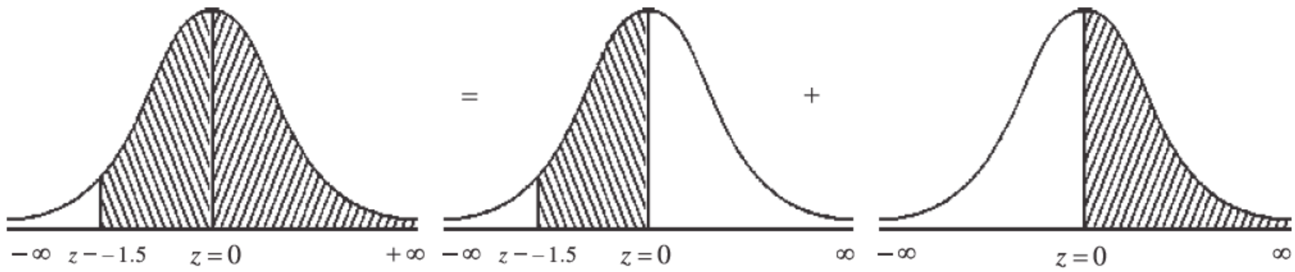
$= 0.9332$

(2) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 14 થી વધુ હોવાની સંભાવના

$$= P(X \ge 14) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \ge \frac{14-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \ge \frac{14-20}{4}\right)$$

$$= P(Z \ge -1.5)$$



$= P(-1.5 \le Z \le 0) + P(0 \le Z < \infty)$

$= P(0 \le Z \le 1.5) + 0.5$ ($\because$ સંમિતતા)

$= 0.4332 + 0.5$ (પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી)

$= 0.9332$

ઉદાહરણ 3 : કોઈ એક શહેરની ઉચ્ચત્તર માધ્યમિક શાળાઓના વર્ગોમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. વર્ગોમાં વિદ્યાર્થીઓની સરેરાશ સંખ્યા 50 છે અને તેનું પ્રમાણિત વિચલન 15 છે. જો યાદચ્છિક રીતે કોઈ એક વર્ગ પસંદ કરવામાં આવે તો (i) તે વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 68 થી વધુ હોય તેમજ (ii) તે વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 32 થી ઓછી હોય તેની સંભાવનાઓ શોધો.

અહીં વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે તેમ આપેલું છે તેથી

પ્રામાણ્ય ચલ X = વર્ગમાં વિદ્યાર્થીની સંખ્યા

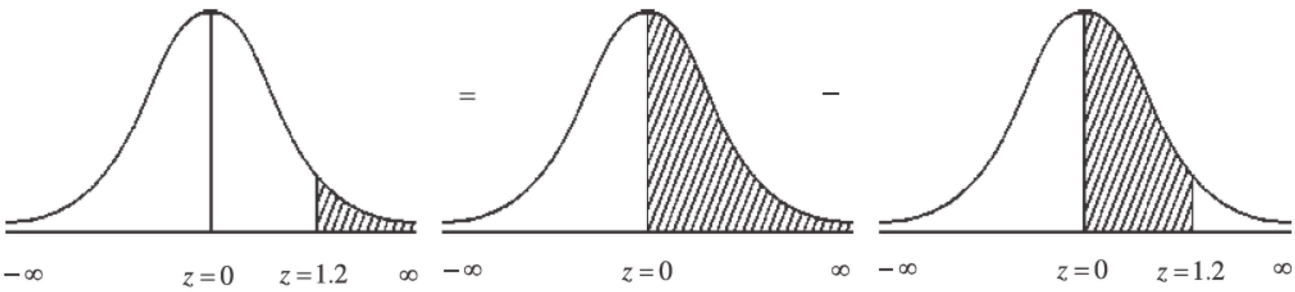
તેમજ મધ્યક $\mu = 50$ વિદ્યાર્થીઓ અને પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 15$ વિદ્યાર્થીઓ છે.

(1) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 68 થી વધુ હોય તેની સંભાવના

$$= P(X \geq 68) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{68-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \geq \frac{68-50}{15}\right)$$

$$= P(Z \geq 1.2)$$



$$= P(0 \leq Z < \infty) - P(0 \leq Z \leq 1.2)$$

$= 0.5 - 0.3849$ (પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી)

$= 0.1151$

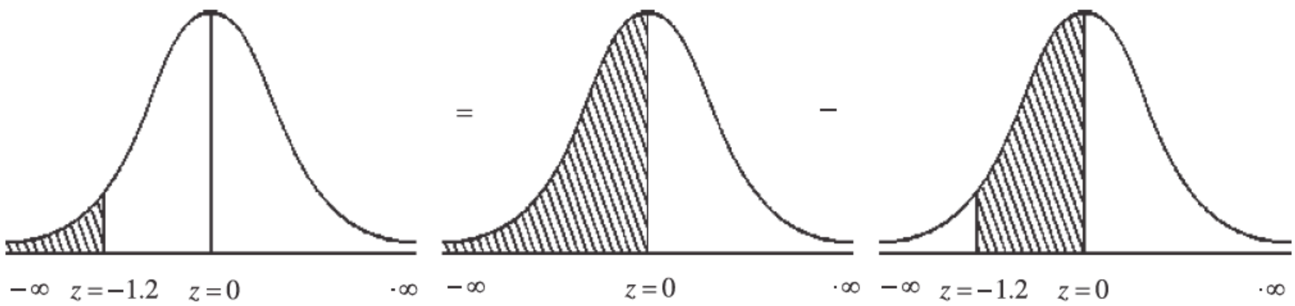
આમ, પસંદ કરેલ વર્ગમાં વિદ્યાર્થીની સંખ્યા 68 થી વધુ હોવાની સંભાવના 0.1151 થાય.

(2) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા 32 થી ઓછી હોવાની સંભાવના

$$= P(X \leq 32) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{32-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= P\left(Z \leq \frac{32-50}{15}\right)$$

$$= P(Z \leq -1.2)$$



$$= P(-\infty < Z \leq 0) - P(-1.2 \leq Z \leq 0)$$

$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 1.2)$ ($\because$ સંમિતતા)

$= 0.5 - 0.3849$

$= 0.1151$

આમ, પસંદ કરેલ વર્ગમાં વિદ્યાર્થીની સંખ્યા 32 થી ઓછી હોવાની સંભાવના 0.1151 થાય.

ઉદાહરણ 4 : એક મોટી સોસાયટીમાં રહેતા પુખ્ત વયનાં બાળકોનું સરેરાશ વજન 50 કિગ્રા અને પ્રમાણિત વિચલન 5 કિગ્રા છે. જો તેમનું વજન પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરતું હોય, તો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ પુખ્ત વયનાં બાળકનું વજન

(1) 55 કિગ્રા અને 65 કિગ્રાની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના શોધો.

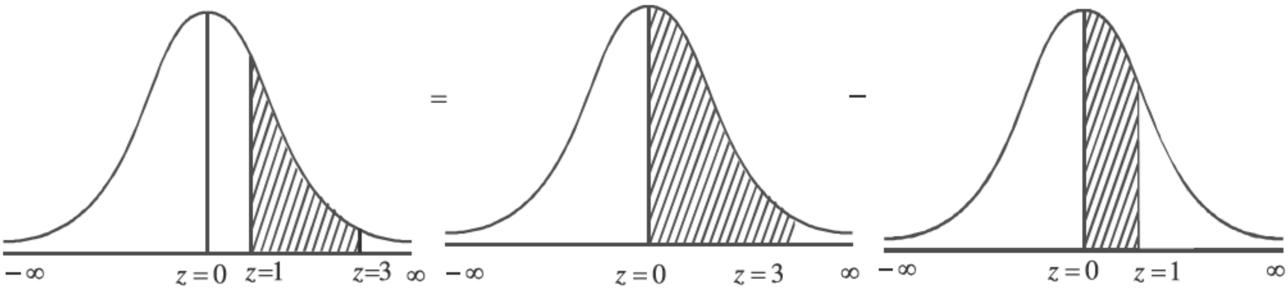
(2) 35 કિગ્રા અને 45 કિગ્રાની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના શોધો.

અહીં પ્રામાણ્ય ચલ $X=$ પુખ્ત વયનાં બાળકનું વજન તેમજ સરેરાશ વજન $\mu=50$ કિગ્રા અને પ્રમાણિત વિચલન $\sigma=5$ કિગ્રા છે.

(1) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ પુખ્ત વયના બાળકનું વજન 55 કિગ્રા અને 65 કિગ્રા વચ્ચે હોય તેની સંભાવના

$$=P(55\le X\le 65) = P\left(\frac{55-50}{5}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{65-50}{5}\right)$$

$$= P(1\le Z\le 3)$$



$$= P(0\le Z\le 3)-P(0\le Z\le 1)$$

$$= 0.4987 - 0.3413$$

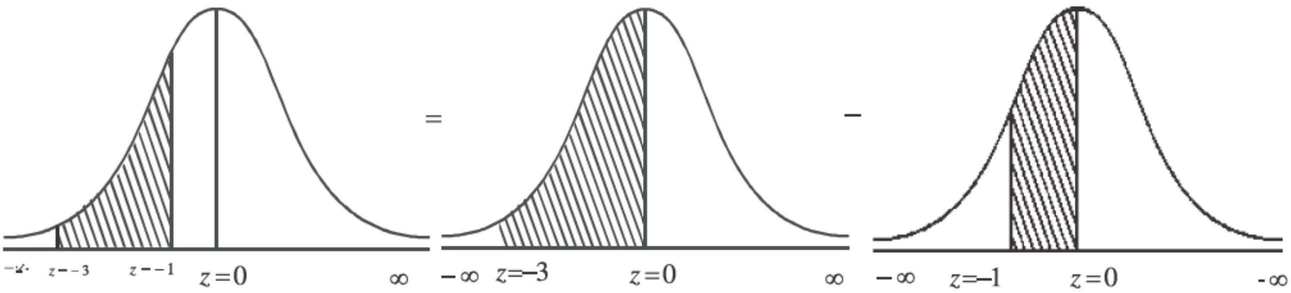
$$= 0.1574$$

આમ, યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ પુખ્ત વયના બાળકનું વજન 55 કિગ્રા અને 65 કિગ્રાની વચ્ચે હોવાની સંભાવના 0.1574 થશે.

(2) પુખ્ત વયના બાળકનું વજન 35 કિગ્રા અને 45 કિગ્રાની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના

$$=P(35\le X\le 45) = P\left(\frac{35-50}{5}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{45-50}{5}\right)$$

$$= P(-3\le Z\le -1)$$



$$= P(-3\le Z\le 0)-P(-1\le Z\le 0)$$

$$= P(0\le Z\le 3)-P(0\le Z\le 1) \quad (\because \text{ સંમિતતા})$$

$$= 0.4987 - 0.3413$$

$$= 0.1574$$

આમ પસંદ કરેલ પુખ્ત વયના બાળકનું વજન 35 કિગ્રા અને 45 કિગ્રાની વચ્ચે હોવાની સંભાવના 0.1574 છે.

નોંધ : પ્રામાણ્ય વિતરણ એ સંમિત વિતરણ હોવાથી સંભાવના વક્રમાં $Z=0$ થી $Z=a$ વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ એ $Z=-a$ થી $Z=0$ વચ્ચેનાં ક્ષેત્રફળ જેટલું જ થાય છે. તે ઉપરનાં ઉદાહરણો પરથી સ્પષ્ટ થાય છે.

ઉદાહરણ 5 : એક ઉત્પાદન એકમમાં કામ કરતાં કારીગરોનું માસિક વેતન પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. તેમની માસિક સરેરાશ આવક ₹ 15,000 છે અને પ્રમાણિત વિચલન ₹ 4000 છે, તો

(1) યાદચ્છિક રીતે કોઈ એક કારીગરને પસંદ કરવામાં આવે, તો તેની માસિક આવક ₹ 10,000 અને ₹ 25,000 ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના

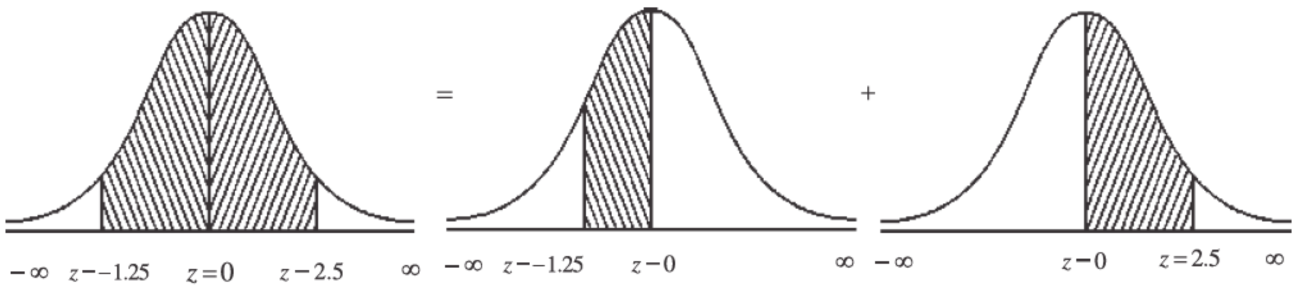
(2) ઉત્પાદન એકમમાં ₹ 12,000 અને ₹ 22,000 ની વચ્ચે માસિક આવક ધરાવતા કારીગરોની ટકાવારી શોધો.

પ્રામાણ્ય ચલ X = કારીગરની માસિક આવક તેમજ સરેરાશ આવક $\mu = 15,000$ ₹ અને પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 4000$ ₹.

(1) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ કારીગરની આવક ₹ 10,000 અને ₹ 25,000 ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના

$$= P(10000 \le X \le 25000) = P\left(\frac{10000-15000}{4000} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{25000-15000}{4000}\right)$$

$$= P(-1.25 \le Z \le 2.5)$$



$$= P(-1.25 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 2.5)$$

$$= P(0 \le Z \le 1.25) + P(0 \le Z \le 2.5) \ (\because \text{ સંમિતતા})$$

$$= 0.3944 + 0.4938$$

$$= 0.8882$$

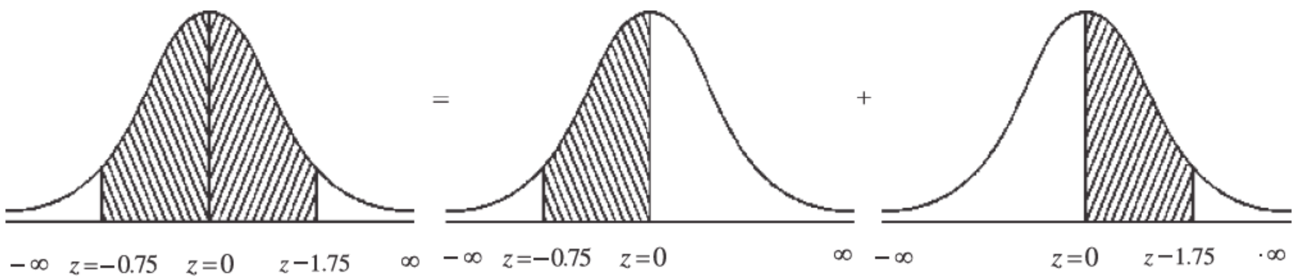
આમ, યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ કારીગરની માસિક આવક ₹ 10,000 અને ₹ 25,000 ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના 0.8882 થશે.

(2) યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ કારીગરની આવક ₹ 12,000 અને ₹ 22,000 ની વચ્ચે હોય તેની સંભાવના

$$= P(12000 \le X \le 22000)$$

$$= P\left(\frac{12000-15000}{4000} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{22000-15000}{4000}\right)$$

$$= P(-0.75 \le Z \le 1.75)$$



$$= P(-0.75 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 1.75)$$

$$= P(0 \le Z \le 0.75) + P(0 \le Z \le 1.75) \quad (\because \text{ સંમિતતા})$$

$= 0.2734 + 0.4599$

$= 0.7333$

$\therefore$ ઉત્પાદન એકમમાં માસિક ₹ 12,000 અને ₹ 22,000 ની વચ્ચે આવક ધરાવતા કારીગરોની ટકાવારી

$= 100 \times 0.7333$

$= 73.33 \ \%$

આમ, ઉત્પાદન એકમમાં 73.33 % કારીગરોની માસિક આવક ₹ 12,000 અને ₹ 22,000 ની વચ્ચે હશે.

નોંધ : સંભાવનાને ટકાવારીમાં દર્શાવવા માટે મેળવેલ સંભાવનાને 100 વડે ગુણવામાં આવે છે.

3.4 પ્રામાણ્ય વિતરણના ગુણધર્મો

પ્રામાણ્ય વિતરણના કેટલાક અગત્યના ગુણધર્મો નીચે મુજબ છે :

(1) આ વિતરણ સતત યાદચ્છિક ચલનું સંભાવના વિતરણ છે.

(2) μ અને σ તેના પ્રાચલો છે જે અનુક્રમે વિતરણનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન દર્શાવે છે.

(3) આ વિતરણ μ ને સાપેક્ષ સંમિત છે અને તેની વિષમતા શૂન્ય (0) છે.

(4) આ વિતરણ માટે મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકની કિંમત સમાન હોય છે. સંકેતમાં $\mu = M = M_0$ થાય.

(5) આ વિતરણમાં ચતુર્થકો, મધ્યસ્થથી સમાન અંતરે છે એટલે કે $Q_3 - M = M - Q_1$ અને $M = \frac{Q_3 + Q_1}{2}$

(6) આ વિતરણનો સંભાવના વક્ર સંપૂર્ણ ઘંટાકાર છે.

(7) પ્રામાણ્ય વક્રના બંને છેડા લંબાવતા તે x-અક્ષની નજીક જાય છે પરંતુ x-અક્ષને સ્પર્શતા નથી.

(8) આ વિતરણના અંતિમ ચતુર્થકોની અંદાજિત કિંમતો નીચેનાં સૂત્રોથી મેળવાય છે :

$Q_1 = \mu - 0.675 \ \sigma$

$Q_3 = \mu + 0.675 \ \sigma$

(9) આ વિતરણનું ચતુર્થક વિચલન $= \frac{2}{3} \sigma$ (લગભગ) છે.

(10) આ વિતરણનું સરેરાશ વિચલન $= \frac{4}{5} \sigma$ (લગભગ) છે.

(11) પ્રામાણ્ય વક્ર માટેનાં મહત્ત્વનાં ક્ષેત્રફળ નીચે પ્રમાણે છે :

(i) પ્રામાણ્ય વક્ર હેઠળનું કુલ ક્ષેત્રફળ 1 હોય છે અને $X = \mu$ આગળની શિરોલંબ રેખાની બંને તરફનાં ક્ષેત્રફળની કિંમત 0.5 હોય છે.

(ii) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $\mu - \sigma$ અને $\mu + \sigma$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.6826 છે, એટલે કે વક્રના $\mu \pm \sigma$ વચ્ચે આવતા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.6826 છે એમ કહી શકાય.

(iii) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $\mu - 2\sigma$ અને $\mu + 2\sigma$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.9545 છે.

(iv) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $\mu - 3\sigma$ અને $\mu + 3\sigma$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.9973 છે.

(v) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $\mu - 1.96\sigma$ અને $\mu + 1.96\sigma$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.95 છે.

(vi) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $\mu - 2.575\sigma$ અને $\mu + 2.575\sigma$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.99 છે.

3.5 પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણના ગુણધર્મો

પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણના કેટલાક અગત્યના ગુણધર્મો નીચે પ્રમાણે છે :

(1) આ વિતરણ સતત યાદચ્છિક ચલ માટેનું વિતરણ છે.

(2) આ વિતરણનો મધ્યક શૂન્ય (0) અને પ્રમાણિત વિચલન 1 છે.

(3) આ વિતરણ $Z = 0$ ને સાપેક્ષ સંમિત છે અને તેની વિષમતા શૂન્ય છે.

(4) આ વિતરણનો સંભાવના વક્ર સંપૂર્ણ ઘંટાકાર છે અને તેના છેડાઓ x-અક્ષને સ્પર્શતા નથી.

(5) આ વિતરણના પ્રથમ ચતુર્થકની અંદાજિત કિંમત –0.675 છે જ્યારે ત્રીજા ચતુર્થકની અંદાજિત કિંમત 0.675 છે.

(6) આ વિતરણ માટે ચતુર્થક વિચલનની અંદાજિત કિંમત $= \frac{2}{3}$ છે.

(7) આ વિતરણ માટે સરેરાશ વિચલનની અંદાજિત કિંમત $= \frac{4}{5}$ છે.

(8) પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્ર માટેનાં મહત્ત્વનાં ક્ષેત્રફળ નીચે પ્રમાણે છે :

(i) પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્ર હેઠળનું કુલ ક્ષેત્રફળ 1 છે અને $Z = 0$ શિરોલંબ રેખાથી બંને બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.5 થાય છે.

(ii) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $Z = -1$ અને $Z = +1$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.6826 છે એટલે કે વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $Z = \pm 1$ની વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.6826 છે.

(iii) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $Z = -2$ અને $Z = +2$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.9545 છે.

(iv) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $Z = -3$ અને $Z = +3$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.9973 છે.

(v) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $Z = -1.96$ અને $Z = +1.96$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.95 છે.

(vi) વક્રની શિરોલંબ રેખાઓ $Z = -2.575$ અને $Z = +2.575$ વચ્ચે આવેલા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ 0.99 છે.

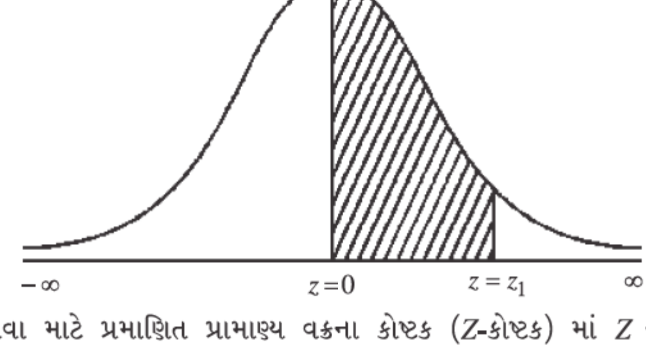
અહીં એ નોંધવું જરૂરી છે કે, પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z નું વિતરણ એ શૂન્ય મધ્યક અને 1 વિચરણવાળું પ્રામાણ્ય વિતરણ છે. Z ને પ્રમાણિત પ્રાપ્તાંક અથવા Z-પ્રાપ્તાંક તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે અને તે માપના એકમથી મુક્ત અથવા નિરપેક્ષ છે.

અગાઉ આપણે જોયું કે પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત આપેલી હોય તેમજ પ્રાચલોની કિંમતો જ્ઞાત હોય ત્યારે તેને અનુરૂપ Z-પ્રાપ્તાંકની કિંમત મેળવી પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી સંભાવના મેળવી શકીએ છીએ. હવે જ્યારે આપણે સંભાવના જાણતા હોઈએ ત્યારે તેના માટે Z-પ્રાપ્તાંક શોધવા માટેની રીત સમજવા માટે આપણે નીચેનાં ઉદાહરણો સમજીએ :

ઉદાહરણ 6 : જો પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z ની કિંમત 0 અને Z-પ્રાપ્તાંક (z_1) ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના 0.3925 હોય, તો Z-પ્રાપ્તાંક (z_1) ની શક્ય કિંમતો મેળવો.

અહીં પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z ની કિંમત $Z = 0$ અને $Z = z_1$ ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના 0.3925 છે. આ સંભાવના પ્રામાણ્ય વક્રના $Z = 0$ અને $Z = z_1$ વચ્ચેના પ્રદેશનાં ક્ષેત્રફળ જેટલું હોય છે. અહીં z_1 ની કિંમત ધન અથવા ઋણ હોઈ શકે.

ધારો કે z_1 ની કિંમત ધન છે તેથી $P(0 \le Z \le z_1) = 0.3925$ થાય.

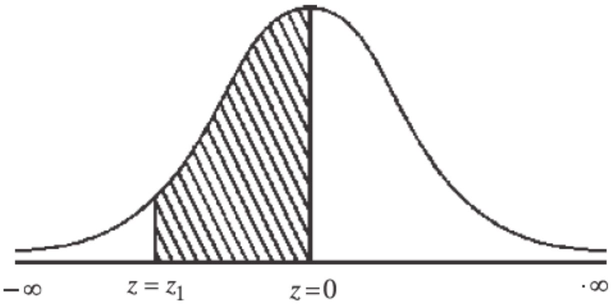


હવે z_1 ની કિંમત જાણવા માટે પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્રના કોષ્ટક (Z-કોષ્ટક) માં Z ની કિંમતનો પ્રથમ સ્તંભ જુઓ. $Z = 1.20$ માટેનું ક્ષેત્રફળ 0.384 મળે છે, જે 0.3925 કરતાં ઓછું છે. હવે આ હારમાં ક્રમિક કિંમતો વાંચતા $Z = 1.24$

માટેનું ક્ષેત્રફળ 0.3925 છે તેથી Z-પ્રાપ્તાંકની એક શક્ય કિંમત 1.24 થાય.

હવે ધારો કે z_1 ની કિંમત ઋણ છે

$\therefore P(z_1 \le Z \le 0) = 0.3925$



હવે આ વિતરણ સંમિત હોવાથી $P(z_1 \le Z \le 0) = P(0 \le Z \le z_1) = 0.3925$ થાય તેથી ઉપર પ્રમાણે $z_1 = 1.24$ જ મળશે પરંતુ અહીં આકૃતિ પરથી જોઈ શકાય છે કે, z_1 ની શિરોલંબ રેખા $Z = 0$ ની ડાબી બાજુ છે તેથી Z-પ્રાપ્તાંક $z_1 = -1.24$ થાય.

આમ, જો પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલની કિંમત $Z = 0$ અને $Z = z_1$ ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના 0.3925 હોય, તો Z-પ્રાપ્તાંક (z_1) ની શક્ય કિંમતો ± 1.24 થાય.

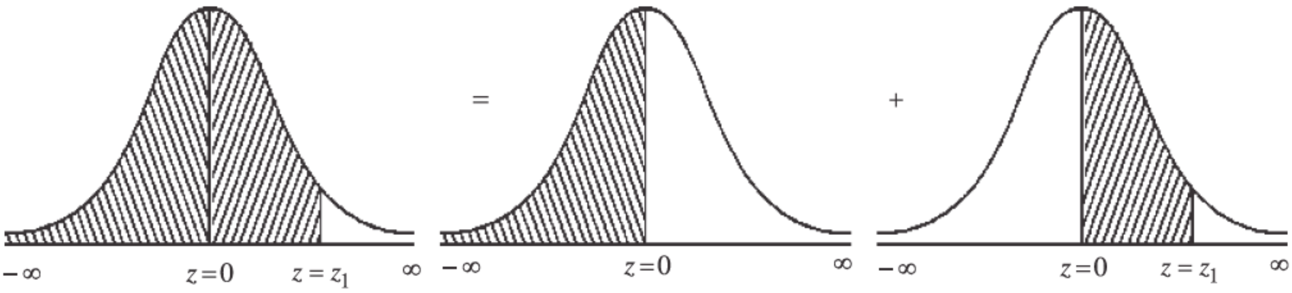
આમ, જો z_1 કિંમત અને $Z = 0$ ની જમણી બાજુ હોય તો તે કિંમત ધન થાય અને જો ડાબી બાજુ હોય તો તે કિંમત ઋણ થાય.

ઉદાહરણ 7 : જો પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z માટે મળતી સંભાવનાઓ નીચે પ્રમાણે હોય, તો Z-પ્રાપ્તાંક (z_1) ની કિંમત મેળવો :

(1) $Z = z_1$ ની ડાબી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.95 છે.

(2) $Z = z_1$ ની જમણી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.05 છે.

(1) અહીં $Z = z_1$ ની ડાબી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.95 છે એટલે કે $P(Z \le z_1) = 0.95$ છે. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્રમાં $Z = z_1$ ની શિરોલંબ રેખા દોરવા માટે વક્રનો ડાબા છેડાથી જમણા છેડા બાજુ જતાં 0.95 ક્ષેત્રફળ મળે તે રીતે નીચે પ્રમાણે આકૃતિ દોરાય.



$$\text{આમ } P(Z \le z_1) = P(-\infty < Z \le 0) + P(0 \le Z \le z_1) = 0.95$$

$$\therefore 0.5 + P(0 \le Z \le z_1) = 0.95$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.95 - 0.5$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.45$$

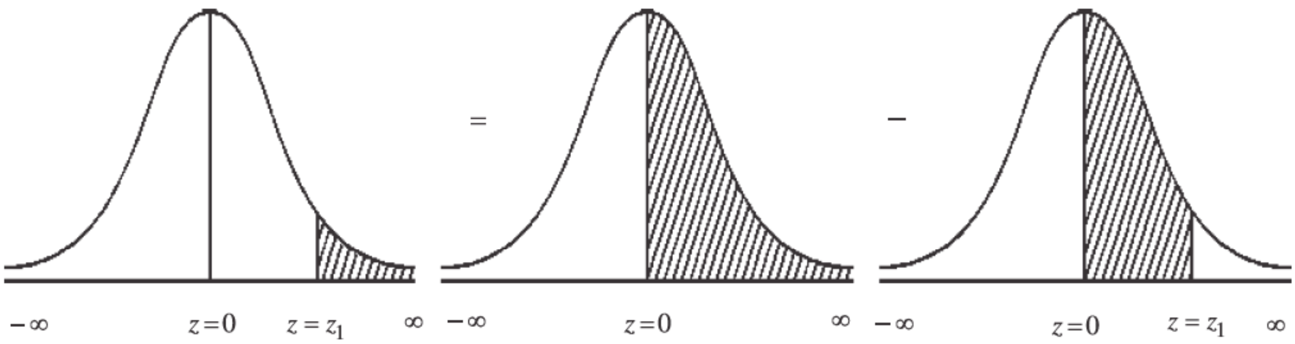
આ સંભાવના 0.45 ને અનુરૂપ z_1 ની કિંમત પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી સીધી મળતી નથી તેથી આપણે તેની અંદાજિત કિંમત નીચે મુજબ શોધીશું.

કોષ્ટક પરથી	ક્ષેત્રફળ	Z-પ્રાપ્તાંક
0.45 પહેલાની નજીકની કિંમત	0.4495	1.64
0.45 પછીની નજીકની કિંમત	0.4505	1.65
સરેરાશ કિંમત	0.4500	1.645

ઉપરના કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે $z_1 = 1.645$ થાય.

આમ, $P(Z \le z_1) = 0.95$ માટે $z_1 = 1.645$ થાય.

(2) $Z = z_1$ ની જમણી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.05 છે એટલે $P(Z \ge z_1) = 0.05$ છે. પ્રામાણ્ય વક્રમાં $Z = z_1$ ની શિરોલંબ રેખા એવી રીતે દોરવી જોઈએ કે જેથી વક્રના જમણા છેડાથી ડાબા છેડા બાજુ જતાં ક્ષેત્રફળ 0.05 થાય. આ પ્રમાણેનો વક્ર નીચે પ્રમાણે દોરી શકાય :



$$\therefore P(Z \ge z_1) = P(0 \le Z < \infty) - P(0 \le Z \le z_1) = 0.05$$

$$\therefore 0.5 - P(0 \le Z \le z_1) = 0.05$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.45$$

અગાઉ ગણતરી કર્યા મુજબ $z_1 = 1.645$ મળે.

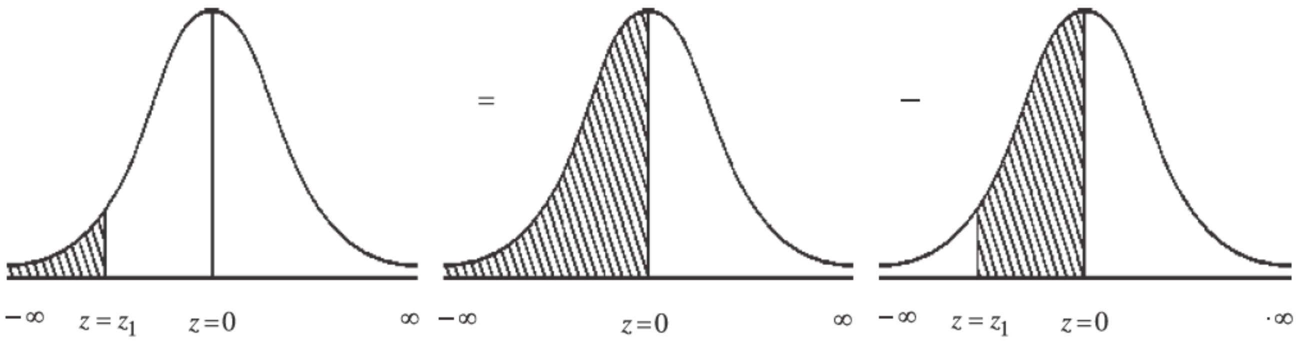
આમ, $P(Z \ge z_1) = 0.05$ માટે $z_1 = 1.645$ મળે.

ઉદાહરણ 8 : જો Z એ પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ હોય, તો નીચે આપેલી શરતોનું સમાધાન થાય તે રીતે Z-પ્રાપ્તાંક (z_1) ની કિંમત મેળવો :

(1) $Z = z_1$ ની ડાબી બાજુનું ક્ષેત્રફળ $= 0.10$ હોય.

(2) $Z = z_1$ ની જમણી બાજુનું ક્ષેત્રફળ $= 0.90$ હોય.

(1) અહીં $Z = z_1$ ની ડાબી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.10 છે એટલે કે $P(Z \le z_1) = 0.10$ છે. પ્રામાણ્ય વક્રમાં $Z = z_1$ ની શિરોલંબ રેખા એવી રીતે દોરવી જોઈએ કે જેથી વક્રના ડાબા છેડાથી જમણા છેડા બાજુ જતાં ક્ષેત્રફળ 0.10 થાય. આ પ્રમાણેનો વક્ર નીચે પ્રમાણે દોરી શકાય.



$$\therefore\ P(Z \le z_1) = P(-\infty < Z \le 0) - P(z_1 \le Z \le 0) = 0.10$$

$$\therefore\ 0.50 - P(z_1 \le Z \le 0) = 0.10$$

$$\therefore\ P(z_1 \le Z \le 0) = 0.5 - 0.10$$

$$\therefore\ P(0 \le Z \le z_1) = 0.40 \quad (\because \text{ સંમિતતા})$$

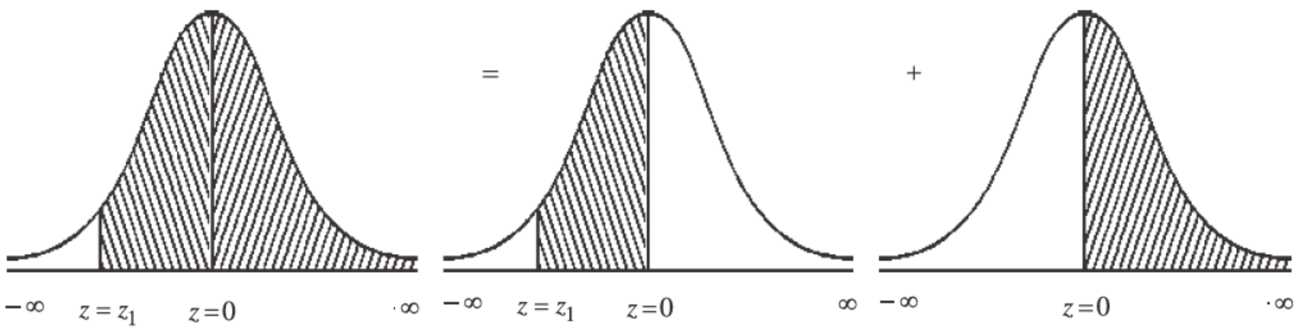
આ સંભાવના 0.40 ને અનુરૂપ z_1 ની કિંમત પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી સીધી મળતી નથી તેથી આપણે તેની અંદાજિત કિંમત નીચે મુજબ શોધીશું.

કોષ્ટક પરથી	ક્ષેત્રફળ	Z-પ્રાપ્તાંક
0.40 પહેલાની નજીકની કિંમત	0.3997	1.28
0.40 પછીની નજીકની કિંમત	0.4015	1.29
સરેરાશ કિંમત	0.4006	1.285

ઉપરના કોષ્ટકમાં 0.40 ની નજીકની કિંમત 0.3997 છે અને તેને અનુરૂપ Z-પ્રાપ્તાંકની કિંમત 1.28 છે તેમજ z_1 એ $Z = 0$ ની ડાબી બાજુ હોવાથી $z_1 = -1.28$ થાય.

આમ $P(Z \le z_1) = 0.10$ માટે $z_1 = -1.28$ થાય.

(2) $Z = z_1$ ની જમણી બાજુનું ક્ષેત્રફળ = 0.90 થાય એટલે કે $P(Z \ge z_1) = 0.90$ પ્રામાણ્ય વક્રમાં $Z = z_1$ ની શિરોલંબ રેખા એવી રીતે દોરવી જોઈએ કે જેથી વક્રના જમણા છેડાથી ડાબા છેડા બાજુ જતાં ક્ષેત્રફળ 0.90 થાય. આ પ્રમાણેનો વક્ર નીચે પ્રમાણે દોરી શકાય.



$$P(Z \ge z_1) = P(z_1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z < \infty) = 0.90$$

$$\therefore\ P(z_1 \le Z \le 0) + 0.50 = 0.90$$

$$\therefore\ P(z_1 \le Z \le 0) = 0.40$$

$$\therefore\ P(0 \le Z \le z_1) = 0.40 \quad (\because \text{ સંમિતતા})$$

અગાઉ આપણે જોયું તેમ $z_1 = -1.28$ મળે છે.

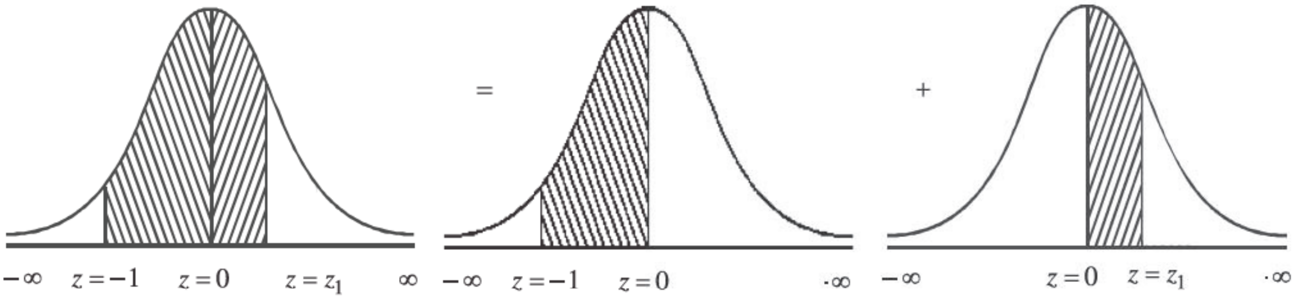
આમ, $P(Z \ge z_1) = 0.90$ માટે $z_1 = -1.28$ થાય.

ઉદાહરણ 9 : જો Z એ પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ હોય અને z_1 એ Z-પ્રાપ્તાંક દર્શાવતો હોય, તો નીચેની શરતોનું સમાધાન કરી તેવી z_1 ની કિંમતો મેળવો.

(1) $\boldsymbol{P(-1 \le Z \le z_1) = 0.5255}$

(2) $\boldsymbol{P(z_1 \le Z \le 2) = 0.7585}$

(1) અહીં $P(-1 \le Z \le z_1) = 0.5255$ આપેલું છે પ્રામાણ્ય વક્રમાં $Z = -1$ ની શિરોલંબ રેખા દોર્યા પછી તેની જમણી બાજુ પર $Z = z_1$ ની શિરોલંબ રેખા એવી રીતે દોરવી જોઈએ કે જેથી તેમની વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ 0.5255 જેટલું થાય. આ પ્રમાણેનો વક્ર નીચે પ્રમાણે દોરી શકાય.



$$P(-1 \le Z \le z_1) = P(-1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le z_1) = 0.5255$$

$$\therefore P(0 \le Z \le 1) + P(0 \le Z \le z_1) = 0.5255 \quad (\because \text{ સંમિતતા})$$

$$\therefore 0.3413 + P(0 \le Z \le z_1) = 0.5255$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.5255 - 0.3413$$

$$\therefore\ P(0 \le Z \le z_1) = 0.1842$$

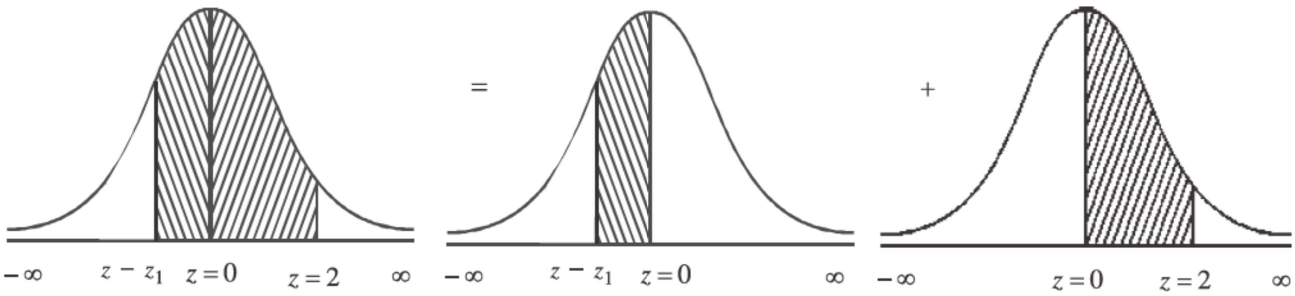
પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરીને Z-પ્રાપ્તાંક z_1 ની અંદાજિત કિંમત નીચેના કોષ્ટક પરથી મેળવી શકાય.

કોષ્ટક પરથી	**ક્ષેત્રફળ**	***Z*-પ્રાપ્તાંક**
0.1842 પહેલાની નજીકની કિંમત	0.1808	0.47
0.1842 પછીની નજીકની કિંમત	0.1844	0.48
સરેરાશ કિંમત	0.1826	**0.475**

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે, ક્ષેત્રફળ 0.1842 ની નજીક હોય તેવી કિંમત 0.1844 છે અને તેને અનુરૂપ *Z*-પ્રાપ્તાંકની કિંમત 0.48 છે તેથી $Z_1 = 0.48$ લઈશું.

આમ, $P(-1 \le Z \le z_1) = 0.5255$ માટે $z_1 = 0.48$ થાય.

(2) $P(z_1 \le Z \le 2) = 0.7585$ આપેલું છે. પ્રામાણ્ય વક્રમાં $Z = 2$ ની શિરોલંબ રેખા દોર્યા પછી તેની ડાબી બાજુ પર $Z = z_1$ ની શિરોલંબ રેખા એવી રીતે દોરવી જોઈએ કે જેથી તેમની વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ 0.7585 જેટલું થાય. આ પ્રમાણેનો વક્ર નીચે મુજબ દોરી શકાય.



$$P(z_1 \le Z \le 2) = P(z_1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 2) = 0.7585$$

$$\therefore P(z_1 \le Z \le 0) + 0.4772 = 0.7585$$

$$\therefore P(z_1 \le Z \le 0) = 0.7585 - 0.4772$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.2813 \quad (\because \text{ સંમિતતા})$$

પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરીને z_1 ની અંદાજિત કિંમત નીચેના કોષ્ટક પરથી નક્કી કરી શકાય.

કોષ્ટક પરથી	ક્ષેત્રફળ	*Z*-પ્રાપ્તાંક
0.2813 પહેલાની નજીકની કિંમત	0.2794	0.77
0.2813 પછીની નજીકની કિંમત	0.2823	0.78
સરેરાશ કિંમત	0.2809	0.775

ઉપરના કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે, 0.2813 ની નજીકની કિંમત 0.2809 છે અને તેને અનુરૂપ *Z*-પ્રાપ્તાંક 0.775 છે. અહીં *Z*-પ્રાપ્તાંક $Z = 0$ ની ડાબી બાજુ હોવાથી $z_1 = -0.775$ થાય.

આમ, $P(z_1 \le Z \le 2) = 0.7585$ માટે $z_1 = -0.775$ થાય.

પ્રવૃત્તિ

તમારા રહેઠાણની આસપાસ રહેતા પુખ્તવયના 30 વ્યક્તિઓનાં વજનનો મધ્યક (કિગ્રામાં) અને પ્રમાણિત વિચલન (કિગ્રા)માં મેળવો. આ સમૂહના વ્યક્તિઓનું વજન તમે શોધેલ મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલનવાળા પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે તેમ ધારીને (1) સૌથી વધુ વજન ધરાવતા 5 % વ્યક્તિઓનું ઓછામાં ઓછું વજન તેમજ (2) સૌથી ઓછુ વજન ધરાવતા 15 % વ્યક્તિઓનું વધુમાં વધુ વજનનો અંદાજ મેળવો.

3.6 ઉદાહરણો

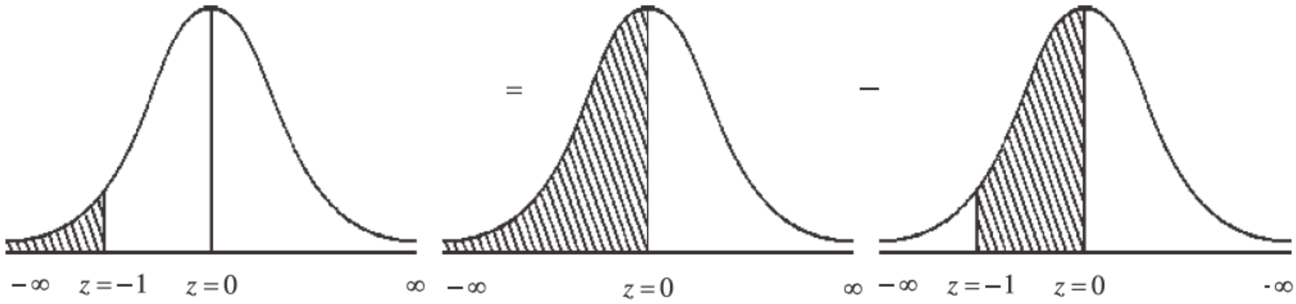
ઉદાહરણ 10 : શહેરના એક પેટ્રોલ પંપ પર થતું પેટ્રોલનું દૈનિક વેચાણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે અને તેના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન અનુક્રમે 33,000 લિટર અને 3000 લિટર છે. (1) કોઈ એક માસ દરમિયાન પેટ્રોલ પંપ પરથી પેટ્રોલનું દૈનિક વેચાણ 30,000 લિટરથી ઓછું થયું હોય તેવા દિવસોની ટકાવારી મેળવો. (2) મે માસના કેટલા દિવસો દરમિયાન પેટ્રોલનું વેચાણ 32,000 લિટર અને 35,000 લિટરની વચ્ચે હોઈ શકે ?

અહીં X = પેટ્રોલ પંપ પર થતુ પેટ્રોલનું દૈનિક વેચાણ (લિટરમાં) તેમજ $\mu = 33{,}000$ લિટર અને $\sigma = 3000$ લિટર છે.

(1) પેટ્રોલનું વેચાણ 30,000 લિટરથી ઓછું હોવાની સંભાવના

$$= P(X \le 30000) \qquad = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{30000-33000}{3000}\right)$$

$$= P(Z \le -1)$$



$$= P(-\infty < Z \le 0) - P(-1 \le Z \le 0)$$

$$= 0.5 - P(0 \le Z \le 1) \ (\because \text{ સંમિતતા})$$

$$= 0.5 - 0.3413$$

$$= 0.1587$$

$\therefore$ કોઈ એક માસ દરમિયાન પેટ્રોલનું દૈનિક વેચાણ 30,000 લિટરથી ઓછુ હોય તેવા દિવસોની ટકાવારી

$$= 0.1587 \times 100$$

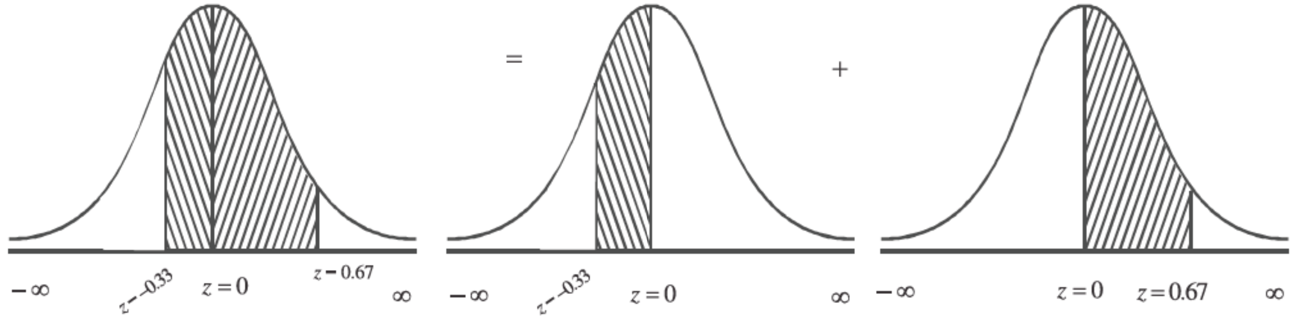
$$= 15.87\ \%$$

આમ, કોઈ એક માસના 15.87 % દિવસો દરમિયાન પેટ્રોલનું દૈનિક વેચાણ 30,000 લિટરથી ઓછુ થયું હશે.

(2) મે માસ દરમિયાન પેટ્રોલનું દૈનિક વેચાણ 32,000 અને 35,000 લિટરની વચ્ચે હોવાની સંભાવના

$$= P(32000 \le X \le 35000) \ = P\left(\frac{32000-33000}{3000} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{35000-33000}{3000}\right)$$

$$= P(-0.33 \le Z \le 0.67)$$



$$= P(-0.33 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le 0.67)$$

$$= P(0 \le Z \le 0.33) + 0.2486 \qquad (\because \text{ સંમિતતા})$$

$$= 0.1293 + 0.2486$$

$$= 0.3779$$

હવે મે માસના કુલ દિવસોની સંખ્યા $N = 31$ તેથી મે માસમાં પેટ્રોલનું વેચાણ 32,000 લિટર અને 35,000 લિટરની વચ્ચે હોય તેવા દિવસોની અપેક્ષિત સંખ્યા $= 31 \times 0.3779$

$= 11.71$

$\simeq 12$ દિવસ (લગભગ)

આમ, મે માસના લગભગ 12 દિવસો માટે પેટ્રોલનું દૈનિક વેચાણ 32,000 લિટર અને 35,000 લિટરની વચ્ચે હશે.

ઉદાહરણ 11 : એક શાળાના કુલ વિદ્યાર્થીઓમાંથી પસંદ કરેલ 200 વિદ્યાર્થીઓએ 100 ગુણની એક પરીક્ષામાં મેળવેલ ગુણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. ગુણના વિતરણનો મધ્યક 60 અને પ્રમાણિત વિચલન 8 છે.

(1) વિશિષ્ટ શિષ્યવૃત્તિ માટે લાયકાતનું ધોરણ 70 કે તેથી વધુ ગુણ હોય, તો વિશિષ્ટ શિષ્યવૃત્તિ મેળવતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

(2) સૌથી વધુ ગુણ મેળવતા 10 % વિદ્યાર્થીઓના ઓછામાં ઓછા ગુણ શોધો.

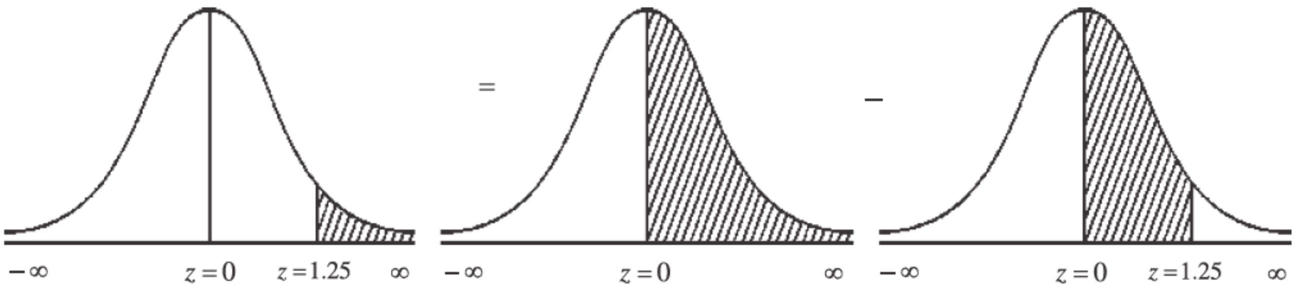
અહીં X = વિદ્યાર્થીએ મેળવેલ ગુણ

તેમજ $N = 200$, $\mu = 60$ અને $\sigma = 8$ છે.

(1) વિદ્યાર્થીનાં ગુણ 70 કે તેથી વધુ હોવાની સંભાવના

$$= P(X \ge 70) \quad = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \ge \frac{70-60}{8}\right)$$

$$= P(Z \ge 1.25)$$



$$= P(0 \le Z < \infty) - P(0 \le Z \le 1.25)$$

$$= 0.5 - 0.3944$$

$$= 0.1056$$

$\therefore$ 70 કે તેથી વધુ ગુણ મેળવતા વિદ્યાર્થીઓની અપેક્ષિત સંખ્યા

$= 200 \times 0.1056$

$= 21.12$

$\simeq 21$ (લગભગ)

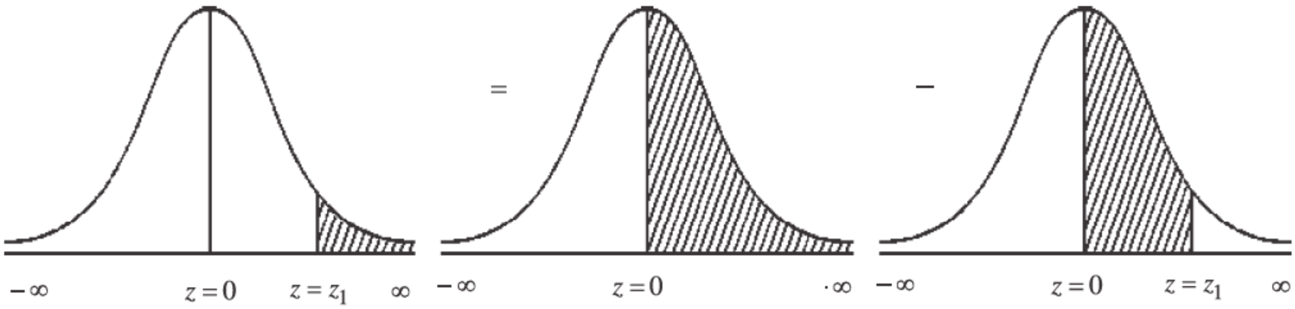
આમ, વિશિષ્ટ શિષ્યવૃત્તિ મેળવતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા લગભગ 21 થાય.

(2) ધારો કે સૌથી વધુ ગુણ મેળવતા 10 % વિદ્યાર્થીઓના ઓછામાં ઓછા ગુણ x_1 છે. તેથી કોઈ પણ વિદ્યાર્થીના ગુણ x_1 કે તેથી વધુ હોવાની સંભાવના 0.10 થશે.

$\therefore \quad P(X \ge x_1) = 0.10$

$$\therefore \quad P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{x_1-60}{8}\right) = 0.10$$

$$\therefore \quad P(Z \geq z_1) = 0.10, \text{ જ્યાં } z_1 = \frac{x_1-60}{8} \text{ છે.}$$



$$\therefore 0.10 = P(0 \leq Z < \infty) - P(0 \leq Z \leq z_1)$$

$$\therefore 0.10 = 0.50 - P(0 \leq Z \leq z_1)$$

$$\therefore P(0 \leq Z \leq z_1) = 0.40$$

પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરીને z_1 ની અંદાજિત કિંમત નીચેના કોષ્ટક પરથી મેળવીશું.

કોષ્ટક પરથી	**ક્ષેત્રફળ**	***Z*-પ્રાપ્તાંક**
0.40 પહેલાંની નજીકની કિંમત	0.3997	1.28
0.40 પછીની નજીકની કિંમત	0.4015	1.29
સરેરાશ કિંમત	0.4006	1.285

આમ ઉપરના કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે, 0.40 ની નજીકની કિંમત 0.3997 છે અને તેને અનુરૂપ *Z*-પ્રાપ્તાંક 1.28 છે. તેથી,

$$z_1 = 1.28$$

$$\therefore \quad \frac{x_1-60}{8} = 1.28$$

$$\therefore \ x_1 - 60 = 10.24$$

$$\therefore \ x_1 = 70.24$$

આમ, સૌથી વધુ હોશિયાર 10 % વિદ્યાર્થીઓના ઓછામાં ઓછા ગુણ $70.24 \simeq 70$ હશે.

ઉદાહરણ **12 : 1000 કર્મચારીઓના એક સમૂહનું માસિક વેતનનું વિતરણ પ્રામાણ્ય છે. વિતરણનો મધ્યક ₹ 15,000 અને પ્રમાણિત વિચલન ₹ 4000 છે. આ માહિતી પરથી (1) મધ્યના 60 % કર્મચારીઓના માસિક વેતનનો ગાળો મેળવો. (2) જો 250 કર્મચારીઓનું માસિક વેતન ₹ 15,000 થી કોઈ નિશ્ચિત વેતન ₹ x_1 ની વચ્ચે હોય, તો x_1 ની કિંમત શોધો.**

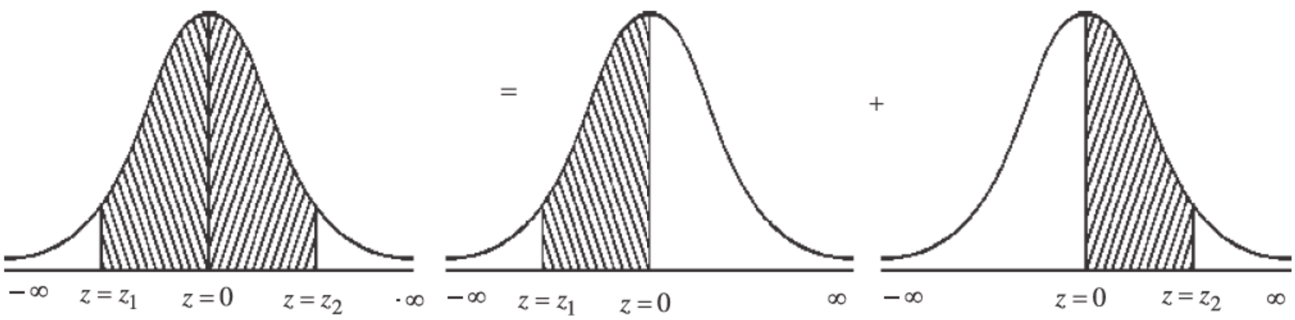
અહીં X = કર્મચારીઓનું માસિક વેતન તેમજ $\mu =$ ₹ 15,000 અને $\sigma =$ ₹ 4000 છે. $N = 1000$

(1) ધારો કે બરાબર વચ્ચેના 60 % કર્મચારીઓના માસિક વેતનનો ગાળો ₹ x_1 અને ₹ x_2 છે જ્યાં x_1 અને x_2 એ મધ્યક μ થી બંને બાજુ સમાન અંતરે છે. હવે કર્મચારીઓનું માસિક વેતન x_1 અને x_2 ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના 0.60 થાય.

એટલે કે $P(x_1 \le X \le x_2) = 0.60$ થાય.

$\therefore P\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) = 0.60$

$\therefore P(z_1 \le Z \le z_2) = 0.60$ જ્યાં $z_1 = \frac{x_1 - 15000}{4000}$ અને $z_2 = \frac{x_2 - 15000}{4000}$ છે.



$$0.60 = P(z_1 \le Z \le 0) + P(0 \le Z \le z_2)$$

હવે x_1 અને x_2 એ મધ્યક μ થી સમાન અંતરે આવેલા હોવાથી $Z = 0$ એ $Z = z_1$ અને $Z = z_2$ વચ્ચેના ક્ષેત્રફળ (સંભાવના)ના બે સરખા ભાગ કરતુ હોવાથી $z_1 = -z_2$ થાય. તેમજ $P(z_1 \le Z \le 0) = 0.30$ અને $P(0 \le Z \le z_2) = 0.30$ થાય.

હવે પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી z_1 અને z_2 ની અંદાજિત કિંમતો નીચે પ્રમાણે મેળવી શકાય.

કોષ્ટક પરથી	ક્ષેત્રફળ	Z-પ્રાપ્તાંક
0.30 પહેલાંની નજીકની કિંમત	0.2995	0.84
0.30 પછીની નજીકની કિંમત	0.3023	0.85
સરેરાશ કિંમત	0.3009	0.845

0.30 ની નજીકની કિંમત 0.2995 છે તેથી તેને અનુરૂપ Z-પ્રાપ્તાંકની કિંમત 0.84 લઈશું.

$\therefore z_1 = -0.84$ અને $z_2 = 0.84$

$\therefore \frac{x_1 - 15000}{4000} = -0.84$ અને $\frac{x_2 - 15000}{4000} = 0.84$

$\therefore x_1 - 15000 = -3360$ અને $x_2 - 15000 = 3360$

$\therefore\ x_1 = 11640$ અને $x_2 = 18360$

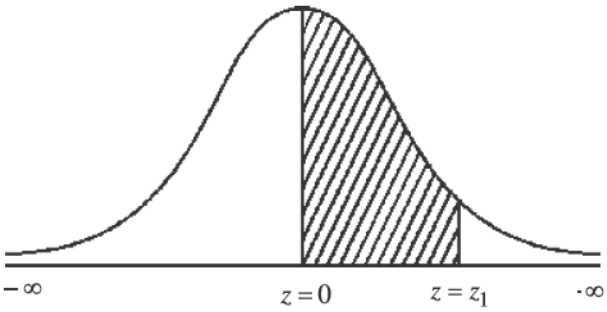
આમ, બરાબર વચ્ચે આવતા 60 % કર્મચારીઓના માસિક વેતનનો ગાળો ₹ 11,640 થી ₹ 18,360 થશે.

(2) 250 કર્મચારીઓનું માસિક વેતન ₹ 15,000 અને ₹ x_1 ની વચ્ચે છે.

તેથી $P(15000 \le X \le x_1) = \frac{250}{1000}$

$\therefore\ P\left(\frac{15000-15000}{4000} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_1-15000}{4000}\right) = 0.25$

$\therefore\ P(0 \le Z \le z_1) = 0.25$ જ્યાં $z_1 = \frac{x_1-15000}{4000}$



પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી z_1 ની અંદાજિત કિંમત નીચેના કોષ્ટક પરથી મેળવી શકાય.

કોષ્ટક પરથી	ક્ષેત્રફળ	Z-પ્રાપ્તાંક
0.25 પહેલાની નજીકની કિંમત	0.2486	0.67
0.25 પછીની નજીકની કિંમત	0.2518	0.68
સરેરાશ કિંમત	0.2502	0.675

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે $z_1 = 0.675$

$\therefore\ \frac{x_1-15000}{4000} = 0.675$

$\therefore\ x_1 - 15000 = 2700$

$\therefore\ x_1 = 17700$

આમ, 250 કર્મચારીઓનું માસિક વેતન ₹ 15,000 અને ₹ 17,700 ની વચ્ચે હશે.

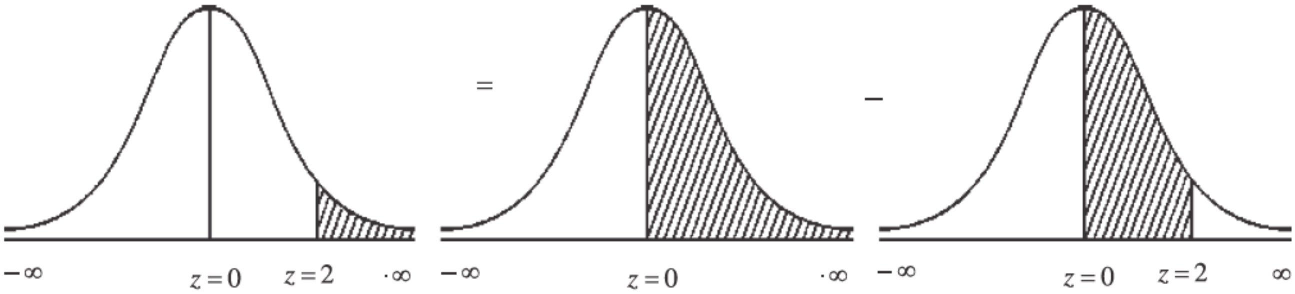
ઉદાહરણ 13 : એક ડિપાર્ટમેન્ટલ સ્ટોરમાં ખરીદી કરતાં ગ્રાહકોની ખરીદીના બિલની રકમ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે અને તેનો મધ્યક ₹ 800 છે જ્યારે પ્રમાણિત વિચલન ₹ 200 છે. કોઈ એક દિવસે ₹ 1200થી વધુ રકમની બિલવાળા ગ્રાહકોની સંખ્યા 57 છે, તો તે દિવસે સ્ટોરમાં આવેલ ગ્રાહકોની સંખ્યા શોધો.

અહીં X = ગ્રાહકોની ખરીદીના બિલની રકમ છે. $\mu = 800$ અને $\sigma = 200$ આપેલું છે. ધારો કે તે દિવસે સ્ટોરમાં આવેલા ગ્રાહકોની સંખ્યા N છે.

ગ્રાહકે કરેલ ખરીદીના બિલની રકમ ₹ 1200 થી વધુ હોવાની સંભાવના

$$= P(X \geq 1200) \quad = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{1200-800}{200}\right)$$

$$= P(Z \geq 2)$$



$$= P(0 \leq Z < \infty) - P(0 \leq Z \leq 2)$$

$$= 0.5 - 0.4772 \text{ (Z-કોષ્ટક પરથી)}$$

$$= 0.0228$$

હવે ખરીદીની બિલની રકમ ₹ 1200થી વધુ હોય

તેવા ગ્રાહકોની અપેક્ષિત સંખ્યા = $N \times P(x \geq 1200)$

$$57 = N \times 0.0228$$

$$\therefore \quad N = \frac{57}{0.0228}$$

$$\therefore \quad N = 2500$$

$\therefore$ તે દિવસે સ્ટોરમાં આવેલ કુલ ગ્રાહકોની સંખ્યા 2500 હશે.

ઉદાહરણ 14 : 1000 વ્યક્તિઓના એક સમૂહમાં વ્યક્તિઓની ઊંચાઈનાં અવલોકનોનો મધ્યક 165 સેમી અને વિચરણ 100 (સેમી)^2 છે. આ વ્યક્તિઓની ઊંચાઈનું વિતરણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. આ માહિતી પરથી ત્રીજો દશાંશક અને 60 મો શતાંશક શોધી તેનું અર્થઘટન કરો.

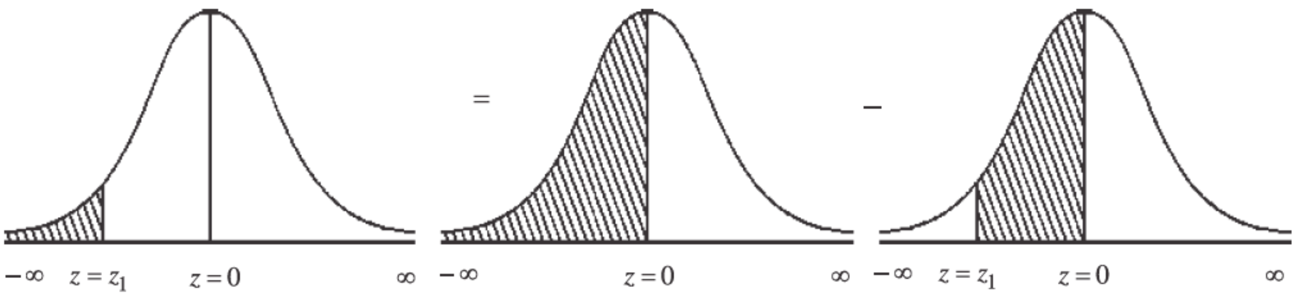
અહીં X = સમૂહમાં વ્યક્તિની ઊંચાઈ છે. તેમજ $N = 1000$, $\mu = 165$ અને $\sigma^2 = 100$ તેથી $\sigma = 10$

આપેલી માહિતીનો ત્રીજો દશાંશક (D_3) મેળવવાનો છે. હવે D_3 ની વ્યાખ્યા પ્રમાણે આપેલી માહિતીમાં 30 % અવલોકનોની કિંમત D_3 જેટલી કે તેથી ઓછી હોય.

$$\therefore P(X \leq D_3) = \frac{30}{100}$$

$$\therefore P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{D_3-165}{100}\right) = 0.30$$

$$\therefore P(Z \leq Z_1) = 0.30 \text{ જ્યાં } z_1 = \frac{D_3-165}{10} \text{ છે.}$$



$$0.30 = P(-\infty < Z \le 0) - P(z_1 \le Z \le 0)$$

$$0.30 = 0.50 - P(z_1 \le Z \le 0)$$

$$\therefore P(z_1 \le Z \le 0) = 0.50 - 0.30$$

$$= 0.20$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.20 \quad (\because \text{ સંમિતતા})$$

પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી z_1 ની અંદાજિત કિંમત નીચેના કોષ્ટક પરથી મેળવી શકાય.

કોષ્ટક પરથી	ક્ષેત્રફળ	Z-પ્રાપ્તાંક
0.2 પહેલાની નજીકની કિંમત	0.1985	0.52
0.2 પછીની નજીકની કિંમત	0.2019	0.53
સરેરાશ કિંમત	0.2002	0.525

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે, 0.20 ની નજીકની કિંમત 0.2002 છે અને તેને અનુરૂપ Z પ્રાપ્તાંકની કિંમત 0.525 છે તેમજ z_1 એ $Z = 0$ ની ડાબી બાજુ હોવાથી

$$z_1 = -0.525$$

$$\therefore \frac{D_3 - 165}{10} = -0.525$$

$$\therefore D_3 - 165 = -5.25$$

$$\therefore D_3 = 159.75$$

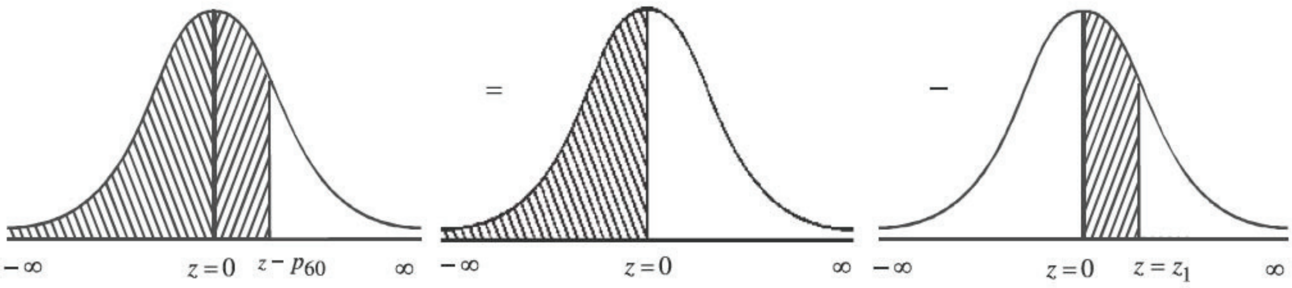
આમ સમૂહમાં 30 % વ્યક્તિઓની ઊંચાઈ 159.75 સેમીથી ઓછી હશે.

હવે 60માં શતાંશકની (P_{60}) ની વ્યાખ્યા પ્રમાણે આપેલી માહિતીના 60 % અવલોકનોની કિંમત P_{60} કે તેથી ઓછી હોય.

$$\therefore P(X \le P_{60}) = \frac{60}{100}$$

$$\therefore P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{P_{60}-165}{10}\right) = 0.60$$

$$\therefore P(Z \le z_1) = 0.60 \text{ જ્યાં } z_1 = \frac{P_{60}-165}{10} \text{ છે.}$$



$$0.60 = P(-\infty < Z \le 0) + P(0 \le Z \le z_1)$$

$$0.60 = 0.50 + P(0 \le Z \le z_1)$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.10$$

પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી z_1 ની અંદાજિત કિંમત નીચેના કોષ્ટક પરથી મેળવી શકાય.

કોષ્ટક પરથી	ક્ષેત્રફળ	Z-પ્રાપ્તાંક
0.10 પહેલાની નજીકની કિંમત	0.0987	0.25
0.10 પછીની નજીકની કિંમત	0.1026	0.26
સરેરાશ કિંમત	0.10065	0.255

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે, 0.10 ની નજીકની કિંમત 0.10065 છે અને તેને અનરૂપ Z પ્રાપ્તાંક 0.255 છે તેથી $z_1 = 0.255$

$$\therefore \frac{P_{60}-165}{10} = 0.255$$

$$\therefore P_{60} - 165 = 2.55$$

$$\therefore P_{60} = 167.55$$

આમ આપેલ સમૂહમાં 60 % વ્યક્તિઓની ઊંચાઈ 167.55 સેમીથી ઓછી હશે.

ઉદાહરણ 15 : એક વીજળીના બલ્બ બનાવતી ઉત્પાદક કંપની દ્વારા ઉત્પાદિત કરેલ બલ્બનું આયુષ્ય (કલાકમાં) પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. તેનું સરેરાશ આયુષ્ય 2040 કલાક છે. જો 3.36 % બલ્બનું આયુષ્ય 2150 કલાકથી વધુ હોય, તો બલ્બના આયુષ્યનું વિચરણ શોધો.

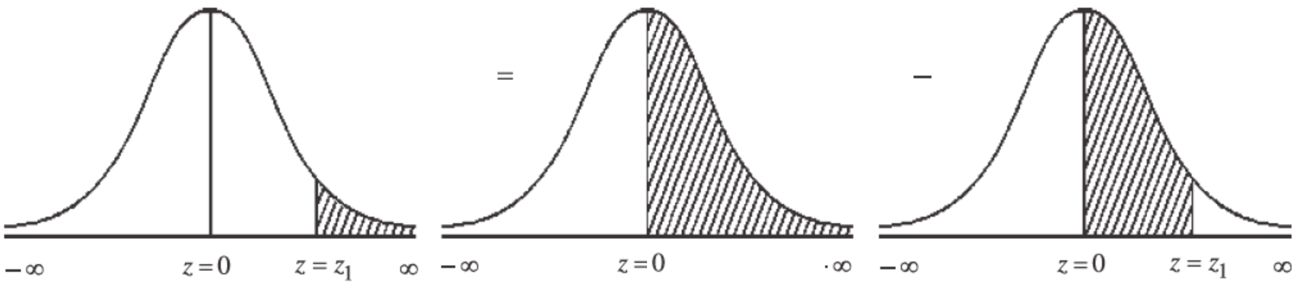
અહીં X = વીજળીના બલ્બનું આયુષ્ય છે તેમજ $\mu = 2040$ કલાક આપેલું છે. ધારો કે તેનું વિચરણ σ^2 છે.
હવે 3.36 % બલ્બનું આયુષ્ય 2150 કલાકથી વધુ છે.

$$\therefore P(X \ge 2150) = \frac{3.36}{100}$$

$$\therefore P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \ge \frac{2150-2040}{\sigma}\right) = 0.0336$$

$$\therefore P\left(Z \ge \frac{110}{\sigma}\right) = 0.0336$$

$\therefore P(Z \ge z_1) = 0.0336$ જ્યાં $z_1 = \frac{110}{\sigma}$ છે.



$$0.0336 = P(0 \le Z < \infty) - P(0 \le Z \le z_1)$$

$$0.0336 = 0.5 - P(0 \le Z \le z_1)$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.5 - 0.0336$$

$$\therefore P(0 \le Z \le z_1) = 0.4664$$

પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી Z – પ્રાપ્તાંક 1.83 માટે $P(0 \le Z \le 1.83) = 0.4664$ મળે છે.

$$\therefore z_1 = 1.83$$

$$\therefore \frac{110}{\sigma} = 1.83$$

$$\therefore \sigma = \frac{110}{1.83}$$

$$\therefore \sigma = 60.11$$

$\therefore$ વિચરણ $\sigma^2 = 3613.21$

આમ, ઉત્પાદિત થતાં વીજળીના બલ્બના આયુષ્યનું વિચરણ 3613.21 (કલાક)^2 હશે.

ઉદાહરણ 16 : કરિયાણાની દુકાન ચલાવતા એક વેપારીને તેના દૈનિક વેપારમાં થતો નફો પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. નફાનું વિચરણ 22,500 (₹)^2 છે, તેમજ દૈનિક નફો ₹ 1000થી ઓછો હોય તેની સંભાવના 0.0918 છે, તો વેપારીનો દૈનિક સરેરાશ નફો શોધો.

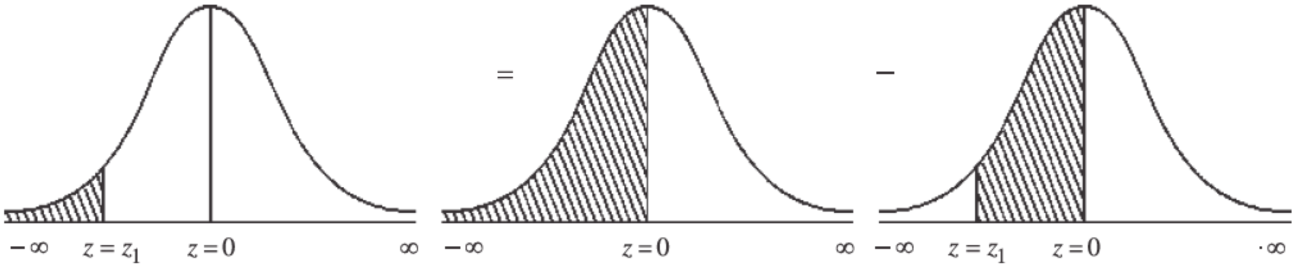
અહીં X = વેપારીને તેના વેપારમાં થતો દૈનિક નફો છે તેમજ $\sigma^2 = 22500$ છે, તેથી $\sigma = 150$ થાય અને ધારો કે સરેરાશ નફો μ છે.

હવે દૈનિક નફો ₹ 1000થી ઓછો હોય તેની સંભાવના = 0.0918

$$\therefore P(X \le 1000) = 0.0918$$

$$\therefore P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{1000-\mu}{150}\right) = 0.0918$$

$\therefore P(Z \le z_1) = 0.0918$ જ્યાં $z_1 = \frac{1000-\mu}{150}$



$$0.0918 = P(-\infty < Z \le 0) - P(z_1 \le Z \le 0)$$

$$0.0918 = 0.5 \ - P(z_1 < Z \le 0)$$

$$\therefore\ P(z_1 \le Z \le 0) = 0.5 - 0.0918$$

$$\therefore\ P(0 \le Z \le z_1) = 0.4082 \quad (\because \text{ સંમિતતા})$$

પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી Z = પ્રાપ્તાંક 1.33 મળે છે.

$$\therefore\ z_1 = -1.33$$

$$\therefore\ \frac{1000-\mu}{150} = -1.33$$

$$\therefore\ \mu = 1199.5$$

આમ, વેપારીને તેનો વેપારમાં થતો સરેરાશ દૈનિક નફો ₹ 1199.5 હશે.

ઉદાહરણ 17 : ઉનાળા દરમિયાન કોઈ એક શહેરનું મહત્તમ તાપમાન પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. કોઈ એક દિવસે શહેરનું મહત્તમ તાપમાન 31° સેલ્સિયસથી વધુ હોવાની સંભાવના 0.3085 છે જ્યારે અન્ય કોઈ દિવસે મહત્તમ તાપમાન 27° સેલ્સિયસથી ઓછું હોવાની સંભાવના 0.0668 છે, તો શહેરના મહત્તમ તાપમાનના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન મેળવો.

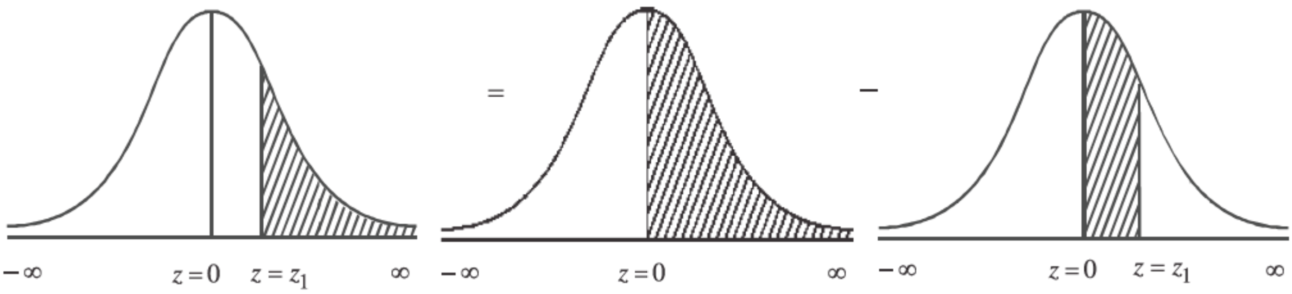
અહીં X = શહેરનું મહત્તમ તાપમાન (સેલ્સિયસમાં) ધારો કે તેનો મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચન σ છે.

હવે મહત્તમ તાપમાન 31° સેલ્સિયસથી વધુ હોવાની સંભાવના = 0.3085

$$\therefore\ P(X \ge 31) = 0.3085$$

$$\therefore\ P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \ge \frac{31-\mu}{\sigma}\right) = 0.3085$$

$$\therefore\ P(Z \ge z_1) = 0.3085 = 0.3085 \text{ જ્યાં } z_1 = \frac{31-\mu}{\sigma}$$



$$0.3085 = P(0 \le Z < \infty) - P(0 \le Z \le z_1)$$

$$0.3085 = 0.5 \ - P(0 \le Z \le z_1)$$

$$\therefore\ P(0 \le Z \le z_1) = 0.5 - 0.3085$$

$$\therefore\ P(0 \le Z \le z_1) = 0.1915$$

પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી Z-પ્રાપ્તાંક 0.5 મળે છે

$$\therefore\ z_1 = 0.5$$

$$\therefore\ \frac{31-\mu}{\sigma} = 0.5$$

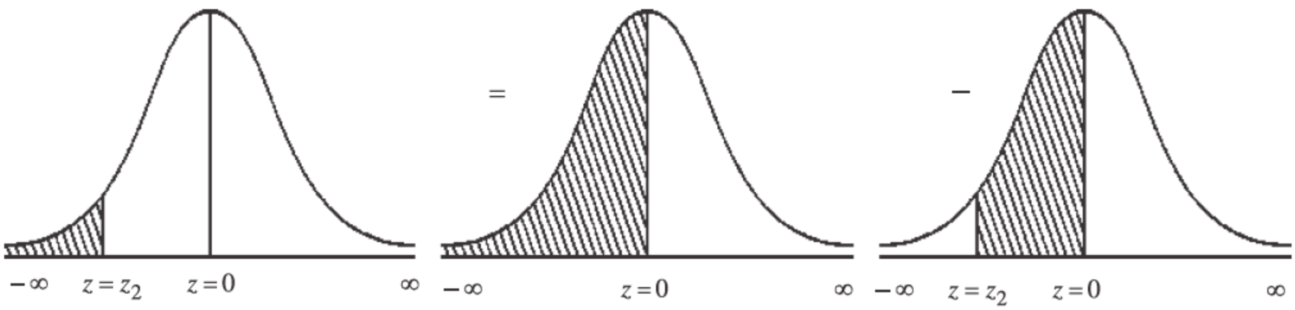
$$\therefore\ 31-\mu = 0.5\,\sigma \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

મહત્તમ તાપમાન 27° સેલ્સિયસથી ઓછું હોવાની સંભાવના = 0.0668

$$\therefore\ P(X \le 27) = 0.0668$$

$$\therefore\ P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{27-\mu}{\sigma}\right) = 0.0668$$

$$\therefore\ P(Z \le z_2) = 0.0668 \text{ જ્યાં } z_2 = \frac{27-\mu}{\sigma}$$



$$0.0668 = P(-\infty < Z \le 0) - P(z_2 \le Z \le 0)$$

$$\therefore\ 0.0668 = 0.5 - P(z_2 \le Z \le 0)$$

$$\therefore\ P(z_2 \le Z \le 0) = 0.5 - 0.0668$$

$$\therefore\ P(0 \le Z \le z_2) = 0.4332 \ (\because \text{ સંમિતતા})$$

પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના કોષ્ટક પરથી Z-પ્રાપ્તાંક 1.5 મળે છે.

$$\therefore\ z_2 = -1.5$$

$$\therefore\ \frac{27-\mu}{\sigma} = -1.5$$

$$\therefore\ 27 - \mu = -1.5\sigma \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) ને ઉકેલતા

$$31 - \mu = 0.5\,\sigma$$

$$27 - \mu = -1.5\,\sigma$$

$$-\quad +\quad +$$

$$4 = 2\sigma$$

$$\therefore\ \sigma = 2$$

સમીકરણ (1) માં $\sigma = 2$ મૂકતાં,

$$31 - \mu = 0.5(2)$$

$$\therefore\ 31 - \mu = 1$$

$$\therefore\ \mu = 30$$

આમ શહેરનું મહત્તમ તાપમાનનો મધ્યક 30° સેલ્સિયસ અને પ્રમાણિત વિચલન 2° સેલ્સિયસ હશે.

ઉદાહરણ 18 : એક પ્રામાણ્ય ચલ X નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય નીચે પ્રમાણે છે :

$$f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\quad e^{-\frac{1}{32}(x-50)^2}\;;\quad -\infty<x<\infty$$

આ વિતરણનાં પ્રાચલો મેળવો અને તે પરથી નીચેની કિંમતો શોધો :

(1) $P(52\le X\le 58)$ (2) $P(|X-45|\le 4)$

આપેલ સંભાવના વિધેયને પ્રામાણ્ય ચલ X નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય સાથે સરખાવીએ

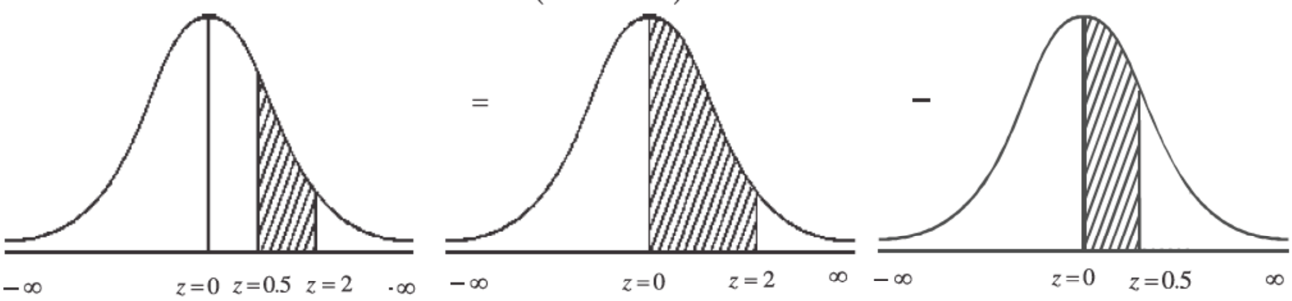
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\quad e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\;;\quad -\infty<x<\infty$$

અહીં $\sigma\sqrt{2\pi}=4\sqrt{2\pi}$ અને $\mu=50$

$\therefore\ \sigma=4$

(1) $P(52\le X\le 58)$ $=P\left(\frac{52-50}{4}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{58-50}{4}\right)$

$=P(0.5\le Z\le 2)$



$=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 0.5)$

$=0.4772\ -\ 0.1915$

$=0.2857$

આમ, $P(52\le X\le 58)=0.2857$ થાય.

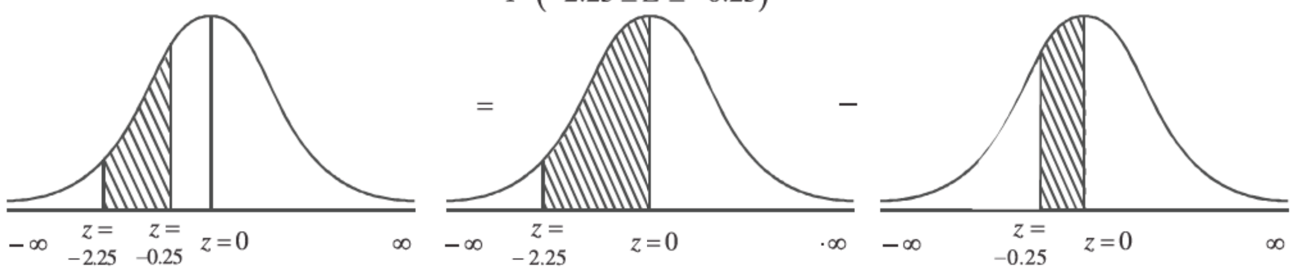
(2) $P(|X-45|\le 4)$ $=P(-4\le(X-45)\le 4)$ (માનાંકની વ્યાખ્યા)

$=P(-4+45\le(X-45)+45\le 4+45)$

$=P(41\le X\le 49)$

$=P\left(\frac{41-50}{4}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{49-50}{4}\right)$

$=P(-2.25\le Z\le -0.25)$



$$= P(-2.25 \le Z \le 0) - P(-0.25 \le Z \le 0)$$

$$= P(0 \le Z \le 2.25) - P(0 \le Z \le 0.25) \quad (\because \text{ સંમિતતા})$$

$$= 0.4878 - 0.0987$$

$$= 0.3891$$

આમ, $P(|X-45| \le 4) = 0.3891$ થાય.

ઉદાહરણ 19 : એક પ્રામાણ્ય ચલ X નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

$$f(x) = \text{ અચળાંક } \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-25}{10}\right)^2} \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

આ પરથી પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે નીચેની કિંમતોનો અંદાજ મેળવો :

(1) તૃતીય ચતુર્થક (2) ચતુર્થક વિચલન (3) સરેરાશ વિચલન

અહીં આપેલ સંભાવના ઘટત્વ વિધેયને, પ્રામાણ્ય ચલ X ના સંભાવના ઘટત્વ વિધેય સાથે સરખાવીએ

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

મધ્યક $\mu = 25$ અને પ્ર.વિ. $\sigma = 10$ મળશે.

(1) તૃતીય ચતુર્થક $Q_3 = \mu + 0.675\,\sigma$

$$= 25 + 0.675 \ (10)$$

$$= 25 + 6.75$$

$$= 31.75$$

(2) ચતુર્થક વિચલન $= \frac{2}{3} \ \sigma$

$$= \frac{2}{3} \ (10)$$

$$= \frac{20}{3}$$

(3) સરેરાશ વિચલન $= \frac{4}{5} \ \sigma$

$$= \frac{4}{5} \ (10)$$

$$= 8$$

આમ, આપેલ પ્રામાણ્ય વિતરણ માટેની માંગેલી કિંમતોનો અંદાજ અનુક્રમે 31.75, $\frac{20}{3}$ અને 8 થશે.

ઉદાહરણ 20 : એક પ્રામાણ્ય વિતરણના અંતિમ ચતુર્થકો અનુક્રમે 20 અને 50 છે, તો તે વિતરણના 95 % પ્રાપ્તાંકોને સમાવતી સીમાઓ મેળવો.

અહીં $Q_1 = 20$ અને $Q_3 = 50$ છે. પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે

મધ્યક = મધ્યસ્થ = બહુલક = $\frac{Q_3+Q_1}{2}$

$$\therefore\ \mu = \frac{50+20}{2}$$

$$\therefore\ \mu = 35$$

ચતુર્થક વિચલન = $\frac{2}{3}\ \sigma$

$$\therefore\ \frac{Q_3-Q_1}{2} = \frac{2}{3}\ \sigma$$

$$\therefore\ \frac{50-20}{2} \times \frac{3}{2} = \sigma$$

$$\therefore\ \sigma = 22.5$$

પ્રામાણ્ય વિતરણનાં 95 % અવલોકનો સમાવતી સીમાઓ $\mu \pm 1.96\,\sigma$ છે તેથી માંગેલો અંતરાલ (સીમાઓ)

$$\left(\mu - 1.96\sigma,\ \mu + 1.96\sigma\right)$$

$$\therefore\ \left(35 - 1.96\,(22.5),\ \mu + 1.96\,(22.5)\right)$$

$$\therefore\ \left(35 - 44.1,\ 35 + 44.1\right)$$

$$\therefore\ (-9.1,\ 79.1)$$

આમ, આપેલી માહિતી પરથી પ્રામાણ્ય વિતરણનાં 95 % અવલોકનો ધરાવતી સીમાઓ –9.1 થી 79.1 થાય.

ઉદાહરણ 21 : એક પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે પ્રથમ ચતુર્થક અને સરેરાશ વિચલન અનુક્રમે 20 અને 24 છે, તો તે વિતરણનાં બહુલકની કિંમતનો અંદાજ મેળવો.

અહીં Q_1 = 20 અને સરેરાશ વિચલન = 24 છે.

$$\therefore\ \frac{4}{5}\ \sigma = 24$$

$$\therefore\ \sigma = 24 \times \frac{5}{4}$$

$$\therefore\ \sigma = 30$$

હવે ચતુર્થક વિચલન = $\frac{2}{3}\ \sigma$

$$\therefore\ \frac{Q_3-Q_1}{2} = \frac{2}{3}\ \sigma$$

$$\therefore\ \frac{Q_3-20}{2} = \frac{2}{3}\ (30)$$

$$\therefore\ Q_3 - 20 = 20 \times 2$$

$$\therefore\ Q_3 = 40 + 20$$

$$\therefore\ Q_3 = 60$$

હવે પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે મધ્યક = મધ્યસ્થ = બહુલક = $\frac{Q_3+Q_1}{2}$

$$= \frac{60+20}{2}$$

$$= 40$$

આમ, આપેલી માહિતીના આધારે બહુલકની અંદાજિત કિંમત 40 થાય.

ઉદાહરણ 22 : નેશનલ હાઈવેના ટોલનાકા પર વ્યસ્ત સમય દરમિયાન દર કલાકે આવતાં વાહનોની સંખ્યાનું વિતરણ પ્રામાણ્ય છે. આ વિતરણનો મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચલન σ છે. બે અલગ અલગ વ્યસ્ત સમયગાળા દરમિયાન ટોલનાકા પર આવતા વાહનોની સંખ્યા અનુક્રમે 88 અને 64 હોય તેને અનુરૂપ Z-પ્રાપ્તાંકની કિંમતો 0.8 અને –0.4 હોય તો વ્યસ્ત સમયમાં તે ટોલનાકા પર આવતાં વાહનોની સરેરાશ સંખ્યાનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન મેળવો.

અહીં X = હાઈવેના ટોલનાકા પર વ્યસ્ત સમય દરમિયાન દર કલાકે આવતાં વાહનોની સરેરાશ સંખ્યા

માહિતીનો મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચલન σ છે.

Z-પ્રાપ્તાંક $= \frac{X-\mu}{\sigma}$

જ્યારે $X = 88$ ત્યારે $Z = 0.8$ છે. તેથી $0.8 = \frac{88-\mu}{\sigma}$

$$\therefore\ 0.8\sigma = 88-\mu \qquad (1)$$

જ્યારે $X = 64$ ત્યારે $Z = -0.4$ છે. તેથી $-0.4 = \frac{64-\mu}{\sigma}$

$$\therefore -0.4\sigma = 64-\mu \qquad (2)$$

સમીકરણ (1) અને (2) ને ઉકેલતા

$$\begin{array}{rl} & 0.8\sigma = 88-\mu \\ - & 0.4\sigma = 64-\mu \\ & + \quad\ - \quad + \\ \hline & 1.2\sigma = 24 \\ & \therefore\ \sigma = 20 \end{array}$$

સમીકરણ (1)માં $\sigma = 20$ મૂકતાં, $0.8(20) = 88-\mu$

$$\therefore\ 16 = 88-\mu$$

$$\therefore\ \mu = 72$$

આમ આપેલ માહિતીનો મધ્યક $\mu = 72$ વાહનો અને તેનું પ્રમાણિત વિચલન $\sigma = 20$ વાહનો છે.

પ્રવૃત્તિ

તમારા રહેઠાણની આસપાસ રહેતાં 30 કુટુંબોનાં જીવનનિર્વાહ માટેના માસિક સરેરાશ ખર્ચની વીગત મેળવો. આ કુટુંબોનો માસિક ખર્ચ તમે શોધેલ મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલનવાળા પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે તેમ ધારીને

(1) વચ્ચેનાં 60 % કુટુંબોના માસિક ખર્ચની સીમાઓ મેળવો.

(2) તમે એકઠી કરેલ માહિતી પરથી $\mu \pm \sigma$ની વચ્ચે આવતાં અવલોકનોની ટકાવારી શોધો.

સારાંશ

- સતત યાદૃચ્છિક ચલની કિંમત કોઈ એક નિશ્ચિત અંતરાલની વચ્ચે હોવાની સંભાવના મેળવવાના વિધેયને તે ચલનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય કહે છે.
- સતત યાદૃચ્છિક ચલની એક નિશ્ચિત કિંમત માટે સંભાવના ઘટત્વ વિધેય દ્વારા મેળવેલ સંભાવના હંમેશાં શૂન્ય (0) હોય છે.
- પ્રામાણ્ય ચલની જુદી જુદી કિંમતોને અનુરૂપ સંભાવના ઘટત્વ વિધેયની કિંમતો શોધી જે વક્ર દોરવામાં આવે છે તેને પ્રામાણ્ય વક્ર કહેવામાં આવે છે.
- પ્રામાણ્ય વક્ર સંપૂર્ણ ઘંટાકાર હોય છે અને તેની વિષમતા શૂન્ય હોય છે.
- પ્રામાણ્ય ચલ X નો મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચલન σ હોય, તો $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ ને પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ કહેવામાં આવે છે.
- પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય એ શૂન્ય મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન 1 વાળું પ્રામાણ્ય વિતરણ છે.
- પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z ની નિરિક્ષિત કિંમતને પ્રમાણિત પ્રાપ્તાંક અથવા Z પ્રાપ્તાંક તરીકે ઓળખવામાં આવે છે અને તે માપના એકમથી મુક્ત હોય છે.
- પ્રામાણ્ય વિતરણને $N\left(\mu, \sigma^2\right)$ વડે પણ વ્યાખ્યાયિત કરવામાં આવે છે જ્યાં μ અને σ તેનાં પ્રાચલો છે, જે અનુક્રમે મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન દર્શાવે છે.
- સંભાવનાને ટકાવારીમાં દર્શાવવા માટે મેળવેલ સંભાવનાને 100 વડે ગુણવામાં આવે છે.
- અવલોકનોની અપેક્ષિત સંખ્યા મેળવવા માટે મેળવેલ સંભાવનાને કુલ અવલોકનોની સંખ્યા (N) વડે ગુણવામાં આવે છે.

સૂત્રોની યાદી :

જો પ્રામાણ્ય ચલ X નો મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચલન σ હોય, તો

(1) પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$

(2) મધ્યક = મધ્યસ્થ = બહુલક = $\frac{Q_3+Q_1}{2}$

(3) પ્રથમ ચતુર્થકની અંદાજિત કિંમત $Q_1 = \mu - 0.675\,\sigma$

(4) ત્રીજા ચતુર્થકની અંદાજિત કિંમત $Q_3 = \mu + 0.675\,\sigma$

(5) વિતરણનું ચતુર્થક વિચલન = $\frac{2}{3}$ σ (લગભગ)

(6) વિતરણનું સરેરાશ વિચલન = $\frac{4}{5}$ σ (લગભગ)

સ્વાધ્યાય 3

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. નીચેના પૈકી μ મધ્યક σ પ્રમાણિત વિચલનવાળા પ્રામાણ્ય ચલ X નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય કયું છે ?

(a) $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)};\ -\infty<x<\infty$ (b) $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2};\ -\infty<x<\infty$

(c) $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2};\ -\infty<x<\infty$ (d) $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2};\ 0\le x<\infty$

2. એક પ્રામાણ્ય ચલ X કે જેનો મધ્યક μ અને પ્રમાણિત વિચલન σ છે, તો તેના માટે પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z નીચેના પૈકી કયો થશે ?

(a) $Z = \frac{x-\sigma}{\mu}$ (b) $Z = \frac{\sigma-x}{\mu}$ (c) $Z = \frac{\mu-x}{\sigma}$ (d) $Z = \frac{x-\mu}{\sigma}$

3. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય નીચેના પૈકી કયું છે ?

(a) $f(z)=\ e^{-\frac{1}{2}z^2};\ -\infty<z<\infty$ (b) $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2}\quad -\infty<z<\infty$

(c) $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2};\ 0<z<\infty$ (d) $f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2}\quad -\infty<z<\infty$

4. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના મધ્યક અને વિચરણ નીચેનાં પૈકી કયા છે ?

(a) મધ્યક = 0, વિચરણ = 1 (b) મધ્યક = 1, વિચરણ = 0

(c) મધ્યક = 0, વિચરણ = 0 (d) મધ્યક = 1, વિચરણ = 1

5. પ્રામાણ્ય વક્ર હેઠળનું કુલ ક્ષેત્રફળ નીચેના પૈકી કયું હોય છે ?

(a) –1 (b) 0 (c) 1 (d) 0.5

6. પ્રામાણ્ય વક્રમાં μ થી જમણી બાજુના પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ કેટલું હોય છે ?

(a) 0 (b) 0.5 (c) 1 (d) –0.5

7. પ્રામાણ્ય વિતરણનાં 99 % અવલોકનો સામાન્ય રીતે નીચેના પૈકી કઈ સીમામાં હોય છે ?

(a) $\mu\pm1.96\sigma$ (b) $\mu\pm2\sigma$ (c) $\mu\pm3\sigma$ (d) $\mu\pm2.575\sigma$

8. પ્રામાણ્ય વિતરણમાં સામાન્ય રીતે કેટલા ટકા અવલોકનો $\mu\pm\sigma$ ની સીમામાં હોય છે ?

(a) 34.13 % (b) 95.45 % (c) 68.26 % (d) 50 %

9. પ્રામાણ્ય ચલ માટે સરેરાશ વિચલનની લગભગ કિંમત નીચેના પૈકી કઈ છે ?

(a) $\frac{4}{5}\sigma$ (b) $\frac{4}{5}\mu$ (c) $\frac{2}{3}\sigma$ (d) $\frac{2}{3}\mu$

10. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ માટે ચતુર્થક વિચલનની લગભગ કિંમત નીચેના પૈકી કઈ છે ?

(a) $\frac{2}{3}\sigma$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{4}{5}\sigma$ (d) $\frac{4}{5}$

11. પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે મધ્યક અને પ્રથમ ચતુર્થક અનુક્રમે 11 અને 3 છે, તો ત્રીજા ચતુર્થકની કિંમત નીચેના પૈકી કઈ હશે ?

(a) 8 (b) 14 (c) 19 (d) 10

12. એક પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે સરેરાશ વિચલનની અંદાજિત કિંમત 20 છે, તો તે વિતરણની ચતુર્થક વિચલનની કિંમત નીચેના પૈકી કઈ હશે ?

(a) $\frac{25}{3}$ (b) $\frac{32}{3}$ (c) 24 (d) $\frac{50}{3}$

13. પ્રામાણ્ય વિતરણના પ્રચલિત સંકેતોમાં જો $x = 25$, $\mu = 20$ અને $\sigma = 5$ હોય, તો પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય પ્રાપ્તાંકની કિંમત નીચેના પૈકી કઈ હશે ?

(a) 1 (b) –1 (c) 4 (d) $\frac{10}{3}$

14. એક પ્રામાણ્ય ચલ X નો મધ્યક 50 છે. જો $x = 25$ માટે Z–પ્રાપ્તાંકની કિંમત –2.5 હોય, તો વિતરણના વિચરણની કિંમત નીચેના પૈકી કઈ હશે ?

(a) 10 (b) 100 (c) 50 (d) 25

15. એક પ્રામાણ્ય ચલનું વિતરણ $N(20, 4)$ વડે દર્શાવવામાં આવ્યું છે, તો તેનાં 99.73 % અવલોકનો નીચેના પૈકી કઈ અંતરાલમાં હશે ?

(a) (18, 22) (b) (16, 24) (c) (14, 26) (d) (12, 28)

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ એક વાક્યમાં લખો :

1. પ્રામાણ્ય ચલના ઘટત્વ વિધેયમાં વપરાતા અચળાંકોનાં મૂલ્યો જણાવો.

2. સતત યાદચ્છિક ચલ કોઈ એક નિશ્ચિત કિંમત ધારણ કરે તેની સંભાવના કેટલી ?

3. પ્રામાણ્ય વક્રનો આકાર કેવો હોય છે ?

4. પ્રામાણ્ય વિતરણની વિષમતા કેટલી હોય છે ?

5. 'પ્રમાણિત પ્રાપ્તાંક માપના એકમથી મુક્ત હોય છે.' આ વિધાન સાચું કે ખોટું ?

6. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્ર એ પ્રમાણિત પ્રમાણ્ય ચલની કઈ કિંમતની બંને બાજુએ સંમિત હોય છે ?

7. પ્રામાણ્ય વક્રમાં પ્રામાણ્ય ચલની કઈ કિંમત માટેની શિરોલંબ રેખા પ્રામાણ્ય વક્રનાં ક્ષેત્રફળના બે સમાન ભાગ કરે છે ?

8. પ્રામાણ્ય વક્રમાં $\mu - 2\sigma$ અને $\mu + 2\sigma$ વચ્ચે આવતા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ કેટલા ટકા થાય ?

9. એક પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક 13.25 અને તેનું પ્રમાણિત વિચલન 10 હોય, તો તેના તૃતીય ચતુર્થકની અંદાજિત કિંમત શોધો.

10. 10 મધ્યક અને 6 પ્રમાણિત વિચલનવાળા પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે ચતુર્થક વિચલનની લગભગ કિંમત શોધો.

11. એક પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે સરેરાશ વિચલનની લગભગ કિંમત 8 હોય, તો તે વિતરણનું પ્રમાણિત વિચલન મેળવો.

12. એક પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે ચતુર્થક વિચલનની અંદાજિત કિંમત 12 હોય, તો તેના પ્રમાણિત વિચલનની કિંમત શોધો.

13. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલના સંભાવના વિતરણનાં મધ્યનાં 50 % અવલોકનોની કિંમતની અંદાજિત સીમાઓ લખો.

14. એક પ્રામાણ્ય વિતરણના અંતિમ ચતુર્થકો 20 અને 30 હોય, તો તેના મધ્યકની કિંમત મેળવો.

15. વ્યક્તિઓના એક સમૂહમાં વ્યક્તિઓનો માસિક ખર્ચ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. જો સરેરાશ ખર્ચ ₹ 10,000 અને પ્રમાણિત વિચલન ₹ 1000 હોય, તો યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ વ્યક્તિનો માસિક ખર્ચ ₹ 11,000 થી વધુ હોવા માટે કોઈ એક વિદ્યાર્થી તે માટે Z-પ્રાપ્તાંક = ₹ 1 મેળવે છે, તો શું Z-પ્રાપ્તાંકની આ ગણતરી સાચી છે ? કારણ આપો.

16. એક સમૂહના વ્યક્તિઓની ઉંમર, મધ્યક 45 વર્ષ અને પ્રમાણિત વિચલન 10 વર્ષ હોય તેવા પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ વ્યક્તિની ઉંમર 60 વર્ષ હોય તો તે માટે Z-પ્રાપ્તાંકની ગણતરી કરો.

17. એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓએ અર્થશાસ્ત્ર વિષયમાં મેળવેલ ગુણનું વિતરણ μ મધ્યક અને σ પ્રમાણિત વિચલનવાળું પ્રામાણ્ય વિતરણ છે. યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરેલા વિદ્યાર્થીના ગુણ 60 હોય તે માટેનો પ્રમાણિત પ્રાપ્તાંકની કિંમત 1 છે. જો ચલનું વિચરણ 100 (ગુણ)^2 હોય, તો સરેરાશ ગુણ શોધો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. સતત ચલના સંભાવના ઘટત્વ વિધેયની વ્યાખ્યા આપો.

2. સતત ચલના સંભાવના ઘટત્વ વિધેયની શરતો જણાવો.

3. પ્રામાણ્ય વક્ર કઈ રીતે મેળવવામાં આવે છે ?

4. પ્રામાણ્ય ચલનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય વ્યાખ્યાયિત કરો.

5. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વક્રનો આકાર કેવો હોય છે અને તે ચલની કઈ કિંમતની સાપેક્ષમાં સંમિત હોય છે ?

6. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલની વ્યાખ્યા આપી તેનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય લખો.

7. પ્રામાણ્ય ચલ X નું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય

$$f(x) = \text{અચળ} \times e^{-\frac{1}{50}(x-10)^2} \; ; \; -\infty < x < \infty$$

છે તો આ માહિતી પરથી પ્રથમ ચતુર્થક મેળવો.

8. એક પ્રામાણ્ય ચલના અંતિમ ચતુર્થકો 10 અને 30 છે, તો તેનું સરેરાશ વિચલન મેળવો.

9. એક પ્રામાણ્ય ચલ માટે સરેરાશ વિચલન 48 છે તેમજ તેનો તૃતીય ચતુર્થક 120 છે, તો તેના પ્રથમ ચતુર્થકનો અંદાજ મેળવો.

10. એક પ્રામાણ્ય ચલ X માટે સંભાવના ઘટત્વ વિધેય નીચે પ્રમાણે છે :

$$f(x) = \frac{1}{10\sqrt{2\pi}} \; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-100}{10}\right)^2} \; ; \; -\infty < x < \infty$$

આ વિતરણ માટે મધ્યના 68.26 % અવલોકનો ધરાવતી સીમાઓનો અંદાજ મેળવો.

11. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલની કિંમત 0 અને Z-પ્રાપ્તાંક (z_1) ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના 0.4950 હોય, તો Z-પ્રાપ્તાંકની શક્ય કિંમતો શોધો.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. પ્રામાણ્ય વિતરણની વ્યાખ્યા આપો તેમજ પ્રામાણ્ય વક્રનાં લક્ષણો જણાવો.

2. પ્રામાણ્ય વિતરણના ગુણધર્મો જણાવો.

3. પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય વિતરણના ગુણધર્મો જણાવો.

4. એક પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક 50 અને વિચરણ 9 છે તો

(1) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 50 અને 53 ની વચ્ચે હોવાની તેમજ

(2) પ્રામાણ્ય ચલ X ની કિંમત 47 અને 53 ની વચ્ચે હોવાની સંભાવના મેળવો.

5. જો ચલ X એ 100 મધ્યક અને 15 પ્રમાણિત વિચલનવાળો પ્રામાણ્ય ચલ હોય તો

(1) વિતરણમાં કેટલા ટકા અવલોકનોની કિંમત 85 થી વધુ હશે ?

(2) વિતરણમાં કેટલા ટકા અવલોકનોની કિંમત 130 થી ઓછી હશે ?

6. શહેરના એક વિસ્તારમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ 500 પુખ્ત વયની વ્યક્તિઓનું વજન પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. આ વ્યક્તિઓનું સરેરાશ વજન 55 કિગ્રા અને પ્રમાણિત વિચલન 7 કિગ્રા છે.

(1) તે વિસ્તારમાં 41 કિગ્રા અને 62 કિગ્રાની વચ્ચે વજન ધરાવતા વ્યક્તિઓની સંખ્યાનું અનુમાન કરો.

(2) તે વિસ્તારમાં 41 કિગ્રાથી ઓછું વજન ધરાવતી વ્યક્તિઓની સંખ્યાનું અનુમાન કરો.

7. જો પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ Z માટે મળતી સંભાવનાઓ નીચે પ્રમાણે હોય, તો Z-પ્રાપ્તાંક (z_1) ની અંદાજિત કિંમતો મેળવો :

(1) $Z = z_1$ ની ડાબી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.9928 છે.

(2) $Z = z_1$ ની જમણી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.0250 છે.

8. જો Z એ પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ હોય, તો નીચેની શરતોનું સમાધાન થાય તે રીતે Z-પ્રાપ્તાંક (z_1) ની કિંમતોનું અનુમાન મેળવો.

(1) $Z = z_1$ ની ડાબી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.15 છે.

(2) $Z = z_1$ ની જમણી બાજુનું ક્ષેત્રફળ 0.75 છે.

9. જો Z એ પ્રમાણિત પ્રામાણ્ય ચલ હોય અને z_1 એ Z-પ્રાપ્તાંક દર્શાવતો હોય, તો નીચેની શરતોનું સમાધાન કરે તે રીતે z_1ની કિંમતોનો અંદાજ મેળવો :

(1) $P(-2 \le Z \le z_1) = 0.2857$ (2) $P(z_1 \le Z \le 1.75) = 0.10$

10. એક કારખાનામાં માસિક ઉત્પાદન એ સરેરાશ μ એકમ અને પ્રમાણિત વિચલન σ એકમ હોય તેવા પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. ઉત્પાદન 2400 એકમ અને 1800 એકમ હોય તે માટેના Z-પ્રાપ્તાંકો અનુક્રમે 1 અને –0.5 છે, તો વિતરણના મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન શોધો.

11. એક પ્રામાણ્ય ચલ X સંભાવના ઘટત્વ વિધેય નીચે પ્રમાણે છે :

$$f(x) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{72}(x-100)^2} \ ; \ -\infty < x < \infty$$

આ વિતરણ માટે બરાબર મધ્યનાં 50 % અવલોકનોની અનુમાનિત સીમાઓ મેળવો.

12. એક પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે પ્રથમ ચતુર્થક 35 અને ત્રીજો ચતુર્થક 65 મળે છે, તો તે વિતરણના બરાબર મધ્યના 95.45 % પ્રાપ્તાંકોને સમાવતી સીમાઓનું અનુમાન મેળવો.

13. એક પ્રામાણ્ય વિતરણ માટે તૃતીય ચતુર્થક અને સરેરાશ વિચલન અનુક્રમે 36 અને 24 છે, તો તે વિતરણનો મધ્યક શોધો.

14. એક પ્રામાણ્ય ચલ Xનો મધ્યક 200 અને વિચરણ 100 છે, તો

(1) અંતિમ ચતુર્થકોની અંદાજિત કિંમત મેળવો.

(2) ચતુર્થક વિચલનની લગભગ કિંમત મેળવો.

(3) સરેરાશ વિચલનની લગભગ કિંમત મેળવો.

વિભાગ E

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. શહેરના એક મોલમાં ગ્રાહકે કરેલ ખરીદીની રકમ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે અને તેની સરેરાશ ₹ 800 છે. જ્યારે પ્રમાણિત વિચલન ₹ 200 છે. જો યાદચ્છિક રીતે કોઈ એક ગ્રાહક પસંદ કરવામાં આવે, તો નીચેની ઘટનાઓની સંભાવનાઓ મેળવો :

(1) તેણે કરેલ ખરીદીની રકમ ₹ 850 અને ₹ 1200ની વચ્ચે હોય.

(2) તેણે કરેલ ખરીદીની રકમ ₹ 600 અને ₹ 750ની વચ્ચે હોય.

2. એક વિસ્તારમાં રહેતાં 20 વર્ષ અને 26 વર્ષ સુધીની વય ધરાવતા 500 વ્યક્તિઓનું સરેરાશ વજન 55 કિલો અને વિચરણ 100 (કિગ્રા)^2 છે. આ વ્યક્તિઓનું વજન પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. આમાંથી અમુક વ્યક્તિઓને નીચે જણાવ્યા પ્રમાણેના સમૂહમાં મૂકવામાં આવે છે :

(1) 70 કિલોથી વધુ વજન ધરાવતા વ્યક્તિઓને મેદસ્વી વ્યક્તિઓના સમૂહમાં મૂકવામાં આવે છે.

(2) 50 કિલો અને 60 કિલો વજન ધરાવતા વ્યક્તિઓને સ્વસ્થ વ્યક્તિઓના સમૂહમાં મૂકવામાં આવે છે.

(3) 35 કિલોથી ઓછું વજન ધરાવતા વ્યક્તિઓને શારીરિક રીતે નબળા વ્યક્તિઓના સમૂહમાં મૂકવામાં આવે છે.

આ માહિતી પરથી જે તે વિસ્તારમાં મેદસ્વી, સ્વસ્થ અને શારીરિક રીતે નબળી વ્યક્તિઓની સંખ્યાનું અનુમાન કરો.

3. યુનિવર્સિટીની એક હોસ્ટેલમાં રહેતા વિદ્યાર્થીઓનું સરેરાશ માસિક ખર્ચ ₹ 2000 છે અને તેનું પ્રમાણિત વિચલન ₹ 500 છે. જો વિદ્યાર્થીઓના સરેરાશ માસિક ખર્ચનું વિતરણ પ્રામાણ્ય હોય, તો

(1) ₹ 750 અને ₹ 1250 ની વચ્ચે ખર્ચ કરતા વિદ્યાર્થીઓની ટકાવારી શોધો.

(2) ₹ 1800થી વધુ ખર્ચ કરતા વિદ્યાર્થીઓની ટકાવારી શોધો.

(3) ₹ 2400થી ઓછું ખર્ચ કરતા વિદ્યાર્થીઓની ટકાવારી શોધો.

4. એક ઉત્પાદન એકમમાં કામ કરતા કામદારોનું સરેરાશ માસિક વેતન ₹ 10,000 છે અને તેનું પ્રમાણિત વિચલન ₹ 2000 છે. કારીગરોનું સરેરાશ માસિક વેતન પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે તેમ ધારીને સૌથી ઓછું વેતન

ધરાવતા 20 % કામદારોનું મહત્તમ વેતન અને સૌથી વધુ વેતન ધરાવતા 10 % કામદારોનું લઘુતમ વેતનનું અનુમાન કરો.

5. એક પ્રામાણ્ય વિતરણનો મધ્યક 52 અને વિચરણ 64 છે, તો બરાબર મધ્યનાં 25 % અવલોકનોને સમાવતી સીમાઓનો અંદાજ મેળવો.

6. ઇલેક્ટ્રૉનિક્સ ઉપકરણોના એક મોટા શોરૂમમાં દર અઠવાડિયે સરેરાશ 52 ઉપકરણો વેચાય છે અને તેનું વિચરણ 9 (એકમ)^2 છે. ઇલેક્ટ્રૉનિક્સ ઉપકરણોનું વેચાણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે તેમ ધારવામાં આવે છે. 50 અઠવાડિયાંમાંથી કોઈ એક અઠવાડિયા દરમિયાન ઉપકરણોનું વેચાણ x_1 એકમ અને 61 એકમની વચ્ચે થયું હોય તેની સંભાવના 0.1574 છે. તો x_1 ની કિંમત અંદાજો. તેમજ કેટલાં અઠવાડિયાં દરમિયાન ઉપકરણોનું વેચાણ 55 એકમથી વધુ હશે તેનો અંદાજ મેળવો.

7. પેન્ટિંગના પ્રદર્શનમાં દાખલ થયેલ વ્યક્તિ સરેરાશ 61 મિનિટનો સમય ગાળે છે. જો આ સમય પ્રામાણ્ય રીતે વિતરીત હોય અને 20 % વ્યક્તિઓ પ્રદર્શનમાં 30 મિનિટથી ઓછો સમય ગાળતા હોય, તો વિતરણનું વિચરણ મેળવો તેમજ કોઈ વ્યક્તિ 90 મિનિટથી વધુ સમય પ્રદર્શનમાં ગાળે તેની સંભાવના પણ મેળવો.

8. પાઇપ બનાવતી એક ઉત્પાદક કંપનીમાં ઉત્પાદિત થતી પાઇપનો વ્યાસ 20 મિમિથી 22 મિમિનો હોય, તો તે કોઈ એક ચોક્કસ સમૂહના ગ્રાહક દ્વારા સ્વીકાર્ય હોય છે. ઉત્પાદિત થતી પાઇપનાં વ્યાસનું પ્રમાણિત વિચલન 4 મિમિ છે અને ઉત્પાદિત થતી 70 % પાઇપનો વ્યાસ 19.05 મિમિથી વધુ હોય તો ઉત્પાદિત થતી પાઇપના વ્યાસનો મધ્યક શોધો તેમજ કંપની દ્વારા ઉત્પાદિત થયેલ પાઇપનો ચોક્કસ સમૂહના ગ્રાહક દ્વારા અસ્વીકાર્ય પાઇપની ટકાવારી પણ શોધો

નોંધ : અહીં ઉત્પાદિત થતી પાઇપનો વ્યાસ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે.

9. એક પ્રામાણ્ય ચલ X નો મધ્યક 400 અને વિચરણ 900 મળે છે, તો આ વિતરણ માટે ચોથો દશાંશક અને 90મો શતાંશક શોધી તેનું અર્થઘટન કરો.

10. એક પ્રામાણ્ય ચલ Xનું સંભાવના ઘટત્વ વિધેય નીચે મુજબ છે :

$$f(x)=\frac{1}{50\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-150}{50}\right)^2}\ ; \quad -\infty < x < \infty$$

આ વિતરણ માટે

(i) $P(x_1 \le x \le 250)=0.4772$ હોય તો x_1 ની કિંમત અંદાજો.

(ii) $P(75 \le x \le x_2)=0.3539$ હોય તો x_2 ની કિંમત અંદાજો.

વિભાગ F

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. 500 બાળકોની એક બૌદ્ધિક કસોટી લેતા તેમના સરેરાશ ગુણ 68 અને પ્રમાણિત વિચલન 22 મળે છે. જો બાળકોએ મેળવેલ ગુણ પ્રામાણ્ય રીતે વિતરીત હોય તો (1) 68 થી વધુ ગુણ મેળવતાં બાળકોની સંખ્યા શોધો (2) 70 અને 90 ની વચ્ચે ગુણ મેળવતાં બાળકોની ટકાવારી શોધો. (3) સૌથી વધુ ગુણ મેળવતાં 50 બાળકોના ઓછામાં ઓછા ગુણ શોધો.

2. એક ખાનગી કંપનીમાં કામ કરતા 500 કર્મચારીઓની ઉંમરનું વિતરણ પ્રામાણ્ય છે. તેનો મધ્યક 40 વર્ષ અને પ્રમાણિત વિચલન 6 વર્ષ છે. આ કંપની નીચે દર્શાવેલ ધોરણ પ્રમાણે 25 % કર્મચારીઓની છટણી કરવા માંગે છે.

(i) સૌથી ઓછી ઉંમર ધરાવતા 5 % કર્મચારીઓને છૂટા કરવા.

(ii) ઓછી ઉંમરના 5 % કર્મચારીઓને છૂટા કર્યા અને 10 % ઓછી ઉંમર ધરાવતા કર્મચારીઓને અન્ય કંપનીમાં બદલી આપવી.

(iii) સૌથી વધુ ઉંમર ધરાવતા 10 % કર્મચારીઓને નિવૃત્તિ આપવી.

આ માહિતી પરથી છૂટા થતા કર્મચારી, અન્ય કંપનીમાં બદલી લેતા કર્મચારી અને નિવૃત્ત થતા કર્મચારીઓની લગભગ ઉંમર શોધો.

3. ઉચ્ચતર અભ્યાસમાં પ્રવેશ માટે 200 ગુણની પરીક્ષા લેવામાં આવે છે. આ પરીક્ષામાં હાજર રહેલ 20,000 વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે અને તેનો મધ્યક 120 ગુણ અને પ્રમાણિત વિચલન 20 ગુણ છે. પરિણામનાં ધારાધોરણ નીચે મુજબ છે :

(a) 40 ટકાથી ઓછા ગુણ મેળવતા વિદ્યાર્થીઓ નાપાસ થાય છે.

(b) 40 ટકાથી 48 ટકા ગુણ મેળવતા વિદ્યાર્થીઓની બીજી એક 100 ગુણની પરીક્ષા લેવામાં આવે છે.

(c) 48 ટકાથી 75 ટકા ગુણ મેળવતા વિદ્યાર્થીઓને પર્સનલ ઈન્ટરવ્યૂ માટે બોલાવવામાં આવે છે.

(d) 75 ટકાથી વધુ ગુણ મેળવતા વિદ્યાર્થીઓને ઉચ્ચતર અભ્યાસમાં સીધો પ્રવેશ આપવામાં આવે છે.

તો (1) નાપાસ થતા (2) 100 ગુણની પરીક્ષા આપતા (3) પર્સનલ ઈન્ટરવ્યૂમાં આવતા અને (4) ઉચ્ચતર અભ્યાસમાં પ્રવેશ મેળવતા વિદ્યાર્થીઓની લગભગ સંખ્યા શોધો.

4. એક સમૂહના વ્યક્તિઓનું માસિક આવકનું વિતરણ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે અને તેમનો મધ્યક ₹ 20,000 અને પ્રમાણિત વિચલન ₹ 5000 છે. જો સૌથી વધુ માસિક આવક ધરાવતા 50 વ્યક્તિઓની ઓછામાં ઓછી માસિક આવક ₹ 31,625 હોય, તો સમૂહમાં કુલ કેટલી વ્યક્તિઓ હશે ? તેમજ સમૂહમાં સૌથી ઓછી આવક ધરાવતા 50 વ્યક્તિઓની વધુમાં વધુ આવક કેટલી હશે ? (ગણતરીમાં દશાંશચિહ્ન પછી બે આંકડાઓનો ઉપયોગ કરો.)

5. એક શાળાના ધોરણ 12નાં પરિણામનું વિશ્લેષણ નીચે પ્રમાણે છે :

વિશિષ્ટ ગુણવત્તા સાથે પાસ	:	કુલ વિદ્યાર્થીના 15 %
વિશિષ્ટ ગુણવત્તા વગર પાસ	:	કુલ વિદ્યાર્થીના 75 %
નાપાસ	:	કુલ વિદ્યાર્થીના 10 %

પાસ થવા માટે ઓછામાં ઓછા 40 % ગુણ અને વિશિષ્ટ ગુણવત્તા માટે ઓછામાં ઓછા 80 % ગુણ જરૂરી છે. જો વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ પરિણામની ટકાવારી પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરતી હોય તો માહિતીનો મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલન મેળવો અને તેના ઉપયોગ કરીને 75 % વિદ્યાર્થીઓનાં પરિણામ કેટલા ટકાથી ઓછાં હશે તે શોધો.

6. એક પ્રોવિઝન સ્ટોર્સના કાયમી ગ્રાહકોના માસિક બિલની રકમ પ્રામાણ્ય વિતરણને અનુસરે છે. જો 7.78 % કાયમી ગ્રાહકોનું માસિક બિલ ₹ 3590 થી ઓછું હોય અને 94.52 % ગ્રાહકોના માસિક બિલની રકમ ₹ 5100 થી ઓછી હોય, તો પ્રામાણ્ય વિતરણના પ્રાચલો શોધો. તેમજ બરાબર મધ્યના 95 % ગ્રાહકોના માસિક બિલની રકમનો અંતરાલ શોધો.

7. પ્રામાણ્ય ચલ Xનું સંભાવના વિધેય નીચે પ્રમાણે છે :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5000\pi}} e^{-\frac{1}{5000}(x-75)^2} \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

આ પરથી નીચેની કિંમતો મેળવો :

(i) $P(60 \le x \le x_2) = 0.5670$ હોય, તો x_2 ની મેળવો.

(ii) $P(x_1 \le x \le 125) = 0.3979$ હોય, તો x_1 મેળવો.

(iii) $P(|x-50| \le 10)$ ની કિંમત મેળવો.

8. એક પ્રામાણ્ય ચલ Xનું સંભાવના વિધેય નીચે પ્રમાણે છે :

$$f(x) = \text{અચળ} \cdot e^{-\frac{1}{200}(x-50)^2} \quad ; \quad -\infty < x < \infty$$

આ વિતરણ પરથી નીચેના પ્રશ્નોનાં જવાબ લખો :

(1) મધ્યસ્થની કિંમત શોધો.

(2) અંતિમ ચતુર્થકની અનુમાનિત કિંમત શોધો.

(3) ચતુર્થક વિચલનની લગભગ કિંમત મેળવો.

(4) સરેરાશ વિચલનની લગભગ કિંમત મેળવો.

Johann Carl Friedrich Gauss
(1777 – 1855)

Carl Friedrich Gauss was a German mathematician who contributed significantly to many fields, including number theory, algebra, statistics, analysis, differential geometry, geodesy, geophysics, mechanics, electrostatics astronomy, matrix theory, and optics. He was referred to as the Princeps mathematicorum. (Latin, "the foremost of mathematicians") and "greatest mathematician since antiquity". Gauss had an exceptional influence in many fields of mathematics and science and has several theories and results in his name.

In the area of probability and statistics, Gauss introduced what is now known as Gaussian or normal distribution, the Gaussian function and the Gaussian error curve. He showed how probability could be represented by a bell shaped or "normal" curve, which peaks around the mean or expected value and quickly falls off towards plus/minus infinity, which is basic to descriptions of statistically distributed data.