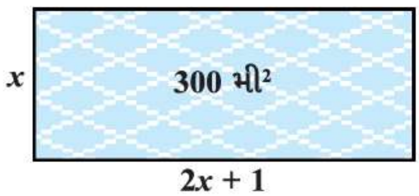
M8E3D2

દ્વિઘાત સમીકરણ 4

4.1 પ્રાસ્તાવિક

પ્રકરણ 2 માં તમે વિવિધ પ્રકારની બહુપદીનો અભ્યાસ કર્યો. શૂન્યેતર a માટે $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ દ્વિઘાત બહુપદી છે. જો આ બહુપદીનું મૂલ્ય શૂન્ય લેવામાં આવે, તો આપણને દ્વિઘાત સમીકરણ મળે. વાસ્તવિક જીવનસંબંધી ઘણા બધા પ્રશ્નોમાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉપયોગ થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, એક ધાર્મિક ટ્રસ્ટને 300 ચોરસ મીટર જગામાં જેની લંબાઈ તેની પહોળાઈના બમણા કરતાં 1 મીટર વધારે હોય તેવો એક પ્રાર્થનાખંડ બાંધવો છે. તો તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ કેટલી હોવી જોઈએ ? ધારો કે ખંડની પહોળાઈ x મીટર છે. આથી, તેની લંબાઈ $(2x + 1)$ મીટર હોવી જોઈએ. આપણે આ માહિતી આકૃતિ 4.1 પ્રમાણે ચિત્ર સ્વરૂપે દર્શાવી શકીએ.



આકૃતિ 4.1

હવે, ખંડનું ક્ષેત્રફળ $= (2x + 1) \cdot x$ મી^{2} $= (2x^2 + x)$ મી^{2}

આથી, $2x^2 + x = 300$ (આપેલ છે.)

આમ, $2x^2 + x - 300 = 0$

આથી, ખંડની પહોળાઈ દ્વિઘાત સમીકરણ $2x^2 + x - 300 = 0$ નું સમાધાન કરે છે.

ઘણા લોકો માને છે કે સૌપ્રથમ બેબીલોનવાસીઓએ દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવ્યો. ઉદાહરણ તરીકે, બે ધન સંખ્યાના સરવાળા અને ગુણાકાર આપેલ હોય, તો તે સંખ્યાઓ કેવી રીતે મેળવવી તે એ લોકો જાણતાં હતાં અને આ પ્રશ્ન $x^2 - px + q = 0$ પ્રકારના દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવાને સમકક્ષ છે. ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રી *યુક્લિડે* ***Euclid*** લંબાઈ શોધવાની ભૌમિતિક રીત વિકસાવી. તેને આપણે વર્તમાન પરિભાષામાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ કહીએ છીએ. સામાન્ય રીતે, દ્વિઘાત સમીકરણ ઉકેલવાનો શ્રેય મોટે ભાગે પ્રાચીન ભારતીય ગણિતશાસ્ત્રીઓને જાય છે. વાસ્તવમાં, *બ્રહ્મગુપ્તે* ***Brahmagupta*** (C.E. 598 - C.E.665) $ax^2 + bx = c$ દ્વિઘાત સમીકરણના ઉકેલ માટે સ્પષ્ટ સૂત્ર આપ્યું. પછીથી, *શ્રીધર આચાર્ય* ***Shridharacharya*** (C.E. 1025)એ દ્વિઘાત સૂત્ર તરીકે ઓળખાતું સૂત્ર પ્રસ્થાપિત કર્યું. (તેનો ઉલ્લેખ ભાસ્કર-II માં કરેલ છે.) તેમાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવા માટે પૂર્ણ વર્ગની

રીતનો ઉપયોગ કરાય છે. એક અરબ ગણિતશાસ્ત્રી ***અલ-ખ્વારિઝમી (Al-khwarizmi)*** (C.E. 800 ની આસપાસ)એ પણ વિવિધ પ્રકારના દ્વિઘાત સમીકરણનો અભ્યાસ કર્યો હતો. ***અબ્રાહમ બાર હિયા હા-નાસી (Abraham bar Hiyya Ha-Nasi)***એ યુરોપમાં C.E. 1145 માં તેણે લખેલ પુસ્તક ***Liber Embadorum*** માં ભિન્ન-ભિન્ન દ્વિઘાત સમીકરણના પૂર્ણ ઉકેલ આપ્યા.

આ પ્રકરણમાં તમે દ્વિઘાત સમીકરણો અને તેમના ઉકેલ મેળવવા માટેની જુદી-જુદી રીત શીખશો. દ્વિઘાત સમીકરણના રોજિંદા જીવનમાં ઉપયોગ પણ જોશો.

4.2 દ્વિઘાત સમીકરણ

I6X1G5

a, b, c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય તથા $a \neq 0$ હોય, તો ચલ x માં દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું હોય છે. ઉદાહરણ તરીકે, $2x^2 + x - 300 = 0$ એ દ્વિઘાત સમીકરણ છે. આ જ રીતે, $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$ અને $1 - x^2 + 300 = 0$ પણ દ્વિઘાત સમીકરણો છે.

ખરેખર તો $p(x)$ એ 2 ઘાતની બહુપદી હોય, તો $p(x) = 0$ પ્રકારનું કોઈ પણ સમીકરણ, એ દ્વિઘાત સમીકરણ છે. પરંતુ જ્યારે આપણે $p(x)$ ના પ્રત્યેક પદને ઘાતાંકના ઊતરતા ક્રમમાં લખીએ ત્યારે આપણને દ્વિઘાત સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ મળે છે. ***આમ, $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ ને દ્વિઘાત સમીકરણનું પ્રમાણિત સ્વરૂપ કહેવાય.***

આપણી આસપાસની દુનિયામાં અનેક જુદી-જુદી સ્થિતિમાં અને ગણિતનાં ભિન્ન ક્ષેત્રોમાં દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉદ્‌ભવ થતો હોય છે. ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલ સ્થિતિને ગાણિતિક રીતે વ્યક્ત કરો :

(i) જ્હૉન અને જીવંતી પાસે કુલ 45 લખોટીઓ છે. પ્રત્યેક વ્યક્તિ પાંચ-પાંચ લખોટી ખોઈ કાઢે છે અને હવે તેમની પાસે બાકી રહેલી લખોટીઓની સંખ્યાનો ગુણાકાર 124 છે, આપણે જાણવું છે કે તેમની પાસે શરૂઆતમાં કેટલી લખોટીઓ હતી.

(ii) એક કુટિર ઉદ્યોગ એક દિવસમાં કેટલાંક રમકડાં બનાવે છે. પ્રત્યેક રમકડું બનાવવાનો ખર્ચ (રૂપિયામાં) 55માંથી એક દિવસમાં ઉત્પાદિત થતાં રમકડાંની સંખ્યા બાદ કરીએ તેટલો છે. કોઈ એક ચોક્કસ દિવસે ઉત્પાદન-ખર્ચ ₹ 750 છે. આપણે તે દિવસે ઉત્પાદિત રમકડાંની સંખ્યા જાણવી છે.

ઉકેલ :

(i) ધારો કે જ્હૉન પાસે x લખોટીઓ છે.

આથી, જીવંતી પાસેની લખોટીઓની સંખ્યા $= 45 - x$ (કેમ ?)

જ્હૉન પાસે 5 લખોટીઓ ખોઈ કાઢ્યા બાદની લખોટીઓની સંખ્યા $= x - 5$

જીવંતી પાસે 5 લખોટી ખોઈ કાઢ્યા પછી લખોટીની સંખ્યા $= 45 - x - 5 = 40 - x$

આથી, તેમનો ગુણાકાર $= (x - 5)(40 - x)$

$$= 40x - x^2 - 200 + 5x$$

$$= -x^2 + 45x - 200$$

આથી, $-x^2 + 45x - 200 = 124$ **(ગુણાકાર 124 આપેલ છે.)**

$$\therefore -x^2 + 45x - 324 = 0$$

$$\therefore x^2 - 45x + 324 = 0$$

આથી, જ્હૉન પાસેની લખોટીની સંખ્યા, દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 45x + 324 = 0$ નું સમાધાન કરે છે. માંગેલ પ્રશ્નની આ ગાણિતિક રજૂઆત છે.

(ii) ધારો કે નિશ્ચિત દિવસે ઉત્પાદિત રમકડાંની સંખ્યા x છે.

આથી, તે નિશ્ચિત દિવસે પ્રત્યેક રમકડું બનાવવાનો ખર્ચ (₹ માં) = $55 - x$.

આથી, તે દિવસનો રમકડાં બનાવવાનો કુલ ખર્ચ = $x(55 - x)$

આથી, $x(55 - x) = 750$

$\therefore\ 55x - x^2 = 750$

$\therefore\ -x^2 + 55x - 750 = 0$

$\therefore\ x^2 - 55x + 750 = 0$

આથી, નિશ્ચિત દિવસે ઉત્પાદિત રમકડાંની સંખ્યા દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 55x + 750 = 0$ નું સમાધાન કરે છે. આ આપેલ પ્રશ્નની ગાણિતિક રજૂઆત છે.

ઉદાહરણ 2 : ચકાસો કે નીચેનાં સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે કે નહિ :

(i) $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ (ii) $x(x + 1) + 8 = (x + 2)(x - 2)$

(iii) $x(2x + 3) = x^2 + 1$ (iv) $(x + 2)^3 = x^3 - 4$

ઉકેલ :

(i) ડા.બા. = $(x - 2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1$

$= x^2 - 4x + 5$

આથી, $(x - 2)^2 + 1 = 2x - 3$ ને

$x^2 - 4x + 5 = 2x - 3$ તરીકે લખી શકાય.

$\therefore\ x^2 - 6x + 8 = 0$

$a \neq 0$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું સમીકરણ છે.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

(ii) $x(x + 1) + 8 = x^2 + x + 8$ અને

$(x + 2)(x - 2) = x^2 - 4$ છે.

આથી, $x^2 + x + 8 = x^2 - 4$

$\therefore\ x + 12 = 0$

આ સમીકરણ $a \neq 0$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું નથી.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ નથી.

(iii) અહીં, ડા.બા. $= x(2x + 3) = 2x^2 + 3x$

આથી, $x(2x + 3) = x^2 + 1$ ને

$2x^2 + 3x = x^2 + 1$ સ્વરૂપે પુનઃ લખી શકાય.

આથી, $x^2 + 3x - 1 = 0$

આ $a \neq 0$ માટે, $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું સમીકરણ છે.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

(iv) અહીં, ડા.બા. = $(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

આથી, $(x + 2)^3 = x^3 - 4$ ને

$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = x^3 - 4$ સ્વરૂપે પુનઃ લખી શકાય.

$6x^2 + 12x + 12 = 0$ **અથવા** $x^2 + 2x + 2 = 0$

આ $a \neq 0$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું સમીકરણ છે.

આથી, આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

નોંધ : ચોકસાઈ રાખો. ઉપર (ii)માં આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ જેવું લાગે છે. પરંતુ તે દ્વિઘાત સમીકરણ નથી.

ઉપર (iv)માં આપેલ સમીકરણ ત્રિઘાત સમીકરણ (3 ઘાતવાળું સમીકરણ) જેવું દેખાય છે, દ્વિઘાત સમીકરણ જેવું નહિ. પરંતુ તે દ્વિઘાત સમીકરણમાં પરિવર્તિત થાય છે. આમ જોઈ શકશો કે ઘણી વખત આપેલ સમીકરણ દ્વિઘાત સમીકરણ છે કે કેમ તે નક્કી કરતાં પહેલાં તેનું સાદું રૂપ આપવું જરૂરી છે.

સ્વાધ્યાય 4.1

1. નીચે આપેલ સમીકરણો દ્વિઘાત સમીકરણો છે કે કેમ તે ચકાસો :

(i) $(x + 1)^2 = 2(x - 3)$

(ii) $x^2 - 2x = (-2)(3 - x)$

(iii) $(x - 2)(x + 1) = (x - 1)(x + 3)$

(iv) $(x - 3)(2x + 1) = x(x + 5)$

(v) $(2x - 1)(x - 3) = (x + 5)(x - 1)$

(vi) $x^2 + 3x + 1 = (x - 2)^2$

(vii) $(x + 2)^3 = 2x(x^2 - 1)$

(viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x - 2)^3$

2. નીચે આપેલ પરિસ્થિતિઓને દ્વિઘાત સમીકરણ સ્વરૂપે દર્શાવો :

(i) જમીનના એક લંબચોરસ ટુકડાનું ક્ષેત્રફળ 528 મી^{2} છે. તેની લંબાઈ (મીટરમાં), પહોળાઈ (મીટરમાં)ના બમણાથી એક મીટર જેટલી વધુ છે. આપણે જમીનના આ ટુકડાની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધવી છે.

(ii) બે ક્રમિક ધન પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર 306 છે. આપણે આ પૂર્ણાંક શોધવા છે.

(iii) રોહનની માતા તેના કરતાં 26 વર્ષ મોટાં છે. આજથી 3 વર્ષ પછી તેમની ઉંમર દર્શાવતી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર (વર્ષમાં) 360 હશે. આપણે રોહનની હાલની ઉંમર શોધવી છે.

(iv) એક ટ્રેન 480 કિમીનું અંતર અચળ ઝડપથી કાપે છે. જો ઝડપ 8 કિમી/કલાક ઓછી હોય, તો આટલું જ અંતર કાપવા તે 3 કલાક વધુ લે છે, તો ટ્રેનની ઝડપ શોધો.

4.3 અવયવીકરણ વડે દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ

P2B4K5

દ્વિઘાત સમીકરણ $2x^2 - 3x + 1 = 0$ નો વિચાર કરો. જો સમીકરણની ડાબી બાજુમાં x ને બદલે 1 લઈએ તો $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0$ = જ.બા. મળે છે. આપણે કહી શકીએ, કે, દ્વિઘાત સમીકરણ $2x^2 - 3x + 1 = 0$ નું એક બીજ 1 છે. આથી, એમ પણ આપણે કહી શકીએ કે દ્વિઘાત બહુપદી $2x^2 - 3x + 1$ નું એક શૂન્ય 1 છે.

વ્યાપક રીતે, જો $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા α એ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ નું બીજ કહેવાય. આપણે એમ પણ કહી શકીએ કે,

$x = \alpha$ એ દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ છે અથવા α દ્વિઘાત સમીકરણનું સમાધાન કરે છે. આપણે નોંધીએ કે, દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો તથા દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ સમાન છે.

તમે પ્રકરણ 2 માં જોયું કે દ્વિઘાત બહુપદીને વધુમાં વધુ 2 શૂન્યો હોય. આથી, કોઈ પણ દ્વિઘાત સમીકરણને વધુમાં વધુ 2 બીજ હોય.

તમે ધોરણ IX માં કોઈ પણ દ્વિઘાત બહુપદીના મધ્યમ પદને બે ભાગમાં વહેંચી તેના અવયવ પાડવાની રીત શીખી ગયા. આપણે આ જ્ઞાનનો ઉપયોગ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ શોધવા કરીશું. જોઈએ, આ કેવી રીતે શક્ય બને છે.

ઉદાહરણ 3 : સમીકરણ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ અવયવ પાડીને શોધો.

ઉકેલ : આપણે સૌપ્રથમ મધ્યમપદ $-5x$ ના બે ભાગ $-2x$ અને $-3x$ કરીએ.

[કેમ કે $(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3$].

આથી, $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$

હવે, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ને $(2x - 3)(x - 1) = 0$ લખી શકાય.

આથી, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ તથા $(2x - 3)(x - 1) = 0$ માટેનાં x નાં મૂલ્યો સમાન હશે.

અર્થાત્ $2x - 3 = 0$ અથવા $x - 1 = 0$.

હવે $2x - 3 = 0$ પરથી $x = \frac{3}{2}$ અને $x - 1 = 0$ પરથી $x = 1$ મળશે.

આથી, $x = \frac{3}{2}$ અને $x = 1$ આપેલ સમીકરણના ઉકેલ હશે.

બીજા શબ્દોમાં, 1 અને $\frac{3}{2}$ સમીકરણ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ છે.

ચકાસો કે 1 અને $\frac{3}{2}$ આપેલ સમીકરણનાં બીજ છે.

આપણે નોંધીએ કે $2x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ, $2x^2 - 5x + 3$ ના બે સુરેખ અવયવ પાડી અને દરેક અવયવનું મૂલ્ય શૂન્ય લઈને શોધ્યું છે.

ઉદાહરણ 4 : દ્વિઘાત સમીકરણ $6x^2 - x - 2 = 0$ નાં બીજ શોધો.

ઉકેલ : અહીં,
$$\begin{aligned} 6x^2 - x - 2 &= 6x^2 + 3x - 4x - 2 \\ &= 3x(2x + 1) - 2(2x + 1) \\ &= (3x - 2)(2x + 1) \end{aligned}$$

$6x^2 - x - 2 = 0$ નાં બીજ એ $(3x - 2)(2x + 1) = 0$ દ્વારા મળતાં x નાં મૂલ્યો છે.

આથી, $3x - 2 = 0$ અથવા $2x + 1 = 0$

અર્થાત્, $x = \frac{2}{3}$ અથવા $x = -\frac{1}{2}$.

આથી, $6x^2 - x - 2 = 0$ નાં બીજ $\frac{2}{3}$ અને $-\frac{1}{2}$ છે.

આપણે, $\frac{2}{3}$ અને $-\frac{1}{2}$ સમીકરણ $6x^2 - x - 2 = 0$ નું સમાધાન કરે છે તે ચકાસીને બીજની ચકાસણી કરી શકીએ.

ઉદાહરણ 5 : દ્વિઘાત સમીકરણ $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ નાં બીજ શોધો.

ઉકેલ : $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2$

$$= \sqrt{3}x(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{3}x - \sqrt{2})$$

$$= (\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2})$$

આથી, સમીકરણનાં બીજ $(\sqrt{3}x - \sqrt{2})(\sqrt{3}x - \sqrt{2}) = 0$ થાય તેવા x નાં મૂલ્યો છે.

આમ, $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$ પરથી $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$

આથી, આ બીજ બે વખત પુનરાવર્તિત અવયવ $\sqrt{3}x - \sqrt{2}$ ને સંગત મળે છે.

આમ, $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ નાં બીજ $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$ છે.

ઉદાહરણ 6 : વિભાગ 4.1માં ચર્ચા કરેલ પ્રાર્થનાખંડની બાજુઓનાં માપ શોધો.

ઉકેલ : વિભાગ 4.1માં આપણે જોયું કે જો ખંડની પહોળાઈ x મી હોય તો x એ સમીકરણ $2x^2 + x - 300 = 0$ નું સમાધાન કરે. અવયવીકરણની રીતનો ઉપયોગ કરતાં, આપણે સમીકરણને $2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$ એમ લખી શકીએ.

$$\therefore 2x(x - 12) + 25(x - 12) = 0$$

$$\therefore (x - 12)(2x + 25) = 0$$

આથી, આપેલ સમીકરણનાં બીજ $x = 12$ અથવા $x = -12.5$ છે. પરંતુ x એ ખંડની પહોળાઈ હોવાથી તે ઋણ ન હોઈ શકે. આથી, ખંડની પહોળાઈ 12 મી અને તેની લંબાઈ $2x + 1 = 25$ મી.

સ્વાધ્યાય 4.2

1. નીચે આપેલ સમીકરણના ઉકેલ અવયવીકરણની રીતથી મેળવો :

   (i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 6 = 0$

   (iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$

   (v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$

2. ઉદાહરણ (1)માં આપેલ પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવો.
3. બે એવી સંખ્યાઓ શોધો કે જેમનો સરવાળો 27 અને ગુણાકાર 182 હોય.
4. જેના વર્ગોનો સરવાળો 365 થાય એવી બે ક્રમિક ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ શોધો.
5. એક કાટકોણ ત્રિકોણનો વેધ તેના પાયા કરતાં 7 સેમી નાનો છે. જો કર્ણની લંબાઈ 13 સેમી હોય, તો બાકીની બે બાજુનાં માપ શોધો.
6. એક કુટિર ઉદ્યોગ એક દિવસમાં કેટલીક માટીની વસ્તુઓ બનાવે છે. એક નિશ્ચિત દિવસે જણાયું કે પ્રત્યેક વસ્તુની ઉત્પાદન કિંમત (રૂપિયામાં), તે દિવસે ઉત્પાદિત વસ્તુના બમણા કરતાં 3 વધુ હતી. જો તે દિવસે ઉત્પાદિત ખર્ચ ₹ 90 હોય તો, ઉત્પાદિત વસ્તુની સંખ્યા અને પ્રત્યેક વસ્તુની ઉત્પાદન કિંમત શોધો.

4.4 પૂર્ણવર્ગની રીતે દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ

C4A7Y4

આગળના વિભાગમાં આપણે દ્વિઘાત સમીકરણના ઉકેલની એક રીત શીખ્યાં. આ વિભાગમાં આપણે તે માટેની બીજી રીત શીખીશું.

નીચેની પરિસ્થિતિ વિચારો :

સુનીતાની અત્યારની ઉંમરથી બે વર્ષ પહેલાંની અને ચાર વર્ષ પછીની ઉંમર દર્શાવતી સંખ્યાઓનો (વર્ષમાં) ગુણાકાર તેની અત્યારની ઉંમરના બમણાં કરતાં એક વધુ છે. તો તેની અત્યારની ઉંમર કેટલી હશે ?

આનો જવાબ શોધવા, ધારો કે તેની અત્યારની ઉંમર x વર્ષ છે. તો અત્યારથી બે વર્ષ પહેલાં અને ચાર વર્ષ પછીની ઉંમર દર્શાવતી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર $(x - 2)\,(x + 4)$ થાય.

આથી, $(x - 2)\,(x + 4) = 2x + 1$

$\therefore\ x^2 + 2x - 8 = 2x + 1$

$\therefore\ x^2 - 9 = 0$

આથી, સુનીતાની અત્યારની ઉંમર દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 - 9 = 0$ નું સમાધાન કરે છે.

આપણે તેને $x^2 = 9$ એમ લખી શકીએ. વર્ગમૂળ લેતાં,

$x = 3$ અથવા $x = -3$ મળે. પરંતુ, ઉંમર ધન સંખ્યા હોવાથી, $x = 3$.

આથી, સુનીતાની અત્યારની ઉંમર 3 વર્ષ છે.

હવે, દ્વિઘાત સમીકરણ $(x + 2)^2 - 9 = 0$ નો વિચાર કરો. તેને ઉકેલવા, આપણે $(x + 2)^2 = 9$ એમ લખી શકીએ. વર્ગમૂળ લેતાં, આપણને $x + 2 = 3$ અથવા $x + 2 = -3$ મળે.

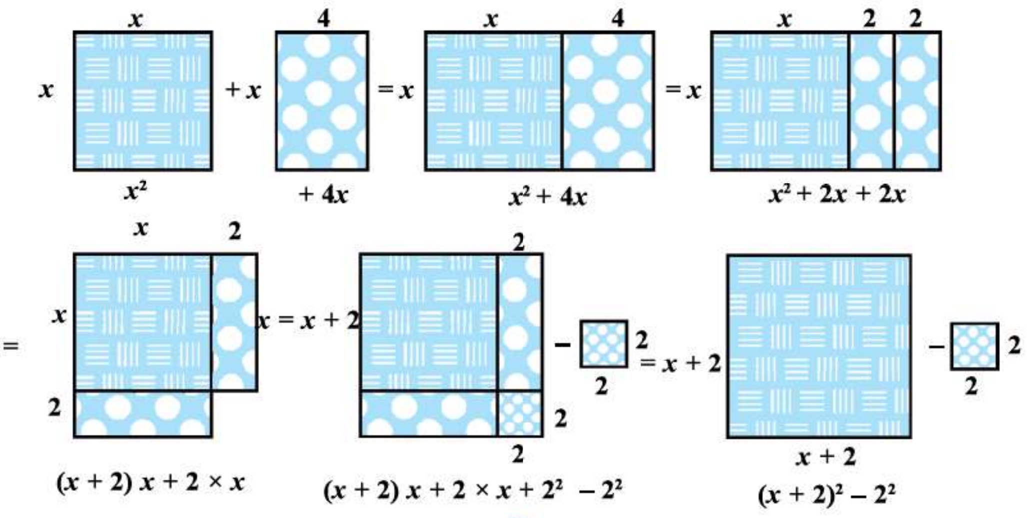
આથી, $x = 1$ અથવા $x = -5$

આમ, સમીકરણ $(x + 2)^2 - 9 = 0$ નાં બીજ 1 અને -5 છે.

ઉપરના બંને ઉદાહરણોમાં x ને સમાવતું પદ પૂર્ણ વર્ગનું એક પદ છે અને આથી, વર્ગમૂળ લેતાં આપણે સરળતાથી બીજ શોધી શકીએ છીએ. પરંતુ સમીકરણ $x^2 + 4x - 5 = 0$ નો ઉકેલ શોધવાનું કહે, તો શું થાય ? આપણે ઘણુંખરું અવયવીકરણની રીત ઉપયોગમાં લઈએ, સિવાય કે (કોઈક રીતે !) આપણને સૂઝે કે $x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 9$

આથી, $x^2 + 4x - 5 = 0$ નો ઉકેલ $(x + 2)^2 - 9 = 0$ ના ઉકેલ બરાબર છે. અલબત્ત, આપણે કોઈ પણ દ્વિઘાત સમીકરણને $(x + a)^2 - b^2 = 0$ સ્વરૂપે ફેરવી શકીએ અને ત્યાર બાદ સરળતાથી તેનાં બીજ શોધી શકીએ. આવો જોઈએ કે શું આ સંભવ છે ? (જુઓ આકૃતિ 4.2.)

આ આકૃતિમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે $x^2 + 4x$ ને $(x + 2)^2 - 4$ માં ફેરવેલ છે.



આકૃતિ 4.2

આ પ્રક્રિયા નીચે પ્રમાણે થાય છે :

$$x^2 + 4x = \left(x^2 + \frac{4}{2}x\right) + \frac{4}{2}x$$
$$= x^2 + 2x + 2x$$
$$= (x + 2)\,x + 2 \times x$$
$$= (x + 2)\,x + 2 \times x + 2 \times 2 - 2 \times 2$$
$$= (x + 2)\,x + (x + 2) \times 2 - 2 \times 2$$
$$= (x + 2)\,(x + 2) - 2^2$$
$$= (x + 2)^2 - 4$$

આમ, $x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 4 - 5 = (x + 2)^2 - 9$

આથી, $x^2 + 4x - 5 = 0$ ને પૂર્ણવર્ગ બનાવવાની આ રીત પ્રમાણે તેને $(x + 2)^2 - 9 = 0$ તરીકે લખી શકાય. આ પ્રક્રિયાને **પૂર્ણવર્ગ બનાવવાની રીત** કહેવાય છે.

ટૂંકમાં, તેને નીચે પ્રમાણે દર્શાવાય છે :

$$x^2 + 4x = \left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - 4$$

આથી, $x^2 + 4x - 5 = 0$ નીચેની રીતે લખી શકાય.

$$\left(x+\frac{4}{2}\right)^2 - 4 - 5 = 0$$

$\therefore\ (x + 2)^2 - 9 = 0$

હવે, સમીકરણ $3x^2 - 5x + 2 = 0$ લઈએ. આપણે નોંધીએ કે, x^2નો સહગુણક પૂર્ણવર્ગ નથી. આથી, સમીકરણની બંને બાજુએ 3 વડે ગુણતાં,

$9x^2 - 15x + 6 = 0$

હવે, $9x^2 - 15x + 6 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + 6$

$$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$$

$$= \left(3x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6$$

$$= \left(3x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

આથી, $9x^2 - 15x + 6 = 0$ ને

$\left(3x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$ તરીકે લખી શકાય.

$$\therefore \left(3x-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

આથી, $9x^2 - 15x + 6 = 0$ નાં બીજ અને $\left(3x-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ નાં બીજ સમાન છે.

$\therefore\ 3x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$ **અથવા** $3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$

(આપણે $3x - \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2}$ લખી શકીએ. જ્યાં $\pm$ ધન કે ઋણ દર્શાવે છે.)

$\therefore 3x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}$ અથવા $3x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$

$\therefore x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6}$ અથવા $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$

$\therefore x = 1$ અથવા $x = \frac{4}{6}$

આમ, $x = 1$ અથવા $x = \frac{2}{3}$

આથી, આપેલ સમીકરણનાં બીજ 1 અને $\frac{2}{3}$ છે.

નોંધ : આ પ્રશ્નના ઉકેલની બીજી રીત નીચે પ્રમાણે છે :

સમીકરણ $3x^2 - 5x + 2 = 0$ અને

$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$ સમાન છે.

હવે,
$$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = \left\{x - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 + \frac{2}{3}$$
$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} - \frac{25}{36}$$
$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{36}$$
$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

આથી, $3x^2 - 5x + 2 = 0$ નાં બીજ અને $\left(x - \frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0$ નાં બીજ સમાન છે.

આથી $x - \frac{5}{6} = \pm \frac{1}{6}$ અર્થાત્, $x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} = 1$ અથવા $x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

ચાલો આપણે આ પ્રક્રિયા દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 7 : ઉદાહરણ 3માં આપેલ સમીકરણને પૂર્ણવર્ગની રીતે ઉકેલો.

ઉકેલ : સમીકરણ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ અને $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ સમાન છે.

હવે,
$$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} = \left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

આથી, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ને $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ તરીકે પણ લખી શકાય.

આથી સમીકરણ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ નાં બીજ અને $\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ નાં બીજ સમાન જ છે.

હવે, $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{1}{16}=0$ અને $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$ સમાન છે.

$\therefore\ x-\frac{5}{4}=\pm\frac{1}{4}$

$\therefore\ x=\frac{5}{4}\pm\frac{1}{4}$

$\therefore\ x=\frac{5}{4}+\frac{1}{4}$ અથવા $x=\frac{5}{4}-\frac{1}{4}$

$\therefore\ x=\frac{3}{2}$ અથવા $x=1$

આથી, સમીકરણના ઉકેલ $x=\frac{3}{2}$ અને 1 છે.

ચાલો, આપણે આ ઉકેલ ચકાસીએ.

$2x^2-5x+3=0$ માં $x=\frac{3}{2}$ લેતાં, $2\left(\frac{3}{2}\right)^2-5\left(\frac{3}{2}\right)+3=0$ મળે, જે સત્ય છે.

આ જ રીતે, આપણે ચકાસી શકીએ કે $x=1$ પણ આપેલ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ 7 માં સમીકરણ $2x^2-5x+3=0$ ને 2 વડે ભાગતાં $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}=0$ મળે છે કે જેથી પ્રથમ પદ પૂર્ણવર્ગ બને છે અને પછી પૂર્ણવર્ગમાં પરિવર્તિત કરવામાં આવે છે અથવા સમીકરણની બંને બાજુને 2 વડે ગુણતાં, પ્રથમ પદ $4x^2=(2x)^2$ મળે અને પછી પૂર્ણવર્ગમાં પરિવર્તિત કરી શકાય.

આ રીત નીચેના ઉદાહરણમાં દર્શાવેલ છે.

ઉદાહરણ 8 : સમીકરણ $5x^2-6x-2=0$ નાં બીજ પૂર્ણવર્ગની રીતે શોધો.

ઉકેલ : સમીકરણની બંને બાજુ 5 વડે ગુણતાં,

$25x^2-30x-10=0$ મળે.

આથી, $(5x)^2-2\times(5x)\times(3)+3^2-3^2-10=0$

$$\therefore\ (5x-3)^2-9-10=0$$

$$\therefore\ (5x-3)^2-19=0$$

$$\therefore\ 5x-3=\pm\sqrt{19}$$

$$\therefore\ 5x=3\pm\sqrt{19}$$

આમ, $x=\frac{3\pm\sqrt{19}}{5}$

આથી, બીજ $\frac{3+\sqrt{19}}{5}$ અને $\frac{3-\sqrt{19}}{5}$ છે.

ચકાસો કે, $\frac{3+\sqrt{19}}{5}$ અને $\frac{3-\sqrt{19}}{5}$ બીજ છે.

ઉદાહરણ 9 : $4x^2 + 3x + 5 = 0$ નાં બીજ પૂર્ણવર્ગની રીતે શોધો.

ઉકેલ : આપણે નોંધીએ કે $4x^2 + 3x + 5 = 0$ અને $(2x)^2 + 2 \times (2x) \times \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 5 = 0$ સમાન છે.

$$\therefore \left(2x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 5 = 0$$

$$\therefore \left(2x+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{71}{16} = 0$$

$$\therefore \left(2x+\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{71}{16} < 0$$

પરંતુ x ના કોઈ પણ વાસ્તવિક મૂલ્ય માટે $\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2$ ઋણ ના હોઈ શકે. (કેમ ?)

આથી, કોઈ જ વાસ્તવિક સંખ્યા x આપેલ સમીકરણનું સમાધાન કરશે નહિ. આથી, આપેલ સમીકરણનાં બીજ વાસ્તવિક હોય તે શક્ય નથી.

હવે, તમે પૂર્ણવર્ગની રીતનાં ઘણાં ઉદાહરણો જોયાં.

આથી, આપણે વ્યાપક રીતે વિચારીએ.

દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ નો વિચાર કરો. બંને બાજુ શૂન્યેતર a વડે ભાગતાં,

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$ મળે.

તે $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$ ને સમાન છે.

એટલે કે $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$

આથી, આપેલ સમીકરણનાં બીજ અને

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2} = 0$ અર્થાત્

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$ નાં બીજ સમાન હશે. (1)

જો $b^2 - 4ac \geq 0$ તો, સમીકરણ (1)ની બંને બાજુ વર્ગમૂળ લેતાં,

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

આમ, જો $b^2 - 4ac \geq 0$ તો, $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ $\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ અને $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ છે.

જો $b^2 - 4ac < 0$ તો, સમીકરણનાં બીજ વાસ્તવિક હોય તે શક્ય નથી. (કેમ ?)

આમ, જો $b^2 - 4ac \geq 0$ તો, દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ થાય.

દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ શોધવાના આ સૂત્રને **દ્વિઘાત સૂત્ર** કહેવાય છે.

ચાલો દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 10 : સ્વાધ્યાય 4.1ના પ્રશ્ન 2(i)ને દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને ઉકેલો.

ઉકેલ : ધારો કે ખંડની પહોળાઈ x મીટર છે. આથી, લંબાઈ $(2x + 1)$ મીટર થાય. હવે, આપણને આપેલ છે કે $x(2x + 1) = 528$ અર્થાત્ $2x^2 + x - 528 = 0$.

$a = 2$, $b = 1$, $c = -528$ માટે, આ સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ સ્વરૂપનું છે.

આથી દ્વિઘાત સૂત્ર દ્વારા મળતો ઉકેલ,

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(2)\ (528)}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{4225}}{4} = \frac{-1 \pm 65}{4}$$

$$\therefore x = \frac{64}{4} \text{ અથવા } x = -\frac{66}{4}$$

$$\therefore x = 16 \text{ અથવા } x = -\frac{33}{2}$$

પરંતુ x ઋણ ના હોઈ શકે, કેમ કે તે એક પરિમાણ છે. આથી, ખંડની પહોળાઈ 16 મીટર અને આથી લંબાઈ 33 મીટર થાય.

તમારે એ ચકાસવું જોઈએ કે આ કિંમતો આપેલ પ્રશ્નની શરતોનું સમાધાન કરે છે.

ઉદાહરણ 11 : બે ક્રમિક અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના વર્ગોનો સરવાળો 290 હોય, તો બંને સંખ્યાઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે બે ક્રમિક અયુગ્મ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ પૈકી નાની સંખ્યા x છે. આથી બીજી સંખ્યા $x + 2$ થાય.

આપેલ પ્રશ્ન મુજબ,

$$x^2 + (x + 2)^2 = 290$$

$$\therefore \quad x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$$

$$\therefore \quad 2x^2 + 4x - 286 = 0$$

$$\therefore \quad x^2 + 2x - 143 = 0$$

આ x માં દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

$$\therefore \quad x = 11 \text{ અથવા } x = -13$$

પરંતુ x ધન અયુગ્મ સંખ્યા આપેલ છે.

$\therefore\ x \neq -13$. આથી $x = 11$

આથી, માંગેલ બે ક્રમિક અયુગ્મ પૂર્ણાંકો 11 અને 13 છે.

ચકાસો : $11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290$.

ઉદાહરણ 12 : એક એવો લંબચોરસ બગીચો બનાવવો છે કે જેની પહોળાઈ તેની લંબાઈ કરતાં 3 મી ઓછી હોય. તેનું ક્ષેત્રફળ જેનો પાયો લંબચોરસ બગીચાની પહોળાઈ જેટલો હોય અને વેધ 12 મી હોય તેવા પહેલેથી બનેલા સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણાકાર બગીચાના ક્ષેત્રફળ કરતાં 4 મી^{2} વધુ હોય લંબચોરસ બગીચાની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો. (જુઓ આકૃતિ 4.3).

ઉકેલ : ધારો કે લંબચોરસ બગીચાની પહોળાઈ x મી છે.

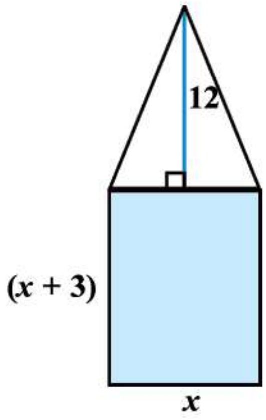
આથી, તેની લંબાઈ = $(x + 3)$ મી

આથી, લંબચોરસ બગીચાનું ક્ષેત્રફળ = $x(x + 3)$ મી^{2}

= $(x^2 + 3x)$ મી^{2}

હવે, સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો = x મી

આથી તેનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2} \times x \times 12 = 6x$ મી^{2}



આકૃતિ 4.3

આપણી જરૂરિયાત મુજબ,

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$
$$\therefore\ x^2 - 3x - 4 = 0$$

દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \text{ અથવા } -1$$

પરંતુ $x \neq -1$. (કેમ ?)

આથી, $x = 4$.

આમ, બગીચાની પહોળાઈ = 4 મી અને લંબાઈ 7 મી થશે.

ચકાસણી : લંબચોરસ બગીચાનું ક્ષેત્રફળ = 28 મી^{2}

ત્રિકોણાકાર બગીચાનું ક્ષેત્રફળ = 24 મી^{2} = $(28 - 4)$ મી^{2}

ઉદાહરણ 13 : દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરી, શક્ય હોય તો નીચેનાં દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ મેળવો :

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ (ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

ઉકેલ :

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

અહીં, $a = 3, b = -5, c = 2$

આથી, $b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$.

$$\therefore\ x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6} \text{ અર્થાત્, } x = 1 \text{ અથવા } x = \frac{2}{3}$$

આમ, બીજ $\frac{2}{3}$ અને 1 છે.

(ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$.

અહીં, $a = 1, b = 4, c = 5$

આથી, $b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$.

કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાનો વર્ગ ઋણ ના હોઈ શકે. આથી, $b^2 - 4ac$ નું વર્ગમૂળ વાસ્તવિક ન મળે. આથી, આપેલ સમીકરણને એક પણ વાસ્તવિક બીજ ના મળે.

(iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}\,x + 1 = 0$.

અહીં, $a = 2, b = -2\sqrt{2}, c = 1$

આથી, $b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0$.

$\therefore x = \dfrac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \pm 0$ અર્થાત્ $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

આથી, બીજ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ છે.

ઉદાહરણ 14 : નીચેનાં સમીકરણનાં બીજ શોધો :

(i) $x + \dfrac{1}{x} = 3, x \neq 0$ (ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$

ઉકેલ :

(i) સમીકરણ $x + \dfrac{1}{x} = 3$ ને x વડે ગુણતાં,

$$x^2 + 1 = 3x$$

અર્થાત્, $x^2 - 3x + 1 = 0$.

આ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

અહીં, $a = 1, b = -3, c = 1$

આથી, $b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$ (કેમ?)

આથી, બીજ $\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2}$ અને $\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$ છે.

(જુઓ કે $x \neq 0$)

(ii) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$

$x \neq 0, 2$ હોવાથી, સમીકરણને $x(x-2)$ વડે ગુણતાં,

$$(x-2) - x = 3x(x-2)$$
$$= 3x^2 - 6x$$

આથી, આપેલ સમીકરણ પરિવર્તિત થઈ $3x^2 - 6x + 2 = 0$ બને. આ દ્વિઘાત સમીકરણ છે.

અહીં, $a = 3, b = -6, c = 2$ આથી, $b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0$

$$\therefore x = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

આથી, બીજ $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ અને $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$ છે.

નોંધ : જુઓ કે $x \neq 0$ અથવા 2

ઉદાહરણ 15 : એક મોટરબોટની શાંત પાણીમાં ઝડપ 18 કિમી/કલાકની છે. જો પ્રવાહની સામી દિશામાં 24 કિમી અંતર કાપવા લાગતો સમય, પ્રવાહની દિશામાં તેટલું જ અંતર કાપવા લાગતા સમય કરતાં 1 કલાક વધુ હોય, તો પ્રવાહની ઝડપ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે પ્રવાહની ઝડપ x કિમી/કલાક છે.

આથી, પ્રવાહની સામી બાજુ જતાં મોટરબોટની ઝડપ = $(18 - x)$ કિમી/કલાક અને

પ્રવાહની દિશામાં જતાં મોટરબોટની ઝડપ = $(18 + x)$ કિમી/કલાક હશે.

પ્રવાહની સામી બાજુ જવા લાગતો સમય = $\frac{\text{અંતર}}{\text{ઝડપ}} = \frac{24}{18-x}$ કલાક

આ જ પ્રમાણે પ્રવાહની દિશામાં જવા લાગતો સમય = $\frac{24}{18+x}$ કલાક

પ્રશ્નની માહિતી પરથી,

$$\frac{24}{18-x} - \frac{24}{18+x} = 1$$

$$\therefore 24\,(18 + x) - 24\,(18 - x) = (18 - x)\,(18 + x)$$

$$\therefore x^2 + 48x - 324 = 0$$

દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2} = \frac{-48 \pm 60}{2} = 6 \text{ અથવા } -54$$

પરંતુ, x એ પ્રવાહની ઝડપ હોવાથી ઋણ હોઈ શકે નહિ. આથી, બીજ $x = -54$ ને અવગણતાં, $x = 6$ મળે. આથી, પ્રવાહની ઝડપ 6 કિમી/કલાક છે.

સ્વાધ્યાય 4.3

1. નીચે આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ, શક્ય હોય તો પૂર્ણવર્ગની રીતથી મેળવો :

   (i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

   (iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ (iv) $2x^2 + x + 4 = 0$

2. પ્રશ્ન 1માં આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ દ્વિઘાત સૂત્રનો ઉપયોગ કરી મેળવો.

3. નીચેનાં સમીકરણનાં બીજ શોધો :

   (i) $x - \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, x \neq -4, 7$

4. રહેમાનની આજથી ત્રણ વર્ષ પહેલાંની ઉંમરના (વર્ષમાં) વ્યસ્ત અને હવેથી 5 વર્ષ પછીની ઉંમરના વ્યસ્તનો સરવાળો $\frac{1}{3}$ છે. તેની અત્યારની ઉંમર શોધો.

5. એક વર્ગ કસોટીમાં શેફાલીના ગણિત અને અંગ્રેજીના ગુણનો સરવાળો 30 છે. જો તેને ગણિતમાં 2 ગુણ વધુ અને અંગ્રેજીમાં 3 ગુણ ઓછા મળ્યા હોત, તો તેમનો ગુણાકાર 210 થયો હોત. તેણે આ બંને વિષયમાં મેળવેલ ગુણ શોધો.

6. એક લંબચોરસ ખેતરના વિકર્ણનું માપ તેની નાની બાજુના માપથી 60 મીટર વધુ છે. જો મોટી બાજુ, નાની બાજુ કરતાં 30 મીટર વધુ હોય તો, ખેતરની બાજુઓનાં માપ શોધો.

7. બે સંખ્યાઓના વર્ગોનો તફાવત 180 છે. નાની સંખ્યાનો વર્ગ મોટી સંખ્યા કરતાં 8 ગણો છે. બંને સંખ્યાઓ શોધો.

8. એક ટ્રેન એકધારી ઝડપે 360 કિમી અંતર કાપે છે. જો તેની ઝડપ 5 કિમી/કલાક વધુ હોય તો, આટલું જ અંતર કાપતાં તેને 1 કલાક ઓછો સમય લાગે છે. તો ટ્રેનની ઝડપ શોધો.

9. પાણીના બે નળ એક સાથે $9\frac{3}{8}$ કલાકમાં એક ટાંકી ભરી શકે છે. મોટા વ્યાસવાળો નળ ટાંકી ભરવા માટે નાના વ્યાસવાળા નળ કરતાં 10 કલાકનો ઓછો સમય લે છે. બંને નળ દ્વારા ટાંકી ભરવાનો અલગ-અલગ સમય શોધો.

10. એક ઝડપી ટ્રેન મૈસૂર અને બેંગ્લોર વચ્ચેનું 132 કિમી અંતર કાપવા ધીમી ટ્રેન કરતાં 1 કલાક ઓછો સમય લે છે. (વચ્ચેનાં સ્ટેશનો પર ઊભા રહેવાનો સમય ધ્યાનમાં ના લો.) જો ઝડપી ટ્રેનની સરેરાશ ઝડપ, ધીમી ટ્રેનની સરેરાશ ઝડપ કરતાં 11 કિમી/કલાક વધુ હોય તો બંને ગાડીની સરેરાશ ઝડપ શોધો.

11. બે ચોરસનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો 468 મી^{2} છે. જો તેમની પરિમિતિનો તફાવત 24 મી હોય તો, બંને ચોરસની બાજુઓની લંબાઈ શોધો.

4.5 બીજનાં સ્વરૂપ

E2M9Z7

આગળના વિભાગમાં તમે જોયું કે દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ છે.}$$

જો, $b^2 - 4ac > 0$ તો, આપણને બે ભિન્ન બીજ $\frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ અને $\frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ મળે.

જો, $b^2 - 4ac = 0$ તો, $x = \frac{-b}{2a} \pm 0$,

અર્થાત્, $x = \frac{-b}{2a}$ અથવા $x = \frac{-b}{2a}$

આમ, સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બંને બીજ $\frac{-b}{2a}$ થાય.

આથી, આપણે કહી શકીએ કે આ વિકલ્પમાં દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બંને વાસ્તવિક બીજ સમાન છે.

જો $b^2 - 4ac < 0$ તો એવી કોઈ વાસ્તવિક સંખ્યા ના મળે, જેનો વર્ગ $b^2 - 4ac$ થાય. આથી, આ વિકલ્પમાં આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં કોઈ વાસ્તવિક બીજ ના મળે.

$b^2 - 4ac$ દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ વાસ્તવિક છે કે નહિ તે નક્કી કરતો હોવાથી, $b^2 - 4ac$ ને દ્વિઘાત સમીકરણનો **વિવેચક** કહેવાય છે.

આથી દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ માટે

(i) જો $b^2 - 4ac > 0$ તો, બે ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ મળે.

(ii) જો $b^2 - 4ac = 0$ તો, બે સમાન વાસ્તવિક બીજ મળે.

(iii) જો $b^2 - 4ac < 0$ તો, કોઈ વાસ્તવિક બીજ ના મળે.

ચાલો, આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો સમજીએ.

ઉદાહરણ 16 : દ્વિઘાત સમીકરણ $2x^2 - 4x + 3 = 0$ નો વિવેચક શોધો અને તેના પરથી બીજનું સ્વરૂપ નક્કી કરો.

ઉકેલ : આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણ $a = 2, b = -4, c = 3$ માટે $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું છે, આથી, વિવેચક

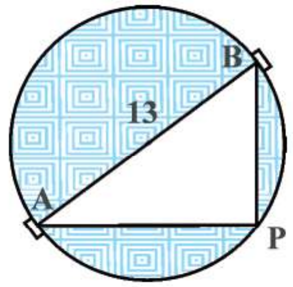
$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0$

આથી, આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણને કોઈ વાસ્તવિક બીજ શક્ય નથી.

ઉદાહરણ 17 : 13 મીટર વ્યાસવાળા એક વર્તુળાકાર બગીચાની સીમા પરના એક બિંદુએ એક થાંભલો એવી રીતે લગાવેલ છે કે જેથી આ બગીચાના એક વ્યાસનાં બંને અંત્યબિંદુઓ A અને B આગળ બનેલ ફાટકથી થાંભલાના અંતરનો તફાવત 7 મીટર હોય. શું આ શક્ય છે ? જો હા, તો બંને ફાટકથી કેટલે દૂર થાંભલો લગાવવો જોઈએ ?

ઉકેલ : ચાલો પ્રથમ રેખાકૃતિ બનાવીએ. (જુઓ આકૃતિ 4.4.)

ધારો કે P થાંભલાનું જરૂરી સ્થાન છે. ધારો કે થાંભલાથી ફાટક B નું અંતર x મી, અર્થાત્ BP = x મી. હવે, થાંભલાથી બંને ફાટકના અંતરનો તફાવત = AP – BP (અથવા BP – AP) = 7 મી



આકૃતિ 4.4

આથી, AP = $(x + 7)$ મી

હવે, AB વ્યાસ હોવાથી, AB = 13 મી

$\angle APB = 90°$ (કેમ?)

હવે, $AP^2 + PB^2 = AB^2$ (પાયથાગોરસના પ્રમેય પરથી)

$\therefore (x + 7)^2 + x^2 = 13^2$

$\therefore x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$

$\therefore 2x^2 + 14x - 120 = 0$

આથી, થાંભલાનું ફાટક B થી અંતર 'x' એ સમીકરણ $x^2 + 7x - 60 = 0$ નું સમાધાન કરે છે.

આથી જો દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ વાસ્તવિક હોય તો, થાંભલાનું સ્થાન નક્કી કરવું શક્ય બને. આ શક્ય છે કે કેમ, તે જોવા ચાલો વિવેચક નો વિચાર કરીએ.

વિવેચક $b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0$

આથી, આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બે બીજ વાસ્તવિક બીજ છે અને આથી બગીચાની સીમા પર થાંભલો લગાવવાનું શક્ય છે.

દ્વિઘાત સમીકરણ $x^2 + 7x - 60 = 0$ ને દ્વિઘાત સૂત્રથી ઉકેલતાં,

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

આમ, $x = 5$ અથવા -12 મળે.

પરંતુ, x થાંભલા અને ફાટક B વચ્ચેનું અંતર હોવાથી, તે ધન જ હોવું જોઈએ. આથી, $x = -12$ ને અવગણવું જોઈએ. આથી, $x = 5$

આથી, સીમા પર થાંભલો એ રીતે લગાવવો જોઈએ કે જેથી તેનું ફાટક B થી અંતર 5 મી અને ફાટક A થી અંતર 12 મી હોય.

ઉદાહરણ 18 : સમીકરણ $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ નો વિવેચક શોધો. તે પરથી સમીકરણનાં બીજનું સ્વરૂપ નક્કી કરો. જો તે વાસ્તવિક હોય તો મેળવો.

ઉકેલ : અહીં, $a = 3, b = -2, c = \frac{1}{3}$

આથી, વિવેચક $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0$

આથી, આપેલ દ્વિઘાત સમીકરણનાં બંને બીજ વાસ્તવિક અને સમાન છે.

બીજ $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$ અર્થાત્ $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$ અર્થાત્ $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ છે.

સ્વાધ્યાય 4.4

1. નીચે આપેલાં દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજનાં સ્વરૂપ શોધો. જો તેમને વાસ્તવિક બીજ હોય તો તે શોધો :

   (i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

   (iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. નીચેનાં દ્વિઘાત સમીકરણનાં બીજ સમાન હોય તો k નું મૂલ્ય શોધો :

   (i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

3. જેની લંબાઈ, પહોળાઈ કરતાં બમણી હોય અને ક્ષેત્રફળ 800 મી^{2} હોય એવી લંબચોરસ આંબાવાડી બનાવવી શક્ય છે ? જો તમારો ઉત્તર 'હા' માં હોય તો, તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ મેળવો.

4. બે મિત્રોની ઉંમરનો સરવાળો 20 વર્ષ છે. 4 વર્ષ પહેલાં તેમની ઉંમર દર્શાવતી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર (વર્ષમાં) 48 હતો. શું આ પરિસ્થિતિ શક્ય છે ? જો હોય તો, તેમની અત્યારની ઉંમર શોધો.

5. જેની પરિમિતિ 80 મી અને ક્ષેત્રફળ 400 મી^{2} હોય, તેવો લંબચોરસ બગીચો બનાવવાનું શક્ય છે ? જો તે શક્ય હોય, તો તેની લંબાઈ અને પહોળાઈ શોધો.

4.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાનો અભ્યાસ કર્યો :

1. a, b, c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ અને $a \neq 0$ માટે ચલ x માં દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ પ્રકારનું હોય.

2. જો $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ હોય તો વાસ્તવિક સંખ્યા α દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નું એક બીજ કહેવાય. દ્વિઘાત બહુપદી $ax^2 + bx + c$ નાં શૂન્યો અને દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ સમાન હોય.

3. જો આપણે $ax^2 + bx + c,\ a \neq 0$ ને સુરેખ અવયવના ગુણાકાર સ્વરૂપે દર્શાવી શકીએ, તો દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ દરેક અવયવનું મૂલ્ય શૂન્ય લઈ મેળવી શકીએ.
4. પૂર્ણવર્ગ બનાવવાની રીતનો ઉપયોગ કરીને પણ દ્વિઘાત સમીકરણનો ઉકેલ મેળવી શકાય.
5. દ્વિઘાત સૂત્ર : દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ નાં બીજ $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ તરીકે મળે, જ્યાં $b^2 - 4ac \geq 0$
6. દ્વિઘાત સમીકરણ $ax^2 + bx + c = 0$ માં;
   (i) જો $b^2 - 4ac > 0$ તો, બે ભિન્ન વાસ્તવિક બીજ મળે.
   (ii) જો $b^2 - 4ac = 0$ તો, બે સમાન વાસ્તવિક બીજ મળે.
   (iii) જો $b^2 - 4ac < 0$ તો, વાસ્તવિક બીજ ના મળે.

વાચકને નોંધ

શાબ્દિક કૂટપ્રશ્નોના ઉકેલોની ચકાસણી મેળવેલ સમીકરણને આધારે કરવાને બદલે મૂળ પ્રશ્નની શરતોને આધારે કરવી જોઈએ. (પ્રકરણ 3 નાં ઉદાહરણો 11, 13, 19 અને પ્રકરણ 4 નાં ઉદાહરણો 10, 11, 12 જુઓ.)

C3L7H3