

*'Measures of skewness indicates the tendency of the group to depart from symmetry'*

- Connor

# 5

## આવૃત્તિ-વિતરણની વિષમતા (Skewness of Frequency Distribution)

વિષયવસ્તુ :

- 5.1 વિષમતાનો અર્�
- 5.2 વિષમતાના પ્રકાર
- 5.3 વિષમતા માટે સાપેક્ષ અને નિરપેક્ષ માપોના ઘ્યાલ
- 5.4 વિષમતાના માપ અને વિષમતાંક મેળવવાની પદ્ધતિઓ
  - 5.4.1 કાર્લ પિયર્સનની રીત
  - 5.4.2 બાઉલીની રીત
- 5.5 વિષમતાંક મેળવવાની બંને પદ્ધતિઓની તુલના

### 5.1 વિષમતાનો અર્થ (Meaning of Skewness)

મધ્યવર્તી સ્થિતિમાન અને પ્રસારમાન એ અભ્યાસ હેઠળની સમાચિત વિશે અગત્યની માહિતી આપે છે. સમાચિના એકમો કઈ કિંમતો ધારણ કરે છે તેની માહિતી આ માપો આપે છે. ઉપરાંત તે માપોની મદદથી જુદી જુદી બે કે તેથી વધારે સમાચિની સરખામણી તથા અન્ય માહિતી મેળવવા માટે પૃથક્કરણ પણ કરી શકાય છે. આ માપો દ્વારા સમાચિનાં અવલોકનોના બંધારણ વિશેનો અભ્યાસ આપણે અગાઉનાં પ્રકરણોમાં કર્યો.

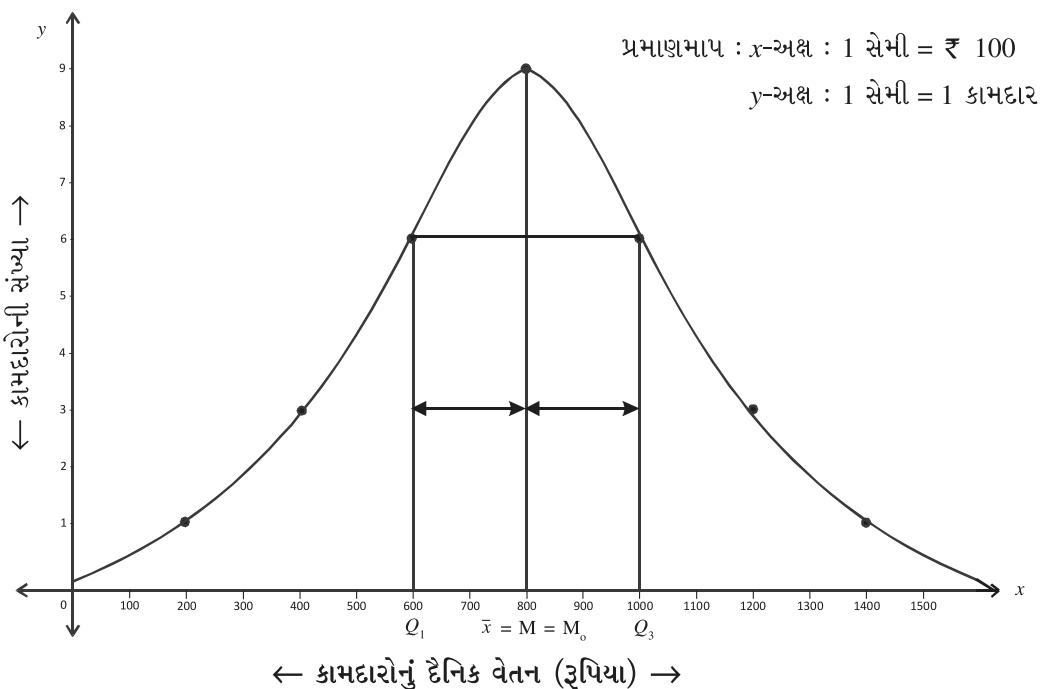
મધ્યવર્તી સ્થિતિમાન અને પ્રસારમાનની મદદથી અવગાર્કૃત માહિતીનાં અવલોકનોની મધ્યવર્તી સ્થિતિ અને અવલોકનો મધ્યવર્તી સ્થિતિમાનની આસપાસ કેવી રીતે વિતરિત થયેલાં છે તેની આંશિક માહિતી મળે છે પરંતુ તેનો સંપૂર્ણ ઘ્યાલ આવતો નથી. આ અંગે વધુ માહિતી મેળવવા માટે સમાચિની રજૂઆત આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવક દ્વારા કરવામાં આવે છે. આમ, સમાચિના આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવક પરથી આવૃત્તિવકની દિશા, આકાર અને સ્વરૂપનો અભ્યાસ કરી શકાય છે. સમાચિત વિશે વધુ માહિતી મેળવવા ગ્રીજા અગત્યના માપ-વિષમતાનો અભ્યાસ કરીશું. વિષમતાનો અર્થ સ્પષ્ટ કરતાં પહેલાં સંભિત આવૃત્તિ-વિતરણનો ઘ્યાલ મેળવીશું.

### સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણ (Symmetric Frequency Distribution)

જે સમાણિનાં અવલોકનો બહુલકની કિંમતની બંને બાજુ સમાન રીતે વિતરિત થયેલાં હોય તેવા આવૃત્તિ-વિતરણને સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણ કહે છે. આ પ્રકારના આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવક્ટ સંમિત આવૃત્તિવક કહે છે. આ પ્રકારના આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિવક સામાન્ય રીતે ઘંટાકાર સ્વરૂપનો મળે છે. આપણે કામદારોના દૈનિક વેતન (રૂપિયામાં)ના આવૃત્તિ-વિતરણના ઉદાહરણથી આવૃત્તિવક અને મધ્યવર્તી સ્થિતિના માપ મેળવી સંમિતતાનો અભ્યાસ કરીએ.

કામદારોનું દૈનિક વેતન (રૂપિયા)	200	400	600	800	1000	1200	1400
કામદારોની સંખ્યા	1	3	6	9	6	3	1

ઉપર આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણ છે કે કેમ તે નક્કી કરવા તેના આવૃત્તિવક અને મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં માપો મેળવીએ.



આમ, આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિવક ઘંટાકાર સ્વરૂપનો છે. અવલોકન રૂપિયા 800 માટે મહત્તમ આવૃત્તિ 9 છે. રૂપિયા 800ની બંને તરફ સમાન અંતરે આવેલાં અવલોકનોની આવૃત્તિઓ સમાન છે તેથી. આવૃત્તિ-વિતરણમાં બહુલકની બંને બાજુએ અવલોકનો સમાન રીતે વિતરિત થયેલાં છે.

હવે, આવૃત્તિ-વિતરણના મધ્યક, મધ્યરથ, બહુલક અને ચતુર્થકોની ગણતરી કરીએ અને સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણની સમજ તેના આધારે મેળવીએ.

કામદારોનું દૈનિક વેતન (રૂપિયા) $x$	200	400	600	800	1000	1200	1400	કુલ
કામદારોની સંખ્યા $f$	1	3	6	9	6	3	1	$n = 29$
$fx$	200	1200	3600	7200	6000	3600	1400	23,200
$cf$	1	4	10	19	25	28	29	

$$\begin{aligned} \text{મધ્યક } \bar{x} &= \frac{\sum f x}{n} \\ &= \frac{23200}{29} \\ &= 800 \\ \therefore \bar{x} &= ₹ 800 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{મધ્યસ્થ } M &= \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\ &= \left(\frac{29+1}{2}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\ &= \left(\frac{30}{2}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\ &= 15 \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\ cf \text{ ના કોલમમાં જોતાં, તેને અનુરૂપ અવલોકન } 800 \text{ રૂપિયા છે.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore M &= 800 \\ \therefore M &= ₹ 800 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{બહુલક } M_o &= \text{મહત્તમ આવૃત્તિ } 9 \text{ ને અનુરૂપ અવલોકન } 800 \text{ રૂપિયા છે.} \\ \therefore M_o &= ₹ 800 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{પ્રથમ ચતુર્થક } Q_1 &= \left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\ &= \left(\frac{29+1}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\ &= 7.5 \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\ cf \text{ ના કોલમમાં જોતા, તેને અનુરૂપ અવલોકન } 600 \text{ રૂપિયા છે.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore Q_1 &= 600 \\ \therefore Q_1 &= ₹ 600 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{તૃતીય ચતુર્થક } Q_3 &= 3\left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\ &= 3\left(\frac{29+1}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\ &= 3(7.5) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\ &= 22.5 \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\ cf \text{ ના કોલમમાં જોતા, તેને અનુરૂપ અવલોકન } 1000 \text{ રૂપિયા છે.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore Q_3 &= 1000 \\ \therefore Q_3 &= ₹ 1000 \end{aligned}$$

આવૃત્તિ-વિતરણના મધ્યક, મધ્યસ્થ, બહુલક અને ચતુર્થકોની કિંમતો તેમજ આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવક્ત પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

$$(1) \bar{x} = M = M_o = ₹ 800 \text{ થાય છે.}$$

$$(2) (Q_3 - M) = (M - Q_1)$$

$$\therefore (1000 - 800) = (800 - 600)$$

આમ, ચતુર્થકો મધ્યસ્થથી સમાન અંતરે રહેલાં છે.

$$(3) \text{આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિવક ઘંટાકાર સ્વરૂપનો મળે છે.}$$

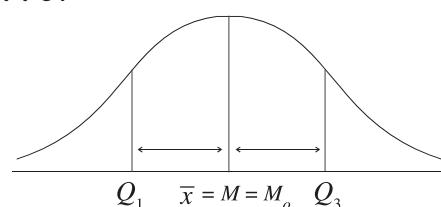
આમ, સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણના સામાન્યતઃ નીચેનાં લક્ષણો જોવા મળે છે.

(i) મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકની કિંમત સમાન હોય છે.

અર્થાત્  $\bar{x} = M = M_o$

(ii) પ્રથમ ચતુર્થક  $Q_1$  અને તૃતીય ચતુર્થક  $Q_3$  એ મધ્યસ્થ  $M$  થી સમાન અંતરે હોય છે. અર્થાત્

$$(Q_3 - M) = (M - Q_1)$$



(4) આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિવક સામાન્ય રીતે ઘંટાકાર સ્વરૂપનો હોય છે.

(5) બહુલકની બંને બાજુ સરખે અંતરે આવેલ અવલોકનની આવૃત્તિ સમાન રીતે વિતરિત થયેલ હોય છે.

જો આપેલા કોઈ આવૃત્તિ-વિતરણમાં ઉપરોક્ત લક્ષણોનો અભાવ જોવા મળે તો તે આવૃત્તિ-વિતરણ સંભિત નથી તેમ કહેવાય. સંભિતતા કે સુડોળતાના અભાવવાળા આવૃત્તિ-વિતરણને વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણ કહેવામાં આવે છે. આમ, આવૃત્તિ-વિતરણમાં સંભિતતાના અભાવને વિષમતા કહેવામાં આવે છે. આવૃત્તિ-વિતરણમાં નીચેની પરિસ્થિતિઓ વિષમતા દર્શાવે છે :

(1) આવૃત્તિ-વિતરણમાં મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકનાં મૂલ્યો સમાન ન હોય.

(2) આવૃત્તિ-વિતરણમાં ચતુર્થકો  $Q_1$  અને  $Q_3$  એ મધ્યસ્થ  $M (= Q_2)$  થી સમાન અંતરે ન હોય.

અર્થાત्  $(Q_3 - M) \neq (M - Q_1)$

(3) આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવકનો જમણી તરફનો છેડો કે ડાબી તરફનો છેડો વધુ બેંચાયેલો હોય.

(4) બહુલકની બંને બાજુ સરખે અંતરે આવેલ અવલોકનની આવૃત્તિ સમાન રીતે વિતરિત થયેલ ન હોય.

ઉપર્યુક્ત પરિસ્થિતિઓને વિષમતાની કસોટીઓ કહીશું, કારણ કે તેના પરથી આવૃત્તિ-વિતરણ વિષમ છે કે કેમ તે ચકાસી શકાય છે. હવે વિષમતાના પ્રકારનો અભ્યાસ કરીએ.

## 5.2 વિષમતાના પ્રકાર (Types of Skewness)

આવૃત્તિ-વિતરણની વિષમતાના મુખ્યત્વે બે પ્રકાર છે : (1) ધન વિષમતા અને (2) ઋણ વિષમતા. આ બંને પ્રકાર આકૃતિ અને ઉદાહરણ દ્વારા સમજ્ઞાએ.

(1) ધન વિષમતા (Positive Skewness) :

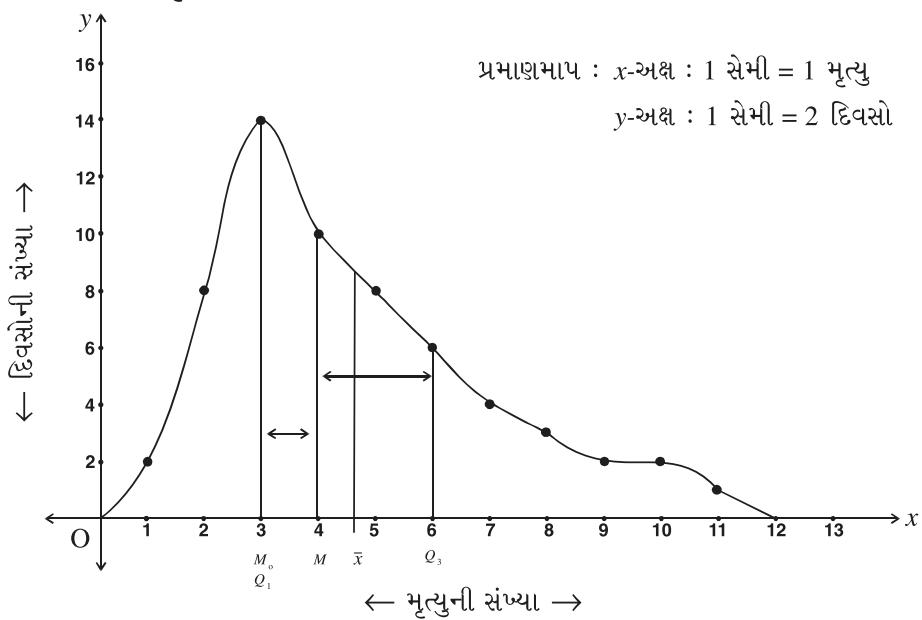
આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવકનો જમણી બાજુનો છેડો વધુ બેંચાયેલો હોય તો તે આવૃત્તિ-વિતરણ ધન વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણ છે તેમ કહેવાય. આ લક્ષણને લીધે સમાચિતમાં ધન વિષમતા રહેલી છે તેમ કહેવાય.

હવે આપણે આવૃત્તિવક અને સરેરાશનાં માપો દ્વારા ધન વિષમતાનો અભ્યાસ કરીએ તે માટે નીચેનું ઉદાહરણ લઈએ.

શહેરની એક હોસ્પિટલમાં 60 દિવસ દરમિયાન થયેલ મૃત્યુની સંખ્યાનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે :

મૃત્યુની સંખ્યા	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
દિવસોની સંખ્યા	2	8	14	10	8	6	4	3	2	2	1

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિવક ઢોરીએ.



આવૃત્તિવક્નો જમણી બાજુનો છેડો બેંચાયેલો છે. મહત્તમ આવૃત્તિ 14 ને અનુરૂપ અવલોકન  $x = 3$  ની ડાબી બાજુ ઓછા અવલોકન વિતરિત છે. જ્યારે જમણી બાજુ વધુ અવલોકનો વિતરિત છે અને તેમની આવૃત્તિઓ કમશા: ઘટતી જાય છે.

હવે આવૃત્તિ-વિતરણના મધ્યક, મધ્યસ્થ, બહુલક અને ચતુર્થકોની ગણતરી કરીએ.

મૃત્યુની સંખ્યા $x$	દિવસોની સંખ્યા $f$	$fx$	$cf$
1	2	2	2
2	8	16	10
3	14	42	24
4	10	40	34
5	8	40	42
6	6	36	48
7	4	28	52
8	3	24	55
9	2	18	57
10	2	20	59
11	1	11	60
કુલ	$n = 60$	277	

$$\begin{aligned} \text{મધ્યક } \bar{x} &= \frac{\sum fx}{n} \\ &= \frac{277}{60} \\ &= 4.6166 \\ \therefore \bar{x} &\approx 4.62 \text{ મૃત્યુ } \end{aligned}$$

બહુલક  $M_o$  = મહત્તમ આવૃત્તિ 14 ને અનુરૂપ અવલોકન 3 છે.  
 $\therefore M_o = 3$  મૃત્યુ

$$\begin{aligned} \text{મધ્યસ્થ } M &= \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\ &= \left(\frac{60+1}{2}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\ &= \left(\frac{61}{2}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\ &= 30.5 \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\ cf \text{ ના કોલમમાં જોતાં, } 30.5 \text{ મા અવલોકનની કિંમત } 4 \text{ છે.} \\ \therefore M &= 4 \text{ મૃત્યુ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{પ્રથમ ચતુર્થક } Q_1 &= \left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\ &= \left(\frac{60+1}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\ &= \left(\frac{61}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\ &= 15.25 \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\ cf \text{ ના કોલમમાં જોતાં, } 15.25 \text{ મા અવલોકનની કિંમત } 3 \text{ છે.} \\ \therefore Q_1 &= 3 \text{ મૃત્યુ} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{તૃતીય ચતુર્થક } Q_3 &= 3\left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= 3\left(\frac{60+1}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= 3(15.25) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= 45.75 \text{ મા અવલોકનની કિંમત}
 \end{aligned}$$

∴ ના કોલમમાં જોતાં, 45.75 મા અવલોકનની કિંમત 6 છે.

$$\therefore Q_3 = 6 \text{ મૃત્યુ}$$

આમ, આ આવૃત્તિ-વિતરણ માટે નીચેનાં પરિણામો પ્રાપ્ત થાય છે :

$$(1) \bar{x} = 4.62, M = 4 \text{ અને } M_o = 3 \text{ મળે છે. તેથી } \bar{x} > M > M_o \text{ છે.}$$

$$(2) Q_3 - M = 6 - 4 = 2 \text{ અને } M - Q_1 = 4 - 3 = 1 \text{ મળે છે તેથી } Q_3 - M > M - Q_1$$

(3) આવૃત્તિવક્તમાં જમણી બાજુનો છેડો વધુ બેંચાયેલો છે.

આમ, ધન વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં સામાન્યતા: નીચેનાં લક્ષણો જોવા મળે છે :

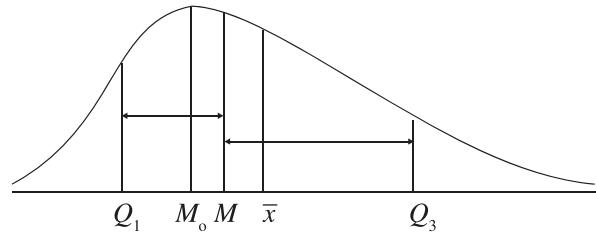
$$(1) \text{આવા આવૃત્તિ-વિતરણમાં મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકની કિંમતો ઉત્તરતા કમમાં હોય છે, અર્થાત્ } \bar{x} > M > M_o$$

(2) તૃતીય ચતુર્થક  $Q_3$  અને મધ્યસ્થ  $M$  વચ્ચેનું અંતર એ

મધ્યસ્થ અને પ્રથમ ચતુર્થક  $Q_1$  વચ્ચેના અંતર કરતાં વધુ હોય

છે. અર્થાત્  $(Q_3 - M) > (M - Q_1)$

(3) આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિવક બહુલકની જમણી તરફ છેડો વધુ બેંચાયેલો હોય છે.



નોંધ : ધન વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં બહુલક કિંમતની જમણી બાજુનાં અવલોકનોમાં ચલન વધુ જોવા મળે છે.

દા.ત., મૃત્યુની સંખ્યાના આવૃત્તિ-વિતરણમાં ધન વિષમતા જોવા મળે છે.

## (2) ઋણ વિષમતા (Negative Skewness)

આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવકનો ડાબી બાજુનો છેડો વધુ બેંચાયેલો હોય તો તે આવૃત્તિ-વિતરણ છે તેમ કહેવાય. આવી સમાચિમાં ઋણ વિષમતા રહેલી છે તેમ કહેવાય.

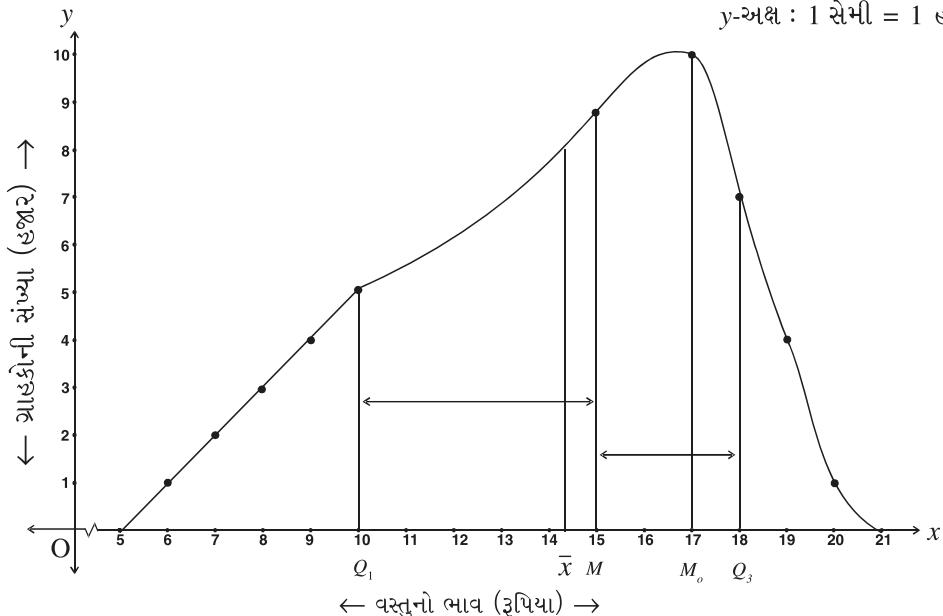
ઋણ વિષમતાનો અભ્યાસ નીચે આપેલા આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવક અને સરેરાશનાં માપો મેળવીને કરીએ.

વસ્તુનો ભાવ (રૂપિયા)	6	7	8	9	10	15	17	18	19	20	કુલ
ગ્રાહકોની સંખ્યા (ઉજાર)	1	2	3	4	5	8	10	7	4	1	45

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિવક્ત દોરીએ.

પ્રમાણમાપ :  $x$ -અક્ષ : 1 સેમી = ₹ 1

$y$ -અક્ષ : 1 સેમી = 1 હજાર ગ્રાહક



આવૃત્તિવક્તનો ડાબી બાજુનો છેડો ખેંચાયેલો છે. તેમાં મહત્તમ આવૃત્તિ 10 ને અનુરૂપ અવલોકન  $x = 17$  ની જમણી બાજુ ઓછા અવલોકન વિતરિત છે. જ્યારે ડાબી બાજુ વધારે અવલોકનો વિતરિત છે તથા તેમની આવૃત્તિઓ કમશા: ઘટતી જાય છે. હવે આવૃત્તિ-વિતરણના મધ્યક, મધ્યરથ, બહુલક અને ચતુર્થકોની ગણતરી કરીએ.

વસ્તુનો ભાવ (રૂપિયા) $x$	ગ્રાહકોની સંખ્યા $f$	$fx$	$cf$
6	1	6	1
7	2	14	3
8	3	24	6
9	4	36	10
10	5	50	15
15	8	120	23
17	10	170	33
18	7	126	40
19	4	76	44
20	1	20	45
કુલ	$n = 45$	642	

$$\begin{aligned} \text{મધ્યક} \quad \bar{x} &= \frac{\sum fx}{n} \\ &= \frac{642}{45} \\ &= 14.27 \\ \bar{x} &= ₹ 14.27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{મધ્યસ્થ} M &= \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= \left(\frac{45+1}{2}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= \left(\frac{46}{2}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= 23 \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &\text{cf ના કોલમમાં જોતાં, } 23 \text{ મા અવલોકનની કિંમત } 15 \text{ છે.} \\
 \therefore M &= ₹ 15
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{પ્રથમ ચતુર્થક } Q_1 &= \left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= \left(\frac{45+1}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= \left(\frac{46}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= 11.5 \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &\text{cf ના કોલમમાં જોતાં, } 11.5 \text{ મા અવલોકનની કિંમત } 10 \text{ છે.} \\
 \therefore Q_1 &= ₹ 10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{તૃજી ચતુર્થક } Q_3 &= 3\left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= 3\left(\frac{45+1}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= 3\left(\frac{46}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= 3(11.5) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= 34.5 \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &\text{cf ના કોલમમાં જોતાં, } 34.5 \text{ મા અવલોકનની કિંમત } 18 \text{ છે.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore Q_3 &= ₹ 18 \\
 \text{બહુલક } M_o &= \text{મહત્તમ આવૃત્તિ } 10 \text{ ને અનુરૂપ અવલોકન } 17 \text{ છે.} \\
 \therefore M_o &= ₹ 17
 \end{aligned}$$

અહીં, આવૃત્તિ-વિતરણા આવૃત્તિવક્કમાં મધ્યક  $\bar{x}$ , મધ્યસ્થ  $M$ , બહુલક  $M_o$  અને ચતુર્થકોની કિંમતો દર્શાવતા આવૃત્તિવક્ક પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

- (1)  $\bar{x} = 14.27$ ,  $M = 15$ ,  $M_o = 17$  મળે છે તેથી  $\bar{x} < M < M_o$  થાય.
- (2) આવૃત્તિવક્કનો ડાબી બાજુનો છેડો વધુ ખેંચાયેલો છે.
- (3)  $Q_3 - M = 18 - 15 = 3$  અને  $M - Q_1 = 15 - 10 = 5$  મળે છે. તેથી  $Q_3 - M < M - Q_1$  થાય.

ऋण વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં સામાન્યતઃ નીચેનાં લક્ષણો જોવા મળે છે :

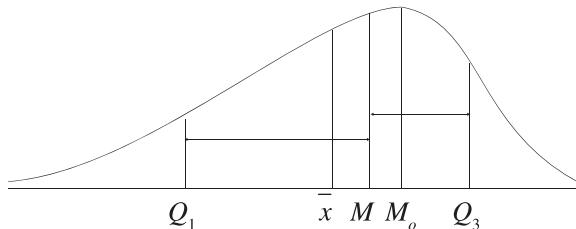
- (1) મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકની કિંમતો ચઢતા કમમાં હોય છે.

$$\text{અર્થાત् } \bar{x} < M < M_o$$

- (2) તૃતીય ચતુર્થક  $Q_3$  અને મધ્યસ્થ  $M$  વચ્ચેનું અંતર એ મધ્યસ્થ  $M$  અને પ્રથમ ચતુર્થક  $Q_1$  વચ્ચેના અંતર કરતા ઓછું હોય છે.

$$\text{અર્થાત् } (Q_3 - M) < (M - Q_1)$$

- (3) આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવકનો બહુલકની ડાબી તરફનો છેડો વધુ ખેચાયેલો હોય છે.



નોંધ : ઋણ વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં અવલોકનોની મહત્વમાં કિંમતની ડાબી તરફનાં અવલોકનોમાં ચલન વધુ જોવા મળે છે. ધ્યાદીય અને નાણા સંબંધિત ઘટનાઓમાં ઘણા ડિસ્ચ્રીપ્ટિવ આવૃત્તિ-વિતરણ ઋણ વિષમ હોઈ શકે છે. દા.ત., કોઈ એક વસ્તુનું કિંમતસંબંધી આવૃત્તિ-વિતરણ, બચતકર્તાની સંખ્યાસંબંધી આવૃત્તિ-વિતરણ વગેરેમાં ઋણ વિષમ આવૃત્તિવક મળે છે.

### 5.3 વિષમતા માટે નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપો ખ્યાલ (Concept of absolute and relative measure of skewness)

સમાનિનાં અવલોકનોના આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિવક દોરવાથી તે આવૃત્તિ-વિતરણની વિષમતા ધન છે કે ઋણ છે તે જાણી શકાય છે. પરંતુ આવૃત્તિ-વિતરણમાં વિષમતાનું પ્રમાણ કેટલું છે તે આવેખની મદદથી શોધી શકાતું નથી.

વિષમતા માપવા માટે બે પ્રકારનાં માપ વપરાય છે : (1) નિરપેક્ષ માપ (Absolute measure) (2) સાપેક્ષ માપ (Relative measure). સમાનિના ચલનું મૂલ્ય જે એકમમાં હોય, તે એકમમાં દર્શાવવામાં આવતા વિષમતાના માપને વિષમતાનું નિરપેક્ષ માપ કહે છે. તેને સંકેતમાં  $S_k$  વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાનું નિરપેક્ષ માપ સરેરાશના માપના તફાવતથી મેળવવામાં આવે છે અને બાઉલીની પદ્ધતિમાં તે ચતુર્થકોના અંતરના તફાવતથી મેળવવામાં આવે છે. બે અલગ એકમો ધરાવતી સમાનિના તુલનાત્મક અભ્યાસ કરવા માટે આ માપ ઉપયોગી બનતાં નથી. તદ્વારાંત બે સમાનિના એક જ પ્રકારના એકમ ધરાવતાં અવલોકનો હોવા છતાં તે માટે નિરપેક્ષ માપનો ઉપયોગ કરવો કેટલીક વખતે હિતાવહ નથી કારણકે બંને સમાનિના વિતરણમાં મધ્યવર્તી સ્થિતિમાન અને પ્રસારનાં માપોમાં ભિન્નતા હોઈ શકે.

આમ બે કે તેથી વધુ સમાનિના તુલનાત્મક અભ્યાસ માટે વિષમતાનું સાપેક્ષ માપ ધ્યાનમાં લેવામાં આવે છે. આ સાપેક્ષ માપને વિષમતાંક તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. સમાનિની વિષમતાનું એકમથી મુક્ત માપ મેળવવા માટે વિષમતાના નિરપેક્ષ માપને પ્રસારના યોગ્ય માપ વડે ભાગવામાં આવે છે. આમ, ટૂંકમાં કહીએ તો વિષમતાના સાપેક્ષ માપને વિષમતાંક (Coefficient of skewness) કહે છે. તેને સંકેતમાં  $j$  વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

### 5.4 વિષમતા અને વિષમતાંક મેળવવા માટેની પદ્ધતિઓ (Methods for determining skewness and Coefficient of skewness)

આવૃત્તિ-વિતરણના વિષમતા અને વિષમતાંક મેળવવા નીચેની બે પ્રચલિત પદ્ધતિઓનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે :

- (1) કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિ (2) બાઉલીની પદ્ધતિ.

#### **5.4.1 કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિ (Karl Pearson's method)**

વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક એ ગ્રાફોયનાં મૂલ્યો સરખાં હોતાં નથી તેમજ મધ્યસ્થનું મૂલ્ય, મધ્યક અને બહુલકની વચ્ચે હોય છે. તેથી સામાન્ય રીતે વિષમતાનું માપ મેળવવા મધ્યક અને બહુલકનાં મૂલ્યોનાં તફાવતનો ઉપયોગ થાય છે. અર્થાત્ વિષમતા  $S_k = \bar{x} - M_o$  લેવામાં આવે છે. વિષમતાના માપ  $S_k$  ને પ્રસારના માપ પ્રમાણિત વિચલન 's' વડે ભાગવાથી એક બહુલકીય આવૃત્તિ-વિતરણ માટે વિષમતાનું સાપેક્ષ માપ વિષમતાંક  $j$  મળે. વિષમતાનું સાપેક્ષ માપ વિષમતાંક નીચેના સૂત્રથી મળે છે :

$$j = \frac{\bar{x} - M_o}{s}$$

જ્યારે આવૃત્તિ-વિતરણમાં બહુલકની કિંમત એક કરતાં વધુ હોય અથવા બહુલકની ચોક્કસ કિંમત મેળવી શકાય તેમ ન હોય ત્યારે કાર્લ પિયર્સનના મતાનુસાર બહુલકની કિંમત નીચે જણાવેલ આસાદિત સૂત્ર (Empirical formula)  $M_o = 3M - 2\bar{x}$  ની મદદથી મેળવી શકાય છે. આમ, વિષમતા અને વિષમતાંકનાં સૂત્રો નીચે મુજબ મળે :

$$\begin{aligned} \text{વિષમતા } S_k &= \text{મધ્યક} - \text{બહુલક} = \bar{x} - M_o = \bar{x} - (3M - 2\bar{x}) = 3\bar{x} - 3M \\ &= 3(\bar{x} - M) \end{aligned}$$

$$\text{અને વિષમતાનું સાપેક્ષ માપ વિષમતાંક } j = \frac{3(\bar{x} - M)}{s}.$$

**નોંધ :** વિષમતાના બે પ્રકાર છે : (1) ધન વિષમતા (2) ઋણ વિષમતા.

(1) જો આવૃત્તિ-વિતરણ ધન વિષમતા ધરાવતું હોય, તો વિષમતા  $S_k$  નું મૂલ્ય 0 થી વધુ હોય એટલે કે  $S_k > 0$  હોય. જો આવૃત્તિ-વિતરણમાં બહુલક વ્યાખ્યાપિત (સ્પષ્ટ) હોય તો વિષમતા  $S_k = \bar{x} - M_o$  ના સૂત્રથી મેળવવામાં આવે છે. જો  $\bar{x} > M_o$  હોય તો  $S_k = (\bar{x} - M_o) > 0$  થાય છે તેથી ધન વિષમતા છે એમ કહેવાય. તે જ રીતે  $\bar{x} > M$  હોય, તો  $S_k = 3(\bar{x} - M) > 0$  થાય તેથી ધન વિષમતા છે એમ કહેવાય.

(2) જો આવૃત્તિ-વિતરણ ઋણ વિષમતા ધરાવતું હોય તો વિષમતા  $S_k$  નું મૂલ્ય 0 થી ઓછું હોય એટલે કે  $S_k < 0$  હોય. જો આવૃત્તિ-વિતરણમાં બહુલક વ્યાખ્યાપિત (સ્પષ્ટ) હોય તો વિષમતા  $S_k = \bar{x} - M_o$  ના સૂત્રથી મેળવવામાં આવે છે જો  $\bar{x} < M_o$  હોય તો  $S_k = (\bar{x} - M_o) < 0$  થાય છે તેથી ઋણ વિષમતા છે એમ કહેવાય. તે જ રીતે  $\bar{x} < M$  હોય, તો  $S_k = 3(\bar{x} - M) < 0$  થાય તેથી ઋણ વિષમતા છે એમ કહેવાય.

**નોંધ :**

(1) વ્યવહારમાં નિર્દર્શ આધારિત માહિતીના વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણ માટે વિષમતાંકની કિંમત  $-1$  થી  $1$  સુધી મળે છે.

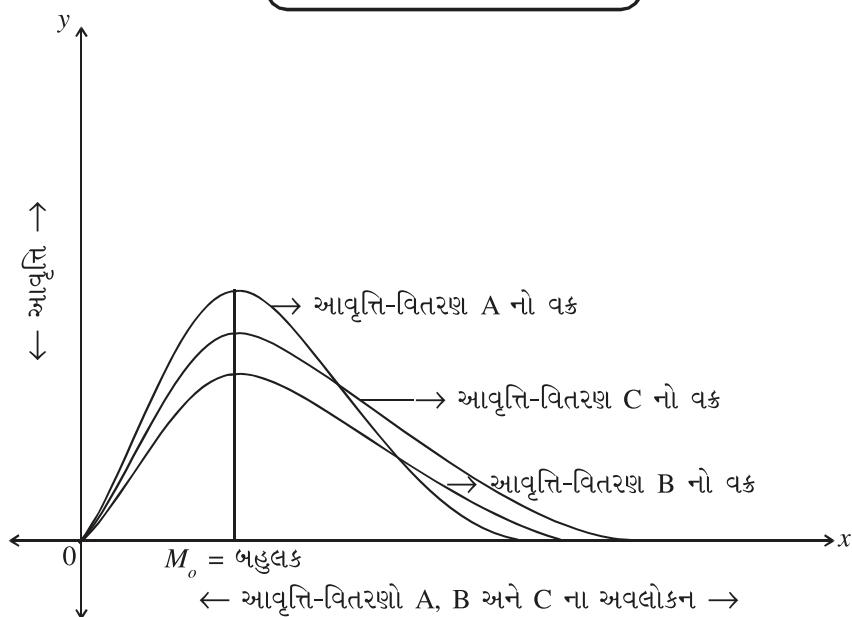
(2) જ્યારે સમાચિના આવૃત્તિવક્માં એક કરતાં વધારે બહુલક હોય ત્યારે એમ સાબિત કરી શકાય કે વિષમતાંક

$$j = \frac{3(\bar{x} - M)}{s} \text{ ની કિંમત } -3 \text{ થી } 3 \text{ સુધી મળી શકે.}$$

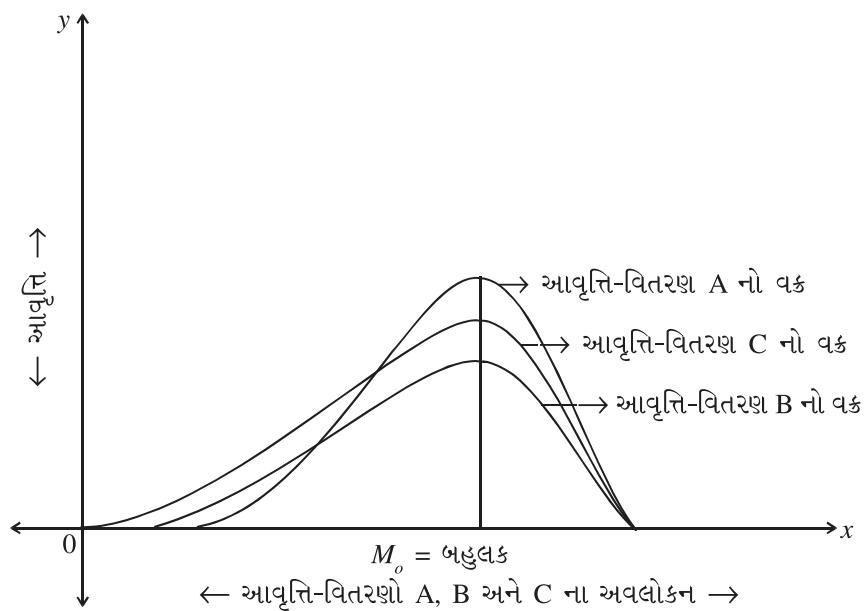
(3) અંકડાશાસ્ત્રી એન. એલ. જહોન્સને ૧૯૫૧ માં એક બહુલકીય વિષમ વિતરણ માટે સૂત્ર  $j = \frac{\bar{x} - M_o}{s}$  થી મળતી

વિષમતાંકની કિંમત સૈદ્ધાંતિક દણિઓ  $-\sqrt{3}$  થી  $\sqrt{3}$  એટલે કે  $-1.73$  થી  $1.73$  સુધી મળી રહે છે એમ સાબિત કર્યું.

સમજૂતી માટે વધારાની માહિતી



ઉપર્યુક્ત ગ્રણેય આવૃત્તિ-વિતરણ ધન વિષમતા દર્શાવે છે. જેમાં આવૃત્તિ-વિતરણ C ના આવૃત્તિવકનો જમણી બાજુનો છેડો સૌથી વધુ બેંચાયેલો છે તેથી તે સૌથી વધુ ધન વિષમતા ધરાવે છે. જ્યારે આવૃત્તિ-વિતરણ Bનો આવૃત્તિવક C ની સાપેક્ષમાં ઓછી ધન વિષમતા ધરાવે છે. તેમજ આવૃત્તિ-વિતરણ A નો આવૃત્તિવકનો છેડો B અને C ની સાપેક્ષમાં સૌથી ઓછો બેંચાયેલો હોવાથી સૌથી ઓછી ધન વિષમતા ધરાવે છે.



ઉપર્યુક્ત ગ્રણેય આવૃત્તિ-વિતરણ ઋણ વિષમતા દર્શાવે છે. જેમાં આવૃત્તિ-વિતરણ C ના આવૃત્તિવકનો ડાબી બાજુનો છેડો સૌથી વધુ બેંચાયેલો છે તેથી તે સૌથી વધુ ઋણ વિષમતા ધરાવે છે. જ્યારે આવૃત્તિ-વિતરણ Bનો આવૃત્તિવકનો છેડો C ની સાપેક્ષમાં ઓછી ઋણ વિષમતા ધરાવે છે. તેમજ આવૃત્તિ-વિતરણ A ના આવૃત્તિવકનો છેડો B અને C ની સાપેક્ષમાં સૌથી ઓછો બેંચાયેલો હોવાથી સૌથી ઓછી ઋણ વિષમતા ધરાવે છે.

**ઉદાહરણ 1 :** નીચેની માહિતી એક ટ્રોન્સપોર્ટ કંપનીની 50 ટ્રુક દ્વારા રેલવે પાર્ટથી જુદી જુદી ફેક્ટરીઓને કોઈ એક દિવસે દૈનિક ધોરણો એકમોની હેરફેર કરવામાં આવતી સંખ્યાને લગતી છે. તે પરથી કાર્બ પિયર્સનની પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો.

હેરફેરના એકમોની સંખ્યા	120	130	140	150	160	170	180	190	200
ટ્રુકની સંખ્યા	2	3	4	5	11	9	9	6	1

અહીં, આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ એક બહુલક ધરાવે છે તેથી કાર્બ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધવા માટે મધ્યક, બહુલક અને પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી કરીશું.

હેરફેર એકમોની સંખ્યા $x$	ટ્રુકની સંખ્યા $f$	$d = x - A$ $A = 160$	$fd$	$fd^2$
120	2	-40	-80	3200
130	3	-30	-90	2700
140	4	-20	-80	1600
150	5	-10	-50	500
160	11	0	0	0
170	9	10	90	900
180	9	20	180	3600
190	6	30	180	5400
200	1	40	40	1600
કુલ	$n = 50$		190	19500

$$\text{મધ્યક } \bar{x} = A + \frac{\sum fd}{n}$$

$$= 160 + \frac{190}{50}$$

$$= 160 + 3.8$$

$$= 163.8$$

$$\therefore \bar{x} = 163.8 \text{ એકમ}$$

બહુલક  $M_o =$  મહત્તમ આવૃત્તિ 11 ને અનુરૂપ અવલોકન 160 છે.

$$\therefore M_o = 160 \text{ એકમ}$$

$$\text{પ્રમાણિત વિચલન } s = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left( \frac{\sum fd}{n} \right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{19500}{50} - \left( \frac{190}{50} \right)^2}$$

$$= \sqrt{390 - 14.44}$$

$$= \sqrt{375.56}$$

$$= 19.3794$$

$$\therefore s \approx 19.38 \text{ એકમ}$$

$$\begin{aligned}
 \text{વિષમતા} \quad S_k &= \bar{x} - M_o \\
 &= 163.8 - 160 \\
 &= 3.8 \\
 S_k &= 3.8 \text{ એકમ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{વિષમતાંક } j &= \frac{\bar{x} - M_o}{s} \\
 &= \frac{163.8 - 160}{19.38} \\
 &= \frac{3.8}{19.38} \\
 &= 0.1961
 \end{aligned}$$

$$j \approx 0.20$$

અહીં, આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ ધન વિષમતા ધરાવે છે. અતે નોંધનીય છે કે  $j = 0.20$  એકમથી મુક્ત છે.

**ઉદાહરણ 2 :** 100 કંપનીઓના વાર્ષિક કર અંગેની નીચેની માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો.

વાર્ષિક કર (લાખ રૂ)	0 - 20	20 - 40	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120
કંપનીઓની સંખ્યા	5	20	40	25	6	4

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ એક બહુલકીય છે તેથી વિષમતાંક શોધવા માટે મધ્યક  $\bar{x}$ , બહુલક  $M_o$  અને પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી કરીશું.

વાર્ષિક કર (લાખ રૂ)	કંપનીઓની સંખ્યા $f$	મધ્યક્રમત $x$	$d = \frac{x - A}{c}$ $A = 50, c = 20$	$fd$	$fd^2$
0 - 20	5	10	- 2	- 10	20
20 - 40	20	30	- 1	- 20	20
40 - 60	40	50	0	0	0
60 - 80	25	70	1	25	25
80 - 100	6	90	2	12	24
100 - 120	4	110	3	12	36
કુલ	$n = 100$			19	125

$$\begin{aligned}
 \text{મધ્યક} \quad \bar{x} &= A + \frac{\sum fd}{n} \times c \\
 &= 50 + \frac{19}{100} \times 20 \\
 &= 50 + \frac{380}{100} \\
 &= 50 + 3.8 \\
 \therefore \quad \bar{x} &= 53.8 \\
 \bar{x} &= ₹ 53.8 \text{ લાખ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{પ્રમાણિત વિચલન } s &= \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left(\frac{\sum fd}{n}\right)^2} \times c \\
 &= \sqrt{\frac{125}{100} - \left(\frac{19}{100}\right)^2} \times 20 \\
 &= \sqrt{1.25 - 0.0361} \times 20 \\
 &= \sqrt{1.2139} \times 20 \\
 &= 22.0354 \\
 s &\approx ₹ 22.04 \text{ લાખ}
 \end{aligned}$$

બહુલક  $M_o$  = મહત્તમ આવૃત્તિ 40 ને અનુરૂપ વર્ગ 40 - 60 એ તેથી બહુલકનો વર્ગ 40 - 60 એ.

$$\text{હવે, } M_o = L + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times c$$

$$\text{અદ્ય, } L = 40, f_m = 40, f_1 = 20, f_2 = 25, c = 20$$

$$M_o = 40 + \frac{40 - 20}{2(40) - 20 - 25} \times 20$$

$$= 40 + \frac{20 \times 20}{80 - 20 - 25}$$

$$= 40 + \frac{400}{35}$$

$$= 40 + 11.4285$$

$$= 51.4285$$

$$M_o \approx ₹ 51.43 \text{ લાખ}$$

$$\begin{aligned}
 \text{વિષમતા } S_k &= \bar{x} - M_o \\
 &= 53.8 - 51.43 \\
 &= 2.37
 \end{aligned}$$

$$S_k = ₹ 2.37 \text{ લાખ}$$

$$\text{વિષમતાંક } j = \frac{\bar{x} - M_o}{s} = \frac{53.8 - 51.43}{22.04}$$

$$= \frac{2.37}{22.04}$$

$$= 0.1075$$

$$j \approx 0.11$$

તેથી કદી શકાય કે, આ આવૃત્તિ-વિતરણ ધન વિષમતા ધરાવે છે. વિષમતાંકનું મૂલ્ય ઓછું છે તેથી તે સૂચવે છે કે તે લગભગ સંમિત છે.

ઉદાહરણ 3 : એક કારખાનામાં 100 મશીનો દ્વારા ઉત્પાદન કરવામાં આવે છે. ઉત્પાદન પ્રક્રિયા દરમિયાન અસ્વીકૃત એકમો અંગે નીચે મુજબ માહિતી મળેલ છે. તે પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો.

અસ્વીકૃત એકમોની સંખ્યા	11 - 20	21 - 30	31 - 40	41 - 50	51 - 60	61 - 70	71-80
મશીનોની સંખ્યા	2	12	25	39	12	9	1

આપેલું આવૃત્તિ-વિતરણ એક બહુલકીય છે તેથી વિષમતાંક શોધવા માટે મધ્યક, બહુલક અને પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી કરીશું.

અસ્વીકૃત એકમોની સંખ્યા	મશીનોની સંખ્યા <i>f</i>	મધ્યકિંમત <i>x</i>	$d = \frac{x - A}{c}$	<i>fd</i>	<i>fd</i> <sup>2</sup>
11 - 20	2	15.5	- 3	- 6	18
21 - 30	12	25.5	- 2	- 24	48
31 - 40	25	35.5	- 1	- 25	25
41 - 50	39	45.5	0	0	0
51 - 60	12	55.5	1	12	12
61 - 70	9	65.5	2	18	36
71 - 80	1	75.5	3	3	9
કુલ	<b><i>n = 100</i></b>			<b>- 22</b>	<b>148</b>

$$\begin{aligned} \text{મધ્યક } \bar{x} &= A + \frac{\sum fd}{n} \times c \\ &= 45.5 + \frac{(-22)}{100} \times 10 \\ &= 45.5 - 2.2 \\ &= 43.3 \end{aligned}$$

$\therefore \bar{x} = 43.3$  એકમ

બહુલક  $M_o$  : મહત્તમ આવૃત્તિ 39 ને અનુરૂપ વર્ગ 41 - 50 છે તેથી બહુલકનો અનિવારક વર્ગ 41 - 50 છે.  
 $\therefore$  વર્ગ સીમાબિંદુઓ મેળવતા, બહુલકનો વર્ગ 40.5 - 50.5 મળે.

$$\text{હવે, } M_o = L + \frac{f_m - f_1}{2f_m - f_1 - f_2} \times c$$

અહીં,  $L = 40.5, f_m = 39, f_1 = 25, f_2 = 12$  અને  $c = 10$  છે.

$$M_o = 40.5 + \frac{39 - 25}{2(39) - 25 - 12} \times 10$$

$$= 40.5 + \frac{14 \times 10}{78 - 37}$$

$$= 40.5 + \frac{140}{41}$$

$$= 40.5 + 3.4146$$

$$= 43.9146$$

$$M_o \approx 43.91 \text{ એકમ}$$

$$\begin{aligned}
 \text{પ્રમાણિત વિચલન } s &= \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left(\frac{\sum fd}{n}\right)^2} \times c \\
 &= \sqrt{\frac{148}{100} - \left(\frac{-22}{100}\right)^2} \times 10 \\
 &= \sqrt{1.48 - 0.0484} \times 10 \\
 &= \sqrt{1.4316} \times 10 \\
 &= 11.96 \text{ એકમ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{વિષમતા } S_k &= \bar{x} - M_o \\
 &= 43.3 - 43.91 \\
 S_k &= -0.61 \text{ એકમ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{વિષમતાંક } j &= \frac{\bar{x} - M_o}{s} \\
 &= \frac{43.3 - 43.91}{11.96} \\
 &= \frac{-0.61}{11.96} \\
 &= -0.0509 \\
 j &\approx -0.05
 \end{aligned}$$

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ ઋણ વિષમતાંક ધરાવે છે, જે સંમિતતાની વધુ નજીક છે.

**ઉદાહરણ 4 :** એક શહેરના 200 કુટુંબનો વર્ષ 2014માં સરેરાશ માસિક વાહનપરિવહન-ખર્ચ નીચે મુજબ હતો. કાર્બ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો.

સરેરાશ માસિક વાહનપરિવહન-ખર્ચ (₹ હજાર)	1 - 3	4 - 6	7 - 9	10 - 13	14 - 16	17 - 19
કુટુંબોની સંખ્યા	5	40	120	20	10	5

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણમાં અસમાન વર્ગલિંબાઈ હોવાથી આપેલ વિષમતાંક શોધવા માટે મધ્યક, મધ્યસ્થ અને પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી કરીશું.

સરેરાશ માસિક વાહનપરિવહન-ખર્ચ (₹ હજાર)	કુટુંબોની સંખ્યા f	મધ્યકિંમત x	d = x - A A = 8	fd	fd <sup>2</sup>	cf
1-3	5	2	-6	-30	180	5
4-6	40	5	-3	-120	360	45
7-9	120	8	0	0	0	165
10-13	20	11.5	3.5	70	245	185
14-16	10	15	7	70	490	195
17-19	5	18	10	50	500	200
કુલ	n = 200			40	1775	

$$\text{મધ્યક } \bar{x} = A + \frac{\sum fd}{n}$$

$$= 8 + \frac{40}{200}$$

$$= 8 + 0.2$$

$$= 8.2$$

$$\therefore \bar{x} = ₹ 8.2 \text{ હજાર}$$

$$\text{મધ્યસ્થ } M = \left(\frac{n}{2}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

$$= \left(\frac{200}{2}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

$$= 100 \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

*cf* ના કોલમમાં જોતાં, 100મા અવલોકનની કિંમતનો વર્ગ 7 - 9માં સમાયેલી છે તેથી મધ્યસ્થનો અનિવારક વર્ગ 7 - 9 છે.  $\therefore$  વર્ગ સીમાબિંદુઓ મેળવતા, મધ્યસ્થનો વર્ગ 6.5 - 9.5 મળે.

$$\text{હવે, } M = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$$

$$\text{અહીં, } L = 6.5, \frac{n}{2} = 100, cf = 45, f = 120 \text{ અને } c = 3 \text{ છે.}$$

$$M = 6.5 + \frac{100 - 45}{120} \times 3$$

$$= 6.5 + \frac{55 \times 3}{120}$$

$$= 6.5 + 1.375$$

$$= 7.875$$

$$\therefore M = ₹ 7.88 \text{ હજાર}$$

$$\text{પ્રમાણિત વિચલન } s = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left(\frac{\sum fd}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1775}{200} - \left(\frac{40}{200}\right)^2}$$

$$= \sqrt{8.875 - 0.04}$$

$$= \sqrt{8.835}$$

$$= 2.9724$$

$$\therefore s \approx ₹ 2.97 \text{ હજાર}$$

$$\text{વિષમતા } S_k = 3 (\bar{x} - M)$$

$$= 3 (8.2 - 7.88)$$

$$= 3 (0.32)$$

$$= 0.96$$

$$S_k = ₹ 0.96 \text{ હજાર}$$

$$\begin{aligned}
 \text{વિષમતાંક } j &= \frac{3(\bar{x} - M)}{s} \\
 &= \frac{3(8.2 - 7.88)}{2.97} \\
 &= \frac{3(0.32)}{2.97} \\
 &= \frac{0.96}{2.97} \\
 &= 0.3232 \\
 &= 0.32
 \end{aligned}$$

$$\therefore j \approx 0.32$$

આમ, આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ ધન વિષમતા ધરાવે છે.

**ઉદાહરણ 5 :** 400 ઈલેક્ટ્રિક બલ્બનું આયુષ્ય (પૂર્ણ કલાકમાં) અંગે નીચેની માહિતી મળે છે. તે પરથી કાર્ય પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો.

ઈલેક્ટ્રિક બલ્બનું આયુષ્ય (પૂર્ણ કલાક)	4000-4199	4200-4399	4400-4599	4600-4799	4800-4999	5000-5199	5200-5399	5400-5599
ઈલેક્ટ્રિક બલ્બની સંખ્યા	14	46	58	76	70	76	40	20

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણમાં મહત્વમાં આવૃત્તિ 76 બે વર્ગમાં આવેલ છે તેથી બહુલક અસ્તિત્વ ધરાવતાં હોવાથી વિષમતાંક શોધવા મધ્યક, મધ્યસ્થ અને પ્રમાણિત વિચલનની ગણતરી કરીશું.

ઈલેક્ટ્રિક બલ્બનું આયુષ્ય (પૂર્ણ કલાક)	ઈલેક્ટ્રિક બલ્બની સંખ્યા <i>f</i>	મધ્યક્રિમત <i>x</i>	$d = \frac{x - A}{c}$ $A = 4699.5$ $c = 200$	<i>fd</i>	<i>fd</i> <sup>2</sup>	<i>cf</i>
4000 - 4199	14	4099.5	- 3	- 42	126	14
4200 - 4399	46	4299.5	- 2	- 92	184	60
4400 - 4599	58	4499.5	- 1	- 58	58	118
4600 - 4799	76	4699.5	0	0	0	194
4800 - 4999	70	4899.5	1	70	70	264
5000 - 5199	76	5099.5	2	152	304	340
5200 - 5399	40	5299.5	3	120	360	380
5400 - 5599	20	5499.5	4	80	320	400
<b>કુલ</b>	<b><i>n = 400</i></b>			<b>230</b>	<b>1422</b>	

$$\begin{aligned}
 \text{મધ્યક } \bar{x} &= A + \frac{\Sigma fd}{n} \times c \\
 &= 4699.5 + \frac{230}{400} \times 200 \\
 &= 4699.5 + 115 \\
 &= 4814.5 \\
 \therefore \bar{x} &= 4814.5 \text{ કલાક}
 \end{aligned}$$

$$\text{મધ્યસૂચક } M = \left(\frac{n}{2}\right) \text{ મા અવલોકનની ક્રિમત}$$

$$= \left(\frac{400}{2}\right) \text{ મા અવલોકનની ક્રિમત}$$

$$= 200 \text{ મા અવલોકનની ક્રિમત}$$

*cf* ના કોલમમાં જોતાં, 200મા અવલોકનની ક્રિમતનો વર્ગ 4800 - 4999માં સમાયેલી છે તેથી મધ્યસૂચકનો અનિવારક વર્ગ 4800 - 4999 છે. ∴ વર્ગ સીમાબિંદુઓ મેળવતા, મધ્યસૂચકનો વર્ગ 4799.5 - 4999.5 મળે.

$$\text{હવે, } M = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$$

$$\text{અહીં, } L = 4799.5, \frac{n}{2} = 200, cf = 194, f = 70 \text{ અને } c = 200 \text{ છે.}$$

$$M = 4799.5 + \frac{200 - 194}{70} \times 200$$

$$= 4799.5 + \frac{6 \times 200}{70}$$

$$= 4799.5 + \frac{120}{7}$$

$$= 4799.5 + 17.1429$$

$$= 4816.6429$$

$$\therefore M \approx 4816.64 \text{ કલાક}$$

$$\text{પ્રમાણિત વિચલન } s = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left(\frac{\sum fd}{n}\right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{1422}{400} - \left(\frac{230}{400}\right)^2} \times 200$$

$$= \sqrt{3.555 - 0.3306} \times 200$$

$$= \sqrt{3.2244} \times 200$$

$$= 359.1323$$

$$\therefore s = 359.13 \text{ કલાક}$$

$$\text{વિષમતા } S_k = 3(\bar{x} - M)$$

$$= 3(4814.5 - 4816.64)$$

$$= 3(-2.14)$$

$$= -6.42$$

$$\therefore S_k = -6.42 \text{ કલાક}$$

$$\begin{aligned}
 \text{વિષમતાંક } j &= \frac{3(\bar{x} - M)}{s} \\
 &= \frac{3(4814.5 - 4816.64)}{359.13} \\
 &= \frac{-6.42}{359.13} \\
 &= -0.0178 \\
 j &\approx -0.02
 \end{aligned}$$

આમ, આપેલ વિતરણ ઋણ વિષમતા ધરાવે છે.

**ઉદાહરણ 6 :** નીચેની માહિતી 30 કંપનીએ કરેલ વાર્ષિક જાહેરાત ખર્ચ (લાખ રૂમાં)ને લગતી છે. તે પરથી કાર્બ પિયર્સનની પદ્ધતિશી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો.

વાર્ષિક જાહેરાત-ખર્ચ (લાખ રૂ)	0	3	5	8	10 - 20	20 - 30	30 - 40
કંપનીઓની સંખ્યા	3	4	5	10	5	2	1

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ મિશ્ર પ્રકાર (અસતત અને સતત પ્રકાર)નું છે. તેથી  $\bar{x}$ ,  $M$ ,  $S$  અને વિષમતાંકની ગણતરી કરીએ.

વાર્ષિક જાહેરાત-ખર્ચ (લાખ રૂ)	કંપનીઓની સંખ્યા <i>f</i>	મધ્યક્રિમત <i>x</i>	$d = x - A$ $A = 15$	$fd$	$fd^2$	$cf$
0	3	0	- 15	- 45	675	3
3	4	3	- 12	- 48	576	7
5	5	5	- 10	- 50	500	12
8	10	8	- 7	- 70	490	22
10 - 20	5	15	0	0	0	27
20 - 30	2	25	10	20	200	29
30 - 40	1	35	20	20	400	30
કુલ	$n = 30$			<b>-173</b>	<b>2841</b>	

$$\begin{aligned}
 \text{મધ્યક } \bar{x} &= A + \frac{\sum fd}{n} \\
 &= 15 + \frac{-173}{30} \\
 &= 15 - 5.7667 \\
 &= 9.2333 \\
 \therefore \bar{x} &\approx \text{₹ } 9.23 \text{ લાખ}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{મધ્યસ્થ } M &= \left(\frac{n}{2}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= \left(\frac{30}{2}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= 15 \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 \text{cf ના કોલમમાં જેતા, } 15 \text{ મા અવલોકનની કિંમત } 8 \text{ છે.}
 \end{aligned}$$

$$\therefore M = ₹ 8 \text{ લાખ}$$

$$\begin{aligned}
 \text{પ્રમાણિત વિચલન } s &= \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left(\frac{\sum fd}{n}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{2841}{30} - \left(\frac{-173}{30}\right)^2} \\
 &= \sqrt{94.7 - 33.2544} \\
 &= \sqrt{61.4456} \\
 &= 7.8387
 \end{aligned}$$

$$\therefore s \approx ₹ 7.84 \text{ લાખ}$$

$$\begin{aligned}
 \text{વિષમતા } S_k &= 3 (\bar{x} - M) \\
 &= 3 (9.23 - 8) \\
 &= 3(1.23) \\
 &= 3.69
 \end{aligned}$$

$$\therefore S_k = ₹ 3.69 \text{ લાખ}$$

$$\begin{aligned}
 \text{વિષમતાંક } j &= \frac{3(\bar{x} - M)}{s} \\
 &= \frac{3(9.23 - 8)}{7.84} \\
 &= \frac{3.69}{7.84} \\
 &= 0.4707
 \end{aligned}$$

$$j \approx 0.47$$

આમ, આપેલ વિતરણ ધન વિષમતા ધરાવે છે.

**ઉદાહરણ 7 :** 600 કામદારોને ચૂકવાતા કલાકટીઠ વેતનને લગતું આવૃત્તિ-વિતરણ આપેલ છે. આ આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી કાર્ય પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો.

કલાકટીઠ વેતન (₹)	40 - 60	60 - 80	80 - 100	100 - 120	120 - 140	140 - 160	160 - 180	180 - 200	200 - 220	220 - 240
કામદારોની સંખ્યા (f)	10	12	16	20	50	60	72	100	120	140

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણમાં મહત્વમાં આવૃત્તિ 140 છે, જે મધ્યના વર્ગમાં ન આવતા આવૃત્તિ-વિતરણના અંતિમ વર્ગમાં આવેલ છે. જેથી બહુલક અસ્પષ્ટ (ill-defined) છે. આ સંજોગોમાં વિષમતાંકનું સૂત્ર  $j = \frac{3(\bar{x} - M)}{s}$  નો ઉપયોગ કરી વિષમતાંક શોધીશું.

કલાકદીઠ વેતન (₹)	કામદારોની સંખ્યા <i>f</i>	મધ્યકિંમત <i>x</i>	$d = \frac{x - A}{c}$ $A = 130 \ c = 20$	$fd$	$fd^2$	$cf$
40 - 60	10	50	- 4	- 40	160	10
60 - 80	12	70	- 3	- 36	108	22
80 - 100	16	90	- 2	- 32	64	38
100 - 120	20	110	- 1	- 20	20	58
120 - 140	50	130	0	0	0	108
140 - 160	60	150	1	60	60	168
160 - 180	72	170	2	144	288	240
180 - 200	100	190	3	300	900	340
200 - 220	120	210	4	480	1920	460
220 - 240	140	230	5	700	3500	600
કુલ	<b><math>n = 600</math></b>			<b>1556</b>	<b>7020</b>	

$$\text{મધ્યક} \quad \bar{x} = A + \frac{\sum fd}{n} \times c$$

$$= 130 + \frac{1556}{600} \times 20$$

$$= 130 + 51.8666$$

$$= 181.866$$

$$\therefore \bar{x} = ₹ 181.87$$

$$\text{પ્રમાણિત વિચલન } s = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left( \frac{\sum fd}{n} \right)^2} \times c$$

$$= \sqrt{\frac{7020}{600} - \left( \frac{1556}{600} \right)^2} \times 20$$

$$= \sqrt{11.7 - 6.7254} \times 20$$

$$= \sqrt{4.9746} \times 20$$

$$= 44.6076$$

$$\therefore s = ₹ 44.61$$

મધ્યસ્થ  $M = \left(\frac{n}{2}\right)$  મા અવલોકનની કિંમત

$= \left(\frac{600}{2}\right)$  મા અવલોકનની કિંમત

$= 300$  મા અવલોકનની કિંમત

$cf$  ના કોલમમાં જોતા, 300મા અવલોકનની કિંમત 180 - 200 ના વર્ગમાં સમાયેલી છે તેથી મધ્યસ્થનો વર્ગ 180-200 મળે.

$$\text{હવે, } M = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$$

અહીં,  $L = 180, \frac{n}{2} = 300, cf = 240, f = 100$  અને  $c = 20$  હેતાં,

$$M = 180 + \frac{300 - 240}{100} \times 20$$

$$= 180 + \frac{60 \times 20}{100}$$

$$= 180 + 12$$

$$= 192$$

$$\therefore M = ₹ 192$$

$$\text{વિષમતાંક } j = \frac{3(\bar{x} - M)}{s}$$

$$= \frac{3(181.87 - 192)}{44.61}$$

$$= \frac{-30.39}{44.61}$$

$$= -0.6812$$

$$j \approx -0.68$$

આમ, આપેલ વિતરણ ઝાણ વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણ છે.

**ઉદાહરણ 8 :** એક કંપનીના શેરના બજારભાવની પરિસ્થિતિમાં સામાન્ય સભા પહેલાં અને પદ્ધી થયેલ ફેરફાર અંગેની હકીકતોનાં માપો આપવામાં આવેલાં છે. આ બાબત ધ્યાનમાં લઈ કંપનીની સામાન્ય સભા દરમિયાન થયેલ કાર્યવાહીની બજાર ભાવ પર અસર થઈ છે કે નહીં તે અંગે તમારું મંતવ્ય વિષમતાંકની ગણતરી કરીને આપો.

વિગત	સામાન્ય સભા પહેલાં	સામાન્ય સભા પદ્ધી
શેરના સોદાની સંખ્યા	6000	5800
શેરના ભાવનો મધ્યક (₹)	440	460
શેરના ભાવનો મધ્યસ્થ (₹)	500	480
શેરના ભાવનું પ્રમાણિત વિચલન (₹)	60	52

સામાન્ય સભા પહેલાં અને પછી શેરના બજારભાવમાં થયેલ ફેરફાર માટે વિષમતાંક ગણી આપણે બંને સમયના શેરના ભાવના વિતરણ વિશે મંતવ્ય આપી શકીએ. અહીં મધ્યક, મધ્યસ્થ આપેલા છે તેથી નીચેના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી બંને પરિસ્થિતિ માટે વિષમતાંક શોધીશું.

#### સામાન્ય સભા પહેલાં વિષમતાંક :

$$j = \frac{3(\bar{x} - M)}{s}$$

$$= \frac{3(440 - 500)}{60}$$

$$= \frac{3(-60)}{60}$$

$$j = -3$$

#### સામાન્ય સભા પછી વિષમતાંક :

$$j = \frac{3(\bar{x} - M)}{s}$$

$$= \frac{3(460 - 480)}{52}$$

$$= \frac{3(-20)}{52}$$

$$j = -1.15$$

(1) બંને પરિસ્થિતિ માટે શેરના ભાવનાં વિતરણો ઋણ વિષમતા ધરાવે છે.

(2) સામાન્ય સભા પછી વિષમતાંકમાં ઘટાડો થયો છે. તેથી સામાન્ય સભાની કાર્યવાહીની બજારભાવ પર અંશતઃ અસર પડી છે એમ કહી શકાય.

**ઉદાહરણ 9 :** બે કિકેટરો દ્વારા 10 મેચોમાં કરેલા 2 ન અંગેની માહિતી નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી ક્યા કિકેટરની રમત વધુ વિષમ છે તે નક્કી કરો :

વિગત	કિકેટર A	કિકેટર B
મધ્યક $\bar{x}$	50	35
બહુલક $M_o$	56	31
પ્રમાણિત વિચલન $s$	14.4	5.2

આપેલી માહિતી પરથી બંને કિકેટરની રમત માટે વિષમતાંકની ગણતરી નીચે મુજબ કરીએ :

#### કિકેટર A વિષમતાંક :

$$j = \frac{\bar{x} - M_o}{s}$$

$$= \frac{50 - 56}{14.4}$$

$$= \frac{-6}{14.4}$$

$$j = -0.42$$

#### કિકેટર B વિષમતાંક :

$$j = \frac{\bar{x} - M_o}{s}$$

$$= \frac{35 - 31}{5.2}$$

$$= \frac{4}{5.2}$$

$$j = 0.77$$

બંને કિકેટરના 2 ન માટે મળેલ વિષમતાંકનાં નિચો અવગણતાં કિકેટર B માટેનું વિષમતાંક મૂલ્ય કિકેટર A માટેના વિષમતાંકના મૂલ્યથી વધુ છે તેથી કિકેટર Bની રમત વધુ વિષમ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 10 : નીચે જાણવેલ બે પેઢીના એક માસના બટાકાના વેચાણ (લાખ રૂપિયામાં) અંગે આવૃત્તિ-વિતરણનાં માપો પરથી કષું આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિતતાની વધુ નજીક છે તે નક્કી કરો.

પેઢી Aના બટાકાના વેચાણના વિતરણ માટેનાં માપો	પેઢીના Bના બટાકાના વેચાણના વિતરણ માટેનાં માપો
મધ્યક $\bar{x} = ₹ 40$	મધ્યક $\bar{x} = ₹ 45$
મધ્યસ્થ $M = ₹ 43$	મધ્યસ્થ $M = ₹ 40$
પ. વિચલન $s = ₹ 25$	પ. વિચલન $s = ₹ 16$

પેઢી Aના આવૃત્તિ-વિતરણ માટેનો વિષમતાંક :

$$\begin{aligned} j &= \frac{3(\bar{x}-M)}{s} \\ &= \frac{3(40-43)}{25} \\ &= \frac{3(-3)}{25} \\ &= -0.36 \\ j &= -0.36 \end{aligned}$$

પેઢીના Bના આવૃત્તિ-વિતરણ માટેનો વિષમતાંક :

$$\begin{aligned} j &= \frac{3(\bar{x}-M)}{s} \\ &= \frac{3(45-40)}{16} \\ &= \frac{3(5)}{16} \\ &= 0.9375 \\ j &= 0.94 \end{aligned}$$

આવૃત્તિ-વિતરણનો વિષમતાંક સંખ્યાત્મક રીતે (ચિહ્નનો અવગાણતાં) ઓછો હોય તે આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિતતાની વધુ નજીક છે એમ કહેવાય. અહીં, આવૃત્તિ-વિતરણ Aનો વિષમતાંક આવૃત્તિ-વિતરણ Bના વિષમતાંક કરતા સંખ્યાત્મક રીતે ઓછો છે તેથી આવૃત્તિ-વિતરણ B કરતાં આવૃત્તિ-વિતરણ A એ સંમિતતાની વધુ નજીક છે.

ઉદાહરણ 11 : એક શાળાના આંકડાશસ્ક્રનના વિષયના વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણના આવૃત્તિ-વિતરણનો મધ્યસ્થ 72 છે અને મધ્યક 75 ગુણ છે. આ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલા ગુણની વિષમતા શોધો અને વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.

અહીં, બહુલકની કિંમત આપેલ ન હોવાથી આપણે વિષમતા નીચેના સૂત્રથી મેળવીશું. મધ્યસ્થ  $M = 72$  અને મધ્યક  $\bar{x} = 75$  આપેલ છે.

$$\begin{aligned} \text{વિષમતા } S_k &= 3 (\bar{x} - M) \\ &= 3 (75 - 72) \\ &= 3(3) = 9 \text{ ગુણ} \end{aligned}$$

$$\therefore S_k = 9 \text{ ગુણ}$$

અહીં,  $S_k > 0$  હોવાથી વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણનું આવૃત્તિ-વિતરણ ધન વિષમતા ધરાવે છે.

### પ્રવૃત્તિ

તમારા વર્ગના બધા જ વિદ્યાર્થીઓ એક મહિનામાં કેટલા ડિવસ ગેરહાજર રહે છે તેની માહિતી એકઠી કરો. તે પરથી ગેરહાજર ડિવસોની સંખ્યાનું આવૃત્તિ-વિતરણ રચો. તે પરથી વિષમતાનાં નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપો મેળવો.

તે જ રીતે બીજા વર્ગની આ જ પ્રમાણે માહિતી એકઠી કરો. આવૃત્તિ-વિતરણ તૈયાર કરી વિષમતાના નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપ મેળવો. બંને વર્ગની માહિતીના આવૃત્તિ-વિતરણના આવૃત્તિવક્ત, ચુલનાંક અને વિષમતાંક મેળવી સરખામણી કરો.

### સ્વાધ્યાય 5.1

- નીચે આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ 59 ગ્રાહકો દ્વારા 500 મિલિ પેસ્યુરાઇઝ ટોન દૂધની કોથળીઓના જથ્થાની માંગને લગતું છે. આ માહિતીનો ઉપયોગ કરી કાર્લ પિયર્સનની રીતે વિષમતાંક શોધો.

દૂધની કોથળીઓની માંગ (અંકમ)	1	2	3	4	5	6	7	8
ગ્રાહકોની સંખ્યા	2	7	10	15	12	7	4	2

2. નીચેનું આવૃત્તિ-વિતરણ 270 ગ્રાહક દ્વારા ટી-શર્ટના જુદી જુદી ખભાની લંબાઈ (ઇંચમાં)ના આધારે કરેલ ખરીદી અંગેનું છે. તે માહિતીનો ઉપયોગ કરી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

ટી-શર્ટના ખભાની લંબાઈ (ઇંચ)	12.0	12.5	13.0	13.5	14.0	14.5	15.0	15.5	16.0
ગ્રાહકોની સંખ્યા	5	20	30	47	56	56	37	16	3

3. એક પ્રકારના કાર્યને પૂર્ણ કરવા માટે દરેક કામદારે લીધેલ સમયગાળો (પૂર્ણ મિનિટમાં) અંગેની માહિતી નીચે મુજબ જોવા મળી છે. આ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

લીધેલ સમયગાળો (પૂર્ણ મિનિટ)	5 - 9	10 - 14	15 - 19	20 - 24	25 - 29
કામદારોની સંખ્યા	3	8	4	2	1

4. આંકડાશાસ્ત્રના ધોરણ 11ના અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓએ આઈ.ટી.ની કંપનીઓના નફો (કરોડ રૂપિયામાં) અંગેની માહિતી એકઠી કરી છે. આ પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

કંપનીનો નફો (કરોડ રૂપિયા)	5 - 7	7 - 9	9 - 11	11 - 13	13 - 15	15 - 17
કંપનીઓની સંખ્યા	5	12	20	8	3	2

5. નીચે આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ 38 કંપનીઓના વાર્ષિક ધસારાની રકમ (લાખ રૂપિયામાં)ને લગતી છે. આ માહિતીનો ઉપયોગ કરી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો. વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.

વાર્ષિક ધસારાની રકમ (લાખ રૂ)	7	9	10	11 - 20	21 - 24	25 - 36
કંપનીઓની સંખ્યા	2	3	4	7	12	10

6. કાપડ બનાવતી 35 મિલોનો એક માસમાં રૂનો વપરાશ (હજાર ગાંસડીઓમાં) નીચે પ્રમાણે છે. આ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો. વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.

રૂ નો વપરાશ (હજાર ગાંસડીઓ)	0 - 2	2 - 6	6 - 12	12 - 20	20 - 22
મિલોની સંખ્યા	3	10	7	12	3

7. પર્યાટના એક સ્થળનું વર્ષ 2014ના 60 દિવસનું તાપમાન સેલ્વિયસમાં નીચે મુજબ છે. આ માહિતીનો ઉપયોગ કરી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો. વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.

તાપમાન સેલ્વિયસ	-3° થી -1°	-1° થી 5°	5° થી 11°	11° થી 19°	19° થી 23°	23° થી 27°
દિવસોની સંખ્યા	4	14	20	14	5	3

\*

#### 5.4.2 બાઉલીની પદ્ધતિ (Bowley's Method)

પ્રોફેસર એ. એલ. બાઉલીએ ચતુર્થકો આધારિત વિષમતાનું માપ આપેલ છે. આ માપ ચતુર્થકોની સ્થિતિ પર આધારિત છે. તેમાં મુખ્ય ધારણા લેવામાં આવેલ છે કે “વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં બંને ચતુર્થકો  $Q_1$  અને  $Q_3$  એ મધ્યસ્થ  $M$  ( $= Q_2$ )થી સરખે અંતરે હોતા નથી.” અહીં વિષમતા  $S_k$ નું નિરપેક્ષ માપ મેળવવા ચતુર્થકોનાં અંતરો  $Q_3 - M$  અને  $M - Q_1$ નો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

$$\text{અર્થાત્}, \text{વિષમતા} = S_k = (Q_3 - M) - (M - Q_1)$$

$$\therefore S_k = Q_3 + Q_1 - 2M$$

આપણે વિષમતાના બે પ્રકારનો અભ્યાસ કર્યો. તેમાં જોયું કે જો આવૃત્તિ-વિતરણ ધન વિષમતા ધરાવતું હોય, તો  $Q_3 - M > M - Q_1$  થાય.

$$\therefore Q_3 + Q_1 > 2M \text{ થાય.}$$

જો આવૃત્તિ-વિતરણ ઋણ વિષમતા ધરાવતું હોય તો  $Q_3 - M < M - Q_1$  થાય.

$$\therefore Q_3 + Q_1 < 2M \text{ થાય.}$$

અને જો આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિત હોય તો  $Q_3 - M = M - Q_1$  થાય.  $\therefore Q_3 + Q_1 = 2M$  હોય તો  $S_k = 0$  થાય.

ચતુર્થકો  $Q_1$  અને  $Q_3$  એ મધ્યરથ  $M$  થી મેળવેલ અંતરના તફાવતનાં મૂલ્યો  $Q_3 - M$  અને  $M - Q_1$ ના તફાવતનાં મૂલ્યોને તે મૂલ્યોના સરવાળા વડે ભાગવાથી વિષમતાનું સાપેક્ષ માપ વિષમતાંક  $j$  મળે છે. આમ, વિષમતાંક  $j$  માટે બાઉલીનું સૂત્ર નીચે મુજબ મળે છે :

$$j = \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{(Q_3 - M) + (M - Q_1)} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

આ સૂત્રના ઉપયોગથી મળતા વિષમતાના માપને બાઉલીનો વિષમતાંક કહે છે. આપણે જાણીએ છીએ કે  $(Q_3 - M)$  અને  $(M - Q_1)$  એમ બંને મૂલ્યો ધન હોય છે અને બે વાસ્તવિક સંખ્યાના નિરપેક્ષ મૂલ્યોના તફાવત તેના સરવાળા કરતાં નાના કે સરખા હોઈ શકે. તેથી  $\left| \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{(Q_3 - M) + (M - Q_1)} \right| \leq 1 \quad \therefore | \text{બાઉલીનો વિષમતાંક } j | \leq 1,$

$$\therefore -1 \leq j \leq 1. \text{ આમ બાઉલીનો વિષમતાંકનો વિસ્તાર } -1 \text{ થી } 1 \text{ સુધી હોય.}$$

નોંધ :

(1) જ્યારે ખુલ્લા છોડવાનું આવૃત્તિ-વિતરણ હોય ત્યારે આ જ પદ્ધતિથી વિષમતાના નિરપેક્ષ અને સાપેક્ષ માપ મેળવી શકાય.

(2) સ્થાનીય સરેરાશના ઉપયોગ એટલે કે ચતુર્થકો અને મધ્યરથના ઉપયોગથી વિષમતા મેળવવાની હોય ત્યારે બાઉલી પદ્ધતિ ઉપયોગી છે.

**ઉદાહરણ 12 :** વર્ષ ઋતુ દરમિયાન એક સ્થળે એક માસમાં થયેલા વરસાદ (સેમી)ની માહિતી નીચે મુજબ મળેલ છે, તો તે માહિતી પરથી બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો :

વરસાદ (સેમી)	6	7	13	5	15	20
દિવસોની સંખ્યા	10	5	3	8	3	2

સૌમયથ૮ થયેલાં વરસાદ (સેમી) અવલોકનોને ચઢતા કમમાં ગોઠવ્યા બાદ ચતુર્થકો  $Q_1$ ,  $Q_2 (= M)$  અને  $Q_3$  શોધીશું અને બાઉલીના સૂત્રની મદદથી વિષમતા અને વિષમતાંકની ગણતરી કરીશું.

વરસાદ (સેમી)	દિવસોની સંખ્યા $f$	$cf$
5	8	8
6	10	18
7	5	23
13	3	26
15	3	29
20	2	31
કુલ	$n = 31$	

$$\begin{aligned}
 \text{પ્રથમ ચતુર્થક } Q_1 &= \left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= \left(\frac{31+1}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= \frac{32}{4} \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= 8 \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &\quad cf \text{ ના કોલમમાં જોતાં, } 8 \text{ મા અવલોકનની કિંમત } 5 \text{ છે.} \\
 \therefore Q_1 &= 5 \text{ સેમી
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{મધ્યસ્થ } M &= \left(\frac{n+1}{2}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 M &= \left(\frac{31+1}{2}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= \frac{32}{2} \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= 16 \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &\quad cf \text{ ના કોલમમાં જોતાં, } 16 \text{ મા અવલોકનની કિંમત } 6 \text{ છે.} \\
 \therefore M &= 6 \text{ સેમી
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{તૃતીય ચતુર્થક } Q_3 &= 3 \left(\frac{n+1}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= 3 \left(\frac{31+1}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= 3 \left(\frac{32}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= 3(8) \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &= 24 \text{ મા અવલોકનની કિંમત} \\
 &\quad cf \text{ ના કોલમમાં જોતાં, } 24 \text{ મા અવલોકનની કિંમત } 13 \text{ છે.} \\
 \therefore Q_3 &= 13 \text{ સેમી
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{વિષમતા } S_k &= Q_3 + Q_1 - 2M \\
 &= 13 + 5 - 2(6) \\
 &= 18 - 12 \\
 &= 6 \\
 S_k &= 6 \text{ સેમી
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{વિષમતાંક } j &= \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} \\
 &= \frac{13+5-2(6)}{13-5} \\
 &= \frac{18-12}{8} \\
 &= \frac{6}{8} \\
 j &= 0.75
 \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 13 : વર્ષ 2014ના 100 દિવસમાં એક જ બેન્કની 5 શાખાઓમાં મળી દરેક દિવસે ક્રીલયરિંગ માટે આવેલા ચેકની સંખ્યાનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. આ પરથી બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો.

ચેકની સંખ્યા	0 - 199	200 - 399	400 - 599	600 - 799	800 - 999
દિવસોની સંખ્યા	10	13	17	42	18

બાઉલીનો વિષમતાંક શોધવા માટે ગ્રાફ ચતુર્થક  $Q_1$ , મધ્યસ્થ  $M (= Q_2)$  અને તૃતીય ચતુર્થક  $Q_3$ ની ગણતરી કરીશું.

ચેકની સંખ્યા	દિવસોની સંખ્યા $f$	$cf$
0 - 199	10	10
200 - 399	13	23
400 - 599	17	40
600 - 799	42	82
800 - 999	18	100
કુલ	$n = 100$	

$$\text{ગ્રાફ ચતુર્થક } Q_1 = \left( \frac{n}{4} \right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

$$= \left( \frac{100}{4} \right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

$$= 25 \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

$cf$  ના કોલમમાં જોતાં, 25 મા અવલોકનની કિંમત 400 - 599 ના વર્ગમાં સમાયેલી છે તેથી  $Q_1$  નો વર્ગ 400 - 599 મળે. ∴ વર્ગ સીમાબિંદુઓ મેળવતાં,  $Q_1$ નો વર્ગ 399.5 - 599.5 મળે.

$$\text{હવે, } Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - cf}{f} \times c$$

$$\text{અહીં, } L = 399.5, \frac{n}{4} = 25, cf = 23, f = 17 \text{ અને } c = 200 \text{ છે.}$$

$$Q_1 = 399.5 + \frac{25 - 23}{17} \times 200$$

$$= 399.5 + \frac{2 \times 200}{17}$$

$$= 399.5 + \frac{400}{17}$$

$$= 399.5 + 23.5294$$

$$= 423.0294$$

$$\therefore Q_1 = 423.03 \text{ એક}$$

$$\text{મધ્યસ્થ } M = \left( \frac{n}{2} \right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

$$= \left( \frac{100}{2} \right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

$$= 50 \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

$cf$  ના કોલમમાં જોતાં, 50 મા અવલોકનની કિંમત 600 - 799 ના વર્ગમાં સમાયેલી છે તેથી  $M$ નો અનિવારક વર્ગ 600-799 મળે. ∴ વર્ગ સીમાબિંદુઓ મેળવતાં,  $M$ નો વર્ગ 599.5 - 799.5 થાય.

$$\text{હવે, } M = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$$

અદ્ભુત,  $L = 599.5, \frac{n}{2} = 50, cf = 40, f = 42$  અને  $c = 200$  હો.

$$M = 599.5 + \frac{50-40}{42} \times 200$$

$$= 599.5 + \frac{10 \times 200}{42}$$

$$= 599.5 + \frac{2000}{42}$$

$$= 599.5 + 47.619$$

$$= 647.119$$

$$M \approx 647.12 \text{ રૂપાંક}$$

$$\text{તૃતીય ચતુર્થક } Q_3 = 3\left(\frac{n}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

$$= 3\left(\frac{100}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

$$= 3(25) \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

$$= 75 \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

$cf$  ના કોલમમાં જોતાં, 75 મા અવલોકનની કિંમતની 600 - 799 ના વર્ગમાં સમાયેલી છે તેથી  $Q_3$  નો અનિવાર્ય વર્ગ 600 - 799 મળે.  $\therefore$  વર્ગ સીમાબિંદુઓ મેળવતાં,  $Q_3$  નો વર્ગ 599.5 - 799.5 મળે.

$$\text{હવે, } Q_3 = L + \frac{\frac{3(n)}{4} - cf}{f} \times c$$

અદ્ભુત,  $L = 599.5, 3\left(\frac{n}{4}\right) = 75, cf = 40, f = 42$  અને  $c = 200$  હો.

$$Q_3 = 599.5 + \frac{75-40}{42} \times 200$$

$$= 599.5 + \frac{35 \times 200}{42}$$

$$= 599.5 + 166.6667$$

$$= 766.1667$$

$$\therefore Q_3 \approx 766.17 \text{ રૂપાંક}$$

$$\text{વિષમતાંક } j = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

$$j = \frac{766.17 + 423.03 - 2(647.12)}{766.17 - 423.03}$$

$$= \frac{1189.20 - 1294.24}{343.14}$$

$$= \frac{-105.04}{343.14}$$

$$= -0.3061$$

$$j \approx -0.31$$

આમ, આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ ઝડપ વિષમ છે તેમ કહેવાય.

ઉદાહરણ 14 : વર્ષ 2014-15માં 500 કંપનીઓના વેચાણ અંગેની માહિતીના આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી યોગ્ય પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો.

વેચાણ (હજાર ટન)	4 થી ઓછું	4 - 7	7 - 10	10 - 13	13 - 16	16 - 20	20 અને તેથી વધુ
કંપનીઓની સંખ્યા	26	119	198	86	39	20	12

આપેલ આવૃત્તિ-વિતરણ ખુલ્લા છેડાવાળું છે તેથી વિષમતાનું માપ બાંધુણી પદ્ધતિથી જ મળે. આ માટે પ્રથમ ચતુર્થક, મધ્યસ્થ અને તૃતીય ચતુર્થકની ગણતરી કરીશું.

વેચાણ (હજાર ટન)	કંપનીઓની સંખ્યા $f$	$cf$
4 થી ઓછું	26	26
4-7	119	145
7-10	198	343
10-13	86	429
13-16	39	468
16-20	20	488
20 અને તેથી વધુ	12	500
કુલ	$n = 500$	

$$\text{પ્રથમ ચતુર્થક } Q_1 = \left( \frac{n}{4} \right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

$$= \left( \frac{500}{4} \right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

$$= 125 \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

$cf$  ના કોલમમાં જોતાં, 125મા અવલોકનની કિંમત 4 - 7ના વર્ગમાં સમાયેલી છે તેથી  $Q_1$ નો વર્ગ 4 - 7 મળે.

$$\text{હવે, } Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - cf}{f} \times c$$

$$\text{અહીં, } L = 4, \frac{n}{4} = 125, cf = 26, f = 119 \text{ અને } c = 3 \text{ છે.}$$

$$Q_1 = 4 + \frac{125 - 26}{119} \times 3$$

$$= 4 + \frac{297}{119}$$

$$= 4 + 2.4958$$

$$= 6.4958$$

$$\therefore Q_1 \approx 6.50 \text{ હજાર ટન}$$

$$\text{મધ્યસ્થ } M = \left( \frac{n}{2} \right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

$$= \left( \frac{500}{2} \right) \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

$$= 250 \text{ મા અવલોકનની કિંમત}$$

$cf$  ના કોલમમાં જોતાં, 250મા અવલોકનની કિંમત 7 - 10ના વર્ગમાં સમાયેલી છે તેથી  $M$ નો વર્ગ 7 - 10 મળે.

$$\text{હવે, } M = L + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times c$$

અહીં,  $L = 7, \frac{n}{2} = 250, cf = 145, f = 198$  અને  $c = 3$  હૈ.

$$\begin{aligned} M &= 7 + \frac{250-145}{198} \times 3 \\ &= 7 + \frac{105 \times 3}{198} \\ &= 7 + \frac{315}{198} \\ &= 7 + 1.5909 \\ &= 8.5909 \\ \therefore M &\approx 8.59 \text{ હજાર ટન} \end{aligned}$$

તૃતીય ચતુર્થક  $Q_3 = 3\left(\frac{n}{4}\right)$  મા અવલોકનની કિમત

$$\begin{aligned} &= 3\left(\frac{500}{4}\right) \text{ મા અવલોકનની કિમત} \\ &= 3(125) \text{ મા અવલોકનની કિમત} \\ &= 375 \text{ મા અવલોકનની કિમત} \\ cf \text{ ના કોલમમાં જોતાં, } 375 \text{ મા અવલોકનની કિમત } 10 - 13 \text{ ના વર્ગમાં સમાપેલી છે તેથી } Q_3 \text{ નો વર્ગ } \\ &10 - 13 \text{ મળે.} \end{aligned}$$

$$\text{હવે, } Q_3 = L + \frac{\frac{3(n)}{4} - cf}{f} \times c$$

અહીં,  $L = 10, 3\left(\frac{n}{4}\right) = 375, cf = 343, f = 86$  અને  $c = 3$  હૈ.

$$\begin{aligned} Q_3 &= 10 + \frac{375-343}{86} \times 3 \\ &= 10 + \frac{32 \times 3}{86} \\ &= 10 + \frac{96}{86} \\ &= 10 + 1.1163 \\ &= 11.1163 \\ \therefore Q_3 &\approx 11.12 \text{ હજાર ટન} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{વિષમતાંક } j &= \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} \\
 j &= \frac{11.12 + 6.5 - 2(8.59)}{11.12 - 6.5} \\
 &= \frac{17.62 - 17.18}{4.62} \\
 &= \frac{0.44}{4.62} \\
 &= 0.0952 \\
 \therefore j &\approx 0.10
 \end{aligned}$$

આમ, આવૃત્તિ-વિતરણ ધન વિષમતા ધરાવે છે. વિષમતાંક શુદ્ધયની નજીક છે તેથી આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિતતાની નજીક છે તેમ કહેવાય.

**ઉદાહરણ 15 :** એક કંપનીના કર્મચારીઓના માસિક ઓવરટાઈમના કલાકોને લગતા આવૃત્તિ-વિતરણમાં બે અંતિમ ચતુર્થકોનો સરવાળો 218 અને તેમના તરફાવત 50 છે. જો વિતરણનો મધ્યસ્થ 112 હોય તો વિષમતાંક શોધો.

$$\text{અહીં, } Q_3 + Q_1 = 218, Q_3 - Q_1 = 50, M = 112$$

$$\begin{aligned}
 \text{વિષમતાંક } j &= \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} \\
 &= \frac{218 - 2(112)}{50} \\
 &= \frac{218 - 224}{50} \\
 &= \frac{-6}{50} \\
 j &= -0.12
 \end{aligned}$$

**ઉદાહરણ 16 :** એક સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણમાં બહુલક 84 છે. જો પ્રથમ ચતુર્થક 68 હોય તો ત્રીજો ચતુર્થક શોધો.

આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિત છે તેથી વિષમતાંક  $j = 0$  થાય.  $\bar{x} = M = M_o$  છે તેથી  $M = M_o = 84, M = 84$  અને  $Q_1 = 68$  ડે.

$$\begin{aligned}
 j &= \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} \\
 \therefore 0 &= \frac{Q_3 + 68 - 2(84)}{Q_3 - 68} \\
 \therefore 0 &= (Q_3 - 68) = Q_3 + 68 - 168 \\
 \therefore 0 &= Q_3 - 100 \\
 \therefore Q_3 &= 100
 \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 17 : એક શાળાના વિદ્યાર્થીઓના વાર્ષિક પરીક્ષાના એક જ વિષયના પરિણામના ગુણની માહિતી નીચે મુજબ પ્રાપ્ત થયેલ છે. જેમાં 25 % વિદ્યાર્થીઓના ગુણ 28 ગુણ કરતાં ઓછા મળેલ છે. જ્યારે અન્ય 75 % વિદ્યાર્થીઓના ગુણ 47 ઓછા મળેલ છે. જો વિદ્યાર્થીઓના ગુણનો વિષમતાંક 0.4 હોય તો મધ્યસ્થ શોધો.

અહીં 25 % અવલોકનની કિંમત 28 ગુણ કરતાં ઓછા છે.  $\therefore Q_1 = 28$

75 % અવલોકનની કિંમત 47 ગુણ કરતાં ઓછા છે.  $\therefore Q_3 = 47, j = 0.4$

$$\text{હવે } j = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

$$\therefore 0.4 = \frac{47 + 28 - 2M}{47 - 28}$$

$$\therefore 0.4 = \frac{75 - 2M}{19}$$

$$\therefore 0.4 \times 19 = 75 - 2M$$

$$7.6 = 75 - 2M$$

$$\therefore 2M = 75 - 7.6$$

$$\therefore 2M = 67.4$$

$$\therefore M = 33.7 \text{ ગુણ}$$

### 5.5 વિષમતાંક મેળવવાની બંને પદ્ધતિઓની તુલના

કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિ અને બાઉલીની પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી શોધેલ વિષમતાંકની કિંમત સામાન્ય રીતે સરખી મળતી નથી કારણ કે બંને પદ્ધતિઓમાં સરેરાશનાં બિન્ન માપોનો ઉપયોગ થાય છે. કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિમાં સરેરાશ માપ મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલક તદ્દુપરાંત પ્રમાણિત વિચલનનો પણ ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. જ્યારે બાઉલીની પદ્ધતિમાં વિષમતાંક શોધવા સ્થાનીય માપો ચતુર્થકોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આમ, બંને પદ્ધતિઓમાં વિષમતાંકની ગણતરી કરવામાં બિન્ન માપોનો ઉપયોગ થાય છે.

બાઉલીની પદ્ધતિની રીતે વિષમતાંક મેળવવાની ગણતરી એ કાર્લ પિયર્સનની રીતે વિષમતાંક મેળવવાની ગણતરી કરતા સરળ છે.

કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી મેળવેલ વિષમતાંકની કિંમત બાઉલીની પદ્ધતિ દ્વારા શોધેલ વિષમતાંક કરતા વધુ વિશ્વસનીય છે કારણ કે બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધવામાં ચતુર્થકોનો ઉપયોગ થાય છે. ચતુર્થકો શોધવા માટે માહિતીના ફક્ત મધ્યનાં 50 % અવલોકનોનો ઉપયોગ થાય છે. કાર્લ પિયર્સનની રીતમાં વિષમતાંક શોધવામાં મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલનનો ઉપયોગ થાય છે. જેમાં માહિતીનાં તમામ અવલોકનો ઉપયોગમાં લેવાય છે.

ખુલ્લા છેડાવાળા આવૃત્તિ-વિતરણમાં વિષમતા અને વિષમતાંક બાઉલીની પદ્ધતિથી જ શોધી શકાય છે. ખુલ્લા છેડાવાળા આવૃત્તિ-વિતરણમાં કાર્લ પિયર્સનની રીતમાં ઉપયોગી મધ્યક અને પ્રમાણિત વિચલનનાં માપ મેળવી શકતા નથી. કાર્લ પિયર્સનની રીતમાં વિષમતાંક શોધવા માટે વિષમતાના નિરપેક્ષ માપ  $\bar{x} - M_o$  ને પ્રમાણિત વિચલનનાં માપ વડે ભાગવામાં આવે છે જ્યારે બાઉલીની રીતથી વિષમતાંક શોધવા માટે વિષમતાના નિરપેક્ષ માપ  $(Q_3 - M) - (M - Q_1)$  ને  $(Q_3 - Q_1)$  વડે ભાગવામાં આવે છે. આપણે એ બાબતને પણ સમજવી જોઈએ કે બાઉલીની પદ્ધતિના સૂત્ર અને કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિના સૂત્રથી મેળવેલ કિંમતોની તુલના યોગ્ય નથી. જો વિષમતાંક  $j = 0$  હોય તો તે એવું સૂચયે છે કે વિષમતાનો અભાવ છે એટલે કે આવૃત્તિ-વિતરણ સંભિત છે. જોકે  $j = 0$  હોય છતાં આવા ડિસ્સામાં આવૃત્તિ-વિતરણનો આવૃત્તિવક્ષ ધન કે ઋણ વિષમતા દર્શાવતો હોય તેવું બની શકે.

ઉદાહરણ 18 : બે શહેરમાં રહેતા લોકોની માસિક આવક અંગેની માહિતીનાં માપો નીચે મુજબ મળેલ છે. તે પરથી કાર્લ પિયર્સન અને બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો.

વિગતો	શહેર A	શહેર B
મધ્યક $\bar{x}$	300	280
મધ્યરથ $M$	284	310
પ્રમાણિત વિચલન $s$	60	110
પ્રથમ ચતુર્થક $Q_1$	124	160
તૃતીય ચતુર્થક $Q_3$	390	520

શહેર A :

કાર્લ પિયર્સનની રીતે વિષમતાંક :

$$\begin{aligned}
 j &= \frac{3(\bar{x} - M)}{s} & j &= \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} \\
 &= \frac{3(300 - 284)}{60} & &= \frac{390 + 124 - 2(284)}{390 - 124} \\
 &= \frac{3(16)}{60} & &= \frac{514 - 568}{266} \\
 &= \frac{48}{60} & &= \frac{-54}{266} \\
 j &= 0.8 & &= -0.203 \\
 && j &= -0.2
 \end{aligned}$$

શહેર B :

કાર્લ પિયર્સનની રીતે વિષમતાંક :

$$\begin{aligned}
 j &= \frac{3(\bar{x} - M)}{s} & j &= \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1} \\
 &= \frac{3(280 - 310)}{110} & &= \frac{520 + 160 - 2 \times 310}{520 - 160} \\
 &= \frac{3(-30)}{110} & &= \frac{680 - 620}{360} \\
 &= \frac{-9}{11} & &= \frac{60}{360} \\
 \therefore j &\approx -0.82 & \therefore j &\approx 0.17
 \end{aligned}$$

શહેર A માં કાર્લ પિયર્સનની રીતે ધન વિષમતાંક અને બાઉલીની રીતે ઋણ વિષમતાંક મળે છે. જ્યારે શહેર B માં કાર્લ પિયર્સનની રીતે ઋણ વિષમતાંક અને બાઉલીની રીતે ધન વિષમતાંક મળે છે. તેથી બંને પદ્ધતિથી મળેલા વિષમતાંકની તુલના યોગ્ય નથી. કોઈ એક જ પ્રકારની પદ્ધતિએ સરખામણી કરવી હિતાવણ છે.

## સ્વાધ્યાય 5.2

1. એક જમખાનામાં કસરત કરતાં જુદાં-જુદાં યુવાનોની ઉમર(વર્ષમાં)ના નીચેના આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો અને વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.

ઉમર(વર્ષમાં)	25	17	20	18	26	22	28	23
યુવાનોની સંખ્યા	22	4	19	11	7	9	3	8

2. 31 ઔદ્યોગિક ઉત્પાદન કરતી કંપનીઓએ બહાર પાઢેલ શેરમૂડીમાંથી ભરપાઈ થયેલ મૂડી અંગેનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. તે પરથી બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો અને તેનો પ્રકાર જણાવો.

ભરપાઈ થયેલ મૂડી (લાખ રૂપિયા)	100 થી ઓછી	300 થી ઓછી	500 થી ઓછી	700 થી ઓછી	900 થી ઓછી	1100 થી ઓછી	1300થી ઓછી
કંપનીઓની સંખ્યા	0	6	16	19	23	27	31

3. 2014 – 15 ના વર્ષ દરમિયાન 400 કંપનીઓના વેચાણ (હજાર ટન) અંગેનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. આ માહિતી પરથી બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો અને વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.

વેચાણ (હજાર ટન)	20થી ઓછું	20–40	40–50	50–75	75–90	90–120	120 અને વધુ
કંપનીઓની સંખ્યા	30	70	125	100	40	20	15

4. વીમા કંપનીની એક બ્રાચમાં તેના એજન્ટોને એક માસમાં વીમા પોલિસીની રકમ પર ચૂકવેલ કમિશનનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. તે પરથી બાઉલીની પદ્ધતિએ વિષમતાંક શોધો.

કમિશનની ચૂકવણી (હજાર રૂપિયા)	10–12	12–14	14–16	16–18	18–20	20–22	22–24	24–26	26–28	28–30
એજન્ટોની સંખ્યા	4	10	16	29	52	80	32	23	17	1

\*

### સારાંશ

- આવૃત્તિ-વિતરણના સામાન્ય રીતે બે પ્રકારના જોવા મળે છે :
  - (1) સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણ અને (2) વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણ
- સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણમાં મધ્યક, મધ્યસ્થ અને બહુલકની કિંમતો સમાન હોય છે તથા તેનાં આવૃત્તિવક સામાન્ય રીતે ઘંટાકાર સ્વરૂપનાં જોવા મળે છે.
- વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં તેના આવૃત્તિવકનો ડાબી બાજુ અથવા જમણી બાજુના છેડો વધુ લંબાયેલો હોય છે.
- જે આવૃત્તિવકમાં ડાબી બાજુનો છેડો વધુ લંબાયેલો હોય તેને ઋણ વિષમ આવૃત્તિવક કહીશું અને જમણી તરફનો છેડો વધુ લંબાયેલો હોય તેને ધન વિષમ આવૃત્તિવક કહીશું.
- વિષમતા માપવા માટે બે પ્રકારનાં માપ વપરાય છે :
  - (1) નિરપેક્ષ માપ (વિષમતા) (2) સાપેક્ષ માપ (વિષમતાંક)
- વિષમતાના માપની ગણતરી કરવા માટે કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિ અથવા બાઉલીની પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.
- વિષમતાના સાપેક્ષ માપને વિષમતાંક કહેવામાં આવે છે.
- વિષમતાંકનો વિસ્તાર સામાન્ય રીતે – 1 થી + 1 સુધી હોય છે. વિશેષ સંજોગોમાં વિષમતાંકનું માપ – 3 થી + 3 સુધી હોય છે.

### સૂત્રોની યાદી :

કાર્લ પિયર્સન રીતનાં સૂત્રો	બાઉલીની રીતનાં સૂત્રો
<p style="text-align: center;"><b>નિરપેક્ષ માપ</b></p> <p>(1) બહુલક સ્પષ્ટ (વ્યાખ્યાપિત) હોય ત્યારે વિષમતા <math>S_k = \bar{x} - M_o</math></p> <p>(2) બહુલક બે કે તેથી વધારે હોય અથવા બહુલક અસ્પષ્ટ હોય ત્યારે વિષમતા <math>S_k = 3(\bar{x} - M)</math></p>	<p style="text-align: center;"><b>નિરપેક્ષ માપ</b></p> <p>વિષમતા <math>S_k = (Q_3 - M) - (M - Q_1)</math> <math>= Q_3 + Q_1 - 2M</math></p>
<p style="text-align: center;"><b>સાપેક્ષ માપ</b></p> <p>(1) બહુલક સ્પષ્ટ હોય ત્યારે વિષમતાંક <math>j = \frac{\bar{x} - M_o}{s}</math></p> <p>(2) બહુલક બે કે તેથી વધારે હોય અથવા બહુલક અસ્પષ્ટ હોય ત્યારે વિષમતાંક <math>j = \frac{3(\bar{x} - M)}{s}</math>.</p>	<p style="text-align: center;"><b>સાપેક્ષ માપ</b></p> <p>વિષમતાંક <math>j = \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{(Q_3 - M) + (M - Q_1)}</math></p> <p><math>j = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}</math></p>

### સ્વાધ્યાય 5

#### વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

- જો માહિતીમાં બહુલક અવ્યાખ્યાપિત હોય, તો સામાન્ય સંજ્ઞોમાં તેની વિષમતાંકનો વિસ્તાર કેટલો હોય ?  
(a) 0 થી 1 સુધી      (b) -1 થી +1 સુધી      (c) -3 થી +3 સુધી      (d) -1 થી 0
- એક આવૃત્તિ-વિતરણ ઋણ વિષમતા ધરાવે છે, તો આવૃત્તિ-વિતરણના મધ્યકનું મૂલ્ય કેટલું હશે ?  
(a) બહુલક કરતાં વધારે      (b) બહુલક કરતાં ઓછું  
(c) બહુલકની બરાબર      (d) મધ્યક વિશે કંઈ કહી શકાય નહિ.
- બે વિતરણના માપ નીચે મુજબ છે. નીચેનામાંથી ક્યું વિધાન સાચું છે ?  
વિતરણ (i) મધ્યક = 44, મધ્યરથ = 48 અને પ્ર. વિચલન = 20  
વિતરણ (ii) મધ્યક = 44, મધ્યરથ = 50 અને પ્ર. વિચલન = 24  
(a) વિતરણ (i) અને (ii) બંને સરખા પ્રમાણમાં વિષમતા ધરાવે છે.  
(b) વિતરણ (i) એ વિતરણ (ii) કરતાં વધારે વિષમતા ધરાવે છે.  
(c) વિતરણ (i) એ (ii) કરતાં ઓછી વિષમતા ધરાવે છે.  
(d) આપેલી માહિતી પરથી વિષમતા વિશે કંઈ કહી શકાય નહિ.

4. નીચે મુજબ ત્રણ આવૃત્તિ-વિતરણ માટે મધ્યવર્તી સ્થિતિનાં બે માપ આપવામાં આવેલ છે. ત્રણોએ આવૃત્તિ-વિતરણો એક બહુલકીય છે. આ ત્રણોએ આવૃત્તિ-વિતરણો કેવા પ્રકારની વિષમતા ધરાવે છે તે જણાવો.
- (i) આવૃત્તિ-વિતરણ A માં બહુલક = 100 અને મધ્યક = 116
  - (ii) આવૃત્તિ-વિતરણ B માં મધ્યસ્થ = 142.8 અને મધ્યક = 142.8
  - (iii) આવૃત્તિ-વિતરણ C માં મધ્યસ્થ = 208 અને મધ્યક = 192
- (a) આવૃત્તિ-વિતરણ A સંમિત, આવૃત્તિ-વિતરણ B ઋણ વિષમ અને આવૃત્તિ-વિતરણ C ધન વિષમ છે.
  - (b) આવૃત્તિ-વિતરણ A ઋણ વિષમ, આવૃત્તિ-વિતરણ B ધન વિષમ અને આવૃત્તિ-વિતરણ C સંમિત છે.
  - (c) આવૃત્તિ-વિતરણ A ધન વિષમ, આવૃત્તિ-વિતરણ B સંમિત અને આવૃત્તિ-વિતરણ C ઋણ વિષમ છે.
  - (d) આવૃત્તિ-વિતરણ A ધન વિષમ, આવૃત્તિ-વિતરણ B ઋણ વિષમ અને આવૃત્તિ-વિતરણ C સંમિત છે.
5. એક આવૃત્તિ-વિતરણમાં બહુલક એ મધ્યક કરતાં 2 વધારે છે. આ આવૃત્તિ-વિતરણ કેવા પ્રકારનું છે ?
- (a) ઋણ વિષમ છે. (b) સંમિત છે. (c) ધન વિષમ છે. (d) કદ્દિ શકાય નાહિએ.
6. આવૃત્તિ-વિતરણમાં જો  $Q_3 + Q_1 = 60$  અને  $M = 30$  હોય, તો તેની વિષમતા માટે કયું વિધાન સાચું છે.
- (a) આવૃત્તિ-વિતરણ વધુ વિષમ છે. (b) આવૃત્તિ-વિતરણ ઓદ્ધું વિષમ છે.
  - (c) આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિતતાનો અભાવ છે. (d) આવૃત્તિ-વિતરણ સંમિતતા ધરાવે છે.
7. એક સાધારણ અસંમિત આવૃત્તિ-વિતરણમાં (મધ્યક - મધ્યસ્થ) એ(મધ્યક - બહુલક) થી કેટલા ગણો થાય ?
- (a) 3 (b) -1 (c)  $\frac{1}{3}$  (d) 0
8. ઋણ વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણ માટે કયું વિધાન ખોટું છે ?
- (a) મધ્યકની કિંમત મધ્યસ્થ અને બહુલકની કિંમત કરતાં ઓછી હોય છે.
  - (b) ગ્રીજો ચતુર્થક અને મધ્યસ્થ વર્ચ્યેના અંતરનું મૂલ્ય, મધ્યસ્થ અને પ્રથમ ચતુર્થક વર્ચ્યેના અંતરના મૂલ્ય કરતાં ઓદ્ધું હોય છે.
  - (c) આવૃત્તિ-વિતરણમાં આવૃત્તિવકનો છેડો ડાબી બાજુ વધુ બેંચાયેલો હોય છે.
  - (d) ગ્રીજો ચતુર્થક અને મધ્યસ્થ વર્ચ્યેનાં અંતરનું મૂલ્ય, મધ્યસ્થ અને પ્રથમ ચતુર્થક વર્ચ્યેના અંતરના મૂલ્ય કરતાં વધારે હોય છે.
9. સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણ માટે કયું વિધાન સાચું છે ?
- (a)  $Q_3 = 2M - Q_1$  (b)  $Q_2 - Q_3 = Q_2 - Q_1$  (c)  $Q_3 + Q_1 > 2M$  (d)  $Q_3 + Q_1 < 2M$
10. જો  $(M - \bar{x}) = -\frac{1}{2} s$  તો  $j$  ની કિંમત કેટલી થાય ?
- (a)  $-\frac{1}{3}$  (b)  $\frac{3}{2}$  (c)  $= -1.5$  (d) 0.15
11. (i) ઋણવિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં અને (ii) ધન વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં મધ્યવર્તી સ્થિતિના કયા માપની કિંમત સૌથી વધુ હોય છે ?
- (a) (i) મધ્યક (ii) બહુલક (b) (i) મધ્યસ્થ (ii) બહુલક
  - (c) (i) બહુલક (ii) મધ્યક (d) મધ્યક, મધ્યસ્થ, બહુલકની કિંમત વિશે કંઈ કહી શકાય નાહિએ
12. વિતરણ X નો વિષમતાંક - 0.99 અને વિતરણ Y નો વિષમતાંક 0.90 હોય, તો નીચેનામાંથી કયું વિધાન સાચું છે ?
- (a) વિતરણ X વધુ વિષમ છે. (b) વિતરણ Y વધુ વિષમ છે.
  - (c) કંઈ કહી શકાય નાહિએ. (d) વિતરણ X અને વિતરણ Y ની વિષમતા સરખા પ્રમાણમાં છે.

13. નીચેના પૈકી ક્યું વિધાન ખોટું છે તે જણાવો.

- (a)  $Q_3 + Q_1 > 2M$  હોય તો વિતરણ ધન વિષમતા ધરાવે છે.
- (b) સ્થાનીય સરેરાશના ઉપયોગથી બાઉલીનો વિષમતાંક શોધવામાં આવે છે.
- (c) કાર્લ પિયર્સનની રીતમાં ચલની એકમની અસર દૂર કરવા નિરપેક્ષ માપને પ્રમાણિત વિથલન વડે ભાગવામાં આવે છે. જ્યારે બાઉલીની પદ્ધતિમાં ચતુર્થકના તફાવત વડે નિરપેક્ષ માપને ભાગવામાં આવે છે.
- (d) વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં બહુલકની બંને બાજુ સરખે અંતરે આવેલ અવલોકનની આવૃત્તિ સમાન રીતે વિતરિત થયેલ હોય છે.

14. નીચેના પૈકી ક્યું વિધાન સાચું છે તે જણાવો.

- (a) જે સમાણના અવલોકનો બહુલકની કિંમતથી બંને બાજુ સમાન રીતે વિતરિત હોય તેને વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણ કહે છે.
- (b) મધ્યસ્થથી અંતિમ ચતુર્થકોના અંતરના તફાવતનાં મૂલ્યો સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણમાં સમાન હોય છે.
- (c) જે  $S_k > 0$ , તો  $\bar{x} > M_o$  અને  $\bar{x} < M_o$  થાય.
- (d) જે  $S_k < 0$  હોય તો  $\bar{x} < M_o$  અને  $\bar{x} > M_o$

### વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. વિષમતા એટલે શું ?
2. સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણ કોને કહેવાય ?
3. આવૃત્તિ-વિતરણમાં વિષમતા છે તેમ ક્યારે કહેવાય ?
4. વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણમાં મધ્યસ્થના સ્થાન વિશે શું કહેશો ?
5. આવૃત્તિવક દ્વારા વિષમતા કેવી રીતે નક્કી થાય છે તે સમજાવો.
6. વિષમતાંક એટલે શું ? વિષમતાંકની કિંમતનો વિસ્તાર જણાવો.
7. કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિમાં વિષમતાનું માપ મેળવવા માટે કયાં કયાં માપોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે ?
8. બાઉલીની પદ્ધતિમાં વિષમતાનું માપ મેળવવાનો આધાર જણાવો.
9. કઈ પદ્ધતિથી મેળવેલ વિષમતાંકની કિંમત વધુ વિશ્વસનીય છે ?
10. વિષમતાંક સાપેક્ષ માપ છે કે નિરપેક્ષ માપ ? કારણ આપો.
11. જ્યારે ખુલ્લા છેડાવાળા આવૃત્તિ-વિતરણ અને આવૃત્તિ-વિતરણમાં એક કરતાં વધુ બહુલક હોય તારે વિષમતાંક કયા સૂત્રથી મેળવશો ?
12. અસમાન વર્ગાંભાઈવાળા આવૃત્તિ-વિતરણમાં કાર્લ પિયર્સન પદ્ધતિથી વિષમતાંકના મૂલ્યનો વિસ્તાર જણાવો.
13. એક આવૃત્તિ-વિતરણના ત્રણ ચતુર્થકો 42, 36 અને 40 છે, તો તે આવૃત્તિ-વિતરણનો પ્રકાર જણાવો.
14. જે કોઈ આવૃત્તિ-વિતરણમાં  $(Q_3 - Q_1) < (Q_2 - Q_1)$  હોય તો આવૃત્તિ-વિતરણની વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.
15. એક માહિતીના આવૃત્તિ-વિતરણનો મધ્યક તેના મધ્યસ્થ કરતાં 2 જેટલો ઓછો છે, તો તે આવૃત્તિ-વિતરણની વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.
16. એક માહિતી માટે  $Q_3 + Q_1 = 125$  અને  $M = 62.5$  છે, તો આવૃત્તિ-વિતરણની વિષમતા અંગે શું કહી શકાય ?
17. એક આવૃત્તિ-વિતરણમાં  $\bar{x} = M = M_o = 48$  છે. આ આવૃત્તિ-વિતરણના વિષમતાંક અંગે શું કહી શકાય ?

### વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. વિષમતાના પ્રકાર કેટલા છે અને કયા કયા છે તે જણાવો.
2. વિષમતાના પ્રકાર, સરેરાશનાં માપ તથા ચતુર્થકોનાં સ્થાન આકૃતિમાં દર્શાવો.
3. સંભિત આવૃત્તિ-વિતરણનાં કોઈ પણ બે લક્ષણો જણાવો.
4. વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણનાં કોઈ પણ બે લક્ષણો જણાવો.
5. એક આવૃત્તિ-વિતરણની વિષમતા  $S_k = -2.8$  છે. જો તેનો બહુલક 48.8 હોય તો મધ્યક શોધો.
6. સંભિત આવૃત્તિ-વિતરણમાં બે અંતિમ ચતુર્થકોનો સરવાળો 138 છે, તો તેનો મધ્યસ્થ કેટલો થાય ?
7. એક ધન વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણનો વિષમતાંક 0.75 છે. જો પ.વિચલન 20 અને મધ્યક 37.50 હોય તો મધ્યસ્થ શોધો.
8. એક વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણનો મધ્યક તેના મધ્યસ્થથી 3 જેટલો વધુ છે. જો આવૃત્તિ-વિતરણનો વિષમતાંક 0.75 હોય, તો પ્રમાણિત વિચલન શોધો.
9. એક આવૃત્તિ-વિતરણમાં  $Q_3 - Q_1 = 2(Q_2 - Q_1)$  હોય તો  $j$  શોધો.
10. એક આવૃત્તિ-વિતરણમાં વિષમતા  $S_k = -6.6$  અને ચતુર્થક વિચલન = 22 હોય તો  $j$  શોધો.
11. એક વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણ માટે મધ્યક = 40, બહુલક = 46,  $Q_3 + Q_1 = 76$  અને  $Q_3 - Q_1 = 20$  છે, તો બાઉલીનો વિષમતાંક શોધો.
12. ‘બાઉલીની પદ્ધતિથી મેળવેલ વિષમતાંક, કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી મેળવેલ વિષમતાંક કરતાં વધુ વિશ્વસનીય નથી’ તે વિધાન સમજાવો.
13. એક આવૃત્તિ-વિતરણના ત્રણ ચતુર્થકો 76, 98 અને 40 છે, તો  $j$  શોધો અને તે વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.
14. કોઈ એક આવૃત્તિ-વિતરણનો વિષમતાંક 0.85 છે. જો તેનો મધ્યક બહુલકથી 3.4 જેટલો વધારે હોય તો તેનું વિચલન શોધો.
15. કોઈ એક આવૃત્તિ-વિતરણમાં  $\bar{x} + M_o = 82$ ,  $\bar{x} = 44$  અને  $s = 12$  હોય તો વિષમતાંક શોધો.

### વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. કાર્લ પિયર્સનની વિષમતાંક શોધવાની રીત ટૂકમાં સમજાવો.
2. વિષમતાંક શોધવાની બાઉલીની રીત પર ટૂક નોંધ લખો.
3. કાર્લ પિયર્સનના સૂત્ર  $j = 3 \left( \frac{\bar{x} - M}{s} \right)$  નો ઉપયોગ કયા સંજોગોમાં કરી વિષમતાંક શોધવામાં આવે છે તે જણાવો.
4. ધન વિષમતા અને ઋણ વિષમતાનો તફાવત મુદ્દાસર અને આકૃતિ સહિત આપો.
5. નીચેનામાંથી કઈ સમાણ સંભિતતાની વધુ નજીક છે ?
  - સમાણ A :  $\bar{x} = 56, M_o = 60$  અને  $s = 24$
  - સમાણ B :  $\bar{x} = 56, M = 60$  અને  $s = 30$
6. નીચેની માહિતી પરથી યોગ્ય પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરી વિષમતાંક શોધો અને સમાણ A અને સમાણ B માંથી કઈ સમાણ વધારે વિષમ છે તે નક્કી કરો :
  - સમાણ A :  $4Q_1 = 3Q_2 = 2Q_3 = 144$
  - સમાણ B :  $Q_1 = 34.8, Q_2 = 45.5$  અને  $Q_3 = 70$
7. એક આવૃત્તિ-વિતરણમાં મધ્યસ્થથી તૃતીય ચતુર્થક 12.8 જેટલા અંતરે અને મધ્યસ્થથી પ્રથમ ચતુર્થક 11.2 જેટલા અંતરે છે, તો વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો.

8. એક માહિતી માટે ચલનાંક 25 %,  $\bar{x} = 32$  અને  $M_o = 32.2$  છે, તો તેનો વિષમતાંક શોધો.
9. નીચેની માહિતીનો ઉપયોગ કરી તેનો વિષમતાંક શોધો :
- $$n = 20, \Sigma x = 640, \Sigma x^2 = 20,800 \text{ અને } M = 32.2$$
10. એક માહિતી માટે કાર્લ પિયર્સનનો વિષમતાંક  $-0.60$  છે. જો મધ્યક  $= 60$  અને  $s = 10$  હોય, તો તે માહિતીનો મધ્યસ્થ અને બહુલક શોધો.
11. એક આવૃત્તિ-વિતરણ માટે કાર્લ પિયર્સનની વિષમતા 8 અને વિષમતાંક  $= \frac{2}{3}$  છે. જો તેનો મધ્યક 64 હોય, તો તેનો મધ્યસ્થ અને ચલનાંક શોધો.
12. એક આવૃત્તિ-વિતરણમાં  $Q_3 + Q_1 = 1.5 M$  અને  $3(Q_3 - Q_1) = 2M$  હોય તો વિષમતાંક શોધો.
13. એક આવૃત્તિ-વિતરણ માટે  $4\bar{x} = 6M_o = 144$ ,  $s = 64$  અને  $Q_3 + Q_1 = 6(Q_3 - Q_1) = 60$  હોય, તો કાર્લ પિયર્સનની અને બાઉલી પદ્ધતિથી વડે વિષમતાંક શોધો.

### વિભાગ E

નીચેના આપેલા પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

- વિષમ આવૃત્તિ-વિતરણની વ્યાખ્યા આપો અને તેનાં લક્ષણો જણાવો.
- સંમિત આવૃત્તિ-વિતરણની વ્યાખ્યા આપો અને તેનાં લક્ષણો આપો.
- વિષમતાંક માટેની કાર્લ પિર્સન અને બાઉલીની રીતનો તફાવત આપો.
- વિષમતા અને વિષમતાંક સમજાવો.
- વિષમતાના અભ્યાસના મુખ્ય હેતુઓ કયા છે ?
- બે ઉત્પાદક પેઢીઓના માસિક વેતનને લગતાં આવૃત્તિ-વિતરણનાં માપ નીચે પ્રમાણે છે. બાઉલી અને કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધી બંને પેઢીની તુલના કરી.

વિગતો	મધ્યક	મધ્યસ્થ	પ્રથમ ચતુર્થક	ત્રીજો ચતુર્થક	પ્રમાણિત વિચલન
પેઢી A	350	344	324	356	26
પેઢી B	360	340	330	370	38

7. સ્ટેશનરીની એક દુકાને વર્ષ 2014 ના જૂન માસ દરમિયાનનું થયેલ નોટબુકના વેચાણ અંગેનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. તે પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો.

નોટબુકનું વેચાણ (ડાન)	30	25	21	20	18	16	15	12
દિવસોની સંખ્યા	2	2	7	3	4	7	2	3

8. 500 સ્ટેપલરનું એક એવાં 50 પેકેટનું નિરીક્ષણ કરતાં ખામીવાળાં સ્ટેપલરો વિશે નીચેની માહિતી મળે છે. તે પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો.

ખામીવાળાં સ્ટેપલરની સંખ્યા	19	20	21	22	23	24	25	26
પેકેટની સંખ્યા	5	18	10	8	4	2	2	1

9. એક માહિતીના આવૃત્તિ-વિતરણ માટે જો  $n = 200$ ,  $\Sigma f(x - 240) = 0$ ,  $\Sigma f(x - 240)^2 = 11,250$  અને મધ્યસ્થ  $= 246$  હોય, તો વિષમતાંક શોધો અને તેનો પ્રકાર જણાવો.

નીચેનાના ઉકેલો મેળવો :

- નિયત સમય કરતાં વધુ સમય ડ્રાઇવિંગ કરવાથી થયેલ અકસ્માતોની સંખ્યાનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે આપેલ છે. તે પરથી બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો.

નિયત સમય કરતાં વધુ સમય ડ્રાઇવિંગના કલાક	4	3.5	3	2.5	2	1.5	1	0
અકસ્માતોની સંખ્યા	5	4	3	2	1	2	2	1

- વર્ષ 2015 માં એક શહેરનું તાપમાન નીચે મુજબ નોંધવામાં આવેલ છે. એક દિવસનું તાપમાન –  $10^0$  થી નીચે રહેલ નથી. આ માહિતી પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો. તેનો પ્રકાર જણાવો.

મધ્યકિંમત (સોલ્સિયસમાં)	-5	5	12	18	25
દિવસની સંખ્યા	25	35	105	125	75

- 60 ગુણની એક પરીક્ષામાં વિદ્યાર્થીઓએ મેળવેલ ગુણનું વિતરણ નીચે મુજબ છે. કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો અને વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.

વિદ્યાર્થીઓના ગુણ	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	કુલ
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	5	12	38	38	20	7	120

- વર્ષ 2015–16 માં 150 કંપનીઓએ કરેલ નફા અંગેનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. યોગ્ય પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો અને વિષમતાનો પ્રકાર જણાવો.

નફો (લાખ રૂ)	10થી ઓછા	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 અને વધુ
કંપનીઓની સંખ્યા	15	30	50	40	15

- કોઈ એક વસ્તુની માંગનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. તે પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતા અને વિષમતાંક શોધો.

માંગ (એકમ)	1	2	3	4 - 8	8 - 12	12 - 16	16 - 20
ગ્રાહકોની સંખ્યા	10	8	12	10	5	15	20

- એક કારખાનામાં ઉત્પાદિત થયેલાં સ્કૂના જથ્થામાંથી 50 સ્કૂનો નિર્દર્શ લઈ પ્રતેક સ્કૂના મથાળાના વ્યાસના માપ (મિમિમા) માપતાં તેનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. તેના પરથી બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો અને તેનું અર્થધટન કરો.

સ્કૂના વ્યાસનું માપ (મિમિ)	4 - 4.1	4 - 4.2	4 - 4.3	4 - 4.4	4 - 4.5	4 - 4.6	4 - 4.7	4 - 4.8
સ્કૂની સંખ્યા	6	13	23	33	41	46	48	50

7. નીચે મુજબ એક ડિપાર્ટમેન્ટલ સ્ટોર્સમાં એક દિવસમાં વેચાયેલ બ્રોડના પેકેટના વેચાણ અંગેના આવૃત્તિ-વિતરણ પરથી કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો અને તેનું અર્થધટન કરો.

બ્રોડના પેકેટની સંખ્યા	0 - 3	3 - 5	5 - 10	10 - 15	15 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 60
ગ્રાહકોની સંખ્યા	15	12	8	6	4	3	2	1

8. કાચનું વેચાણ કરતી એક દુકાનમાં થયેલ વેચાણ અંગેનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો. તેનું અર્થધટન કરો.

કાચનું કદ (ચોમી)	1 - 1.9	2 - 2.9	3 - 3.9	4 - 4.9	5 - 5.9	6 - 6.9	7 - 7.9
ગ્રાહકોની સંખ્યા	10	40	20	50	30	30	20

9. એક કન્સ્ટ્રક્શન કંપનીએ જુદાં જુદાં ક્ષેત્રફળનાં મકાન બનાવે છે. આ મકાનના ક્ષેત્રફળ અંગેનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો અને તેનું અર્થધટન કરો.

મકાનનું ક્ષેત્રફળ (ચોમી)	100	140	180	220	260
મકાનોની સંખ્યા	10	25	50	25	10

10. ફેફટરીમાં એક ઉત્પાદન-પ્રક્રિયા દરમ્યાન એક કલાકમાં જુદાં જુદાં મશીનમાં વપરાતા પાવર યુનિટ અંગેનું આવૃત્તિ-વિતરણ નીચે મુજબ છે. બાઉલીની પદ્ધતિથી વિષમતાંક શોધો.

વપરાતા પાવર યુનિટ એકમો	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40
મશીનની સંખ્યા	5	10	15	20	25	30



Arthur Lyon Bowley  
(1869 - 1957)

Sir Arthur Lyon Bowley was a British Statistician and Mathematical Economist. Among the distinguished posts he held were those of Professor of Mathematics, Economics and Statistics at University College, Reading and London and Director of University of Oxford Institute of Statistics. His major works were "Three studies on the National Income", published in 1938 and "Wages and Income in the UK since 1860", published in 1937. He occupied, at various times, high positions in the Royal Statistical Society, The Royal Economic Society (elected fellow in 1893), the International Statistical Institute, the Econometric Society and the British Association for the Advancement of Science.