"Statistically, the probability of any one of us being here is so small that the mere fact of our existence should keep us all in a state of contented dazzlement."

– Lewis Thomas

1

સંભાવના
(Probability)

વિષયવસ્તુ

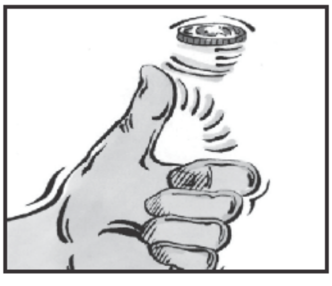
1.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણા રોજબરોજના જીવનમાં અનેક ઘટનાઓ બને છે. આ ઘટનાઓ પૈકીની કેટલીક ઘટનાઓ ચોક્કસ બનશે જ એવું આપણે નિશ્ચિતપણે કહી શકીએ છીએ; જેમકે જન્મ લેનાર દરેક માનવ મૃત્યુ પામશે, ઝાડ પરથી છૂટું પડેલું ફળ જમીન પર પડશે, કોઈ વેપારીને વસ્તુનો એક એકમ વેચવાથી ₹ 10 નફો મળતો હોય, તો તેને વસ્તુના 50 એકમો વેચાય તો ₹ 500 નફો મળશે, એક વ્યક્તિ કોઈ રાષ્ટ્રીયકૃત બૅન્કમાં ₹ 1,00,000 વાર્ષિક 7.5 ટકાના વ્યાજના દરે મૂકે તો તેને વર્ષના અંતે ₹ 7500 વ્યાજ તરીકે મળશે વગેરે. આ ઘટનાઓ નિશ્ચિત છે, પરંતુ કેટલીક ઘટનાઓ એવી હોય છે કે જે બનશે કે નહિ તે અગાઉથી નિશ્ચિતપણે કહી શકાતું નથી. જેમકે કોઈ સમતોલ સિક્કો ઉછાળીએ ત્યારે તેની ઉપરની બાજુ છાપ મળશે, છ બાજુવાળો એક સમતોલ પાસો ફેંકતા પાસાની ઉપરની બાજુ પર મળતો અંક 3 હોય, નવો જન્મ લેનાર બાળકની જાતિ નર હશે, કારખાનામાં ઉત્પાદિત થયેલ એકમ ગુણવત્તાની દૃષ્ટિએ ખામીરહિત હશે, ચાલુ વર્ષે અમુક વિસ્તારમાં કુલ કેટલો વરસાદ પડશે, ચાલુ વર્ષે રાજ્યમાં ઘઉંના પાકનું કેટલું ઉત્પાદન થશે, બે દેશ વચ્ચે રમાતી એક ક્રિકેટ મૅચનું પરિણામ શું આવશે વગેરે. આ ઘટનાઓ એવી છે કે તે બનશે જ એવું આપણે નિશ્ચિતપણે કહી શકતા નથી. આવી ઘટનાઓ ઘટવા વિશે સચોટ અનુમાન કરવાનું શક્ય નથી. આવી ઘટનાઓ બનવાની (કે ન બનવાની) ઓછીવત્તી શક્યતાનો ખ્યાલ આપણે આપણી આપસૂઝથી મેળવી શકીએ છીએ, પરંતુ આવી ઘટનાઓ બનવાની (કે ન બનવાની) બાબતમાં અનિશ્ચિતતા રહેલી હોય છે. આપણે માની લઈશું કે, આવી ઘટનાઓ બનવાનું (કે ન બનવાનું) અજ્ઞાત તત્ત્વ પર આધારિત છે, જેને આપણે ચાન્સ (Chance) કહીશું. આવી ચાન્સ પર આધાર રાખતી ઘટનાઓને યાદૃચ્છિક ઘટનાઓ (Random Events) કહે છે. આવી અનિશ્ચિત ઘટના ઘટવાની શક્યતા સંખ્યાત્મક રીતે દર્શાવવા સંભાવના (Probability)નો ઉપયોગ થાય છે. આ પ્રકરણમાં આપણે સંભાવનાનો સિદ્ધાંત, સંભાવનાની પ્રશિષ્ટ વ્યાખ્યા, આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યા તેમજ સંભાવનાની ઉપયોગિતા દર્શાવતાં ઉદાહરણો જોઈશું. હવે આપણે કેટલાંક પદોનું સ્પષ્ટીકરણ કરી લઈએ જે સંભાવનાના અભ્યાસમાં ઉપયોગી છે.

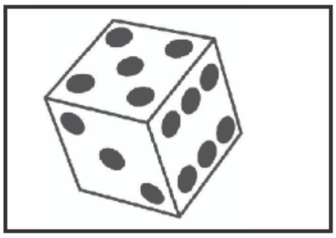
1.2 યાદૃચ્છિક પ્રયોગ અને નિદર્શ અવકાશ

1.2.1 યાદૃચ્છિક પ્રયોગ

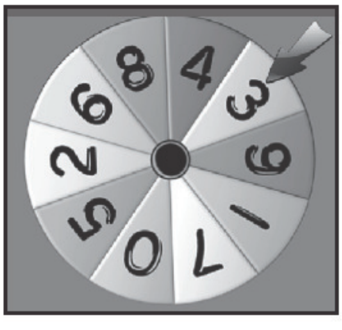
આપણે નીચેના પ્રયોગોનો વિચાર કરીએ :



પ્રયોગ 1 : એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળો. આ પ્રયોગના બે શક્ય પરિણામો (i) છાપ (Head-H) (ii) કાંટો (Tail-T) પૈકી કોઈ એક પરિણામ મળશે. (આપણે ધારી લઈશું કે સિક્કો તેની ધરી પર ઊભો રહેતો નથી.) આમ સિક્કો ઉછાળવાના પ્રયોગમાં શક્ય પરિણામો 'H' અને 'T' એમ બે જ છે. પરંતુ આ બે પરિણામો પૈકી કયું પરિણામ મળશે તે નિશ્ચિતપણે પ્રયોગ પૂર્વે કહી શકાતું નથી.



પ્રયોગ 2 : 1, 2, 3, 4, 5, 6 એમ 1 થી 6 અંક લખેલા છ બાજુવાળા એક સમતોલ પાસાને ઉછાળો. તેની ઉપરની બાજુએ આવતા અંકને નોંધો. આ પ્રયોગનાં છ શક્ય પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5, 6 પૈકી કોઈ એક પરિણામ મળશે. અહીં પાસો ઉછાળવાના પ્રયોગમાં શક્ય પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5, 6 એમ છ જ છે પરંતુ તે છ પરિણામો પૈકી કયું પરિણામ મળશે તે નિશ્ચિતપણે પ્રયોગ પૂર્વે કહી શકાતું નથી.



પ્રયોગ 3 : ધારો કે 0, 1, 2, ... , 9 એમ દસ સંખ્યા લખેલ એક ચક્ર છે અને તેની સામે એક નિશાન રાખેલ છે. આ ચક્રને હાથ વડે ફેરવવામાં આવે, તો તે ગોળ ગોળ ફરીને અમુક સમય પછી સ્થિર થાય છે. આ ચક્ર અટકે ત્યારે 0, 1, 2, ... , 9 માંથી કોઈ એક સંખ્યા પેલા નિશાનની સામે આવે છે. આ સંખ્યા એ જીત દર્શાવતી સંખ્યા છે. અહીં આવા ચક્રને ફેરવીને જુઓ કે જીત દર્શાવતી સંખ્યા કઈ છે. અહીં પ્રયોગનાં કુલ શક્ય દસ પરિણામો 0, 1, 2, ... , 9 છે. પરંતુ આ દસ સંખ્યાઓ પૈકી કયું પરિણામ આવશે (જીત દર્શાવતી સંખ્યા) તે નિશ્ચિતપણે પ્રયોગ પૂર્વે કહી શકાતું નથી.

ઉપર્યુક્ત દર્શાવેલ પ્રયોગો 1, 2 અને 3 ને યાદચ્છિક પ્રયોગો કહે છે. યાદચ્છિક પ્રયોગની વ્યાખ્યા આ મુજબ છે, જે પ્રયોગનું નિરપેક્ષ રીતે સમાન સંજોગોમાં પુનરાવર્તન કરી શકાતું હોય અને તે પ્રયોગનાં બધાં જ શક્ય પરિણામો જ્ઞાત હોય પરંતુ તે પૈકી કયું ચોક્કસ પરિણામ મળશે તેનું નિશ્ચિત અનુમાન પ્રયોગ પૂર્વે કરી શકાતું ન હોય તેવા પ્રયોગને યાદચ્છિક પ્રયોગ (Random Experiment) કહે છે. આ વ્યાખ્યા પરથી યાદચ્છિક પ્રયોગનાં નીચેનાં લક્ષણો તારવી શકાય :

(1) યાદચ્છિક પ્રયોગનું નિરપેક્ષ રીતે લગભગ સમાન સંજોગોમાં પુનરાવર્તન કરી શકાય છે.

(2) યાદચ્છિક પ્રયોગનાં શક્ય તમામ પરિણામો જ્ઞાત હોય છે પરંતુ તે પૈકી કયું ચોક્કસ પરિણામ મળશે તેનું નિશ્ચિત અનુમાન પ્રયોગ પૂર્વે કરી શકાતું નથી.

(3) યાદચ્છિક પ્રયોગને અંતે ચોક્કસ પરિણામ મળે છે.

1.2.2 નિદર્શ અવકાશ

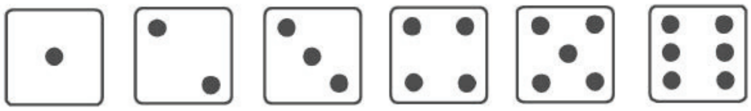
કોઈપણ યાદચ્છિક પ્રયોગનાં શક્ય તમામ પરિણામોના ગણને તે યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ (Sample Space) કહેવામાં આવે છે. નિદર્શ અવકાશને સામાન્ય રીતે U અથવા S સંકેત વડે દર્શાવાય છે. નિદર્શ અવકાશના ઘટકોને નિદર્શ બિંદુઓ (Sample Points) કહે છે.

અગાઉના મુદ્દામાં દર્શાવેલા યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ મળે :

પ્રયોગ 1 : એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળવો. આ યાદચ્છિક પ્રયોગમાં શક્ય પરિણામો કુલ બે છે : H અને T. તેથી અહીં નિદર્શ અવકાશ $U=\{H,T\}$ અથવા $U=\{T,H\}$ એમ ગમે તે રીતે લખી શકાય..

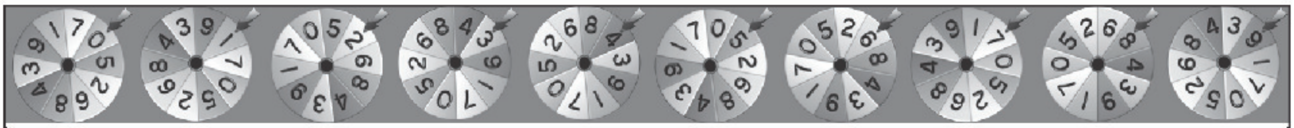
છાપ (Head - H) કાંટો (Tail - T)

પ્રયોગ 2 : 1, 2, 3, 4, 5, 6 એમ 1 થી 6 અંક લખેલા એક છ બાજુવાળા સમતોલ પાસાને ઉછાળો. આ યાદચ્છિક પ્રયોગનાં શક્ય પરિણામો કુલ છ છે : 1, 2, 3, 4, 5, 6. તેથી અહીં નિદર્શ અવકાશ $U=\{1,2,3,4,5,6\}$ થાય.



1 2 3 4 5 6

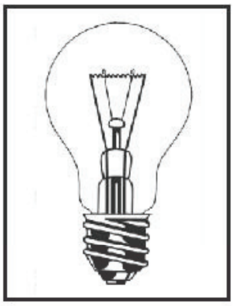
પ્રયોગ 3 : 0, 1, 2, ... , 9 સંખ્યા લખેલ એક ચક્ર ફેરવી જીત પ્રાપ્ત કરતી સંખ્યા નક્કી કરવી. આ યાદચ્છિક પ્રયોગનાં શક્ય પરિણામો કુલ દસ છે તેથી અહીં નિદર્શ અવકાશ $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ થાય.



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

સાન્ત નિદર્શ અવકાશ : યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશમાં કુલ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા પરિમિત હોય તો તેવા નિદર્શ અવકાશને સાન્ત નિદર્શ અવકાશ (Finite Sample Space) કહે છે. દા.ત., ઉપર દર્શાવેલ ત્રણેય યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશો સાન્ત નિદર્શ અવકાશનાં ઉદાહરણો છે.

અનંત નિદર્શ અવકાશ : યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશમાં કુલ શક્ય પરિણામોની સંખ્યા અપરિમિત હોય તેવા નિદર્શ અવકાશને અનંત નિદર્શ અવકાશ (Infinite Sample Space) કહે છે. દા.ત., ઉત્પાદિત ઈલેક્ટ્રિક બલ્બનું આયુષ્ય (L) કલાકમાં માપીને નોંધીએ તો તે વાસ્તવિક સંખ્યા થાય. L નું મૂલ્ય 0 કે તેથી મોટું થાય. તેથી ઈલેક્ટ્રિક બલ્બના આયુષ્ય માપવાના પ્રયોગનાં શક્ય પરિણામો અનંત હશે. અહીં નિદર્શ અવકાશ $U = \{L \mid L \geq 0,\ L \in R\}$ થશે. હવે જો ઈલેક્ટ્રિક બલ્બનું મહત્તમ આયુષ્ય 700 કલાક ધારીએ, તો નિદર્શ અવકાશ $U = \{L \mid 0 \leq L \leq 700;\ L \in R\}$, થશે જે અનંત નિદર્શ અવકાશ બનશે.



હવે આપણે યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશનાં અન્ય કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : બે સમતોલ સિક્કાને એકસાથે ઉછાળવામાં આવે છે. આ યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ લખો.

અહીં બે સિક્કા પૈકી કોઈપણ એક સિક્કાને પહેલો સિક્કો અને બાકીના સિક્કાને બીજો સિક્કો કહીશું. આ પ્રયોગનાં પરિણામો નીચે આકૃતિમાં દર્શાવ્યા મુજબ મળી શકે :

છાપને H વડે અને કાંટાને T વડે દર્શાવીએ, તો નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ મળે :

$U = \{HH,\ HT,\ TH,\ TT\}$

પહેલા સિક્કા પર H અને T માંથી કોઈ એક પરિણામ મળી શકે. તેથી આ ક્રિયા બે રીતે થઈ શકે અને બીજા સિક્કા પર પણ H અને T માંથી કોઈ એક પરિણામ મળી શકે તેથી આ ક્રિયા પણ બે રીતે થઈ શકે. ગણતરીના ગુણાકારના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ કુલ $2 \times 2 = 2^2 = 4$ કુલ શક્ય પરિણામો મળશે. અહીં નોંધવું જોઈએ કે એક સમતોલ સિક્કો બે વખત ઉછાળવામાં આવે તોપણ આ પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ ઉપર દર્શાવ્યા મુજબ જ થશે.

ઉદાહરણ 2 : દરેક પાસાની બાજુઓ પર 1 થી 6 અંક લખેલ હોય તેવા બે સમતોલ પાસા ઉછાળવામાં આવે છે. આ યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ લખો.

અહીં બે પાસા પૈકી કોઈપણ એક પાસાને પહેલો પાસો અને બાકીના પાસાને બીજો પાસો કહીશું. પહેલા પાસા પર મળતા અંકને i અને બીજા પાસા પર મળતા અંકને j વડે દર્શાવીશું. તેથી બંને પાસા પર મળતા અંકોની જોડને $(i,\ j)$ વડે દર્શાવીએ, તો નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ બને. જ્યાં $i,\ j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ થશે.

$$
\begin{aligned}
U = \{ & (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), \\
& (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), \\
& (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), \\
& (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), \\
& (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), \\
& (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \}
\end{aligned}
$$

અથવા

$U = \{(i,\ j);\ i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

પહેલા પાસા પરના 1 થી 6 પૂર્ણાંકોમાંથી કોઈપણ એક પૂર્ણાંક ઉપરની બાજુ આવી શકે તેથી આ ક્રિયા છ રીતે થઈ શકે અને બીજા પાસા પરના પણ 1 થી 6 પૂર્ણાંકોમાંથી કોઈપણ એક પૂર્ણાંક ઉપરની બાજુ આવી શકે તેથી આ ક્રિયા પણ છ રીતે થઈ શકે. ગણતરીના ગુણાકારના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ કુલ $6 \times 6 = 6^2 = 36$ કુલ શક્ય પરિણામો મળશે. તે જ પ્રમાણે ત્રણ સમતોલ પાસા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે, તો આ યાદૃચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશમાં કુલ શક્ય પરિણામો $6^3 = 216$ થશે.

ઉદાહરણ 3 : એક ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત થયેલા 1000 એકમોની ગુણવત્તા ચકાસી તેમાંના ખામીયુક્ત એકમો શોધવાના યાદૃચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ લખો.

ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત થયેલા 1000 એકમોમાંથી ખામીયુક્ત એકમો શોધવામાં આવે, તો ઉત્પાદનમાં ખામીયુક્ત એકમોની સંખ્યા 0, 1, 2, ... , 1000 હોઈ શકે. તેથી આ યાદૃચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ બને :

$$U = \{0, 1, 2, ..., 1000\}$$

ઉદાહરણ 4 : પ્રથમ ચાર પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી એકસાથે ત્રણ સંખ્યાઓ યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરવાના યાદૃચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ લખો.

પ્રથમ ચાર પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ એટલે કે 1, 2, 3, 4માંથી એકસાથે ત્રણ સંખ્યા પસંદ કરવામાં આવે તો તે ત્રણ સંખ્યાઓ $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(1, 3, 4)$ અથવા $(2, 3, 4)$ હોઈ શકે. આમ, આ યાદૃચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ બને.

$$U = \{(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4)\}$$

અહીં કુલ 4 સંખ્યાઓમાંથી 3 સંખ્યાઓ પસંદ કરવાની છે જેની પસંદગીના કુલ સંચય ${}^4C_3 = 4$ થાય. આમ, આ યાદૃચ્છિક પ્રયોગનાં કુલ શક્ય પરિણામો 4 થાય.

ઉદાહરણ 5 : પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ પૈકી કોઈપણ એક સંખ્યા યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરવાના યાદૃચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ લખો.

પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ એટલે કે 1, 2, 3, ... થાય. આ સંખ્યાઓમાંથી યાદૃચ્છિક રીતે એક સંખ્યા પસંદ કરીએ તો તેનો નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ બને.

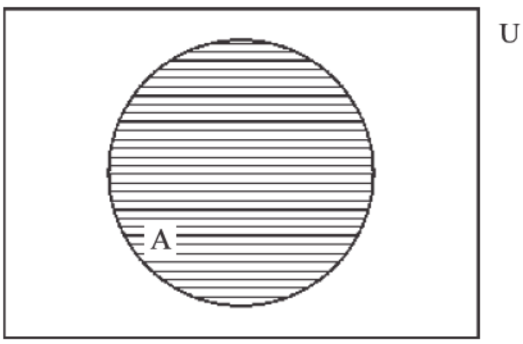
$$U = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

અત્રે નોંધનીય છે કે આ અનંત નિદર્શ અવકાશ છે.

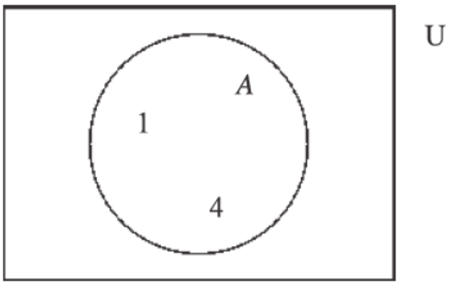
1.3 ઘટના : ચોક્કસ ઘટના, અશક્ય ઘટના, વિશિષ્ટ ઘટનાઓ

આપણે સૌપ્રથમ ઘટનાનો અર્થ સમજી વિવિધ પ્રકારની ઘટનાઓનો અભ્યાસ કરીશું.

(1) ઘટના : યાદૃચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશના ઉપગણને ઘટના (Event) કહે છે. ઘટનાને સામાન્ય રીતે અક્ષરો *A, B, C,* ... વડે અથવા A_1, A_2, A_3, ... વડે દર્શાવાય છે. કોઈપણ ઘટના A માટે સાનુકૂળ પરિણામો દર્શાવતાં નિદર્શ બિંદુઓનો ગણ રચવામાં આવે તો તે નિદર્શ અવકાશ Uનો ઉપગણ હોય છે. આમ યાદૃચ્છિક પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ કોઈપણ ઘટના A નિદર્શ અવકાશ Uનો ઉપગણ હોય છે. તેને $A \subset U$ એવા સંકેતથી દર્શાવાય છે.



દા.ત., એક સમતોલ પાસો ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ થાય. હવે જો પાસાની ઉપરની બાજુએ મળેલ અંક પૂર્ણવર્ગ મળે તેને ઘટના A કહીએ તો ઘટના $A = \{1, 4\}$ થાય.



હવે આપણે બે સમતોલ પાસા ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગમાં મળતી કેટલીક ઘટનાઓના ઉદાહરણથી દર્શાવીશું કે ઘટના એ નિદર્શ અવકાશનો ઉપગણ છે.

- A_1 = બે પાસા પરના અંકનો સરવાળો 6 મળે

$\therefore\ A_1 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4,2), (5, 1)\}$

- A_2 = બંને પાસા પર સરખા અંક મળે

$\therefore\ A_2 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$

- A_3 = બંને પાસા પરના અંકનો સરવાળો 9 થી વધુ મળે

$\therefore\ A_3 = \{(4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

આ બધા ઉપગણોને ઘટનાઓ કહેવાય.

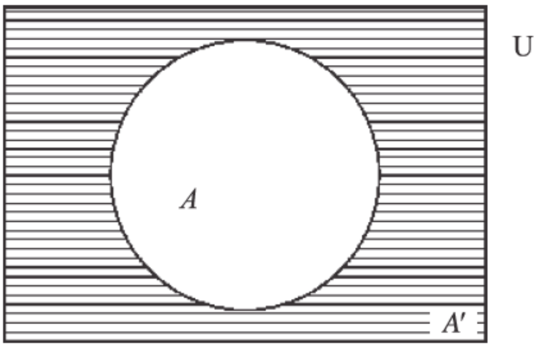
(2) અશક્ય ઘટના : યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશના વિશિષ્ટ ઉપગણ ϕ અથવા $\{\ \}$ ને અશક્ય ઘટના (Impossible Event) કહે છે. અશક્ય ઘટના એટલે એવી ઘટના જે કદી બનતી જ ન હોય. તેને માટે ϕ અથવા $\{\ \}$ સંકેતનો ઉપયોગ થાય છે.

દા.ત., એક સમતોલ સિક્કાને ઉછાળતાં તેના પર છાપ (H) અને કાંટો (T) બંને મળે તે અશક્ય ઘટના કહેવાય.

(3) ચોક્કસ ઘટના : યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશના વિશિષ્ટ ઉપગણ U ને ચોક્કસ ઘટના (Certain Event) કહે છે. ચોક્કસ ઘટના એ એવી ઘટના છે કે જે ઘટના હંમેશાં ઘટે જ છે. તેને માટે U સંકેતનો ઉપયોગ થાય છે.

દા.ત., શનિવારના તરત પછીનો દિવસ રવિવાર હોય, એક છ બાજુવાળો સમતોલ પાસો ઉછાળતા તેની ઉપરની બાજુએ મળેલ પૂર્ણાંક 7 થી નાનો હોય વગેરે ચોક્કસ ઘટનાનાં ઉદાહરણો છે.

(4) પૂરક ઘટના : ધારો કે U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે અને A તેની કોઈ ઘટના છે. નિદર્શ અવકાશ U માં હોય પરંતુ ઘટના A માં ન હોય તેવાં તમામ પરિણામો કે ઘટકોના ગણને ઘટના A ની પૂરક ઘટના (Complementary Event) કહે છે. ઘટના A ની પૂરક ઘટનાને સંકેતમાં A', $\overline{A}$, A^c વગેરે વડે દર્શાવાય છે. આપણે પૂરક ઘટના માટે સંકેત A' નો ઉપયોગ કરીશું.



A' = ઘટના A ની પૂરક ઘટના

= ઘટના A ન બને.

= $U - A$

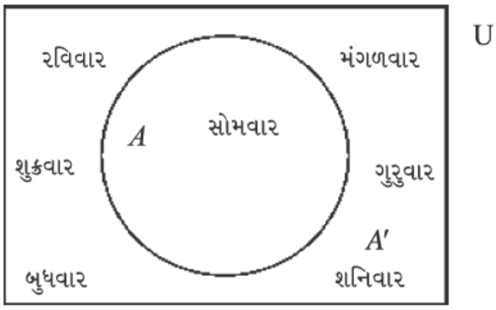
દા.ત., X બંદરેથી નીકળેલું માલવાહક જહાજ Y બંદરે અઠવાડિયાના કયા દિવસે પહોંચશે તે જાણવા માટેના પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ બને.

U = {રવિવાર, સોમવાર, મંગળવાર, બુધવાર, ગુરુવાર, શુક્રવાર, શનિવાર}

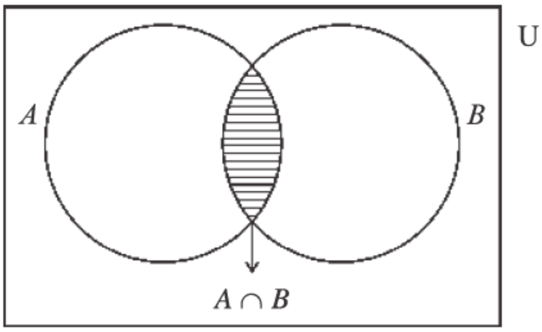
ધારો કે આ જહાજ Y બંદર પર સોમવારે પહોંચે તેને ઘટના A વડે દર્શાવીએ તો સોમવાર સિવાયના દિવસો ઘટના A' નાં પરિણામોનો ગણ કહેવાય.

A = {સોમવાર}

A' = $U - A$ = {રવિવાર, મંગળવાર, બુધવાર, ગુરુવાર, શુક્રવાર, શનિવાર}



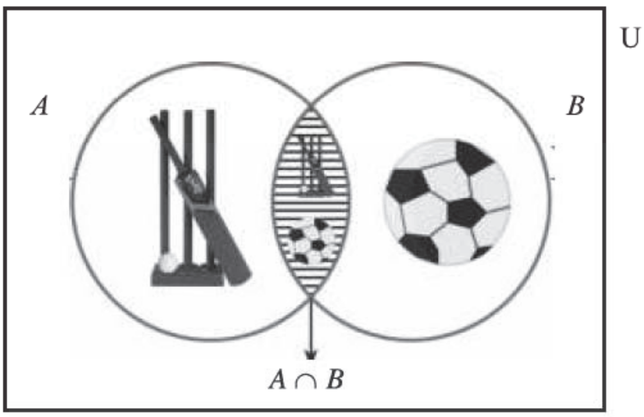
(5) છેદઘટના : ધારો કે U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે અને A તથા B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. ઘટના A અને ઘટના B બંને સાથે બને તે ઘટનાને ઘટના A અને ઘટના B ની છેદઘટના (Intersection of two events A and B) કહે છે. તેને સંકેતમાં $A \cap B$ વડે દર્શાવાય છે.



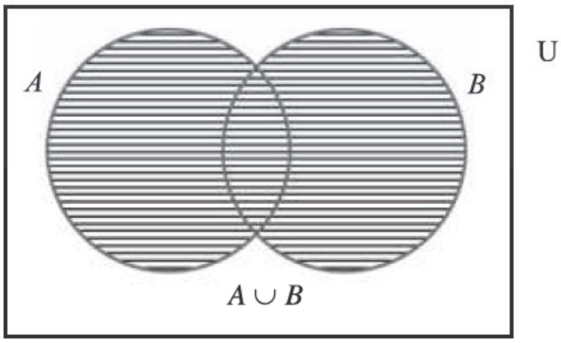
$A \cap B$ = ઘટનાઓ A અને B ની છેદઘટના

= ઘટનાઓ A અને B બંને સાથે બને

દા.ત., એક શાળાના વર્ગમાં અભ્યાસ કરતાં વિદ્યાર્થીઓમાંથી કેટલાક વિદ્યાર્થીઓ તે શાળાની ક્રિકેટ ટીમના સભ્ય છે અને કેટલાક વિદ્યાર્થીઓ શાળાની ફૂટબૉલ ટીમના સભ્ય છે. વિદ્યાર્થી ક્રિકેટ ટીમનો સભ્ય હોય તે ઘટનાને ઘટના A અને વિદ્યાર્થી ફૂટબૉલ ટીમનો સભ્ય હોય તે ઘટનાને ઘટના B કહીએ. હવે જો આ વર્ગના કોઈ એક વિદ્યાર્થીની યાદૃચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવે, તો તે વિદ્યાર્થી શાળાની ક્રિકેટ અને ફૂટબૉલ બંને ટીમનો સભ્ય હોય તે ઘટનાને ઘટના A અને ઘટના B ની છેદઘટના $A \cap B$ કહે છે.



(6) યોગઘટના : ધારો કે U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે અને A તથા B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. ઘટના A બને અથવા ઘટના B બને અથવા ઘટનાઓ A અને B બંને સાથે બને તે ઘટનાને ઘટના A અને ઘટના B ની યોગઘટના (Union of two events A and B) કહે છે. તેને સંકેતમાં $A \cup B$ વડે દર્શાવાય છે.

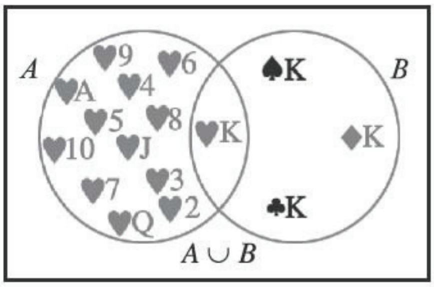


$A \cup B$ = ઘટનાઓ A અને B ની યોગઘટના

= ઘટના A બને અથવા ઘટના B બને અથવા ઘટનાઓ A અને B બંને સાથે બને

= ઘટનાઓ A અને B પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના બને

દા.ત., 52 પત્તાંના ઢગમાંથી યાદચ્છિક રીતે ખેંચેલ એક પત્તું લાલ (ઘટના A કહો) અથવા રાજા (ઘટના B કહો) હોવાની ઘટના $A \cup B$ નીચે મુજબ બને :



$$A = \{H_A, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7, H_8, H_9, H_{10}, H_J, H_Q, H_K\}$$

$$B = \{S_K, D_K, C_K, H_K\}$$

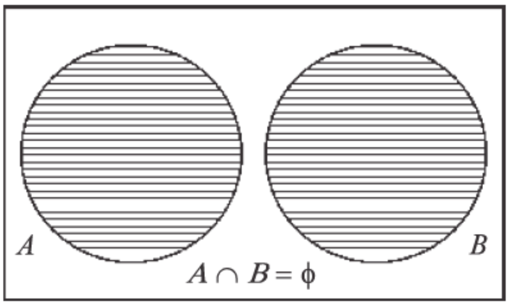
$$A \cup B = \{H_A, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7, H_8, H_9, H_{10}, H_J, H_Q, H_K, S_K, D_K, C_K\}$$

એટલે કે આ 16 પત્તાં પૈકીનું કોઈપણ પત્તું પસંદ થાય તો ઘટના $A \cup B$ બને છે તેમ કહેવાય.

પત્તાંના પ્રકાર અને જાતને અંગ્રેજીમાં નીચે મુજબ દર્શાવાય છે :

કાળી *(S)* - Spade	ચરકટ *(D)* - Diamond	ફલ્લી *(C)* - Club	લાલ *(H)* - Heart
એક્કો *(A)* - Ace	રાજા *(K)* - King	રાણી *(Q)* - Queen	ગુલામ *(J)* - Jack

(7) પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ : ધારો કે U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે અને A તથા B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. ઘટના A અને ઘટના B બંને એકસાથે બની જ ન શકે એટલે કે $A \cap B = \phi$ થાય અથવા બીજી રીતે કહીએ તો ઘટના A બને તો ઘટના B ન બને અને ઘટના B બને તો ઘટના A ન બને, ત્યારે ઘટનાઓ A અને B ને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ (Mutually Exclusive Events) કહેવાય.

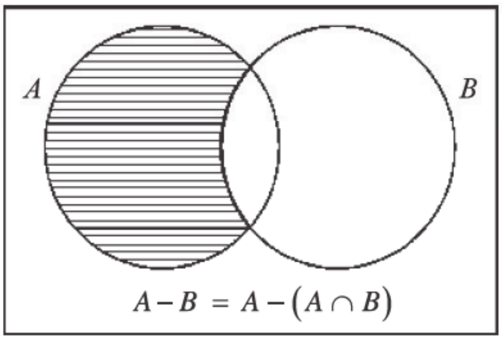


$A \cap B = \phi$

દા.ત., એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળો. સિક્કા પર મળતું પરિણામ H હોય તેને ઘટના A વડે અને સિક્કા પર મળતું પરિણામ T હોય તેને ઘટના B વડે દર્શાવો. અહીં $A = \{H\}$ અને $B = \{T\}$ થાય. સ્પષ્ટ છે કે $A \cap B = \phi$ થશે. કારણ કે એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળતા તેના પર H અને T બંને એક સાથે ઉદ્‌ભવી શકે નહિ. એટલે કે સમતોલ સિક્કો ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગમાં કોઈ પ્રયત્ને H મળે તો તે જ પ્રયત્નમાં પરિણામ T મળી શકે નહિ અને તેનાથી ઊલટું કોઈ પ્રયત્ને T મળે તો તે જ પ્રયત્નમાં પરિણામ H મળી શકે નહિ. આમ બંને ઘટના સાથે બની શકતી નથી.

$A \cap B = \phi$

(8) તફાવત ઘટના : ધારો કે U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે અને A તથા B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. ઘટના A બને પરંતુ ઘટના B ન બને તેવા ઘટકો કે પરિણામોના ગણને ઘટના A અને ઘટના B ની તફાવત ઘટના (Difference event of A and B) કહે છે. તેને સંકેતમાં $A - B$ વડે દર્શાવાય છે. અહીં બાજુની વેન આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે,



$A - B = A - (A \cap B)$

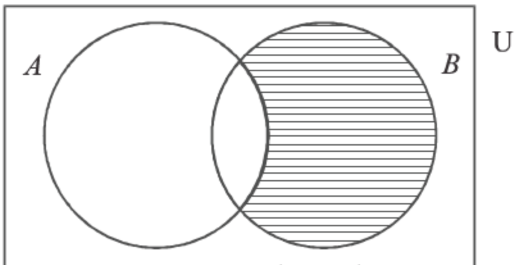
$$A - B = A \cap B' = A - (A \cap B) = (A \cup B) - B$$

$A - B$ = ઘટનાઓ A અને B ની તફાવત ઘટના

= ઘટના A બને પરંતુ ઘટના B ન બને

= ઘટનાઓ A અને B પૈકી ફક્ત ઘટના A જ બને

તે જ પ્રમાણે, સાન્ત નિદર્શ અવકાશ Uની કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B માટે ઘટના B બને પરંતુ ઘટના A ન બને તેવા ઘટકો કે પરિણામોના ગણને ઘટના B અને ઘટના Aની તફાવત ઘટના કહે છે. તેને સંકેતમાં $B-A$ વડે દર્શાવાય છે. અહીં બાજુની વેન આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ છે કે,



$B-A = B-(A \cap B)$

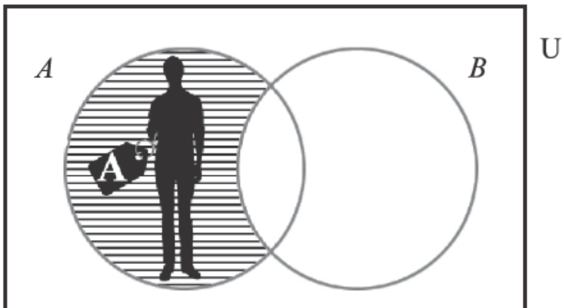
$$B-A = A' \cap B = B-(A \cap B) = (A \cup B)-A$$

$B-A$ = ઘટનાઓ B અને Aની તફાવત ઘટના

= ઘટના B બને પરંતુ ઘટના A ન બને

= ઘટનાઓ A અને B પૈકી ફક્ત ઘટના B જ બને

દા.ત., એક ઑફિસમાં નોકરી કરતાં જુદા-જુદા કર્મચારીઓ પૈકી બે કર્મચારીઓ A અને B એકબીજાના ખાસ મિત્રો છે. કર્મચારી A ઑફિસ આવે તેને ઘટના A અને કર્મચારી B ઑફિસ આવે તેને ઘટના B કહો. હવે જો કોઈ ચોક્કસ દિવસે એમ બોલવામાં આવે કે, 'આજે બે કર્મચારીઓ A અને B પૈકી ફક્ત કર્મચારી A જ ઑફિસ આવેલ છે.' તો તેનો અર્થ એમ સ્પષ્ટ છે કે તે દિવસે ઑફિસમાં બે કર્મચારીઓ A અને B પૈકી કર્મચારી A આવેલ છે પરંતુ કર્મચારી B આવેલ નથી. એટલે કે તેને ઘટના A અને ઘટના Bની તફાવત ઘટના $A-B$ કહે છે. અહીં,

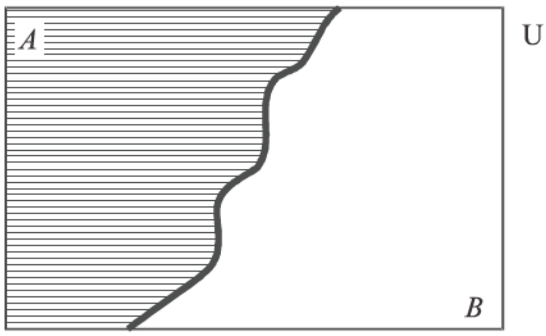


$A-B = A-(A \cap B)$

$A-B$ = કર્મચારીઓ A અને B પૈકી ફક્ત કર્મચારી A જ ઑફિસ આવેલ છે

$B-A$ = કર્મચારીઓ B અને A પૈકી ફક્ત કર્મચારી B જ ઑફિસ આવેલ છે

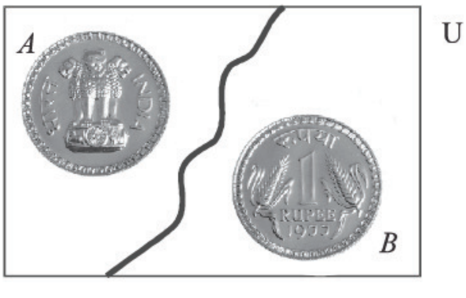
(9) નિઃશેષ ઘટનાઓ : જો યાદૃચ્છિક પ્રયોગની ઘટનાઓનાં શક્ય પરિણામોનો સમૂહ નિદર્શ અવકાશ થાય તો તે ઘટનાઓને નિઃશેષ ઘટનાઓ (Exhaustive Events) કહેવાય. ધારો કે U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે અને A તથા B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. આ બે ઘટનાઓ A અને B નો યોગગણ એ નિદર્શ અવકાશ બને એટલે કે $A \cup B = U$ થાય, તો ઘટનાઓ A અને B ને નિઃશેષ ઘટનાઓ કહેવાય.



દા.ત., એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળતાં તેના પર પરિણામ H મળે તેને ઘટના A કહો અને પરિણામ T મળે તેને ઘટના B કહો. અહીં સ્પષ્ટ છે કે, $A = \{H\}$, $B = \{T\}$ અને

$A \cup B = \{H, T\} = U$

$\therefore$ A અને B નિઃશેષ ઘટનાઓ છે.



(10) પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ : ધારો કે U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે અને A તથા B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. આ બે ઘટનાઓ માટે $A \cap B = \phi$ અને $A \cup B = U$ થાય તો A અને B ને પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ ઘટનાઓ કહેવાય. અત્રે એ નોંધવું જરૂરી છે કે, બધી પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ નિ:શેષ ઘટનાઓ હોય તે જરૂરી નથી, તે જ પ્રમાણે બધી નિ:શેષ ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય તે જરૂરી નથી.

દા.ત. એક સમતોલ પાસાને ઉછાળવાના પ્રયોગ સાથે સંકળાયેલ નિદર્શ અવકાશ $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ માટે ઘટના A = પાસા પર મળતો અંક અયુગ્મ હોય $= \{1, 3, 5\}$ અને ઘટના B = પાસા પર મળતો અંક યુગ્મ હોય $= \{2, 4, 6\}$ હોય તો અહીં સ્પષ્ટ છે કે $A \cap B = \phi$ અને $A \cup B = U$ થાય. તેથી ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ કહેવાશે.

(11) પ્રાથમિક ઘટનાઓ : યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ U ના એક ઘટકીય ઉપગણોથી બનતી તમામ ઘટનાઓને પ્રાથમિક ઘટનાઓ (Elementary Events) કહે છે. પ્રાથમિક ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ હોય છે.

દા.ત., એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળવાના પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ $U = \{H, T\}$ માં એક ઘટકીય ઘટનાઓ $A = \{H\}$ અને $B = \{T\}$ એ પ્રાથમિક ઘટનાઓ છે. અહીં $A \cap B = \phi$ અને $A \cup B = U$ હોવાથી એમ કહી શકાય કે પ્રાથમિક ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ હોય છે.

ઉદાહરણ 6 : એક ટોપલીમાં 3 પીળાં અને 2 ગુલાબી ફૂલ છે. આ ટોપલીમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક ફૂલ પસંદ કરવામાં આવે છે. જો પસંદ થયેલ ફૂલ પીળું હોય તેને ઘટના A અને ગુલાબી હોય તેને ઘટના B વડે દર્શાવીએ, તો નીચેની ઘટના દર્શાવતા ગણ મેળવો અને પૂછેલ પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) U (2) A (3) B (4) A' (5) B' (6) $A \cap B$ (7) $A \cup B$ (8) $A \cap B'$ (9) $A' \cap B$

(10) આ યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની પ્રાથમિક ઘટનાઓ જણાવો.

(11) ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ કહેવાશે ? કારણ આપો.

(12) ઘટનાઓ A અને B નિ:શેષ ઘટનાઓ કહેવાશે ? કારણ આપો.

આપણે ટોપલીનાં 3 પીળાં ફૂલને Y_1, Y_2, Y_3 અને 2 ગુલાબી ફૂલને P_1, P_2 વડે દર્શાવીશું. માંગેલી ઘટનાઓ દર્શાવતાં ગણ નીચે મુજબ થશે :

(1) $U = \{Y_1, Y_2, Y_3, P_1, P_2\}$

(2) $A = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$

(3) $B = \{P_1, P_2\}$

(4) $A' = U - A = \{Y_1, Y_2, Y_3, P_1, P_2\} - \{Y_1, Y_2, Y_3\}$

$= \{P_1, P_2\}$

(5) $B' = U - B = \{Y_1, Y_2, Y_3, P_1, P_2\} - \{P_1, P_2\}$

$= \{Y_1, Y_2, Y_3\}$

(6) $A \cap B = \{Y_1, Y_2, Y_3\} \cap \{P_1, P_2\}$

$= \phi$

(7) $A \cup B = \{Y_1, Y_2, Y_3\} \cup \{P_1, P_2\}$

$= \{Y_1, Y_2, Y_3, P_1, P_2\}$

(8) $A \cap B' = \{Y_1, Y_2, Y_3\} \cap \{Y_1, Y_2, Y_3\}$

$= \{Y_1, Y_2, Y_3\}$

અથવા

$A \cap B' = A - (A \cap B)$

$= \{Y_1, Y_2, Y_3\} - \phi$

$= \{Y_1, Y_2, Y_3\}$

(9) $A' \cap B = \{P_1, P_2\} \cap \{P_1, P_2\}$

$= \{P_1, P_2\}$

અથવા

$A' \cap B = B - (A \cap B)$

$= \{P_1, P_2\} - \phi$

$= \{P_1, P_2\}$

(10) પ્રાથમિક ઘટનાઓ એટલે યાદચ્છિક પ્રયોગ Uના એક ઘટકીય ઉપગણ. જુદી-જુદી પ્રાથમિક ઘટનાઓને $E_1, E_2, E_3, \ldots$ એ મુજબ દર્શાવીએ તો,

$E_1 = \{Y_1\}, \ E_2 = \{Y_2\}, \ E_3 = \{Y_3\}, \ E_4 = \{P_1\}, \ E_5 = \{P_2\}$

(11) ઘટનાઓ A અને B ને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ કહી શકાય કારણ કે પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓની વ્યાખ્યા મુજબ $A \cap B = \phi$ હોય, તો ઘટનાઓ A અને B ને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ કહી શકાય. પ્રશ્ન નં. 6ના જવાબ પરથી જોઈ શકાય છે કે $A \cap B = \phi$ છે.

(12) ઘટનાઓ A અને B ને નિ:શેષ ઘટનાઓ કહી શકાય કારણ કે નિ:શેષ ઘટનાઓની વ્યાખ્યા મુજબ $A \cup B = U$ હોય, તો ઘટનાઓ A અને B ને નિ:શેષ ઘટનાઓ કહી શકાય. પ્રશ્ન નં. 7ના જવાબ પરથી જોઈ શકાય છે કે $A \cup B = U$ છે.

ઉદાહરણ 7 : એક યાદચ્છિક પ્રયોગની ઘટનાઓ A અને B નીચે મુજબ છે :

$\mathbf{A = \{1, 2, 3, 4\}, \quad B = \{-1, 0, 1\}}$

જો નિદર્શ અવકાશ $U = A \cup B$ હોય તો નીચેની ઘટનાઓ દર્શાવતા ગણ મેળવો.

(1) B' (2) $A' \cap B$ (3) $A - B$

અહીં $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{-1, 0, 1\}$

$U = A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{-1, 0, 1\}$

$= \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

(1) $B' = U - B$

$= \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} - \{-1, 0, 1\}$

$= \{2, 3, 4\}$

(2) $A' \cap B = B - (A \cap B)$

આ માટે પહેલાં $A \cap B$ મેળવીશું,

$A \cap B = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{-1, 0, 1\}$
$= \{1\}$

વૈકલ્પિક રીત :

$A' = U - A = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\} - \{1, 2, 3, 4\} = \{-1, 0\}$

$\therefore \; A' \cap B = \{-1, 0\} \cap \{-1, 0, 1\} = \{-1, 0\}$

હવે, $A' \cap B = B - (A \cap B)$

$= \{-1, 0, 1\} - \{1\}$

$= \{-1, 0\}$

(3) $A - B = \{1, 2, 3, 4\} - \{-1, 0, 1\}$
$= \{2, 3, 4\}$

ઉદાહરણ 8 : પ્રથમ 50 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી એક સંખ્યા યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. નીચેની ઘટનાઓ દર્શાવતા ગણ મેળવો.

(1) પસંદ થયેલ સંખ્યા 5 અથવા 7ની ગુણક હોય

(2) પસંદ થયેલ સંખ્યા 5 અને 7 એમ બંનેની ગુણક હોય

(3) પસંદ થયેલ સંખ્યા 5ની ગુણક હોય પરંતુ 7ની ગુણક ન હોય

(4) પસંદ થયેલ સંખ્યા 5 અને 7 પૈકી ફક્ત 7ની ગુણક હોય

અહીં પ્રથમ 50 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી એક સંખ્યા પસંદ કરીએ, તો આ ઘટનાના શક્ય તમામ શક્ય પરિણામોનો સમૂહ એટલે કે નિદર્શ અવકાશ U નીચે મુજબ બને :

$U = \{1, 2, 3, \ldots\ldots, 50\}$

ઘટના A = પસંદ થયેલ સંખ્યા 5ની ગુણક હોય

$= \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$

ઘટના B = પસંદ થયેલ સંખ્યા 7ની ગુણક હોય

$= \{7, 14, 21, 28, 35, 42, 49\}$

હવે માંગેલી ઘટનાઓ નીચે મુજબ થશે :

(1) પસંદ થયેલ સંખ્યા 5 અથવા 7ની ગુણક હોય તો તે ઘટના = $A \cup B$

$\therefore \; A \cup B = \{5, 7, 10, 14, 15, 20, 21, 25, 28, 30, 35, 40, 42, 45, 49, 50\}$

(2) પસંદ થયેલ સંખ્યા 5 અને 7 એમ બંનેની ગુણક હોય તે ઘટના = $A \cap B$

$\therefore \; A \cap B = \{35\}$

(3) પસંદ થયેલ સંખ્યા 5ની ગુણક હોય પરંતુ 7ની ગુણક ન હોય તે ઘટના $= A \cap B'$

$$\therefore \; A \cap B' = A - (A \cap B)$$
$$= \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 40, 45, 50\}$$

(4) પસંદ થયેલ સંખ્યા 5 અને 7 પૈકી ફક્ત 7ની ગુણક હોય તે ઘટના $= A' \cap B$

$$\therefore \; A' \cap B = B - (A \cap B)$$
$$= \{7, 14, 21, 28, 42, 49\}$$

ઉદાહરણ 9 : એક યાદચ્છિક પ્રયોગની ઘટનાઓ A_1 અને A_2 નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત થયેલી છે. આ પરથી યોગઘટના $A_1 \cup A_2$ અને છેદઘટના $A_1 \cap A_2$ દર્શાવતાં ગણ મેળવો.

$A_1 = \{x \mid x = -1, 0, 1\}$, $\quad A_2 = \{x \mid x = 1, 2, 3\}$

અહીં $A_1 = \{-1, 0, 1\}$ અને $A_2 = \{1, 2, 3\}$ આપેલ છે.

યોગઘટના $A_1 \cup A_2 = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

છેદઘટના $A_1 \cap A_2 = \{1\}$

ઉદાહરણ 10 : એક ફેક્ટરીમાં જુદી જુદી લંબાઈના સ્ક્રૂનું ઉત્પાદન કરવામાં આવે છે. સ્ક્રૂની લંબાઈ (સેમી)ને x વડે દર્શાવવામાં આવે છે. પસંદ કરેલ સ્ક્રૂની લંબાઈ જાણવાના પ્રયોગમાં ઘટનાઓ A_1 અને A_2 નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત થયેલી છે. આ પરથી યોગઘટના $A_1 \cup A_2$ અને છેદઘટના $A_1 \cap A_2$ દર્શાવતાં ગણ મેળવો.

$A_1 = \{x \mid 0 < x < 1\}$, $\quad A_2 = \{x \mid \frac{1}{2} \le x < 2\}$

અહીં $A_1 = \{x \mid 0 < x < 1\}$ અને $A_2 = \{x \mid \frac{1}{2} \le x < 2\}$ આપેલ છે.

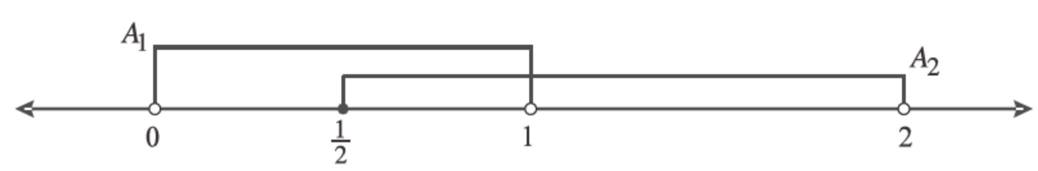
યોગઘટના $A_1 \cup A_2 = \{x \mid 0 < x < 2\}$

$= (0, 2)$ (અંતરાલ સ્વરૂપ)

છેદઘટના $A_1 \cap A_2 = \{x \mid \frac{1}{2} \le x < 1\}$

$= \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ (અંતરાલ સ્વરૂપ)

$A_1 \cup A_2$ અને $A_1 \cap A_2$ ઘટનાઓની વધુ સરળ સમજૂતી માટે નીચે આપેલી આકૃતિ ધ્યાનથી જુઓ.



સ્વાધ્યાય 1.1

1. નીચે જણાવેલ યાદચ્છિક પ્રયોગો માટે નિદર્શ અવકાશ લખો :

(1) એક સમતોલ સિક્કાને ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે.

(2) છ બાજુવાળો એક સમતોલ પાસો અને એક સમતોલ સિક્કો એકસાથે ઉછાળવામાં આવે.

(3) a, b, c, d, e એમ પાંચ વ્યક્તિઓમાંથી બે વ્યક્તિઓ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે.

2. 100 ગુણની એક પરીક્ષામાં બેસનાર વિદ્યાર્થીને મળતા ગુણ (પૂર્ણાંક)નો નિદર્શ અવકાશ લખો અને તેનાં કુલ નિદર્શ બિંદુઓની સંખ્યા જણાવો.

3. ચાર વ્યક્તિઓમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક મંત્રી અને એક સહમંત્રી પસંદ કરવાનો નિદર્શ અવકાશ લખો.

4. એક યાદચ્છિક પ્રયોગમાં જ્યાં સુધી છાપ મળે ત્યાં સુધી એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળવામાં આવે છે. જે પ્રયત્ને પહેલી વખત છાપ મળે તે પ્રયત્ને પ્રયોગ પૂરો કરી દેવામાં આવે છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ લખો અને તે સાન્ત છે કે અનંત તે જણાવો.

5. પ્રથમ પાંચ પ્રાકૃતિક સંખ્યામાંથી યાદચ્છિક રીતે ત્રણ સંખ્યા પસંદ કરવાના પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ લખો.

6. એક સંખ્યા પસંદ કરવાના યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ $U = \{1, 2, 3, \ldots.. , 20\}$ છે. નીચેની ઘટનાઓ દર્શાવતાં ગણ લખો :

(1) પસંદ કરવામાં આવેલ સંખ્યા અયુગ્મ સંખ્યા હોય

(2) પસંદ કરવામાં આવેલ સંખ્યા 3 વડે વિભાજ્ય હોય

(3) પસંદ કરવામાં આવેલ સંખ્યા 2 અથવા 3 વડે વિભાજ્ય હોય

7. બે બાળકો ધરાવતાં કુટુંબોમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક કુટુંબ પસંદ કરવામાં આવે છે. આ કુટુંબનાં બાળકોની જાતિ (નર કે નારી)ની નોંધ કરવામાં આવે છે. આ પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ દર્શાવો અને નીચેની ઘટનાઓ દર્શાવતાં ગણ લખો :

(1) ઘટના A_1 = એક બાળક નારીજાતિ (છોકરી)નું હોય.

(2) ઘટના A_2 = ઓછામાં ઓછું એક બાળક નારીજાતિ (છોકરી)નું હોય.

8. છ બાજુવાળા બે સમતોલ પાસા એકસાથે ઉછાળવામાં આવે છે. આ યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ લખો અને તે પરથી નીચેની ઘટનાઓ દર્શાવતા ગણ લખો :

(1) ઘટના A_1 = પાસા પરના અંકનો સરવાળો 7 થાય

(2) ઘટના A_2 = પાસા પરના અંકનો સરવાળો 4 થી ઓછો થાય

(3) ઘટના A_3 = પાસા પરના અંકનો સરવાળો 3 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય

(4) ઘટના A_4 = પાસા પરના અંકનો સરવાળો 12થી વધુ થાય

9. પ્રથમ પાંચ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી બે સંખ્યાઓ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. જો પસંદ થયેલ બે સંખ્યાઓનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો 6 હોય તેને ઘટના A અને પસંદ થયેલ બે સંખ્યાઓનો સરવાળો યુગ્મ હોય તેને ઘટના B કહેવામાં આવે, તો નીચેની ઘટનાઓ દર્શાવતા ગણ લખો અને પૂછેલ પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

(1) U (2) A (3) B (4) $A \cup B$ (5) $A \cap B$ (6) A' (7) $A - B$ (8) $A' \cap B$

(9) શું ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક કહેવાય ? કારણ આપો.

(10) આ પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશનાં નિદર્શ બિંદુઓની સંખ્યા લખો.

10. એક ઑફિસમાં ત્રણ સ્ત્રી કર્મચારીઓ અને બે પુરુષ કર્મચારીઓ નોકરી કરે છે. ઑફિસના કર્મચારીઓમાંથી એક કર્મચારીને યાદચ્છિક રીતે તાલીમ આપવા માટે પસંદ કરવામાં આવે છે. જો તાલીમ માટે પસંદગી પામેલ કર્મચારી સ્ત્રી હોય તે ઘટનાને A અને તે કર્મચારી પુરુષ હોય તે ઘટનાને B વડે દર્શાવીએ, તો નીચે જણાવેલ ઘટનાઓ દર્શાવતા ગણ મેળવો અને પૂછેલ પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(1) U (2) A (3) B (4) $A \cup B$ (5) $A \cap B$ (6) $A' \cap B$

(7) ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક કહેવાશે ? કારણ આપો.

(8) ઘટનાઓ A અને B નિઃશેષ કહેવાશે ? કારણ આપો.

11. 52 પત્તાંની ઢગમાંથી એક પત્તું યાદચ્છિક રીતે ખેંચવામાં આવે છે. જો ખેંચવામાં આવેલું પત્તું કાળીનું હોય તે ઘટનાને A અને પત્તું એક્કાથી દસ્સા સુધીની સંખ્યા દર્શાવતું હોય (ચહેરાવાળું ન હોય) તે ઘટનાને B કહીએ, તો નીચેની ઘટનાઓ દર્શાવતાં ગણ લખો.

(1) U (2) A (3) B (4) $A \cup B$ (5) $A \cap B$ (6) B'

12. એક યાદચ્છિક પ્રયોગની ઘટનાઓ A_1 અને A_2 નીચે મુજબ છે. આ પરથી યોગઘટના $A_1 \cup A_2$ અને છેદઘટના $A_1 \cap A_2$ દર્શાવતાં ગણ મેળવો.

$$A_1 = \{x \mid 0 < x < 5\}, \qquad A_2 = \{x \mid -1 < x < 3, x \text{ પૂર્ણાંક સંખ્યા}\}$$

13. એક યાદચ્છિક પ્રયોગની ઘટનાઓ A_1 અને A_2 નીચે મુજબ છે. આ પરથી યોગઘટના $A_1 \cup A_2$ અને છેદઘટના $A_1 \cap A_2$ દર્શાવતા ગણ મેળવો.

$$A_1 = \{x \mid 2 \le x < 6,\ x \in N\}, \qquad A_2 = \{x \mid 3 < x < 9,\ x \in N\}$$

14. એક યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ U અને તેની કોઈ ઘટના A નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે. ઘટના A ની પૂરક ઘટના A' મેળવો.

$$U = \{x \mid x = 0, 1, 2, \ldots\ldots, 10\}, \qquad A = \{x \mid x = 2, 4, 6\}$$

15. એક યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ U અને તેની કોઈ ઘટના A નીચે મુજબ વ્યાખ્યાયિત છે. ઘટના A ની પૂરક ઘટના A' મેળવો.

$$U = \{x \mid 0 < x < 1\}, \qquad A = \{x \mid \tfrac{1}{2} \le x < 1\}$$

*

યાદૃચ્છિક પ્રયોગ, નિદર્શ અવકાશ અને વિવિધ ઘટનાઓનો પરિચય મેળવ્યા બાદ હવે આપણે સંભાવનાનો અભ્યાસ કરીશું. આ માટે પહેલાં આપણે સંભાવનાની વ્યાખ્યા જોઈએ.

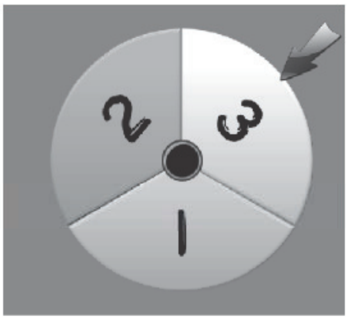
1.4 સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યા

સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યા સમજવા માટે પ્રથમ આપણે બે મહત્ત્વના પદ સમસંભાવી ઘટનાઓ અને સાનુકૂળ પરિણામોની સમજૂતી મેળવીએ.

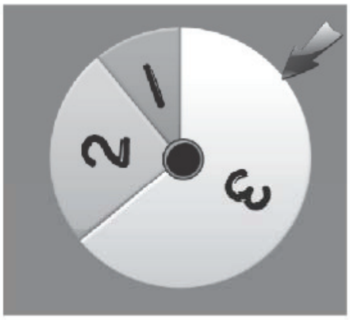
સમસંભાવી ઘટનાઓ : કોઈ યાદૃચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની બે કે તેથી વધુ ઘટનાઓ પૈકી એક ઘટના બનવાની શક્યતા બીજી કોઈપણ ઘટના બનવાની શક્યતા કરતાં વધુ કે ઓછી હોવાનું કોઈ દેખીતું કારણ ન હોય તેવી ઘટનાઓને સમસંભાવી ઘટનાઓ (Equally Likely Events) કહે છે.

દા.ત., કોઈ એકમનું ઉત્પાદન કરતાં ઉત્પાદકની ફેક્ટરીમાં એકમનાં ઉત્પાદન માટે બે મશીનો M_1 અને M_2 છે. દિવસ દરમિયાન બંને મશીનો પર સરખી જ સંખ્યામાં એકમોનું ઉત્પાદન થાય છે. દિવસના અંતે બંને મશીનો પર ઉત્પાદિત થયેલ એકમોને બરાબર ભેળવી ઉત્પાદિત એકમોનો સમૂહ (lot) બનાવવામાં આવે છે. આવા સમૂહમાંથી યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ કોઈ એક એકમ મશીન M_1 પર બન્યો હોય કે મશીન M_2 પર બન્યો હોય તે બંને પ્રાથમિક ઘટનાઓ સમસંભાવી ઘટનાઓ છે.

તે જ પ્રમાણે નીચેનાં ચિત્રોમાં આપેલ ચક્રો A અને B ને હાથથી ગોળ-ગોળ ફેરવી તે અમુક સમય પછી સ્થિર થાય ત્યારે તેમના પર લખેલી સંખ્યાઓ 1, 2, 3 પૈકી કઈ સંખ્યા ચક્ર સામે મૂકેલ તીરની સામે આવે તે નોંધવામાં આવે છે. ચિત્ર પરથી સ્પષ્ટ છે કે, ચક્ર A પર લખેલ ત્રણેય સંખ્યાઓ એ તીરની સામે સ્થિર થાય તે સમસંભાવી ઘટનાઓ છે. પરંતુ ચક્ર B માં સંખ્યાઓ 1, 2 કે 3 તીર સામે સ્થિર થાય તે સમસંભાવી ઘટનાઓ નથી.



ચક્ર A



ચક્ર B

સાનુકૂળ પરિણામો : કોઈ યાદૃચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશનાં પ્રાથમિક પરિણામો પૈકી જે પરિણામો અમુક ઘટના A બની છે તેનો નિર્દેશ કરતાં હોય તેવાં પરિણામોને ઘટના A બને તેના સાનુકૂળ પરિણામો (Favourable Outcomes) કહે છે. દા.ત. 52 પત્તાંના ઢગમાંથી એક પત્તુ યાદૃચ્છિક રીતે ખેંચવામાં આવે છે. ખેંચેલું પત્તું ચહેરાવાળું હોય તેને ઘટના A કહીએ તો ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામોનો સમૂહ નીચે મુજબ થાય :

$$A = \left\{S_K, D_K, C_K, H_K, S_Q, D_Q, C_Q, H_Q, S_J, D_J, C_J, H_J\right\}$$

એટલે કે ઘટના A બનવાને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા 12 થાય.

સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યા : ધારો કે કોઈ યાદૃચ્છિક પ્રયોગના સાન્ત નિદર્શ અવકાશ U ના પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા n છે. તે પૈકી m પરિણામો કોઈ ઘટના A બનવાને સાનુકૂળ હોય, તો **ઘટના A ની સંભાવના $\frac{m}{n}$** થાય. ઘટના A બનવાની સંભાવનાને સંકેતમાં $P(A)$ વડે દર્શાવાય છે.

$$P(A) = \text{ઘટના } A \text{ બનવાની સંભાવના}$$

$$= \frac{\text{ઘટના } A \text{ ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા}}{\text{નિદર્શ અવકાશના પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા}}$$

$$= \frac{m}{n}$$

અહીં $m(\geq 0)$ અને $n(>0)$ બંને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ છે અને $m \leq n$ છે. અહીં n શૂન્ય કે અનંત નથી તે નોંધવું જોઈએ. સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યા (Mathematical Definition)ને પ્રશિષ્ટ વ્યાખ્યા (Classical Definition) તરીકે પણ ઓળખવામાં આવે છે.

ધારણાઓ : સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યાની ધારણાઓ નીચે મુજબ છે :

(1) યાદૃચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશનાં પરિણામોની સંખ્યા સાન્ત છે.

(2) યાદૃચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશનાં કુલ પરિણામોની સંખ્યા જ્ઞાત છે.

(3) યાદૃચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશનાં પરિણામો સમસંભાવી છે.

નીચે દર્શાવેલ સંભાવના સંબંધિત કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો આપણે સાબિતી વગર સ્વીકારી લઈશું :

(1) નિદર્શ અવકાશ Uની કોઈપણ ઘટના Aની સંભાવના $P(A)$ની કિંમતનો વિસ્તાર 0 થી 1 સુધીનો છે એટલે કે $0 \leq P(A) \leq 1$

(2) અશક્ય ઘટનાની સંભાવના શૂન્ય હોય છે. અગાઉ આપણે અશક્ય ઘટનાને ϕ વડે દર્શાવેલ છે. તેથી $P(\phi) = 0$

(3) ચોક્કસ ઘટનાની સંભાવના હંમેશા 1 હોય છે. અગાઉ આપણે ચોક્કસ ઘટનાને U વડે દર્શાવેલ છે. તેથી $P(U) = 1$

(4) નિદર્શ અવકાશ Uની કોઈપણ ઘટના Aની પૂરક ઘટના A' ની સંભાવના $P(A') = 1 - P(A)$ થાય.

(5) યાદૃચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે $A \subset B$ હોય, તો

- $P(A) \leq P(B)$
- $P(B - A) = P(B) - P(A)$

(6) યાદૃચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે,

- $P(A \cap B) \leq P(A) \qquad [\because A \cap B \subset A]$
- $P(A \cap B) \leq P(B) \qquad [\because A \cap B \subset B]$
- $P(A) \leq P(A \cup B) \qquad [\because A \subset A \cup B]$
- $P(B) \leq P(A \cup B) \qquad [\because B \subset A \cup B]$
- $P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = 1 - P(A \cup B)$
- $P(A' \cup B') = P(A \cap B)' = 1 - P(A \cap B)$
- $P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(B - A) = P(A' \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$
- $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

હવે આપણે સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યાની મદદથી જુદી જુદી ઘટનાઓની સંભાવના મેળવવાનાં ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 11 : બે સમતોલ સિક્કા ઉછાળવામાં આવે તો, (1) એક છાપ અને એક કાંટો મળે અને (2) ઓછામાં ઓછી એક છાપ મળે તેની સંભાવના શોધો.

બે સમતોલ સિક્કા ઉછાળવાના યાદૃચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ મળે :

$U = \{HH, HT, TH, TT\}$

$\therefore$ પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા $n = 4$.

(1) એક છાપ H અને કાંટો T મળે તે ઘટનાને A કહીએ તો આવી ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામો HT, TH એમ બે થાય. એટલે કે $m = 2$ થાય.

સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યા મુજબ

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

$$= \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{2}$

(2) ઓછામાં ઓછી એક છાપ મળે તે ઘટનાને B કહીએ તો આવી ઘટના B ને સાનુકૂળ પરિણામો HT, TH, HH છે. તેથી ઘટના B ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 3$ થાય.

સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યા મુજબ

$$P(B) = \frac{m}{n}$$

$$= \frac{3}{4}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{3}{4}$

ઉદાહરણ 12 : 1 થી 6 અંક વડે અંકિત કરેલ બે સમતોલ પાસાને એકસાથે ઉછાળવામાં આવે છે. (1) બંને પાસા પરના અંકનો સરવાળો 7 થાય (2) બંને પાસા પરના અંકનો સરવાળો 10 થી મોટો હોય (3) બંને પાસા પરના અંકનો સરવાળો વધુમાં વધુ 4 હોય (4) બંને પાસા પર સરખા જ અંક મળે (5) બંને પાસા પર મળતા અંકનો સરવાળો 1 થાય (6) બંને પાસા પર મળતા અંકનો સરવાળો 12 કે તેથી ઓછો થાય તેની સંભાવના શોધો.

બે સમતોલ પાસાને એકસાથે ઉછાળવાનો નિદર્શ અવકાશ નીચે મુજબ થશે :

$U = \{(i, j) ; i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$\therefore$ કુલ પરિણામોની સંખ્યા $n = 36$ થાય.

(1) બંને પાસા પરના અંકનો સરવાળો 7 થાય તેને ઘટના A_1 કહીએ, તો આવી ઘટનાને સાનુકૂળ પરિણામો $(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$ એમ કુલ 6 થાય. એટલે કે ઘટના A_1 ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 6$ થાય. ઘટના A_1ની સંભાવના

$$P(A_1) = \frac{m}{n}$$

$$= \frac{6}{36}$$

$$= \frac{1}{6}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{6}$

(2) બંને પાસા પરના અંકનો સરવાળો 10 થી મોટો હોય તેને ઘટના A_2 કહીએ, તો ઘટના A_2 ને સાનુકૂળ પરિણામો $(5, 6), (6, 5), (6, 6)$ થાય. તેથી ઘટના A_2 ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 3$ થાય. ઘટના A_2 ની સંભાવના

$$P(A_2) = \frac{m}{n}$$

$$= \frac{3}{36}$$

$$= \frac{1}{12}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{12}$

(3) બંને પાસા પરના અંકનો સરવાળો વધુમાં વધુ 4 થાય તે ઘટનાને A_3 વડે દર્શાવીએ, તો ઘટના A_3 ને સાનુકૂળ પરિણામો $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)$ એમ કુલ 6 થાય. એટલે કે ઘટના A_3 ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 6$ થાય. ઘટના A_3 ની સંભાવના

$$P(A_3) = \frac{m}{n}$$

$$= \frac{6}{36}$$

$$= \frac{1}{6}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{6}$

(4) ઘટના A_4 = બંને પાસા પર સરખા જ અંક મળે.

$\therefore$ ઘટના A_4 ને સાનુકૂળ પરિણામો $(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$ એમ કુલ 6 થાય.

એટલે કે ઘટના A_4 ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 6$ થાય. ઘટના A_4 ની સંભાવના

$$P(A_4) = \frac{m}{n}$$

$$= \frac{6}{36}$$

$$= \frac{1}{6}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{6}$

(5) બંને પાસા પર મળતા અંકોનો સરવાળો 1 થાય તે ઘટનાને A_5 કહીએ. સ્પષ્ટ છે કે નિદર્શ અવકાશમાં ઘટના A_5 ને સાનુકૂળ પરિણામો એક પણ નથી. તેથી ઘટના A_5 ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 0$ થાય. ઘટના A_5 ની સંભાવના

$$P(A_5) = \frac{m}{n}$$

$$= \frac{0}{36}$$

$$= 0$$

માંગેલી સંભાવના = 0

(અશક્ય ઘટનાની સંભાવના હંમેશાં 0 હોય છે.)

(6) બંને પાસા પરના અંકનો સરવાળો 12 કે તેથી ઓછો થાય તે ઘટનાને A_6 કહીએ. સ્પષ્ટ છે કે નિદર્શ અવકાશમાં બધાં જ પરિણામો ઘટના A_6 ને સાનુકૂળ પરિણામો છે. તેથી ઘટના A_6 ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 36$ થાય. ઘટના A_6 ની સંભાવના

$$P(A_6) = \frac{m}{n}$$

$$= \frac{36}{36}$$

$$= 1$$

માંગેલી સંભાવના = 1

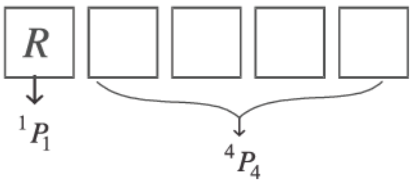
(ચોક્કસ ઘટનાની સંભાવના હંમેશાં 1 હોય છે.)

ઉદાહરણ 13 : *RUTVA* શબ્દના બધા જ અક્ષરોની મદદથી બનતી તમામ ગોઠવણીઓમાં *R* પ્રથમ સ્થાને આવે તેની સંભાવના શોધો.

અહીં *RUTVA* શબ્દમાં *R, U, T, V, A* એમ કુલ 5 અક્ષરો છે. આ પાંચ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી કુલ $^5P_5 = 5! = 120$ ગોઠવણીઓ થઈ શકે. આમ, કુલ પરિણામો $n = 120$ થશે.

ગોઠવણીમાં R પ્રથમ સ્થાન પર આવે તે ઘટના $= A$

ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામો નીચે મુજબ મળે :



R ને પ્રથમ સ્થાન પર $^1P_1$ રીતે અને બાકીના ચાર અક્ષરો U, T, V, A ને બાકીનાં ચાર સ્થાનો પર $^4P_4$ રીતે ગોઠવી શકાય. ગણતરીના ગુણાકારના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ R પ્રથમ સ્થાન પર આવે તેવી કુલ $^1P_1 \times {}^4P_4$ ગોઠવણીઓ થઈ શકે. તેથી ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામો

$$m = {}^1P_1 \times {}^4P_4 = 1! \times 4! = 1 \times 24 = 24 \text{ થાય.}$$

ઘટના A ની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$$= \frac{24}{120}$$

$$= \frac{1}{5}$$

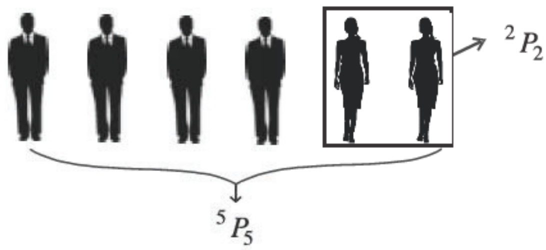
માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{5}$

ઉદાહરણ 14 : એક સરકારી વિભાગમાં નોકરી કરતાં ચાર પુરુષ કર્મચારીઓ અને બે સ્ત્રી કર્મચારીઓને વારાફરતી એક પછી એક તાલીમ માટે તાલીમ કેન્દ્રમાં મોકલવામાં આવે છે. બંને સ્ત્રી કર્મચારીઓ ક્રમશઃ તાલીમ માટે જાય તેની સંભાવના શોધો.

4 પુરુષો અને 2 સ્ત્રીઓ એમ કુલ 6 વ્યક્તિઓને વારાફરતી કુલ ${}^6P_6 = 6! = 720$ રીતે તાલીમ માટે તાલીમ કેન્દ્રમાં મોકલી શકાય. આમ કુલ પરિણામો $n = 720$ થાય.

બંને સ્ત્રીઓ ક્રમશઃ તાલીમ માટે વારાફરતી જાય તે ઘટના $= A$

ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામો નીચે મુજબ મળે :



બંને સ્ત્રી કર્મચારીઓ ક્રમશઃ તાલીમ માટે વારાફરતી જતી હોવાથી તેમને એક જ વ્યક્તિ ગણતાં કુલ 5 વ્યક્તિઓને ${}^5P_5$ રીતે ગોઠવી શકાય અને આ પ્રત્યેક ગોઠવણીઓમાં બંને સ્ત્રી કર્મચારીઓને અંદરોઅંદર ${}^2P_2$ રીતે ગોઠવી શકાય.

આમ ઘટના Aને સાનુકૂળ પરિણામો $m = {}^5P_5 \times {}^2P_2$

$= 5! \times 2!$

$= 120 \times 2$

$= 240$

ઘટના Aની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{240}{720}$

$= \frac{1}{3}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{3}$

ઉદાહરણ 15 : લીપ વર્ષમાં 53 ગુરુવાર હોવાની સંભાવના શોધો.

લીપ વર્ષમાં કુલ 366 દિવસો હોય જે પૈકી 52 પૂરા અઠવાડિયા ($52 \times 7 = 364$ દિવસો) અને 2 દિવસો વધારાના હોય. એક અઠવાડિયામાં દરેક વાર એક વખત આવે એટલે કે કુલ 52 અઠવાડિયામાં દરેક વાર 52 વખત આવે. હવે વધારાના 2 દિવસો નીચે મુજબ હોઈ શકે જે આ પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ થાય.

U = {રવિવાર - સોમવાર, સોમવાર - મંગળવાર, મંગળવાર - બુધવાર,
બુધવાર - ગુરુવાર, ગુરુવાર - શુક્રવાર, શુક્રવાર - શનિવાર, શનિવાર - રવિવાર}

તેથી કુલ પરિણામો $n = 7$ થાય.

ઘટના A = લીપ વર્ષમાં 53 ગુરુવાર હોય

ઉપરોક્ત 7 પરિણામો પૈકી 2 પરિણામો બુધવાર - ગુરુવાર અને ગુરુવાર - શુક્રવાર એ ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામો થશે. એટલે કે $m = 2$.

ઘટના A ની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{2}{7}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{2}{7}$

ઉદાહરણ 16 : એક બેંકના કેશ વિભાગમાં 7 કર્મચારીઓ નોકરી કરે છે, જે પૈકી 2 ઑફિસર, 3 ક્લાર્ક અને 2 પટાવાળા છે. આ વિભાગના કર્મચારીઓમાંથી બે કર્મચારીઓની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરી એક સમિતિની રચના કરવામાં આવે છે. આ સમિતિમાં પસંદ થયેલા બે કર્મચારીઓમાં,

(1) બંને પટાવાળા હોય

(2) બંને ક્લાર્ક હોય

(3) એક ઑફિસર અને એક ક્લાર્ક હોય તેની સંભાવના શોધો.

અહીં બેંકના કેશ વિભાગમાં કુલ 7 કર્મચારીઓ નોકરી કરે છે. તેમાંથી બે કર્મચારીઓ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે તો નિદર્શ અવકાશના પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા

$n = {}^7C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$ થશે.

(1) પસંદગી પામેલ બંને કર્મચારીઓ પટાવાળા હોય તે ઘટના $= A$

ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામો એટલે 2 પટાવાળામાંથી 2 પટાવાળાની પસંદગી અને બાકીના 5 કર્મચારીઓમાંથી કોઈપણ પસંદ ન થાય તેવા પરિણામોની સંખ્યા.

આવા પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^2C_2 \times {}^5C_0 = 1 \times 1 = 1$ થાય.

ઘટના A ની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{1}{21}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{21}$

(2) પસંદગી પામેલ બંને કર્મચારીઓ ક્લાર્ક હોય તે ઘટના $= B$

ઘટના B ને સાનુકૂળ પરિણામો એટલે 3 ક્લાર્કમાંથી 2 ક્લાર્કની પસંદગી અને બાકીના ચાર કર્મચારીઓમાંથી કોઈપણ પસંદ ન થાય તેવાં પરિણામોની સંખ્યા.

આવાં પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^3C_2 \times {}^4C_0 = 3 \times 1 = 3$ થાય.

ઘટના B ની સંભાવના $P(B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{3}{21}$

$= \frac{1}{7}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{7}$

(3) પસંદગી પામેલ બે કર્મચારીમાં એક ઑફિસર અને એક ક્લાર્ક હોય તે ઘટના = C

ઘટના C ને સાનુકૂળ પરિણામો એટલે 2 ઑફિસરમાંથી 1 ઑફિસરની પસંદગી થાય અને 3 ક્લાર્કમાંથી 1 ક્લાર્કની પસંદગી થાય અને 2 પટાવાળામાંથી એક પણ પટાવાળાની પસંદગી ન થાય તેવાં પરિણામો.

આવાં પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^2C_1 \times {}^3C_1 \times {}^2C_0 = 2 \times 3 \times 1 = 6$ થાય.

ઘટના C ની સંભાવના $P(C) = \frac{m}{n}$

$= \frac{6}{21}$

$= \frac{2}{7}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{2}{7}$

ઉદાહરણ 17 : એક બૉક્સમાં કુલ 20 એકમો છે, જેમાં 10 % એકમો ખામીવાળા છે. આ બૉક્સમાંથી યાદચ્છિક રીતે ત્રણ એકમો પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલ ત્રણ એકમોમાં,

(1) બે એકમ ખામીવાળા હોય

(2) બે એકમ ખામીરહિત હોય

(3) ત્રણેય એકમ ખામીરહિત હોવાની સંભાવના શોધો.

અહીં કુલ 20 એકમો છે, જેમાં 10 % એટલે કે 20 × 10 % = 2 એકમો ખામીવાળા અને બાકીના 18 એકમો ખામીરહિત છે. આ બૉક્સના કુલ 20 એકમોમાંથી 3 એકમોને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે.

તેથી નિદર્શ અવકાશનાં કુલ પરિણામો $n = {}^{20}C_3 = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 1140$ થશે.

(1) પસંદ થયેલ ત્રણ એકમોમાં બે એકમ ખામીવાળા હોય તે ઘટના = A

ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામો એટલે 2 ખામીવાળા એકમોમાંથી 2 એકમની પસંદગી અને 18 ખામીરહિત એકમોમાંથી 1 એકમની પસંદગી થાય તેવાં પરિણામોની સંખ્યા.

આવાં પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^2C_2 \times {}^{18}C_1 = 1 \times 18 = 18$

ઘટના A ની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{18}{1140}$

$= \frac{3}{190}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{3}{190}$

(2) પસંદ થયેલ ત્રણ એકમોમાં બે એકમ ખામીરહિત હોય તે ઘટના = B

ઘટના B ને સાનુકૂળ પરિણામો એટલે 18 ખામીરહિત એકમોમાંથી 2 એકમની પસંદગી અને 2 ખામીવાળા એકમોમાંથી 1 એકમની પસંદગી થાય તેવાં પરિણામોની સંખ્યા.

આવાં પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^{18}C_2 \times {}^2C_1 = 153 \times 2 = 306$

ઘટના Bની સંભાવના $P(B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{306}{1140}$

$= \frac{51}{190}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{51}{190}$

(3) પસંદ થયેલ ત્રણેય એકમ ખામીરહિત હોય તે ઘટના $= C$

ઘટના Cને સાનુકૂળ પરિણામો એટલે 18 ખામીરહિત એકમોમાંથી 3 એકમની પસંદગી અને 2 ખામીવાળા એકમોમાંથી એક પણ એકમ પસંદ ન થાય તેવાં પરિણામોની સંખ્યા.

આવાં પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^{18}C_3 \times {}^{2}C_0 = 816 \times 1 = 816$

ઘટના Cની સંભાવના $P(C) = \frac{m}{n}$

$= \frac{816}{1140}$

$= \frac{68}{95}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{68}{95}$

ઉદાહરણ 18 : એક પેટીમાં કુલ 10 ચિઠ્ઠીઓ છે જે પૈકી 3 ચિઠ્ઠીઓ ઈનામને પાત્ર છે. કથન નામનો બાળક આ પેટીમાંથી યાદચ્છિક રીતે બે ચિઠ્ઠીઓ ઉપાડે છે. કથનને ઈનામ મળે તેની સંભાવના શોધો.

અહીં કુલ 10 ચિઠ્ઠીઓ પૈકી 3 ચિઠ્ઠીઓ ઈનામને પાત્ર છે અને 7 ચિઠ્ઠીઓ ઈનામને પાત્ર નથી. કુલ 10 ચિઠ્ઠીઓમાંથી 2 ચિઠ્ઠીઓ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે તો નિદર્શ અવકાશના પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા $n = {}^{10}C_2 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$ થાય.

કથનને ઈનામ મળે તે ઘટના $= A$

$\therefore$ કથનને ઈનામ ન મળે તે ઘટના $= A'$

હવે ઘટના A' બને તેનાં સાનુકૂળ પરિણામો એટલે ઈનામ પાત્ર ન હોય તેવી 7 ચિઠ્ઠીઓમાંથી કથન 2 ચિઠ્ઠીઓ યાદચ્છિક રીતે ઉપાડે તેવાં પરિણામો.

આવા પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^{7}C_2 = 21$

ઘટના A' ની સંભાવના $P(A') = \frac{m}{n}$

$= \frac{21}{45}$

$= \frac{7}{15}$

હવે $P(A) = 1 - P(A')$

$= 1 - \frac{7}{15}$

$= \frac{8}{15}$

આમ, કથનને ઈનામ મળે તેની સંભાવના $= \frac{8}{15}$

મર્યાદા : સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યાની મર્યાદાઓ નીચે મુજબ છે :

(1) યાદૃચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશનાં પરિણામોની સંખ્યા અનંત હોય, તો આ વ્યાખ્યાથી ઘટનાની સંભાવના શોધી શકાતી નથી.

(2) યાદૃચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશનાં કુલ પરિણામોની સંખ્યા જાણતાં ન હોઈએ તો આ વ્યાખ્યાથી ઘટનાની સંભાવના શોધી શકાતી નથી.

(3) યાદૃચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની પ્રાથમિક ઘટનાઓ સમસંભાવી ન હોય તો કોઈ ઘટનાની સંભાવના આ વ્યાખ્યાથી મેળવી શકાતી નથી.

(4) સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યામાં 'સમસંભાવી' શબ્દનો ઉલ્લેખ થયેલ છે. સમસંભાવી ઘટનાઓ એટલે સરખી સંભાવનાવાળી ઘટનાઓ. આમ સંભાવનાની વ્યાખ્યામાં જ સંભાવના શબ્દનો ઉપયોગ કરેલ છે.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. એક સમતોલ સિક્કો ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે. નીચેની ઘટનાઓની સંભાવના શોધો :

(1) બધી જ વખત છાપ મળે
(2) એક પણ વખત છાપ ન મળે
(3) ઓછામાં ઓછી એક વખત છાપ મળે
(4) એકથી વધુ વખત કાંટો મળે
(5) વધુમાં વધુ એક વખત છાપ મળે
(6) બેથી ઓછી વખત છાપ મળે
(7) છાપ અને કાંટો વારાફરતી મળે
(8) કાંટાની સંખ્યા છાપ કરતાં વધુ વખત મળે

2. બે સમતોલ પાસા એકસાથે ઉછાળવામાં આવે છે. નીચેની ઘટનાઓની સંભાવના શોધો :

(1) પાસા પર મળતા અંકનો સરવાળો 6 થાય
(2) પાસા પર મળતા અંકનો સરવાળો 10 થી મોટો ન થાય
(3) પાસા પર મળતા અંકનો સરવાળો 3 નો ગુણક હોય
(4) પાસા પર મળતા અંકનો ગુણાકાર 12 થાય

3. બે બાળકો ધરાવતાં કુટુંબોમાંથી એક કુટુંબ યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. આ કુટુંબનાં બે બાળકો પૈકી

(1) એક બાળક છોકરી અને એક બાળક છોકરો હોય
(2) ઓછામાં ઓછું એક બાળક છોકરી હોય તેની સંભાવના શોધો.

(**સૂચના** : બાળક છોકરો હોય કે છોકરી હોય તેની સંભાવના સરખી છે એમ ધારો.)

4. પ્રથમ 100 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી એક સંખ્યા યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. આ સંખ્યા 7 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેની સંભાવના શોધો.

5. એક સંખ્યા પસંદ કરવાના યાદૃચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ $U = \{1, 2, 3, \ldots, 120\}$ છે અને આ નિદર્શ અવકાશનાં પરિણામો સમસંભાવી છે. આ સંખ્યા,

(1) 3ની ગુણક હોય
(2) 3ની ગુણક ન હોય
(3) 4ની ગુણક હોય
(4) 4ની ગુણક ન હોય
(5) 3 અને 4 બંનેની ગુણક હોય તેની સંભાવના શોધો.

6. $RANDOM$ શબ્દના બધા જ અક્ષરોના ઉપયોગથી બનતી તમામ ગોઠવણીમાં R પ્રથમ અને M અંતિમ સ્થાન પર આવે તેની સંભાવના શોધો.

7. $ORANGE$ શબ્દના બધા જ અક્ષરોથી બનતી તમામ ગોઠવણીઓમાં સ્વર પહેલાં, ત્રીજા અને છઠ્ઠા સ્થાન પર આવે તેની સંભાવના શોધો.

8. એક કુટુંબના પાંચ સભ્યો પતિ, પત્ની અને તેમનાં ત્રણ બાળકો ફેમિલી ફોટા માટે એક હારમાં યાદચ્છિક રીતે ગોઠવાય છે. પતિ અને પત્ની એક સાથે જ બેઠક લે તેની સંભાવના શોધો.

9. એક કાર્યક્રમમાં 7 વક્તાઓ A, B, C, D, E, F, G ને યાદચ્છિક ક્રમમાં ભાષણ આપવા આમંત્રિત કરવામાં આવે છે. વક્તા A પછી તરત જ વક્તા B નું ભાષણ આવે તેની સંભાવના શોધો.

10. લીપ વર્ષના ફેબ્રુઆરી માસમાં 5 સોમવાર હોવાની સંભાવના શોધો.

11. લીપ વર્ષ ન હોય તેવા વર્ષમાં 53 શુક્રવાર હોવાની સંભાવના શોધો.

12. કોઈપણ વર્ષના ઑગસ્ટ માસમાં 5 મંગળવાર હોવાની સંભાવના શોધો.

13. એક પાર્ટીમાં 4 યુગલો (પતિ-પત્ની) ભાગ લે છે. આ 8 વ્યક્તિઓમાંથી બે વ્યક્તિઓને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલી બે વ્યક્તિઓમાં,

(1) પતિ-પત્ની હોય (2) એક પુરુષ અને એક સ્ત્રી હોય

(3) એક પુરુષ અને એક સ્ત્રી હોય પરંતુ તેઓ પતિ-પત્ની ન હોય તેની સંભાવના શોધો.

14. એક ફેક્ટરીમાં 8 કામદારો નોકરી કરે છે જે પૈકી 3 કામદારોની કાર્યક્ષમતા ઉત્તમ અને બાકીના બધા કામદારોની કાર્યક્ષમતા મધ્યમ છે. આ 8 કામદારોમાંથી 2 કામદારોની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલ કામદારોમાં,

(1) બંને કામદારોની કાર્યક્ષમતા ઉત્તમ હોય (2) બંને કામદારોની કાર્યક્ષમતા મધ્યમ હોય

(3) એક કામદારની કાર્યક્ષમતા ઉત્તમ અને એક કામદારની કાર્યક્ષમતા મધ્યમ હોય તેની સંભાવના શોધો.

15. બરાબર રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંના એક ઢગમાંથી યાદચ્છિક રીતે બે પત્તાં ખેંચવામાં આવે છે.

(1) બંને પત્તાં જુદા-જુદા રંગના હોય (2) બંને પત્તાં ચહેરાવાળા હોય

(3) બે પત્તાં પૈકી એક પત્તું રાજા હોય તેની સંભાવના શોધો.

16. 10 બલ્બની એક પેટીમાં 3 બલ્બ ખામીવાળા છે. આ પેટીમાંથી યાદચ્છિક રીતે 2 બલ્બ પસંદ કરવામાં આવે છે આ 2 બલ્બને એક રૂમમાં આવેલા બે બલ્બ-હૉલ્ડરમાં લગાવવામાં આવે છે. વીજપુરવઠો પૂરો પાડતાં રૂમમાં અજવાળું થાય તેની સંભાવના શોધો.

17. યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = 0.6,\ P(B) = 0.5$ અને $P(A \cap B) = 0.15$ હોય, તો

(1) $P(A')$ (2) $P(B - A)$ (3) $P(A \cap B')$ (4) $P(A' \cup B')$ શોધો.

18. યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A') = 2P(B') = 3P(A \cap B) = 0.6$ હોય, તો તફાવત ઘટનાઓ $A - B$ અને $B - A$ ની સંભાવના શોધો.

*

1.5 સંભાવનાના સરવાળાનો નિયમ

કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના બને તેની સંભાવના મેળવવાના નિયમને **સંભાવનાના સરવાળાનો નિયમ** (Law of Addition of Probability) કહે છે. અગાઉ આપણે જોયું છે કે, ઘટનાઓ A અને B પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના બને તેને આપણે ઘટનાઓ A અને Bની યોગઘટના $A \cup B$ વડે દર્શાવીએ છીએ. તેથી આપણે એમ પણ કહી શકીએ કે સંભાવનાના સરવાળાનો નિયમ એટલે ઘટનાઓ A અને Bની યોગઘટના $A \cup B$ની સંભાવના મેળવવાનો નિયમ. સંકેતમાં આ નિયમ નીચે પ્રમાણે લખાય, જે આપણે સાબિતી વગર સ્વીકારી લઈશું :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

સંભાવનાના સરવાળાનો નિયમ બે કરતાં વધુ ઘટનાઓની યોગઘટનાની સંભાવના મેળવવા માટે પણ ઉપયોગમાં લઈ શકાય. ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને Cની યોગઘટના $A \cup B \cup C$ માટે સંભાવનાનો સરવાળાનો નિયમ નીચે મુજબ છે :

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

આ નિયમ પરથી મળતાં કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો નીચે મુજબ મળે :

(1) જો યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક હોય, તો $A \cap B = \phi$ અને $P(A \cap B) = 0$ થાય તેથી,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(2) જો યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C પરસ્પર નિવારક હોય, તો $A \cap B = \phi$, $A \cap C = \phi$, $B \cap C = \phi$, $A \cap B \cap C = \phi$ અને

$P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = P(A \cap B \cap C) = 0$ થાય તેથી,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

(3) જો યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક તથા નિ:શેષ હોય, તો $A \cap B = \phi$ અને $A \cup B = U$ થાય. $P(\phi) = 0$ અને $P(U) = 1$ હોવાથી $P(A \cap B) = 0$ અને $P(A \cup B) = 1$ થાય તેથી,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1$$

(4) જો યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C પરસ્પર નિવારક તથા નિ:શેષ હોય, તો

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

ઉદાહરણ 19 : પ્રથમ 50 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલી એક સંખ્યા 2 અથવા 3ની ગુણક હોવાની સંભાવના શોધો.

પ્રથમ 50 પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી એક સંખ્યા યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે તે યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ Uમાં પરસ્પર નિવારક, નિ:શેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા $n = {}^{50}C_1 = 50$ થાય.

હવે જો પસંદ થયેલ સંખ્યા 2 ની ગુણક હોય તેને ઘટના A અને 3ની ગુણક હોય તેને ઘટના B વડે દર્શાવીએ તો, પસંદ કરેલી સંખ્યા 2 અથવા 3ની ગુણક હોય તે ઘટનાને સંકેતમાં $A \cup B$ વડે દર્શાવી શકાય (આ ઘટનાને $B \cup A$ વડે પણ દર્શાવી શકાય. ગણ સિદ્ધાંત મુજબ $A \cup B = B \cup A$) બે ઘટનાઓ A અને B માટે સંભાવનાના સરવાળાના નિયમ અનુસાર સંભાવના મેળવવા માટે સૌપ્રથમ આપણે $P(A), P(B)$ અને $P(A \cap B)$ મેળવીશું.

A = પસંદ થયેલ સંખ્યા 2ની ગુણક હોય તેવી ઘટના

= {2, 4, 6,..., 50}

તેથી ઘટના A બનવાનાં સાનુકૂળ પરિણામો $m = 25$

ઘટના Aની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{25}{50}$

B = પસંદ થયેલ સંખ્યા 3ની ગુણક હોય તેવી ઘટના

= {3, 6, 9,..., 48}

તેથી ઘટના B બનવાનાં સાનુકૂળ પરિણામો $m = 16$

ઘટના Bની સંભાવના $P(B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{16}{50}$

$A \cap B =$ પસંદ થયેલ સંખ્યા 2 અને 3 બંનેની એટલે કે 2 અને 3ના લ.સા.અ. 6ની ગુણક હોય તેવી ઘટના

= {6, 12, 18,..., 48}

તેથી ઘટના $A \cap B$ બનવાનાં સાનુકૂળ પરિણામો $m = 8$

ઘટના $A \cap B$ની સંભાવના $P(A \cap B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{8}{50}$

હવે સંભાવનાના સરવાળાના નિયમ અનુસાર,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{25}{50} + \frac{16}{50} - \frac{8}{50}$$

$$= \frac{25+16-8}{50}$$

$$= \frac{33}{50}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{33}{50}$

ઉદાહરણ 20 : 52 પત્તાંના ઢગમાંથી એક પત્તું યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલું પત્તું,

(1) ફલ્લી અથવા રાણી હોય

(2) ફલ્લી ન હોય અને રાણી પણ ન હોય તેની સંભાવના શોધો.

52 પત્તાંના ઢગમાંથી એક પત્તું યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે તે યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ Uમાં પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા $n = {}^{52}C_1 = 52$ થાય.

પસંદ થયેલ પત્તું ફલ્લી હોય તે ઘટના = A

પસંદ થયેલ પત્તું રાણી હોય તે ઘટના = B

(1) પસંદ થયેલ ફલ્લી અથવા રાણી હોય તે ઘટના = $A \cup B$

સંભાવનાના સરવાળાના નિયમ અનુસાર ઘટના $A \cup B$ની સંભાવના મેળવવા માટે આપણે સૌપ્રથમ $P(A), P(B)$ અને $P(A \cap B)$ મેળવીશું.

A = પસંદ થયેલ પત્તું ફલ્લી હોય તે ઘટના

52 પત્તાંના ઢગમાં ફલ્લીનાં 13 પત્તાં હોય છે તેથી ઘટના Aને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા $m = 13$

ઘટના Aની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{13}{52}$

B = પસંદ થયેલ પત્તું રાણી હોય તે ઘટના

52 પત્તાના ઢગમાં રાણીના 4 પત્તાં હોય છે તેથી ઘટના Bને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 4$

ઘટના Bની સંભાવના $P(B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{4}{52}$

$A \cap B$ = પસંદ થયેલ પત્તું ફલ્લી અને રાણી બંને એટલે કે ફલ્લીની રાણી હોય તે ઘટના

52 પત્તાના ઢગમાં ફલ્લીની રાણી હોય તેવું એક જ પત્તું હોય છે તેથી ઘટના $A \cap B$ને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા $m = 1$

ઘટના $A \cap B$ની સંભાવના $P(A \cap B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{1}{52}$

હવે સંભાવનાના સરવાળાના નિયમ અનુસાર,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52}$$

$$= \frac{13+4-1}{52}$$

$$= \frac{16}{52}$$

$$= \frac{4}{13}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{4}{13}$

ઘટના $A \cup B$ની સંભાવનાને નીચેની આકૃતિ દ્વારા સરળતાથી સમજી શકાય :

પત્તાનો પ્રકાર	પત્તાની જાત												
	A	2	3	4	5	6	7	8	9	10	J	Q	K
♠	♠A	♠2	♠3	♠4	♠5	♠6	♠7	♠8	♠9	♠10	♠J	♠Q	♠K
♦	♦A	♦2	♦3	♦4	♦5	♦6	♦7	♦8	♦9	♦10	♦J	♦Q	♦K
♣	♣A	♣2	♣3	♣4	♣5	♣6	♣7	♣8	♣9	♣10	♣J	♣Q	♣K
♥	♥A	♥2	♥3	♥4	♥5	♥6	♥7	♥8	♥9	♥10	♥J	♥Q	♥K

(2) પસંદ થયેલ પત્તું ફલ્લી ન હોય તે ઘટના = A'

પસંદ થયેલ પત્તું રાણી ન હોય તે ઘટના = B'

તેથી પસંદ થયેલ પત્તું ફલ્લી ન હોય અને રાણી પણ ન હોય તે ઘટના $A' \cap B'$

આમ, ઘટના $A' \cap B'$ની સંભાવના,

$$P(A' \cap B') = P(A \cup B)'$$

$$= 1 - P(A \cup B)$$

$$= 1 - \frac{4}{13}$$

$$= \frac{9}{13}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{9}{13}$

ઉદાહરણ 21 : એક સામાજિક સંસ્થામાં ડૉક્ટરી વ્યવસાય સાથે સંકળાયેલ 3 વ્યક્તિઓ અને ઇજનેરી વ્યવસાય સાથે સંકળાયેલ 5 વ્યક્તિઓ સેવા આપે છે. એક સમિતિ બનાવવાના હેતુસર આ વ્યક્તિઓ પૈકી 2 વ્યક્તિઓને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલ બંને વ્યક્તિઓ એક જ વ્યવસાય સાથે સંકળાયેલ હોવાની સંભાવના શોધો.

અહીં કુલ $3 + 5 = 8$ વ્યક્તિઓ છે. તેથી 2 વ્યક્તિઓ કુલ ${}^8C_2 = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય. તેથી નિદર્શ અવકાશ પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા $n = 28$ થાય.

પસંદ થયેલ બંને વ્યક્તિઓ ડૉક્ટરી વ્યવસાય સાથે સંકળાયેલ હોય તે ઘટના = A

પસંદ થયેલ બંને વ્યક્તિઓ ઇજનેરી વ્યવસાય સાથે સંકળાયેલ હોય તે ઘટના = B

પસંદ થયેલ બંને વ્યક્તિઓ એક જ વ્યવસાય સાથે સંકળાયેલ હોય તે ઘટના = $A \cup B$

વળી ઘટનાઓ A અને B બંને સાથે બની શકે નહિ તેથી $A \cap B = \phi$

આમ ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે તેની સંભાવનાના સરવાળાના નિયમ અનુસાર

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

જે મેળવવા માટે આપણે સૌપ્રથમ $P(A)$ અને $P(B)$ મેળવીશું.

A = પસંદ થયેલ બંને વ્યક્તિઓ ડૉક્ટરી વ્યવસાય સાથે સંકળાયેલ હોય તે ઘટના.

ઘટના Aને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^3C_2 = 3$

ઘટના Aની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$$= \frac{3}{28}$$

B = પસંદ થયેલ બંને વ્યક્તિ ઇજનેરી વ્યવસાય સાથે સંકળાયેલ હોય તે ઘટના

ઘટના Bને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^5C_2 = 10$

ઘટના Bની સંભાવના $P(B) = \frac{m}{n}$

$$= \frac{10}{28}$$

હવે

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)$$
$$= \frac{3}{28}+\frac{10}{28}$$
$$= \frac{3+10}{28}$$
$$= \frac{13}{28}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{13}{28}$

ઉદાહરણ 22 : કોઈ સમૂહનો વ્યક્તિ સમાચારપત્ર X વાંચતો હોય તેની સંભાવના 0.55, સમાચારપત્ર Y વાંચતો હોય તેની સંભાવના 0.69 અને સમાચારપત્ર X અને Y બંને વાંચતો હોય તેની સંભાવના 0.27 છે. આ સમૂહમાંથી પસંદ કરેલ એક વ્યક્તિ.

(1) સમાચારપત્રો X અને Y પૈકી ઓછામાં ઓછું એક સમાચારપત્ર વાંચતો હોય.

(2) સમાચારપત્રો X અને Y પૈકી એક પણ સમાચારપત્ર વાંચતો ન હોય.

(3) સમાચારપત્રો X અને Y પૈકી ફક્ત એક જ સમાચારપત્ર વાંચતો હોય તેની સંભાવના શોધો.

સમૂહનો વ્યક્તિ સમાચારપત્ર X વાંચતો હોય તે ઘટના A અને સમાચારપત્ર Y વાંચતો હોય તે ઘટનાને B કહીએ, તો આપેલી માહિતી નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય :

$P(A)=0.55,\ P(B)=0.69,\ P(A\cap B)=0.27$

(1) પસંદ કરેલ વ્યક્તિ સમાચારપત્રો X અને Y પૈકી ઓછામાં ઓછું એક સમાચારપત્ર વાંચતો હોય તે ઘટના $= A\cup B$

સંભાવનાના સરવાળાના નિયમ અનુસાર,

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
$$= 0.55 + 0.69 - 0.27$$
$$= 0.97$$

માંગેલી સંભાવના $= 0.97$

(2) પસંદ થયેલ વ્યક્તિ સમાચારપત્ર X વાંચતો ન હોય તે ઘટના $= A'$

પસંદ થયેલ વ્યક્તિ સમાચારપત્ર Y વાંચતો ન હોય તે ઘટના $= B'$

તેથી પસંદ થયેલ વ્યક્તિ સમાચારપત્રો X અને Y પૈકી એક પણ સમાચારપત્ર વાંચતો ન હોય તે ઘટના $= A'\cap B'$

આમ, ઘટના $A'\cap B'$ ની સંભાવના,

$$P(A'\cap B') = P(A\cup B)'$$
$$= 1-P(A\cup B)$$
$$= 1-0.97$$
$$= 0.03$$

માંગેલી સંભાવના $= 0.03$

(3) પસંદ થયેલ વ્યક્તિ સમાચારપત્રો X અને Y પૈકી ફક્ત એક જ સમાચારપત્ર વાંચતો હોય તે ઘટનાને C કહીએ, તો ઘટના C નીચે મુજબ બની શકે :

વ્યક્તિ સમાચારપત્ર X વાંચતો હોય (ઘટના A) અને સમાચારપત્ર Y વાંચતો ન હોય (ઘટના B')

અથવા

વ્યક્તિ સમાચારપત્ર X વાંચતો ન હોય (ઘટના A') અને સમાચારપત્ર Y વાંચતો હોય (ઘટના B)

એટલે કે ઘટના $C=(A\cap B')\cup(A'\cap B)$

ઘટનાઓ $A\cap B'$ અને $A'\cap B$ પરસ્પર નિવારક હોવાથી,

$$
\begin{aligned}
P(C) &= P(A\cap B')+P(A'\cap B)\\
&= \left[P(A)-P(A\cap B)\right]+\left[P(B)-P(A\cap B)\right]\\
&= [0.55-0.27]+[0.69-0.27]\\
&= 0.28 + 0.42\\
&= 0.7
\end{aligned}
$$

માંગેલી સંભાવના $= 0.7$

ઉદાહરણ 23 : એક યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A)=2P(B)=4P(A\cap B)=0.6$ હોય, તો નીચેની ઘટનાઓની સંભાવના મેળવો :

(1) $A'\cap B'$ (2) $A'\cup B'$ (3) $A - B$ (4) $B - A$

અહીં $P(A)=2P(B)=4P(A\cap B)=0.6$ આપેલ છે તેથી,

$P(A)=0.6$	$2P(B)=0.6$	$4P(A\cap B)=0.6$
	$\therefore\ P(B)=0.3$	$\therefore\ P(A\cap B)=0.15$

(1) ઘટના $A'\cap B'$ની સંભાવના

$$
\begin{aligned}
&= P(A'\cap B')\\
&= P(A\cup B)'\\
&= 1-P(A\cup B)\\
&= 1-\left[P(A)+P(B)-P(A\cap B)\right]\\
&= 1-[0.6+0.3-0.15]\\
&= 1-0.75\\
&= 0.25
\end{aligned}
$$

માંગેલી સંભાવના $= 0.25$

(2) ઘટના $A'\cup B'$ની સંભાવના

$$
\begin{aligned}
&= P(A'\cup B')\\
&= P(A\cap B)'\\
&= 1-P(A\cap B)\\
&= 1-0.15\\
&= 0.85
\end{aligned}
$$

માંગેલી સંભાવના $= 0.85$

(3) ઘટના $A-B$ની સંભાવના $= P(A-B)$

$= P(A)-P(A\cap B)$

$= 0.6-0.15$

$= 0.45$

માંગેલી સંભાવના $= 0.45$

(4) ઘટના $B-A$ની સંભાવના $= P(B-A)$

$= P(B)-P(A\cap B)$

$= 0.3-0.15$

$= 0.15$

માંગેલી સંભાવના $= 0.15$

ઉદાહરણ 24 : એક યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A')=0.3$, $P(B)=0.6$ અને $P(A\cup B)=0.83$ હોય, તો $P(A\cap B')$ અને $P(A'\cap B)$ મેળવો.

અહીં $P(A')=0.3 \therefore P(A)=1-P(A')=1-0.3=0.7$

$P(B)=0.6$ અને $P(A\cup B)=0.83$

સૌપ્રથમ આપણે $P(A\cap B)$ મેળવીશું.

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$\therefore\ 0.83=0.7+0.6-P(A\cap B)$

$\therefore\ P(A\cap B)=0.7+0.6-0.83$

$\therefore\ P(A\cap B)=0.47$

હવે,

$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)$

$= 0.7 - 0.47$

$= 0.23$

માંગેલી સંભાવના $= 0.23$

$P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)$

$= 0.6 - 0.47$

$= 0.13$

માંગેલી સંભાવના $= 0.13$

ઉદાહરણ 25 : એક યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે. જો $3P(A)=4P(B)=1$ હોય, તો $P(A\cup B)$ શોધો.

અહીં $3P(A)=4P(B)=1$ હોવાથી

$3P(A)=1$	$4P(B) = 1$
$\therefore \ P(A)= \frac{1}{3}$	$\therefore \ P(B)= \frac{1}{4}$

હવે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ $(A\cap B=\phi)$ હોવાથી,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$$

$$= \frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

$$= \frac{7}{12}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{7}{12}$

ઉદાહરણ 26 : એક યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ A, B અને C માટે $2P(A)=3P(B)=4P(C)$ હોય, તો $P(A\cup B)$ અને $P(B\cup C)$ શોધો.

$2P(A)=3P(B)=4P(C)=x$ લેતાં,

$2P(A)=x$	$3P(B)=x$	$4P(C)=x$
$\therefore \ P(A)=\frac{x}{2}$	$\therefore \ P(B)=\frac{x}{3}$	$\therefore \ P(C)=\frac{x}{4}$

હવે A, B અને C પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ ઘટનાઓ હોવાથી,

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=1$$

$$\therefore \ \frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4} = 1$$

$$\therefore \ \frac{6x+4x+3x}{12} = 1$$

$$\therefore \ 13x=12$$

$$\therefore \ x=\frac{12}{13}$$

તેથી,

$$P(A)=\frac{x}{2} = \frac{\frac{12}{13}}{2} = \frac{6}{13}$$

$$P(B)=\frac{x}{3} = \frac{\frac{12}{13}}{3} = \frac{4}{13}$$

$$P(C)=\frac{x}{4} = \frac{\frac{12}{13}}{4} = \frac{3}{13}$$

હવે માંગેલી ઘટનાઓની સંભાવના,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$= \frac{6}{13} + \frac{4}{13}$$

$$= \frac{10}{13}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{10}{13}$

$$P(B \cup C) = P(B) + P(C)$$

$$= \frac{4}{13} + \frac{3}{13}$$

$$= \frac{7}{13}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{7}{13}$

સ્વાધ્યાય 1.3

1. 52 પત્તાંના ઢગમાંથી યાદચ્છિક રીતે 2 પત્તાં ખેંચવામાં આવે છે. ખેંચેલાં બંને પત્તાં,

(1) એક જ પ્રકારના હોય

(2) એક જ રંગના હોય તેની સંભાવના શોધો.

2. એક અભરાઈ પર આંકડાશાસ્ત્રનાં 3 અને ગણિતનાં 4 પુસ્તકો ગોઠવેલાં છે. આ પુસ્તકોમાંથી યાદચ્છિક રીતે બે પુસ્તકો પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલાં બંને પુસ્તકો એક જ વિષયના હોવાની સંભાવના શોધો.

3. 52 પત્તાંના ઢગમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક પત્તું ખેંચવામાં આવે છે. આ પત્તું,

(1) કાળી અથવા એક્કો હોવાની (2) કાળી ન હોય અને એક્કો પણ ન હોવાની સંભાવના શોધો.

4. 1 થી 100 સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી એક સંખ્યા પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલી સંખ્યા 3 અથવા 5ની ગુણક હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

5. બે સમતોલ પાસા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. બંને પાસા પર મળતા અંકનો સરવાળો 2 અથવા 3નો ગુણક હોય તેની સંભાવના શોધો.

6. કોઈ તહેવારના દિવસોમાં શાકમાર્કેટમાં બટાકાના ભાવ વધે તેની સંભાવના 0.8 છે. ડુંગળીના ભાવ વધે તેની સંભાવના 0.7 છે. બટાકા અને ડુંગળી બંનેના ભાવ વધે તેની સંભાવના 0.6 છે, તો બટાકા અને ડુંગળી બેમાંથી ઓછામાં ઓછા એકના ભાવ વધે તેની સંભાવના શોધો.

7. એક પુલનો નાશ કરવા બે વિમાનો બૉમ્બ ફેંકે છે. પહેલા વિમાનમાંથી ફેંકાયેલો બૉમ્બ પુલનું સાચું નિશાન લે તેની સંભાવના 0.9 છે અને બીજા વિમાનમાંથી ફેંકાયેલો બૉમ્બ પુલનું સાચું નિશાન લે તેની સંભાવના 0.7 છે. બંને વિમાનોમાંથી ફેંકાયેલા એક-એક બૉમ્બ પુલનું સાચું નિશાન લે તેની સંભાવના 0.63 છે. જો એક પણ બૉમ્બ પુલ પર પડે, તો પુલનો નાશ થાય છે. પુલનો નાશ થાય તેની સંભાવના શોધો.

8. એક રેસ્ટોરન્ટમાં ડિનર માટે આવતો યુવક પિઝા ઑર્ડર કરે તેની સંભાવના 0.63 છે. કૉલ્ડ્રિંક્સ ઑર્ડર કરે તેની સંભાવના 0.54 છે. યુવક પિઝા અને કૉલ્ડ્રિંક્સમાંથી ઓછામાં ઓછુ એક ઑર્ડર કરે તેની સંભાવના 0.88 હોય, તો કોઈ દિવસે ડિનર માટે આવેલ યુવક પિઝા અને કૉલ્ડ્રિંક્સમાંથી ફક્ત એક જ વસ્તુ ઑર્ડર કરે તેની સંભાવના શોધો.

9. જો A અને B નિદર્શ અવકાશ Uમાંની નિઃશેષ અને પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ હોય અને $P(A)=2P(B)$ હોય, તો $P(A)$ શોધો.

10. નિદર્શ અવકાશની ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ છે. જો $4P(A)=5P(B)=3P(C)$ હોય, તો $P(A\cup C)$ અને $P(B\cup C)$ શોધો.

11. નિદર્શ અવકાશની ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C માટે નીચે આપેલી માહિતી પરથી $P(A\cup B\cup C)$ શોધો.

$P(A)=0.65,\ P(B)=0.45,\ P(C)=0.25,\ P(A\cap B)=0.25,\ P(A\cap C)=0.15,\ P(B\cap C)=0.2,$

$P(A\cap B\cap C)=0.05$

12. નિદર્શ અવકાશની ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ છે. જો $P(C')=0.8$ અને $3P(B)=2P(A')$ હોય, તો $P(A)$ અને $P(B)$ શોધો.

*

1.6 શરતી સંભાવના અને સંભાવનાના ગુણાકારનો નિયમ

1.6.1 શરતી સંભાવના

ધારો કે U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે તથા A અને B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. ઘટના A બને છે તે શરત હેઠળ ઘટના B બનવાની સંભાવનાને શરતી સંભાવના કહે છે. જો આપણે ઘટના A બને છે એ શરત હેઠળ ઘટના B બને તે ઘટનાને B/A સંકેતથી દર્શાવીએ તો શરતી ઘટના B/Aની સંભાવના $P(B/A)$ને Bની **શરતી સંભાવના** (conditional probability) કહે છે. આ સંભાવના નીચે જણાવેલ સૂત્રથી મેળવાય છે :

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}; \quad P(A)\neq 0$$

તે જ પ્રમાણે ઘટના B બને છે એ શરત હેઠળ ઘટના A બને તે ઘટનાને A/B સંકેતથી દર્શાવીએ તો શરતી ઘટના A/B ની સંભાવના $P(A/B)$ નીચે જણાવેલ સૂત્રથી મેળવાય છે :

$$P(A/B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}; \quad P(B)\neq 0$$

ધારો કે એક કંપની કોઈ ચોક્કસ પ્રકારના એકમનું પોતાની બે અલગ-અલગ ફેક્ટરી અનુક્રમે અને A_1 અને A_2માં ઉત્પાદન કરે છે. આ કંપની દ્વારા ઉત્પાદિત એકમનું વેચાણ કરતા એક સ્ટોરમાંથી આવા એક એકમની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલ એકમ ખામીવાળો હોય તે ઘટનાને D વડે દર્શાવીએ.

- જો પસંદ કરેલ એકમ ફેક્ટરી A_1માં ઉત્પાદિત થયેલ હોય, તો તે ખામીવાળો હોય તે ઘટનાને D/A_1 વડે દર્શાવાય.
- જો પસંદ કરેલ એકમ ફેક્ટરી A_2માં ઉત્પાદિત થયેલ હોય, તો તે ખામીવાળો હોય તે ઘટનાને D/A_2 વડે દર્શાવાય.

આમ,

$P(D/A_1)$ = ઘટના A_1 બની છે તે શરતે ઘટના D બને તેની સંભાવના અને

$P(D/A_2)$ = ઘટના A_2 બની છે તે શરતે ઘટના D બને તેની સંભાવના

1.6.2 નિરપેક્ષ ઘટનાઓ

ધારો કે U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે તથા A અને B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. જો ઘટના A બનવાની સંભાવના ઘટના B બનવા (કે ન બનવા)થી બદલાતી ન હોય, તો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ (Independent Events) છે તેમ કહેવાય.

અર્થાત્ $P(A)=P(A/B)=P(A/B')$ અને $P(B)=P(B/A)=P(B/A')$ હોય, તો ઘટનાઓ A અને Bને નિરપેક્ષ કહેવાય.

દા.ત., ઘટના A = સમતોલ પાસો પ્રથમ વખત ઉછાળતાં તેના પર અંક 1 મળે.

ઘટના B = સમતોલ પાસો બીજી વખત ઉછાળતાં તેના પર યુગ્મ અંક મળે.

અહીં એમ કહી શકાય કે, પ્રથમ વખત પાસો ઉછાળતાં તેના પર અંક 1 મળેલ હતો તેના કારણે બીજી વખત પાસો ઉછાળતાં તેના પર યુગ્મ અંક મળવાની સંભાવના બદલાતી નથી. એટલે કે ઘટના B એ ઘટના A પર આધારિત નથી. અર્થાત્ $P(B) = P(B/A)$. આ બાબત નીચેની ગણતરીથી સરળતાથી સમજી શકાય :

એક પાસાને બે વખત ઉછાળતાં કુલ શક્ય પરિણામો $n = 6 \times 6 = 36$ મળે.

A = સમતોલ પાસો પ્રથમ વખત ઉછાળતાં તેના પર અંક 1 મળે તે ઘટના

ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 6$

$$\text{ઘટના } A \text{ ની સંભાવના } P(A) = \frac{m}{n} = \frac{6}{36}$$

B = સમતોલ પાસો બીજી વખત ઉછાળતાં તેના પર યુગ્મ અંક મળે તે ઘટના

ઘટના B ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 18$

$$\text{ઘટના } B \text{ ની સંભાવના } P(B) = \frac{m}{n} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$A \cap B$ = સમતોલ પાસો પ્રથમ વખત ઉછાળતાં તેના પર અંક 1 મળે અને બીજી વખત ઉછાળતાં તેના પર યુગ્મ અંક મળે તે ઘટના

ઘટના $A \cap B$ ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 3$

$$\text{ઘટના } A \cap B \text{ની સંભાવના } P(A \cap B) = \frac{m}{n} = \frac{3}{36}$$

હવે જો સમતોલ પાસાને પ્રથમ વખત ઉછાળતાં તેના પર અંક 1 મળેલ હોય, તો તે પાસાને બીજી વખત ઉછાળતાં તેના પર યુગ્મ અંક મળે તે ઘટના B/A ની સંભાવના $P(B/A)$ નીચે મુજબ મળે :

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{6}{36}} = \frac{1}{2}$$

આમ, અહીં $P(B) = P(B/A)$ થતું હોવાથી ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ છે તેમ કહેવાય.

1.6.3 સંભાવનાના ગુણાકારનો નિયમ

કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ Uની બે ઘટનાઓ A અને B હોય, તો ઘટનાઓ A અને B બંને સાથે બને તેની સંભાવના મેળવવાના નિયમને **સંભાવનાના ગુણાકારનો નિયમ** (Law of Multiplication of Probability) કહે છે.

દા.ત., ઘટના A = પ્રથમ વખત સિક્કો ઉછાળતા તેના પર છાપ મળે

ઘટના B = બીજી વખત સિક્કો ઉછાળતા તેના પર છાપ મળે

જો સિક્કાને બે વખત ઉછાળવામાં આવે તો તેના પર બંને વખત છાપ મળે એટલે કે ઘટના $A \cap B$ બનવાની સંભાવના ગુણાકારના નિયમથી મેળવી શકાય. સંભાવનાના ગુણાકારનો નિયમ નીચે મુજબ છે.

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A); \; P(A) \neq 0$

$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B); \; P(B) \neq 0$

આ નિયમ પરથી તારવેલાં કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો નીચે મુજબ છે જેને આપણે સાબિતી વગર સ્વીકારી લઈશું.

(1) જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

(2) જો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો

(i) ઘટનાઓ A' અને B' પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ થાય. તેથી $P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')$

(ii) ઘટનાઓ A અને B' પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ થાય. તેથી $P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$

(iii) ઘટનાઓ A' અને B પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ થાય. તેથી $P(A' \cap B) = P(A') \times P(B)$

1.6.4 પુરવણી સહિત અને પુરવણી રહિત પસંદગી

સમષ્ટિમાંથી એક પછી એક એમ એકમોની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવાની હોય ત્યારે એવી પસંદગી બે રીતે કરી શકાય છે :

(1) પુરવણી સહિત પસંદગી : સમષ્ટિમાંથી કોઈપણ પ્રયત્ને એકમની પસંદગી કરતાં પહેલા તેના અગાઉના પ્રયત્ને પસંદ થયેલ એકમને સમષ્ટિમાં પરત મૂકવામાં આવે તો તેવી પસંદગીને પુરવણી સહિત (with Replacement) પસંદગી કહે છે.

(2) પુરવણી રહિત પસંદગી : સમષ્ટિમાંથી કોઈપણ પ્રયત્ને એકમની પસંદગી કરતાં પહેલા તેના અગાઉના પ્રયત્ને પસંદ થયેલ એકમને સમષ્ટિમાં પરત મૂકવામાં ન આવે તો તેવી પસંદગીને પુરવણી રહિત (without Replacement) પસંદગી કહે છે.

ઉદાહરણ 27 : એક સમતોલ સિક્કાને બે વખત ઉછાળવામાં આવે છે. જો સિક્કા પર પ્રથમ વખત છાપ મળી હોય તો બંને વખતે સિક્કા પર છાપ મળે તેની સંભાવના શોધો.

એક સમતોલ સિક્કો બે વખત ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ $U = \{HH, HT, TH, TT\}$ છે. જ્યાં પહેલી સંજ્ઞા પ્રથમ વખત સિક્કો ઉછાળવાનું પરિણામ દર્શાવે છે અને બીજી સંજ્ઞા બીજી વખત સિક્કો ઉછાળવાનું પરિણામ દર્શાવે છે. આ નિદર્શ અવકાશનાં કુલ પરિણામો $n = 4$ છે.

હવે જો પ્રથમ વખત સિક્કો ઉછાળતા છાપ મળે એ ઘટનાને A કહીએ અને બંને વખત સિક્કા પર છાપ મળે એ ઘટનાને B કહીએ, તો આપણે ઘટના B/A ની સંભાવના $P(B/A)$ શોધવાની છે.

ઘટના A = પ્રથમ વખત સિક્કો ઉછાળતા તેના પર છાપ મળે

$= \{HH, HT\}$

તેથી ઘટના A ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 2$ થાય.

ઘટના A ની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{2}{4}$

ઘટના B = બંને વખત સિક્કા પર છાપ મળે

$= \{HH\}$

તેથી ઘટના B ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 1$ થાય.

ઘટના Bની સંભાવના $P(B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{1}{4}$

ઘટના $A \cap B$ = પ્રથમ વખત સિક્કો ઉછાળતા છાપ મળે અને બંને વખત સિક્કા પર છાપ મળે. (અહીં $B \subset A$ છે.)

$= \{HH\}$

તેથી ઘટના $A \cap B$ ને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 1$ થાય.

ઘટના $A \cap B$ ની સંભાવના $P(A \cap B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{1}{4}$

હવે,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{2}$

ઉદાહરણ 28 : એક ફેક્ટરીને નિશ્ચિત સમયમર્યાદામાં કોઈ વસ્તુના 50,000 એકમો તૈયાર કરવાનો ઑર્ડર મળેલ છે. આ કામ સમયસર પૂરું થાય તેની સંભાવના 0.75 અને તે સમયમર્યાદામાં કારીગરો હડતાલ પર ન જાય તેની સંભાવના 0.8 છે. ફેક્ટરીમાં આ કામ સમયસર પૂરું થાય અને કારીગરો તે સમયમર્યાદામાં હડતાલ પર ન જાય તેની સંભાવના 0.7 હોય તો,

(1) સમયમર્યાદામાં કારીગરો હડતાલ પર ન ગયા હોય તો કામ સમયસર પૂરું થાય

(2) કામ સમયસર પૂરું થયેલ છે એમ આપેલ હોય, તો કારીગરો હડતાલ પર ન ગયા હોય તેની સંભાવના શોધો.

અહીં ફેક્ટરીમાં કામ સમયસર પૂરું થાય તેને ઘટના A અને કારીગરો હડતાલ પર ન ગયા હોય તેને ઘટના B વડે દર્શાવીએ, તો આપેલી માહિતી નીચે મુજબ લખી શકાય :

$P(A) = 0.75,\ P(B) = 0.8,\ P(A \cap B) = 0.7$

(1) કારીગર હડતાલ પર ન ગયા હોય તે શરતે કામ સમયસર પૂરું થાય તે ઘટના = A/B

શરતી સંભાવનાની વ્યાખ્યા અનુસાર ઘટના A/Bની સંભાવના,

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0.7}{0.8}$$

$$= \frac{7}{8}$$

માંગેલી સંભાવના = $\frac{7}{8}$

(2) કામ સમયસર પૂરું થયેલ છે એમ આપેલ હોય, તો તે સમયમર્યાદામાં કારીગરો હડતાલ પર ન ગયા હોય તે ઘટના = B/A

શરતી સંભાવનાની વ્યાખ્યા અનુસાર ઘટના B/Aની સંભાવના,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{0.7}{0.75}$$

$$= \frac{14}{15}$$

માંગેલી સંભાવના = $\frac{14}{15}$

ઉદાહરણ 29 : યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે

$P(A') = \frac{7}{25}$, $P(B/A) = \frac{5}{12}$ અને $P(A/B) = \frac{1}{2}$ હોય, તો $P(A \cap B)$ અને $P(B)$ મેળવો.

અહીં $P(A') = \frac{7}{25}$, $P(B/A) = \frac{5}{12}$ અને $P(A/B) = \frac{1}{2}$ આપેલ છે.

$$P(A) = 1 - P(A')$$

$$= 1 - \frac{7}{25}$$

$$= \frac{18}{25}$$

$P(B/A)$ના સૂત્ર પરથી $P(A \cap B)$ મેળવીશું

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$\therefore \quad \frac{5}{12} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{18}{25}}$$

$$\therefore \quad \frac{5}{12} \times \frac{18}{25} = P(A \cap B)$$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = \frac{3}{10}$$

માંગેલી સંભાવના = $\frac{3}{10}$

હવે $P(A/B)$ના સૂત્રમાં $P(A/B)$ અને $P(A \cap B)$ ની કિંમતો મૂકીને $P(B)$ મેળવીશું.

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} = \frac{\frac{3}{10}}{P(B)}$$

$$\therefore \quad P(B) = \frac{\frac{3}{10}}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3 \times 2}{10 \times 1}$$

$$= \frac{3}{5}$$

માંગેલી સંભાવના = $\frac{3}{5}$

ઉદાહરણ 30 : એક દવાની અસર જાણવા સસલા અને ઉંદરોના સમૂહ પર તેનું પરીક્ષણ કરવામાં આવે છે. 10 સસલાંના સમૂહને દવા આપતાં 7 સસલાં પર દવાની અસર થાય છે અને 9 ઉંદરોના સમૂહને દવા આપતાં 5 ઉંદરો પર દવાની અસર થાય છે તેમ નોંધાયું. બંને સમૂહમાંથી એક-એક પ્રાણીની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલા (1) બંને પ્રાણી પર દવાની અસર થઈ હોય અને (2) બે પ્રાણીઓ પૈકી એક પ્રાણી પર દવાની અસર થઈ હોય અને એક પ્રાણી પર દવાની અસર ન થઈ હોય તેની સંભાવના શોધો.

દવાની અસર થયેલ પ્રાણીઓ	દવાની અસર ન થયેલ પ્રાણીઓ
સસલાં 7	સસલાં 3
ઉંદર 5	ઉંદર 4
કુલ 12	**કુલ 7**

(1) સસલા પર દવાની અસર થઈ હોય તે ઘટના = A

ઉંદર પર દવાની અસર થઈ હોય તે ઘટના = B

$\therefore$ બંને પ્રાણીઓ પર દવાની અસર થઈ હોય તે ઘટના = $A \cap B$

અહીં A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે. સસલાં પર દવાની અસર થઈ હોય તેની અસર ઉંદર પર દવાની અસર થાય કે ન થાય તેના પર થાય નહિ. તેથી,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

ઘટના A માટે કુલ પરિણામો $n = 10$ અને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 7$ છે.

$\therefore$ ઘટના Aની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$$= \frac{7}{10}$$

ઘટના B માટે કુલ પરિણામો $n = 9$ અને સાનુકૂળ પરિણામો $m = 5$ છે.

$\therefore$ ઘટના Bની સંભાવના $P(B) = \frac{m}{n}$

$$= \frac{5}{9}$$

$$\therefore P(A \cap B) = \frac{7}{10} \times \frac{5}{9}$$

$$= \frac{7}{18}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{7}{18}$

(2) બે પ્રાણીઓ પૈકી એક પ્રાણી પર દવાની અસર થઈ હોય અને એક પ્રાણી પર દવાની અસર ન થઈ હોય તે ઘટનાને C કહીએ, તો ઘટના C નીચે મુજબ બની શકે :

સસલા પર દવાની અસર થઈ હોય (ઘટના A) અને ઉંદર પર દવાની અસર ન થઈ હોય (ઘટના B')

અથવા

સસલા પર દવાની અસર ન થઈ હોય (ઘટના A') અને ઉંદર પર દવાની અસર થઈ હોય (ઘટના B)

એટલે કે ઘટના $C = (A \cap B') \cup (A' \cap B)$

ઘટનાઓ $A \cap B'$ અને $A' \cap B$ પરસ્પર નિવારક હોવાથી

$$P(C) = P(A \cap B') + P(A' \cap B)$$

$$= [P(A) \times P(B')] + [P(A') \times P(B)]$$ ($\because$ A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.)

અહીં $P(A') = 1 - P(A)$

$$= 1 - \frac{7}{10}$$

$$= \frac{3}{10}$$

$P(B') = 1 - P(B)$

$$= 1 - \frac{5}{9}$$

$$= \frac{4}{9}$$

$$= [\frac{7}{10} \times \frac{4}{9}] + [\frac{3}{10} \times \frac{5}{9}]$$

$$= \frac{28}{90} + \frac{15}{90}$$

$$= \frac{43}{90}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{43}{90}$

ઉદાહરણ 31 : એક કંપની કોઈ ચોક્કસ પ્રકારના એકમનું પોતાની બે અલગ-અલગ ફેક્ટરી A_1 અને A_2માં અનુક્રમે 60 % અને 40 %ના પ્રમાણમાં ઉત્પાદન કરે છે. બંને ફેક્ટરીનાં ઉત્પાદનમાં ખામી પ્રમાણ અનુક્રમે 2 % અને 3 % છે. બંને ફેક્ટરીમાં ઉત્પાદિત થયેલા એકમોને ભેગા કરી તેમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક એકમ પસંદ કરવામાં આવે, તો તે એકમ ખામીવાળો હોવાની સંભાવના શોધો.

પસંદ થયેલ એકમ ફેક્ટરી A_1માં ઉત્પાદિત થયેલ હોય તો ઘટના = A_1

$$\therefore \; P(A_1) = \frac{60}{100}$$

$$= \frac{3}{5}$$

પસંદ થયેલ એકમ ફેક્ટરી A_2માં ઉત્પાદિત થયેલ હોય, તો ઘટના = A_2

$$\therefore \; P(A_2) = \frac{40}{100}$$

$$= \frac{2}{5}$$

કુલ ઉત્પાદનમાંથી પસંદ કરવામાં આવેલ એકમ ખામીવાળો હોય તે ઘટનાને D કહીએ,

પસંદ થયેલ એકમ ફેક્ટરી A_1માં ઉત્પાદિત થયેલ હોય, તો તે ખામીવાળો હોય તે ઘટના = D/A_1

$$\therefore \; P(D/A_1) = \frac{2}{100}$$

$$= \frac{1}{50}$$

પસંદ થયેલ એકમ ફેક્ટરી A_2માં ઉત્પાદિત થયેલ હોય, તો તે ખામીવાળો હોય તે ઘટના = D/A_2

$$\therefore \; P(D/A_2) = \frac{3}{100}$$

ઘટના D નીચે મુજબ બની શકે.

પસંદ થયેલ એકમ ફેક્ટરી A_1માં ઉત્પાદિત થયેલ હોય અને તે ખામીવાળો હોય

અથવા

પસંદ થયેલ એકમ ફેક્ટરી A_2માં ઉત્પાદિત થયેલ હોય અને તે ખામીવાળો હોય

એટલે કે ઘટના $D = (A_1 \cap D) \cup (A_2 \cap D)$

ઘટના $A_1 \cap D$ અને $A_2 \cap D$ પરસ્પર નિવારક હોવાથી,

$$P(D) = P(A_1 \cap D) + P(A_2 \cap D)$$

$$= \left[P(A_1) \times P(D/A_1)\right] + \left[P(A_2) \times P(D/A_2)\right]$$

$$= \left[\frac{3}{5} \times \frac{1}{50}\right] + \left[\frac{2}{5} \times \frac{3}{100}\right]$$

$$= \frac{3}{250} + \frac{6}{500}$$

$$= \frac{12}{500}$$

$$= \frac{3}{125}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{3}{125}$

ઉદાહરણ 32 : એક પેટીમાં 12 સ્ક્રૂ છે જે પૈકી 4 સ્ક્રૂ ખામીવાળા છે. આ પેટીમાંથી એક પછી એક એમ બે સ્ક્રૂ પુરવણી રહિત પદ્ધતિથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલ બંને સ્ક્રૂ ખામીવાળા હોવાની સંભાવના શોધો.

અહીં પેટીમાં કુલ 12 સ્ક્રૂ છે જે પૈકી 4 સ્ક્રૂ ખામીવાળા છે. તેથી ખામી રહિત સ્ક્રૂની સંખ્યા 8 થશે.

પ્રથમ સ્ક્રૂ પસંદ કરવાના પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા $n = {}^{12}C_1 = 12$ થાય.

પસંદ થયેલ પ્રથમ સ્ક્રૂ ખામીવાળો હોય તે ઘટનાને A કહીએ, તો ઘટના Aને સાનુકૂળ પરિણામોની સંખ્યા $m = {}^{4}C_1 = 4$ થાય.

ઘટના Aની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{4}{12}$

અહીં પસંદગી પુરવણી રહિત છે એટલે કે પ્રથમ વખતે પસંદ થયેલ સ્ક્રૂને પેટીમાં પરત મૂકવામાં આવતો નથી. તેથી બીજો સ્ક્રૂ પસંદ કરવાના પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા $n = {}^{11}C_1 = 11$ થાય.

પસંદ થયેલ બીજો સ્ક્રૂ ખામીવાળો હોય તે ઘટનાને B કહીએ.

ઘટના A બની ગઈ છે તે શરત હેઠળ ઘટના B બને છે. એટલે કે શરતી ઘટના B/A બને છે.

ઘટના A અગાઉ બની હોવાથી પેટીમાં 3 સ્ક્રૂ ખામીવાળા રહેશે તેથી

ઘટના B/Aને સાનુકૂળ પરિણામો $m = {}^{3}C_1 = 3$ થાય.

ઘટના B/Aની સંભાવના $P(B/A) = \frac{m}{n}$

$$= \frac{3}{11}$$

હવે $A \cap B$ = બંને સ્ક્રૂ ખામીવાળા હોય તે ઘટના

સંભાવનાના ગુણાકારના નિયમ મુજબ,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

$$= \frac{4}{12} \times \frac{3}{11}$$

$$= \frac{1}{11}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{1}{11}$

ઉદાહરણ 33 : એક મિત્રવર્તુળમાં 3 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓ છે. આ મિત્રવર્તુળમાંથી એક પછી એક એમ બે વ્યક્તિઓને ગીત ગાવા માટે પુરવણી સહિત યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. ગીત ગાવા માટે પસંદ થયેલ બે વ્યક્તિઓમાં પ્રથમ વ્યક્તિ છોકરો અને બીજી વ્યક્તિ છોકરી હોવાની સંભાવના શોધો.

અહીં મિત્રવર્તુળમાં 3 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓ એમ કુલ 5 વ્યક્તિઓ છે. ગીત ગાવા માટે તેમાંથી એક પછી એક એમ બે વ્યક્તિઓ પુરવણી સહિત પસંદ કરવામાં આવે છે. એટલે કે બીજી વ્યક્તિની પસંદગી કરતાં પહેલાં પ્રથમ વખતે પસંદ થયેલ વ્યક્તિને સમૂહમાં પરત મોકલવામાં આવે છે. તેથી એક પછી એક એમ બે વ્યક્તિઓની પસંદગીની ઘટનાઓ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ થશે. પ્રથમ વ્યક્તિ પસંદ કરવાના પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા $n = {}^5C_1 = 5$ થાય.

ગીત ગાવા માટે પસંદ થયેલ પ્રથમ વ્યક્તિ છોકરો હોય તે ઘટના = A

ઘટના Aને સાનુકૂળ પરિણામો $m = {}^3C_1 = 3$

ઘટના Aની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{3}{5}$

અહીં પસંદગી પુરવણી સહિત છે એટલે કે પ્રથમ પ્રયત્ને પસંદ થયેલ વ્યક્તિને સમૂહમાં પરત મોકલવામાં આવે છે. તેથી બીજી વ્યક્તિ પસંદ કરવાના પરસ્પર નિવારક, નિઃશેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા $n = {}^5C_1$ થાય.

ગીત ગાવા માટે પસંદ થયેલી બીજી વ્યક્તિ છોકરી હોય તે ઘટના = B

ઘટના Bને સાનુકૂળ પરિણામો $m = {}^2C_1 = 2$

ઘટના Bની સંભાવના $P(B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{2}{5}$

હવે, $A \cap B$ = ગીત ગાવા માટે પસંદ થયેલ બે વ્યક્તિઓમાં પ્રથમ છોકરો અને બીજી છોકરી હોય તેવી ઘટના

ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ હોવાથી,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{5}$$

$$= \frac{6}{25}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{6}{25}$

ઉદાહરણ 34 : બે સમતોલ પાસા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. બે પાસામાંથી ઓછામાં ઓછા એક પાસા પર અંક 3 મળે તેની સંભાવના શોધો.

પ્રથમ પાસા પર અંક 3 મળે તે ઘટના = A

બીજા પાસા પર અંક 3 મળે તે ઘટના = B

ઓછામાં ઓછા એક પાસા પર અંક 3 મળે તે ઘટના = $A \cup B$

ઘટના Aને સાનુકૂળ પરિણામો $m=1$

ઘટના Aની સંભાવના $P(A)=\frac{m}{n}$

$=\frac{1}{6}$

ઘટના Bને સાનુકૂળ પરિણામો $m=1$

ઘટના Bની સંભાવના $P(B)=\frac{m}{n}$

$=\frac{1}{6}$

હવે ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ હોવાથી ઘટનાઓ A' અને B' પણ નિરપેક્ષ થાય. ઉપરાંત

$P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ અને $P(B')=1-P(B)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ થાય.

ઓછામાં ઓછા એક પાસા પર પૂર્ણાંક 3 મળે તે ઘટનાની સંભાવના $=P(A\cup B)$

$=1-P(A'\cap B')$

$=1-\left[P(A')\times P(B')\right]$

$=1-\left[\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\right]$

$=1-\frac{25}{36}$

$=\frac{11}{36}$

માંગેલી સંભાવના $=\frac{11}{36}$

ઉદાહરણ 35 : ચોમાસાની ઋતુમાં અલગ-અલગ રાજ્યનાં બે શહેરો A અને Bમાં અનુક્રમે 60 % અને 75 % દિવસોમાં વરસાદ પડે છે. આ બે શહેરો માટે ચોમાસાની ઋતુમાં કોઈ એક દિવસે શહેર A અને B પૈકી

(1) બંને શહેરોમાં વરસાદ પડે.

(2) ઓછામાં ઓછા એક શહેરમાં વરસાદ પડે

(3) ફક્ત એક જ શહેરમાં વરસાદ પડે તેની સંભાવના શોધો

નોંધ : બંને શહેરોમાં એક જ દિવસે વરસાદ પડે તે ઘટનાઓ નિરપેક્ષ છે.

શહેર Aમાં વરસાદ પડે તેને ઘટના A અને શહેર Bમાં વરસાદ પડે તેને ઘટના B વડે દર્શાવીએ, તો આપેલી માહિતીને નીચે મુજબ રજૂ કરી શકાય :

$P(A)=\frac{60}{100}=\frac{3}{5}$ $\quad\therefore P(A')=1-P(A)=1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$

$P(B)=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}$ $\quad\therefore P(B')=1-P(B)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

(1) શહેર A અને B પૈકી બંને શહેરોમાં વરસાદ પડે તે ઘટના $A\cap B$

ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ હોવાથી

ઘટના $A\cap B$ ની સંભાવના $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$=\frac{3}{5}\times\frac{3}{4}$

$=\frac{9}{20}$

માંગેલી સંભાવના $=\frac{9}{20}$

(2) શહેર A અને B પૈકી ઓછામાં ઓછા એક શહેરમાં વરસાદ પડે તે ઘટના = $A \cup B$

ઘટના $A \cup B$ની સંભાવના $P(A \cup B) = 1 - P(A' \cap B')$

$$= 1 - [P(A') \times P(B')]$$

$$= 1 - \left[\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}\right]$$

$$= 1 - \frac{1}{10}$$

$$= \frac{9}{10}$$

માંગેલી સંભાવના = $\frac{9}{10}$

(3) શહેર A અને B પૈકી એક જ શહેરમાં વરસાદ પડે તે ઘટના $= (A \cap B') \cup (A' \cap B)$

ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો A અને B' તથા A' અને B પણ નિરપેક્ષ ઘટનાઓ થાય.

ઘટના $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$ની સંભાવના $= P(A \cap B') + P(A' \cap B)$

$$= [P(A) \times P(B')] + [P(A') \times P(B)]$$

$$= \left[\frac{3}{5} \times \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}\right]$$

$$= \frac{3}{20} + \frac{6}{20}$$

$$= \frac{9}{20}$$

માંગેલી સંભાવના = $\frac{9}{20}$

સ્વાધ્યાય 1.4

1. એક કુટુંબમાં બે બાળકો છે. જો પહેલું બાળક છોકરી હોય, તો તે કુટુંબનાં બંને બાળકો છોકરીઓ હોય તેની સંભાવના શોધો.

2. છ બાજુવાળા બે સમતોલ પાસા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે છે. જો બંને પાસા પરના અંકનો સરવાળો 7થી મોટો હોય, તો બંને પાસા પર સરખા જ અંક મળે તેની સંભાવના શોધો.

3. પેટ્રોલ પંપ પર આવતાં વિવિધ વાહનચાલકો પૈકી 80 % વાહનચાલકો પોતાના વાહનમાં પેટ્રોલ પુરાવવા આવે છે અને 60 % વાહનચાલકો પોતાના વાહનમાં હવા પુરાવવા આવે છે. 50 % વાહનચાલકો પોતાના વાહનમાં પેટ્રોલ અને હવા બંને પુરાવવા આવે છે. નીચેની ઘટનાઓની સંભાવના મેળવો :

(1) કોઈ વાહનચાલક પોતાના વાહનમાં પેટ્રોલ પુરાવવા આવેલ છે તો તે વાહનચાલક પોતાના વાહનમાં હવા પુરાવે

(2) કોઈ વાહનચાલક પોતાના વાહનમાં હવા પુરાવવા આવેલ છે તો તે વાહનચાલક પોતાના વાહનમાં પેટ્રોલ પુરાવે

4. એક રાષ્ટ્રીયકૃત બૅન્કમાં 80 % ગ્રાહકો બચતખાતું ધરાવે છે અને 50 % ગ્રાહકો ચાલુખાતું ધરાવે છે. 90 % ગ્રાહકો બચતખાતાં અને ચાલુખાતાંમાંથી ઓછામાં ઓછું એક ખાતું ધરાવે છે. આ બૅન્કના ખાતા ધારકોમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ એક ગ્રાહક ચાલુખાતું ધરાવે છે, તો તે બચતખાતું ધરાવતો હોય તેની સંભાવના શોધો.

5. એક યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની કોઈ બે ઘટનાઓ માટે $P(A)=\frac{2}{3}$, $P(B)=\frac{3}{5}$ અને $P(B/A)$ = $\frac{3}{4}$ હોય તો $P(A/B)$ મેળવો.

6. જો ઘટનાઓ A, M અને F માટે $P(M)=P(F)=\frac{1}{2}$ હોય તથા $P(A/M)=\frac{1}{10}$ અને $P(A/F)=\frac{1}{2}$ હોય તો $P(A\cap M)$ અને $P(A\cap F)$ શોધો.

7. એક પેટીમાં 2 સોનાના અને 4 ચાંદીના સિક્કા છે. જ્યારે બીજી પેટીમાં 3 સોનાના અને 5 ચાંદીના સિક્કા છે. પ્રત્યેક પેટીમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક-એક સિક્કો પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલા બે સિક્કામાં એક સિક્કો સોનાનો અને એક સિક્કો ચાંદીનો હોવાની સંભાવના શોધો.

8. એક સંયુક્ત કુટુંબમાં 3 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓ છે જ્યારે બીજા સંયુક્ત કુટુંબમાં 2 છોકરાઓ અને 4 છોકરીઓ છે. આ બે સંયુક્ત કુટુંબોમાંથી એક સંયુક્ત કુટુંબ પસંદ કરી તેમાંથી યાદચ્છિક રીતે એક બાળક પસંદ કરવામાં આવે, તો તે બાળક છોકરી હોવાની સંભાવના શોધો.

9. એક બૉક્સમાં 10 આઇસક્રીમના કોન છે જે પૈકી 3 કોનનું વજન નિયત કરેલ વજન કરતાં ઓછું છે અને બાકીના 7 કોનનું વજન નિયત કરેલ વજન બરાબર છે. આ બૉક્સમાંથી એક પછી એક એમ બે કોન પુરવણી સહિત પદ્ધતિથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલ બંને કૉન નિયત કરેલ વજન કરતાં ઓછા વજન વાળા હોવાની સંભાવના શોધો.

10. ફિલ્મી સી.ડી. મૂકવાના એક રૅકમાં કુલ 10 સી.ડી. છે જે પૈકી 6 સી.ડી. એક્શન ફિલ્મની અને 4 સી.ડી. ડ્રામા ફિલ્મની છે. આ રૅકમાંથી એક પછી એક એમ બે સી.ડી. પુરવણી રહિત પદ્ધતિથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ થયેલ બે સી.ડી.માં પ્રથમ સી.ડી. એક્શન ફિલ્મની અને બીજી સી.ડી. ડ્રામા ફિલ્મની હોય તેની સંભાવના શોધો.

11. બે સમતોલ પાસા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે તો,
   (1) ઓછામાં ઓછા એક પાસા પર અંક 5 મળે તેની સંભાવના શોધો.
   (2) પહેલાં પાસા પર અંક 5 કે 6 મળે અને બીજા પાસા પર યુગ્મ પૂર્ણાંક મળે તેની સંભાવના શોધો.

12. સંભાવનાનો એક દાખલો તાનિયા, કથન અને કીર્તિને ગણવા આપવામાં આવે છે. તેઓ દાખલો સાચો ગણી શકે તેની સંભાવનાઓ અનુક્રમે $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ અને $\frac{1}{2}$ છે. દાખલો સાચો ગણાય તેની સંભાવના શોધો.

13. વ્યક્તિ A એ 5માંથી 3 પ્રયત્નોમાં નિશાન વીંધી શકે છે જ્યારે વ્યક્તિ B એ 6 માંથી 5 પ્રયત્નોમાં નિશાન વીંધી શકે છે. જો બંને વ્યક્તિઓ એક સાથે નિશાન તાકે તો તે નિશાન વિંધાય તેની સંભાવના શોધો.

14. વ્યક્તિ A એ 90 % કિસ્સાઓમાં સાચું બોલે છે જ્યારે વ્યક્તિ B એ 80 % કિસ્સાઓમાં સાચું બોલે છે. વ્યક્તિઓ A અને B એક જ હકીકત રજૂ કરવામાં જુદા પડે તેની સંભાવના શોધો.

15. જો યાદચ્છિક પ્રયોગની ત્રણ ઘટનાઓ A અને B અને C નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય અને $P(A)=0.2, P(B)=0.3$ તથા $P(C)=0.5$ હોય, તો $P(A\cup B\cup C)$ શોધો.

*

1.7 સંભાવનાની આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યા

અગાઉ આપણે સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યા જોઈ. આ વ્યાખ્યાની મદદથી યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશનાં પરિણામો સમસંભાવી હોય અને તેની સંખ્યા જ્ઞાત હોય તેવા કિસ્સામાં જ સંભાવના મેળવી શકાય છે પરંતુ વ્યવહારમાં એવા અનેક કિસ્સા જોવા મળે છે કે જેમાં નિદર્શ અવકાશના પરિણામો અનંત અથવા અજ્ઞાત હોય છે. દા.ત., એક વિશાળ તળાવમાં જુદી-જુદી જાતની અનેક માછલીઓ છે. એક માછીમાર તળાવમાં માછલી પકડવા માટે જાળ નાંખે તો તેમાં ચોક્કસ જાતની માછલી પકડાય તેની સંભાવના શોધવી છે. અહીં તળાવમાં કુલ કેટલી માછલીઓ છે તે અજ્ઞાત હોવાથી સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યાથી સંભાવના શોધી શકાય નહિ. ઉપરાંત વ્યવહારમાં ઘણા કિસ્સા એવા પણ જોવા મળે છે કે નિદર્શ અવકાશનાં પરિણામો સમસંભાવી ન હોય. દા.ત., એક વેપારી પોતાની વખારમાંથી અમુક માલ પોતાના વેચાણ કેન્દ્ર પર મંગાવે છે. આ માલ વેચાણકેન્દ્ર પર સહીસલામત પહોંચે તે ઘટના અને સહીસલામત ન પહોંચે તે ઘટના સમસંભાવી ઘટનાઓ નથી. આવા કિસ્સામાં ગાણિતિક વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરીને સંભાવનાની ગણતરી કરી શકાતી નથી. આ સંજોગોમાં સામાન્ય રીતે ખૂબ જ ઉપયોગમાં આવતી સંભાવનાની અન્ય વ્યાખ્યા જે સાંખ્યિકીય કે આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યા તરીકે ઓળખાય છે તે વિશે જોઈએ.

પ્રથમ આપણે એક ઉદાહરણ જોઈએ. લાંબા સમયથી તૈયાર કપડાંનું વેચાણ કરતા એક શો-રૂમની મુલાકાત લેતો ગ્રાહક ખરીદી કરશે તેની સંભાવના આપણે શોધવી છે. તે જાણવા માટે આપણે શો-રૂમમાંથી ખરીદી કરતા ગ્રાહકો વિશેની માહિતી મેળવવી જોઈએ. આ માહિતી નિદર્શ તપાસ દ્વારા મેળવી શકાય. જેમ નિદર્શનું કદ મોટું તેમ નિદર્શ તપાસની માહિતી (સમષ્ટિની) સાચી માહિતીની વધુ નજીક છે એમ આપણે કહી શકીએ. ધારો કે 100 ગ્રાહકોની નિદર્શ તપાસમાં 79 ગ્રાહકોએ ખરીદી કરી છે તેમ નોંધાયું. નિદર્શ તપાસમાં ગ્રાહકોની સંખ્યા 500 હોય ત્યારે ખરીદી કરતાં 403 ગ્રાહકો નોંધાયા. આ રીતે નિદર્શનું કદ (n) વધારતાં મળેલી માહિતી નીચે પ્રમાણે છે :

નિદર્શનું કદ n (શો-રૂમની મુલાકાત લેતાં ગ્રાહકોની સંખ્યા)	ખરીદી કરતાં ગ્રાહકોની સંખ્યા r (આવૃત્તિ)	ખરીદી કરતાં ગ્રાહકોનું પ્રમાણ $\frac{r}{n}$ (સાપેક્ષ આવૃત્તિ)
100	79	0.79
500	403	0.806
1000	799	0.799
5000	3991	0.7982
10,000	8014	0.8014

ઉપરની માહિતી પરથી જણાય છે કે, જેમ નિદર્શનું કદ n મોટું થતું જાય છે તેમ તૈયાર કપડાં ખરીદનાર ગ્રાહકોનું પ્રમાણ એટલે કે સાપેક્ષ આવૃત્તિ 0.8ની નજીકની કિંમત ધારણ કરે છે. આ કિંમતને આપણે શો-રૂમની મુલાકાત લેતો ગ્રાહક ખરીદી કરશે તે ઘટનાની સંભાવના તરીકે સ્વીકારી શકીએ. આમ, અહીં સાપેક્ષ આવૃત્તિના સ્વરૂપમાં સંભાવના મેળવવામાં આવે છે. સંભાવનાની સાપેક્ષ આવૃત્તિ આધારિત વ્યાખ્યાને સંભાવનાની સાંખ્યિકીય કે આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યા (Statistical Definition) કહે છે. તેને પ્રાયોગિક કે આનુભવિક વ્યાખ્યા (Emperical Definition) પણ કહેવાય છે.

આ વ્યાખ્યા નીચે મુજબ છે :

ધારો કે સમાન પરિસ્થિતિમાં કોઈ યાદચ્છિક પ્રયોગનું n વખત પુનરાવર્તન કરવામાં આવે છે. આ n પ્રયત્નો પૈકી m પ્રયત્નોમાં ઘટના A બને છે, તો ઘટના Aની સાપેક્ષ આવૃત્તિ $\frac{m}{n}$ ઘટના A બનવાની સંભાવના $P(A)$નો અંદાજ આપે છે. જ્યારે nની કિંમત વધુ ને વધુ મોટી લેવામાં આવે એટલે કે nની કિંમત અનંત તરફ $(n \to \infty)$ જાય ત્યારે $\frac{m}{n}$ની લક્ષિત કિંમતને ઘટના Aની સંભાવના કહે છે.

સંકેતમાં,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

અહીં $\lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$ એ nની અનંત કિંમત માટે ગુણોત્તર $\frac{m}{n}$ની લક્ષિત કિંમત દર્શાવે છે. વ્યવહારમાં આ સાપેક્ષ આવૃત્તિ $\frac{m}{n}$ને જ ઘટના Aની સંભાવના તરીકે લેવાય છે. હવે આપણે સંભાવનાની આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ દર્શાવતાં ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 36 : 100 ગુણની એક જાહેર પરીક્ષામાં બેઠેલા ઉમેદવારોના વિશાળ સમૂહમાંથી તેમણે મેળવેલ ગુણની નિદર્શ માહિતી નીચેના કોષ્ટમાં આપેલી છે :

ગુણ	20 કે તેથી ઓછા	21–40	41–60	61–80	81–100
ઉમેદવારોની સંખ્યા	83	162	496	326	124

જાહેર પરીક્ષામાં બેઠેલા એક ઉમેદવારની યાદચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવે છે. આ ઉમેદવારે

(1) 41થી ઓછા

(2) 60થી વધુ

(3) 21થી 80 સુધીમાં ગુણ મેળવ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.

અહીં નિદર્શમાં પસંદ કરેલ ઉમેદવારોની કુલ સંખ્યા $n = 83 + 162 + 496 + 326 + 124 = 1191$ છે.

(1) ઘટના $A =$ પસંદ કરેલ ઉમેદવારના 41થી ઓછા ગુણ હોય.

$P(A) =$ 41થી ઓછા ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સાપેક્ષ આવૃત્તિ

$$= \frac{\text{41 થી ઓછા ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારની સંખ્યા}}{\text{નિદર્શના ઉમેદવારોની કુલ સંખ્યા}} = \frac{m}{n}$$

$m =$ 41થી ઓછા ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સંખ્યા

$= 83 + 162$

$= 245$

હવે, $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{245}{1191}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{245}{1191}$

(2) ઘટના B = પસંદ કરેલ ઉમેદવારના 60થી વધુ ગુણ હોય

$P(B) = 60$ થી વધુ ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સાપેક્ષ આવૃત્તિ

$$= \frac{\text{60 થી વધુ ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સંખ્યા}}{\text{નિદર્શના ઉમેદવારોની કુલ સંખ્યા}} = \frac{m}{n}$$

$m = 60$થી વધુ ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સંખ્યા

$= 326 + 124$

$= 450$

હવે, $P(B) = \frac{m}{n}$

$= \frac{450}{1191}$

$= \frac{150}{397}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{150}{397}$

(3) ઘટના C = પસંદ કરેલ ઉમેદવારના 21થી 80 સુધી ગુણ હોય

$P(C)$ = 21થી 80 સુધી ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સાપેક્ષ આવૃત્તિ

$$= \frac{\text{21થી 80 સુધી ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સંખ્યા}}{\text{નિદર્શના ઉમેદવારોની કુલ સંખ્યા}} = \frac{m}{n}$$

m = 21થી 80 સુધી ગુણ મેળવનાર ઉમેદવારોની સંખ્યા

$= 162 + 496 + 326$

$= 984$

હવે, $P(C) = \frac{m}{n}$

$= \frac{984}{1191}$

$= \frac{328}{397}$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{328}{397}$

ઉદાહરણ 37 : એક કારખાનામાં બે પાળી ચાલે છે. આ પાળીમાં ઉત્પાદિત એકમોની ગુણવત્તાની નિદર્શ માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

ગુણવત્તા	પાળી		કુલ
	I	II	
ખામીવાળા એકમો	24	46	**70**
ખામીરહિત એકમો	2176	2754	**4930**
કુલ	**2200**	**2800**	**5000**

કારખાનાનાં ઉત્પાદનમાંથી એક એકમ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે.

(1) જો એકમ પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાંથી મેળવેલો હોય, તો તે ખામીવાળો હોય તેની સંભાવના શોધો.

(2) જો એકમ ખામીવાળો હોય તો તે પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાંથી મેળવેલો હોય તેની સંભાવના શોધો.

અહીં નિદર્શમાં પસંદ કરેલા એકમોની કુલ સંખ્યા = 5000

આપણે નીચે જણાવ્યા પ્રમાણે ઘટનાઓ વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

ઘટના A = પસંદ કરેલ એકમ પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાંથી મેળવેલ હોય.

$P(A)$ = પહેલી પાળીના ઉત્પાદનના એકમોની સાપેક્ષ આવૃત્તિ

$$= \frac{\text{પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાં મળેલ એકમો}}{\text{નિદર્શના એકમોની કુલ સંખ્યા}} = \frac{m}{n}$$

m = પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાં મળેલ એકમો

= 2200

હવે, $P(A) = \frac{m}{n}$

$= \frac{2200}{5000}$

ઘટના D = પસંદ કરેલ એકમ ખામીવાળો હોય

$P(D)$ = ખામીવાળા એકમની સાપેક્ષ આવૃત્તિ

$$= \frac{\text{ખામીવાળા એકમોની સંખ્યા}}{\text{નિદર્શના એકમોની કુલ સંખ્યા}} = \frac{m}{n}$$

m = ખામીવાળા એકમોની સંખ્યા

= 70

હવે, $P(D) = \frac{m}{n}$

$= \frac{70}{5000}$

ઘટના $A \cap D$ = પસંદ કરેલ એકમ પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાંથી મેળવેલ હોય અને તે ખામીવાળો હોય.

$P(A \cap D)$ = ઘટના $A \cap D$ની સાપેક્ષ આવૃત્તિ

$$= \frac{\text{ઘટના } A \cap D \text{ માં આવતા એકમોની સંખ્યા}}{\text{નિદર્શના એકમોની કુલ સંખ્યા}} = \frac{m}{n}$$

m = ઘટના $A \cap D$માં આવતા એકમોની સંખ્યા

= 24

હવે, $P(A \cap D) = \frac{m}{n} = \frac{24}{5000}$

(1) એકમ પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાંથી મેળવેલો હોય તો તે ખામીવાળો હોય તે ઘટના = D/A

શરતી સંભાવનાની વ્યાખ્યા મુજબ ઘટના D/Aની સંભાવના

$$P(D/A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)}$$

$$= \frac{\frac{24}{5000}}{\frac{2200}{5000}}$$

$$= \frac{24}{2200}$$

$$= \frac{3}{275}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{3}{275}$

(આ સંભાવના સીધી જ D/A ઘટનાની સાપેક્ષ આવૃત્તિ $\frac{24}{2200}$ પરથી પણ મેળવી શકાય.)

(2) એકમ ખામીવાળો હોય તો તે પહેલી પાળીના ઉત્પાદનમાંથી મેળવેલો હોય તે ઘટના A/D શરતી સંભાવનાની વ્યાખ્યા મુજબ ઘટના A/Dની સંભાવના

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)}$$

$$= \frac{\frac{24}{5000}}{\frac{70}{5000}}$$

$$= \frac{24}{70}$$

$$= \frac{12}{35}$$

માંગેલી સંભાવના $= \frac{12}{35}$

(આ સંભાવના સીધી જ A/D ઘટનાની સાપેક્ષ આવૃત્તિ $\frac{24}{70}$ પરથી પણ મેળવી શકાય.)

મર્યાદા : સંભાવનાની આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યાની મર્યાદાઓ નીચે મુજબ છે :

(1) સંભાવનાની આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યામાં $n \to \infty$ એટલે કે nની કિંમત અનંતને અનુલક્ષે ત્યારે જ સંભાવનાની કિંમત મળે છે પરંતુ વ્યવહારમાં nની કિંમત અનંત લઈ શકાય નહિ.

(2) આ વ્યાખ્યાથી મળતી કોઈપણ ઘટનાની સંભાવના એ અંદાજિત કિંમત છે. આ વ્યાખ્યાની મદદથી સંભાવનાની સાચી કિંમત જાણી શકાતી નથી.

સ્વાધ્યાય 1.5

1. એક મેગા સિટીમાં લોકલ બસમાં પ્રવાસ કરતાં પ્રવાસીઓના વિશાળ સમૂહમાંથી તેમણે કરેલા માસિક પ્રવાસ-ખર્ચની (₹ માં) નિદર્શ માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલી છે :

માસિક પ્રવાસ-ખર્ચ (₹)	501–600	601–700	701–800	801–900	901 કે તેથી વધુ
પ્રવાસીઓની સંખ્યા	318	432	639	579	174

આ મેગા સિટીમાંથી લોકલ બસમાં પ્રવાસ કરતાં એક વ્યક્તિને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. આ વ્યક્તિનો માસિક પ્રવાસ-ખર્ચ (1) ₹ 900થી વધુ હોય (2) વધુમાં વધુ ₹ 700 હોય અને (3) ₹ 601 કે તેથી વધુ પરંતુ ₹ 900 કે તેથી ઓછો હોવાની સંભાવના શોધો.

2. એક મત-વિસ્તારના 4979 મતદારોની નિદર્શ તપાસમાં નીચેની વીગત મળે છે :

વીગત	પુરુષો	સ્ત્રીઓ
પક્ષ Aના ટેકેદાર	1319	1118
પક્ષ Bના ટેકેદાર	1217	1325

આ મત-વિસ્તારમાંથી એક મતદારને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે.

(1) જો મતદાર પુરુષ હોય તો તે પક્ષ Aનો ટેકેદાર હોય તેની સંભાવના શોધો.

(2) જો મતદાર પક્ષ Aનો ટેકેદાર છે એમ આપેલ હોય, તો તે પુરુષ હોવાની સંભાવના શોધો.

*

સારાંશ

- ચાન્સ પર આધાર રાખતી ઘટનાઓને યાદૃચ્છિક ઘટનાઓ કહે છે.
- જે પ્રયોગનું નિરપેક્ષ રીતે સમાન સંજોગોમાં પુનરાવર્તન કરી શકાતું હોય અને તે પ્રયોગનાં બધાં જ શક્ય પરિણામો જ્ઞાત હોય પરંતુ તે પૈકી કયું ચોક્કસ પરિણામ મળશે તેનું નિશ્ચિત અનુમાન પ્રયોગ પૂર્વે કરી શકાતું ન હોય તેવા પ્રયોગને યાદૃચ્છિક પ્રયોગ કહે છે.
- કોઈપણ યાદૃચ્છિક પ્રયોગનાં શક્ય તમામ પરિણામોના ગણને તે યાદૃચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ કહે છે.
- યાદૃચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશના ઉપગણને તે યાદૃચ્છિક પ્રયોગની ઘટના કહે છે.
- U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે અને A તથા B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. ઘટના A અને B બંને એક સાથે બની જ ન શકે એટલે કે $A \cap B = \phi$ હોય, તો ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ કહેવાય.
- જો યાદૃચ્છિક પ્રયોગની ઘટનાઓનાં શક્ય પરિણામોનો સમૂહ નિદર્શ અવકાશ થાય તો તે ઘટનાઓને નિ:શેષ ઘટનાઓ કહેવાય.
- પ્રાથમિક ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક અને નિ:શેષ હોય છે.
- કોઈ યાદૃચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની બે કે તેથી વધુ ઘટનાઓ પૈકી એક ઘટના બનવાની શક્યતા બીજી કોઈપણ ઘટના બનવાની શક્યતા કરતાં વધુ કે ઓછી હોવાનું કોઈ દેખીતું કારણ ન હોય તેવી ઘટનાઓને સમસંભાવી ઘટનાઓ કહે છે.
- કોઈ યાદૃચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશ U ના પરસ્પર નિવારક, નિ:શેષ અને સમસંભાવી પરિણામોની કુલ સંખ્યા n છે. તે પૈકી કોઈ ઘટના A બનવાને સાનુકૂળ પરિણામો m હોય, તો ઘટના Aની સંભાવના $\frac{m}{n}$ થાય.
- નિદર્શ અવકાશ Uની કોઈપણ ઘટના Aની સંભાવના $P(A)$ની કિંમતનો વિસ્તાર 0 થી 1 સુધીનો છે. એટલે કે, $0 \le P(A) \le 1$
- U એ સાન્ત નિદર્શ અવકાશ છે તથા A અને B તેની કોઈ બે ઘટનાઓ છે. જો ઘટના A બનવાની સંભાવના ઘટના B બનવા (કે ન બનવા)થી બદલાતી ન હોય, તો A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.
- ધારો કે સમાન પરિસ્થિતિમાં કોઈ યાદૃચ્છિક પ્રયોગનું n વખત પુનરાવર્તન કરવામાં આવે છે. આ n પ્રયત્નો પૈકી m પ્રયત્નોમાં ઘટના A બને છે, તો ઘટના Aની સાપેક્ષ આવૃત્તિ $\frac{m}{n}$ ઘટના A બનવાની સંભાવના $P(A)$નો અંદાજ આપે છે. જ્યારે nની કિંમત વધુ ને વધુ મોટી લેવામાં આવે એટલે કે nની કિંમત અનંત તરફ $(n \to \infty)$ જાય ત્યારે $\frac{m}{n}$ની લક્ષિત કિંમતને ઘટના Aની સંભાવના કહે છે.

સૂત્રોની યાદી :

(1) ઘટના Aની પૂરક ઘટના $A' = U - A$

(2) ઘટના A અને Bની તફાવત ઘટના $A - B = A \cap B' = A - (A \cap B)$ (ફક્ત ઘટના A બને)

(3) ઘટના B અને Aની તફાવત ઘટના $B - A = A' \cap B = B - (A \cap B)$ (ફક્ત ઘટના B બને)

(4) યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશની કોઈ ઘટના Aની સંભાવના $P(A) = \frac{m}{n}$

(5) સંભાવનાના સરવાળાનો નિયમ

કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B માટે,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

કોઈ ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C માટે,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

બે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક હોય,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C પરસ્પર નિવારક હોય,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

બે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ હોય,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1$$

ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ હોય,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

(6) શરતી સંભાવના

ઘટના A બની હોય તે શરતે ઘટના B બને.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}; \quad P(A) \neq 0$$

ઘટના B બની હોય તે શરતે ઘટના A બને

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}; \quad P(B) \neq 0$$

(7) સંભાવનાના ગુણાકારનો નિયમ

કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B માટે

$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A);\ P(A) \neq 0$

$P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B);\ P(B) \neq 0$

- બે ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ હોય,

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')$$

$$P(A' \cap B) = P(A') \times P(B)$$

$$P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$$

(8) સંભાવનાની આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યા અનુસાર,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

સ્વાધ્યાય 1

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. નિદર્શ અવકાશ Uના વિશિષ્ટ ઉપગણ ϕને કઈ ઘટના કહે છે ?

(a) ચોક્કસ ઘટના (b) ϕની પૂરક ઘટના

(C) U અને ϕની યોગઘટના (d) અશક્ય ઘટના

2. ઘટનાઓ A અને A' માટે $P(A \cap A')$નું મૂલ્ય કેટલું થાય ?

(a) 1 (b) 0 (c) 0.5 (d) 0 અને 1ની વચ્ચે

3. નિદર્શ અવકાશમાંની કોઈપણ ઘટના A માટે નીચેના પૈકી કયો વિકલ્પ સાચો છે ?

(a) $P(A) < 0$ (b) $0 \le P(A) \ge 1$ (c) $0 \le P(A) \le 1$ (d) $P(A) > 1$

4. નિદર્શ અવકાશ Uમાંની કોઈ બે ઘટનાઓ A અને B માટે $A \subset B$ હોય, તો નીચેનામાંથી કયું વિધાન સાચું નથી ?

(a) $P(A \cap B) = P(B)$ (b) $P(A \cap B) = P(A)$

(c) $P(A \cup B) \ge P(A)$ (d) $P(B - A) = P(B) - P(A)$

5. સંભાવનાની પ્રશિષ્ટ વ્યાખ્યા બીજા કયા નામે ઓળખાય છે ?

(a) ગાણિતિક વ્યાખ્યા (b) પૂર્વ ધારણાયુક્ત વ્યાખ્યા

(c) આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યા (d) ભૌમિતિક વ્યાખ્યા

6. એક સમતોલ સિક્કો ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગમાં મળતી પ્રાથમિક ઘટનાઓ H અને T માટે સંભાવનાનું નીચેના પૈકી કયું વિધાન સાચું નથી ?

(a) $P(T)=0.5$ (b) $P(H)+P(T)=1$ (c) $P(H\cap T)=0.5$ (d) $P(H)=0.5$

7. નીચે જણાવેલ યાદચ્છિક પ્રયોગો પૈકી કયા યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ અનંત છે ?

(a) બે પાસા ઉછાળવા (b) ઑફિસમાંથી બે કર્મચારીઓ પસંદ કરવા

(c) ઇલેક્ટ્રિક બલ્બનું આયુષ્ય કલાકમાં માપવું (d) 52 પત્તાંમાંથી એક પત્તું પસંદ કરવું

8. ઘટના $A\cup A'=U$ હોય, તો A અને A' કેવી ઘટનાઓ કહેવાય ?

(a) નિરપેક્ષ ઘટનાઓ (b) પૂરક ઘટનાઓ (c) ચોક્કસ ઘટનાઓ (d) અશક્ય ઘટનાઓ

9. જો $P(A/B)=P(A)$ અને $P(B/A)=P(B)$ હોય તો ઘટનાઓ A અને B કેવી ઘટનાઓ કહેવાય ?

(a) નિરપેક્ષ ઘટનાઓ (b) પૂરક ઘટનાઓ (c) ચોક્કસ ઘટનાઓ (d) અશક્ય ઘટનાઓ

10. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ છે. $P(B-A)$ નીચેના પૈકી કોના બરાબર થશે ?

(a) $P(A)$ (b) $P(B)$ (c) $P(A\cap B)$ (d) $P(A\cup B)$

11. છ બાજુવાળા ત્રણ સમતોલ પાસા એક સાથે ઉછાળવામાં આવે, તો બનતા નિદર્શ અવકાશમાં નિદર્શ બિંદુઓની કુલ સંખ્યા કેટલી થાય ?

(a) 6^2 (b) 3^6 (c) 6×3 (d) 6^3

12. પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ 1 અને 20 વચ્ચેની સંખ્યાઓમાંથી એક સંખ્યા યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે, તો તે સંખ્યા 5ની ગુણક હોવાની સંભાવના કેટલી થાય ?

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{6}$ (c) $\frac{1}{5}$ (d) $\frac{1}{3}$

13. બે ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ હોય, તો નીચેના પૈકી કયો વિકલ્પ સાચો છે ?

(a) $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ (b) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

(c) $P(A\cup B)=P(A)\times P(B)$ (d) $P(A\cap B)=P(A)+P(B)$

14. લીપ વર્ષ ન હોય તેવા વર્ષના ફેબ્રુઆરી માસમાં 5 ગુરુવાર આવે તેની સંભાવના કેટલી થાય ?

(a) 0 (b) $\frac{1}{7}$ (c) $\frac{2}{7}$ (d) $\frac{3}{7}$

15. નિદર્શ અવકાશની બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A)=0.4$ અને $P(B')=0.3$ હોય, તો $P(A\cap B)$ની કિંમત જણાવો.

(a) 0.12 (b) 0.42 (c) 0.28 (d) 0.18

16. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે ઘટના $(A\cap B)\cup(A\cap B')$ જણાવો.

(a) ϕ (b) B (c) A (d) U

17. સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યા મુજબ યાદચ્છિક પ્રયોગનાં n પરિણામો પૈકી દરેક પરિણામની સંભાવના કેટલી થાય ?

(a) 0 (b) $\frac{1}{n}$ (c) 1 (d) કહી શકાય નહિ.

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. યાદચ્છિક પ્રયોગનાં બે ઉદાહરણો આપો.

2. A અને B ની તફાવત ઘટના A-Bની વેન આકૃતિ દોરો.

3. ઘટનાની વ્યાખ્યા લખો.

4. એક સમતોલ પાસો અને એક સમતોલ સિક્કો એક સાથે ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગનો નિદર્શ અવકાશ લખો.

5. શરતી સંભાવનાની વ્યાખ્યા આપો.

6. ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના બને તેની સંભાવના મેળવવાનું સૂત્ર લખો.

7. નિરપેક્ષ ઘટનાની વ્યાખ્યા લખો.

8. નિદર્શ અવકાશની બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે સંભાવનાનો ગુણાકારનો નિયમ લખો.

9. $P(A/B)$ અને $P(B/A)$નું અર્થઘટન લખો.

10. નિદર્શ અવકાશ Uમાંની ત્રણ ઘટનાઓ A, B અને C નિઃશેષ ઘટનાઓ ક્યારે કહેવાય ?

11. $P(A\cup B), P(A), P(A\cap B), 0, P(A)+P(B)$ને ચડતા ક્રમમાં ગોઠવો.

12. વ્યાખ્યા આપો :

(1) યાદચ્છિક પ્રયોગ (2) નિદર્શ અવકાશ

(3) સમસંભાવી ઘટનાઓ (4) સાનુકૂળ પરિણામો

(5) સંભાવના (ગાણિતિક વ્યાખ્યા) (6) સંભાવના (આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યા)

(7) અશક્ય ઘટના (8) ચોક્કસ ઘટના

13. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે $A \cap B = \phi$ અને $A \cup B = U$ હોય, તો $P(A \cap B)$ અને $P(A \cup B)$ ની કિંમતો જણાવો.

14. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય, તો $P(A \cup B)$ નું સૂત્ર લખો.

15. $A = \left\{x \mid 0 < x < 1\right\}$ હોય, તો $B = \left\{x \mid \frac{1}{4} \le x \le 3\right\}$ હોય, તો $A \cap B$ મેળવો.

16. નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = 0.5$ અને $P(B) = 0.7$ હોય, તો $P(A' \cap B')$ શોધો.

17. જો $P(A) = 0.8$ અને $P(A \cap B) = 0.25$ હોય, તો $P(A - B)$ શોધો.

18. જો $P(A) = 0.3$ અને $P(A \cap B) = 0.03$ હોય, તો $P(B/A)$ શોધો.

19. પરસ્પર નિવારક બે ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = P(B) = K$ હોય, તો $P(A \cup B)$ શોધો.

20. જો $P(A' \cap B) = 0.45$ અને $A \cap B = \phi$ હોય, તો $P(B)$ શોધો.

21. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B પરસ્પર નિવારક અને નિઃશેષ છે. જો $P(A) = \frac{1}{3}$ હોય, તો $P(B)$ શોધો.

22. એક સમૂહના 2 % એકમો ખામીવાળા છે. આ સમૂહમાંથી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ એક એકમ ખામીરહિત હોવાની સંભાવના કેટલી થાય ?

23. પાંચ સમતોલ સિક્કા ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગમાં નિદર્શ બિંદુઓની સંખ્યા જણાવો.

24. એક સમતોલ સિક્કો અને બે સમતોલ પાસાં એક સાથે ઉછાળવાના યાદચ્છિક પ્રયોગમાં નિદર્શ બિંદુઓની સંખ્યા જણાવો.

25. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = 0.7$ અને $P(A \cup B) = 0.45$ શક્ય છે ? કારણ આપો.

26. 52 પત્તાંમાંથી યાદચ્છિક રીતે બે પત્તાં પુરવણી સહિત એક પછી એક પસંદ કરવામાં આવે છે. આ યાદચ્છિક પ્રયોગના નિદર્શ અવકાશના ઘટકોની સંખ્યા લખો.

27. બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે $P(B/A) = \frac{1}{2}$ અને $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ હોય તો $P(A)$ શોધો.

28. 2000 ટિકિટોમાંથી 1998 ટિકિટો ઈનામ વગરની છે. એક વ્યક્તિ 2000 ટિકિટોમાંથી એક ટિકિટ યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરે, તો પસંદ કરેલ ટિકિટ ઈનામપાત્ર હોય તેની સંભાવના કેટલી થાય ?

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. નીચે આપેલી ઘટનાઓ માટે વેન આકૃતિ દોરી તેની વ્યાખ્યા લખો :

(1) પરસ્પર નિવારક ઘટનાઓ (2) યોગઘટના

(3) છેદઘટના (4) તફાવત ઘટના

(5) નિઃશેષ ઘટનાઓ (6) પૂરક ઘટના

2. સાન્ત અને અનંત નિદર્શ અવકાશનાં ઉદાહરણો આપો.

3. અશક્ય અને ચોક્કસ ઘટનાનાં ઉદાહરણો આપો.

4. યાદૃચ્છિક પ્રયોગનાં લક્ષણો જણાવો.

5. સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યાની ધારણાઓ લખો.

6. સંભાવનાની ગાણિતિક વ્યાખ્યાની મર્યાદાઓ લખો.

7. સંભાવનાની આંકડાશાસ્ત્રીય વ્યાખ્યાની મર્યાદાઓ લખો.

8. સમસંભાવી ઘટનાઓ ઉદાહરણ આપી સમજાવો.

9. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે સંભાવનાના સરવાળાનો નિયમ લખો. જો આ ઘટનાઓ પરસ્પર નિવારક હોય, તો સંભાવનાના સરવાળાનો નિયમ લખો.

10. નિદર્શ અવકાશની બે ઘટનાઓ A અને B માટે સંભાવનાના ગુણાકારનો નિયમ લખો. જો ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ હોય ત્યારે સંભાવનાના ગુણાકારનો નિયમ લખો.

11. નિદર્શ અવકાશની બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે નીચેનાં પરિણામો લખો :

(1) $P(A \cap B)$ (2) $P(A' \cap B')$

(3) $P(A \cap B')$ (4) $P(A' \cap B)$

12. જો $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{2}{3}$ અને $P(A \cap B)=\frac{1}{6}$ હોય, તો $P(A' \cap B')$ શોધો.

13. જો $P(B)=2P(A/B)=0.4$ હોય, તો $P(A \cap B)$ શોધો.

14. ઘટનાઓ A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય અને $3P(A)=2P(B)=0.12$ હોય, તો $P(A \cap B)$ શોધો.

15. બે ઘટનાઓ A અને B માટે $5P(A)=3P(B)=2\,P(A \cup B)=\frac{3}{2}$ હોય, તો $P(A' \cup B')$ શોધો.

16. બે નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A \cap B)=0.12$ અને $P(B)=0.3$ હોય, તો $P(A \cup B)$ શોધો.

17. જો $A=\{x \mid 1<x<3\}$ અને $B=\{x \mid \frac{1}{2} \le x < 2\}$ હોય, તો $A \cup B$ અને $A \cap B$ મેળવો.

18. બે ઘટનાઓ A અને B પૈકી ઓછામાં ઓછી એક ઘટના બનવાની સંભાવના $\frac{1}{4}$ અને ઘટના A બને પરંતુ ઘટના B ન બને તેની સંભાવના $\frac{1}{5}$ હોય, તો ઘટના B બનવાની સંભાવના શોધો.

19. ઘટનાઓ A અને B માટે $P(B)=\frac{3}{5}$ અને $P(A'\cap B)=\frac{1}{2}$ હોય, તો $P(A/B)$ શોધો.

20. 10 વ્યક્તિઓના સમૂહમાં 6 વ્યક્તિઓ પાસે પાસપોર્ટ છે. આ સમૂહમાંથી 3 વ્યક્તિઓની યાદૃચ્છિક રીતે પસંદગી કરવામાં આવે તો તેમાં,

(1) ત્રણેય વ્યક્તિઓ પાસે પાસપોર્ટ હોય.

(2) બે વ્યક્તિઓ પાસે પાસપોર્ટ ન હોય તેની સંભાવના શોધો.

21. કોઈ વર્ષના બજેટમાં પુરુષોની આવક માટે કર-મર્યાદા વધે તેની સંભાવના 0.66 અને સ્ત્રીઓની આવક માટે કર-મર્યાદા વધે તેની સંભાવના 0.72 છે. પુરુષો અને સ્ત્રીઓ એમ બંનેની આવક માટે કર-મર્યાદા વધે તેની સંભાવના 0.47 હોય, તો તે વર્ષના બજેટમાં,

(1) પુરુષો અને સ્ત્રીઓ બેમાંથી ફક્ત એકની આવક માટે કર-મર્યાદા વધે.

(2) પુરુષો અને સ્ત્રીઓ પૈકી કોઈની આવક માટે કર-મર્યાદા ન વધે તેની સંભાવના શોધો.

22. ક્રૂડ ઑઇલના ભાવ વધ્યા પછી પેટ્રોલના ભાવ વધે તેવું 80 % કિસ્સામાં બને છે અને ડિઝલના ભાવ વધે તેવું 77 % કિસ્સામાં બને છે. પેટ્રોલ અને ડિઝલ બંનેના ભાવ વધે તેવું 68 % કિસ્સામાં બને છે. પેટ્રોલના ભાવ વધે તે શરતે ડિઝલના ભાવ વધે તેની સંભાવના શોધો.

23. હવામાન ખાતાની આગાહી મુજબ આવતાં અઠવાડિયાના ત્રણ દિવસો ગુરુવાર, શુક્રવાર અને શનિવારના દિવસે વરસાદ પડવાની સંભાવના અનુક્રમે 0.8, 0.7 અને 0.6 છે. આવતા અઠવાડિયામાં આ ત્રણ દિવસો પૈકી ઓછામાં ઓછા એક દિવસે વરસાદ પડવાની સંભાવના શોધો.

(નોંધ : અઠવાડિયાના ત્રણ દિવસો ગુરુવાર, શુક્રવાર અને શનિવારના દિવસે વરસાદ પડે તે ઘટનાઓ નિરપેક્ષ છે.)

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ડિજિટલ સ્ટોર Aમાં 6 *LED* ટી.વી. અને 4 *LCD* ટી.વી. તથા ડિજિટલ સ્ટોર Bમાં 5 *LED* ટી.વી. અને 3 *LCD* ટી.વી. ડિસ્પ્લેમાં મૂકેલાં છે. બેમાંથી એક સ્ટોરની યાદૃચ્છિક રીતે પસંદગી કરી તેમાંથી એક ટી.વી.ની પસંદગી કરવામાં આવે, તો તે *LCD* ટી.વી. હોવાની સંભાવના શોધો.

2. 1 થી 100 સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓમાંથી એક સંખ્યા યાદૃચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલી સંખ્યા એક અંકની હોય અથવા પૂર્ણવર્ગ હોય તે ઘટનાની સંભાવના શોધો.

3. એક સમતોલ સિક્કો ત્રણ વખત ઉછાળવામાં આવે છે. જો પ્રથમ બે પ્રયત્નોમાં સિક્કા પર કાંટો મળ્યો હોય, તો ત્રણેય પ્રયત્નોમાં સિક્કા પર કાંટો મળે તેની સંભાવના શોધો.

4. ઘટનાઓ A, B અને C નિરપેક્ષ ઘટનાઓ હોય અને તેમના માટે $P(A) = P(B) = P(C) = p$ હોય, તો $P(A \cup B \cup C)$ની કિંમત pના સ્વરૂપમાં મેળવો.

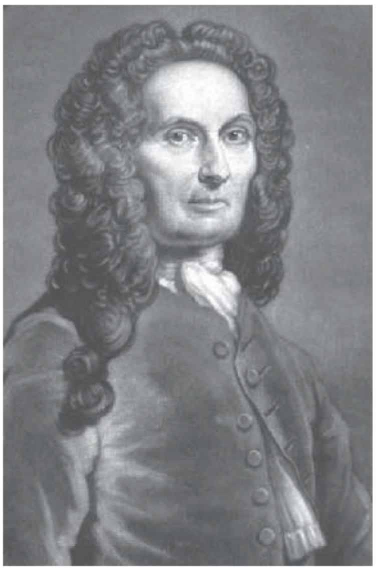
5. એક રાજ્યના સરકારી નોકરી કરતાં વર્ગ 3 અને વર્ગ 4ના કર્મચારીઓમાંથી પસંદ કરેલા 6000 કર્મચારીઓના નિદર્શની જાતિ અનુસાર માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવી છે :

કર્મચારી-વર્ગ	જાતિ		કુલ
	પુરુષો	સ્ત્રીઓ	
વર્ગ 3	3600	900	4500
વર્ગ 4	400	1100	1500
કુલ	4000	2000	6000

આ રાજ્યના સરકારી નોકરી કરતાં વર્ગ 3 અને વર્ગ 4ના તમામ કર્મચારીઓમાંથી એક કર્મચારીને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે છે.

(1) પસંદ થયેલ કર્મચારી પુરુષ હોય તો તે વર્ગ 3નો હોય તેની સંભાવના શોધો.

(2) પસંદ થયેલ કર્મચારી વર્ગ 3નો છે એમ આપેલ હોય, તો તે પુરુષ હોવાની સંભાવના શોધો.



Abraham de Moivre
(1667 -1754)

Abraham de Moivre was a French mathematician known for de Moivre's formula, one of those that link complex numbers and trigonometry, and for his work on the normal distribution and probability theory. De Moivre wrote a book on probability theory, The Doctrine of Chances. De Moivre first discovered Binet's formula, the closed-form expression for Fibonacci numbers linking the n^{th} power of the golden ratio ϕ to the n^{th} Fibonacci number. He also was the first to postulate the Central Limit Theorem, a cornerstone of probability theory. In the later editions of his book, de Moivre included his unpublished result of 1733, which is the first statement of an approximation to the binomial distribution in terms of what we now call the normal or Gaussian function.

De Moivre continued studying the fields of probability and mathematics until his death and several additional papers were published after his death.