"In practice, most of the interdependent relationships among characteristics can not be termed as function."

– Unknown

8

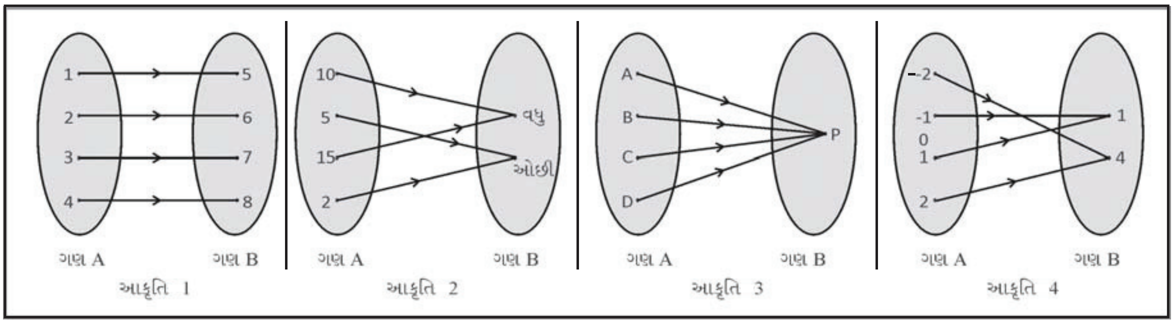
વિધેય

(Function)

વિષયવસ્તુ :

8.1 વ્યાખ્યા (Definition)

આપણે ગણના સિદ્ધાંતના અભ્યાસ દરમિયાન જાણ્યું કે, બે જુદા જુદા ગણોના ઘટકો વચ્ચે સંબંધ હોઈ શકે. આવા સંબંધોમાંના અમુક પ્રકારના સંબંધોને આપણે વિધેય કહીશું. આ સમજવા માટે આપણે કેટલીક આકૃતિઓ સમજીએ.



આકૃતિ 1માં ગણ A ના ઘટકો {1, 2, 3, 4} છે જેના ઘટકોનાં મૂલ્યમાં 4 ઉમેરતા ગણ B ના ઘટકો {5, 6, 7, 8} મળે. આમ ગણ A અને ગણ Bના ઘટકો વચ્ચેનો સંબંધ સ્પષ્ટ કરી શકાય કે ગણ A ના ઘટકોમાં 4 ઉમેરતાં ગણ B ના ઘટકો મળે છે.

આકૃતિ 2માં કોઈ એક વસ્તુની દૈનિક માંગ ગણ A દ્વારા દર્શાવાય છે જેના ઘટકો {10, 5, 15, 2} છે. જ્યારે ગણ B એ વસ્તુની માંગ વધુ છે કે ઓછી છે તે દર્શાવે છે અને તેના ઘટકો {વધુ, ઓછી} છે. હવે જો વસ્તુની માંગ 10 કે તેથી વધુ હોય તો તેને વધુ માંગ કહેવામાં આવે, નહિ તો માંગ ઓછી કહેવામાં આવે એવું નક્કી કરવામાં આવે, તો ગણ A અને ગણ B ના ઘટકો વચ્ચે સંબંધ પ્રસ્થાપિત થાય, જે આકૃતિ પરથી સ્પષ્ટ સમજી શકાય છે.

આકૃતિ 3માં ગણ A કોઈ એક વર્ગના વિદ્યાર્થીઓના નામ બતાવે છે. જ્યારે ગણ B એ તે વર્ગના વર્ગશિક્ષકનું નામ બતાવે છે તો ગણ A અને ગણ B ના ઘટકો વચ્ચે પણ સંબંધ છે.

આકૃતિ 4માં ગણ A ના ઘટકો {–2, –1, 0, 1, 2} છે જ્યારે ગણ B ના ઘટકો {1, 4} છે, તો ગણના અમુક ઘટકોનો ગણ B ના ઘટકો સાથેનો સંબંધ જોઈ શકાય છે. ગણ A ના ઘટક શૂન્ય (0)ને અનુરૂપ ગણ B માં કોઈ ઘટક મળતો નથી.

ઉપરનાં તમામ ઉદાહરણો પરથી સ્પષ્ટ છે કે, ગણ A ના ઘટકો અને ગણ B ના ઘટકો વચ્ચે જુદા જુદા પ્રકારના સંબંધો છે. તો શું આ તમામ સંબંધોને વિધેય કહી શકાય ? આ સમજવા માટે સૌપ્રથમ વિધેયની વ્યાખ્યા જોઈએ.

વ્યાખ્યા : જો ગણ A અને ગણ B ખાલી ન હોય તેવા બે ભિન્ન ગણો હોય અને જો ગણ A નો પ્રત્યેક ઘટક ગણ B ના કોઈ એક અનન્ય ઘટક સાથે કોઈ નિયમ, સંબંધ કે સંગતતાથી સંકળાયેલ હોય તો તે નિયમ, સંબંધ કે સંગતતાને ગણ A થી ગણ B પરનું વિધેય (function) કહે છે, જે સંકેતમાં f, g, h, k વગેરે સંકેતો દ્વારા દર્શાવાય છે.

ઉપરની આકૃતિ 1માં ગણ A ના ઘટકોમાં 4 ઉમેરવા તે નિયમને વિધેય કહેવાય. તે સંબંધ $f(x) = x + 4$, $x \in$ A વડે દર્શાવાય.

આકૃતિ 2માં દર્શાવેલ વસ્તુની માંગ જો 10 કે તેથી વધુ હોય, તો તેને વધુ માંગ કહેવાય, નહિ તો ઓછી માંગ કહેવાય. આ સંબંધને પણ વિધેય કહી શકાય.

આકૃતિ 3માં દર્શાવેલ વર્ગના વિદ્યાર્થીઓનાં નામ અને તેમના વર્ગ-શિક્ષકના નામ વચ્ચેની સંગતતાને પણ વિધેય કહી શકાય.

આકૃતિ 4ને ધ્યાનથી જોતાં માલૂમ પડે છે કે, ગણ A ના ઘટકો {–2, –1, 0, 1, 2} છે જ્યારે ગણ B ના ઘટકો {1, 4} છે. અહીં ગણ Aના ઘટકો –2, –1, 1, 2 ને સંગત ગણ B માં ઘટકો 1, 4 મળે છે, પરંતુ ગણ A ના ઘટક શૂન્ય (0) માટે ગણ B માં કોઈ ઘટક મળતો નથી તેથી આ સંબંધને વિધેય કહી શકાય નહિ.

ઉદાહરણ 1 : નીચે આપેલા ગણોના ઘટકો વચ્ચેનો સંબંધ વિધેય છે કે નહિ તે ચકાસો :

(1) A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 5, 7, 9}, સંબંધ $f(x) = 2x + 1$, $x \in$ A

(2) P = $\{-\frac{1}{2}, 0, 1\}$, S = {10}, નિયમ $k(x) = 10$, $x \in$ P

(3) A = {2, 5, 6}, B = $\{1, \frac{3}{2}, \frac{9}{5}, \frac{11}{7}, \frac{13}{6}\}$, નિયમ $y = \frac{2x-1}{x+1}$, $x \in$ A

(4) B = {–1, 0, 1, 3}, C = {–5, –3, –1, 1, 3}, નિયમ $h(x) = 2x + 3$, $x \in$ B

(1) અહીં $x \in$ A માટે, ગણ B માં તેનું પ્રતિબિંબ (વિધેયાત્મક કિંમત) મેળવીએ.

$f(x) = 2x + 1$ છે.

$x = 1$ માટે $f(1) = 2(1) + 1 = 3$

$x = 2$ માટે $f(2) = 2(2) + 1 = 5$

$x = 3$ માટે $f(3) = 2(3) + 1 = 7$

$x = 4$ માટે $f(4) = 2(4) + 1 = 9$

આમ ગણ A ના પ્રત્યેક ઘટક માટે ગણ B માં અનન્ય ઘટક મળે છે. એટલે કે ગણ A નો પ્રત્યેક ઘટક ગણ B ના અનન્ય ઘટક સાથે નિયમ $2x + 1$ થી સંકળાયેલ છે. તેથી $f(x) = 2x + 1$ વિધેય છે.

(2) અહીં પ્રત્યેક $x \in P$ માટે $k(x) = 10$ છે.

$x = -\frac{1}{2}$ માટે $k\left(-\frac{1}{2}\right) = 10$

$x = 0$ માટે $k(0) = 10$

$x = 1$ માટે $k(1) = 10$

આમ પ્રત્યેક $x \in P$ માટે ગણ S માં નિશ્ચિત પ્રતિબિંબ "10" મળે છે. તેથી સંબંધ $k(x) = 10$ એ વિધેય છે.

(3) પ્રત્યેક $x \in$ A માટે નિયમ $\frac{2x-1}{x+1}$ ની કિંમત મેળવતાં

$x = 2$ માટે $y = \frac{2(2)-1}{2+1} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

$x = 5$ માટે $y = \frac{2(5)-1}{5+1} = \frac{10-1}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$

$x = 6$ માટે $y = \frac{2(6)-1}{6+1} = \frac{12-1}{7} = \frac{11}{7}$

આમ પ્રત્યેક $x \in$ A માટે ગણ B માં અનન્ય કિંમત મળે છે. તેથી નિયમ $y = \frac{2x-1}{x+1}$ ને વિધેય કહેવાય.

(4) અહીં પ્રત્યેક $x \in$ B માટે ગણ C માં પ્રતિબિંબ નિયમ $2x + 3$ દ્વારા મેળવીએ.

$x = -1$ માટે $h(-1) = 2(-1) + 3 = -2 + 3 = 1$

$x = 0$ માટે $h(2) = 2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$

$x = 1$ માટે $h(1) = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$ જે ગણ C માં નથી.

આમ $x = 1$ માટેની પ્રતિબિંબિત કિંમત ગણ C માં નથી. તેથી નિયમ $h(x) = 2x + 3$ એ વિધેય નથી.

8.2 પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર (Domain, Co–domain and Range)

આપણે જાણીએ છીએ કે, વિધેય બે ભિન્ન અરિક્ત ગણોના ઘટકો વચ્ચેનો અનન્ય સંબંધ છે. ગણ A કે જેના ઘટકો માટે ગણ B માં અનન્ય ઘટક કે પ્રતિબિંબ મેળવવામાં આવે છે. અહીં ગણ A ને પ્રદેશ અને ગણ B ને સહપ્રદેશ કહેવામાં આવે છે. પ્રદેશ ગણના ઘટક માટે વિધેયની જે પ્રતિબિંબિત કિંમત કે વિધેયાત્મક કિંમત મેળવવામાં આવે છે તે કિંમતોના ગણને તે વિધેયનો વિસ્તાર કહેવામાં આવે છે. વિધેયના પ્રદેશ ગણને D_f અને વિસ્તાર ને R_f વડે દર્શાવાય છે. ટૂંકમાં $R_f = f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ થાય. વિધેયનો વિસ્તાર એ સહપ્રદેશ ગણનો ઉપગણ અથવા સહપ્રદેશ ગણ પોતે જ હોય છે. ઉપરના ઉદાહરણ 1ના (1) માં ગણ A એ વિધેયનો પ્રદેશ ગણ છે. જ્યારે ગણ B એ તેનો સહપ્રદેશ ગણ છે. અહીં જોઈ શકાય છે કે તેનો વિસ્તાર પણ ગણ B પોતે જ છે. જ્યારે (2)માં પ્રદેશ ગણ P અને સહપ્રદેશ ગણ કે વિસ્તાર એ ગણ S છે (3)ના પ્રદેશ ગણ A છે જ્યારે સહપ્રદેશ ગણ B છે અને વિસ્તાર ગણ $R_f = \left\{1, \frac{3}{2}, \frac{11}{7}\right\}$ છે જે સહપ્રદેશ ગણ B નો ઉપગણ છે.

8.3 વિધેયના સંકેતો (Notations of Functions)

જો વિધેય f એ ગણ A થી ગણ B પરનું વિધેય હોય તો તેને સંકેતમાં $f : A \rightarrow B$ વડે દર્શાવાય છે અને શબ્દમાં તે વિધેય f એ ગણ A થી ગણ B પરનું વિધેય છે તેમ કહેવાય. અહીં ગણ A ને પ્રદેશ ગણ જ્યારે ગણ B ને સહપ્રદેશ ગણ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.

ઉપરના ઉદાહરણ (1)ના સંબંધ નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

(1) $f : A \rightarrow B$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 5, 7, 9\}$ અને $f(x) = 2x + 1$, $x \in A$

(2) $k : P \rightarrow S$, $P = \{-\frac{1}{2}, 0, 1\}$, $S = \{10\}$ અને $k(x) = 10$, $x \in P$

(3) $f : A \rightarrow B$, $A = \{2, 5, 6\}$, $B = \{1, \frac{3}{2}, \frac{9}{5}, \frac{11}{7}, \frac{13}{6}\}$, $y = f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$, $x \in A$

(4) અહીં આપેલ સંબંધ વિધેય નથી.

ઉદાહરણ 2 : નીચે આપેલ વિધેયો માટે તેમનો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર મેળવો :

(1) $f : A \rightarrow B$, $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $f(x) = 2x + 5$, $x \in A$

(2) $g : A \rightarrow N$, $A = \{-1, 2, 3, 4\}$, $g(x) = 3x + 5$, $x \in A$

(3) $h : P \rightarrow S$, $P = \{-2, -1, 0, 1\}$, $S = \{-4, -3, -2, -1\}$, $h(x) = x - 2$, $x \in P$

(4) $k : A \rightarrow Z$, $A = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$, $k(x) = 4x^2 + 3$, $x \in A$

(1) પ્રદેશ $A = D_f = \{-1, 0, 1\}$

સહપ્રદેશ $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$f(x) = 2x + 5$ છે. તેથી પ્રત્યેક $x \in A$ માટે $f(x)$ મેળવીશું.

$x = -1$ માટે $f(-1) = 2(-1) + 5 = -2 + 5 = 3$

$x = 0$ માટે $f(0) = 2(0) + 5 = 0 + 5 = 5$

$x = 1$ માટે $f(1) = 2(1) + 5 = 2 + 5 = 7$

$\therefore$ વિસ્તાર $R_f = \{f(-1), f(0), f(1)\} = \{3, 5, 7\}$

(2) અહીં પ્રદેશ $A = D_f = \{-1, 2, 3, 4\}$

સહપ્રદેશ $B = N$

$g(x) = 3x + 5$ છે. તેથી પ્રત્યેક $x \in A$ માટે $g(x)$ મેળવીશું.

$x = -1$ માટે $g(-1) = 3(-1) + 5 = 2$

$x = 2$ માટે $g(2) = 3(2) + 5 = 11$

$x = 3$ માટે $g(3) = 3(3) + 5 = 14$

$x = 4$ માટે $g(4) = 3(4) + 5 = 17$

$\therefore$ વિસ્તાર $R_f = \{2, 11, 14, 17\}$ જે સહપ્રદેશ ગણનો ઉપગણ છે.

(3) પ્રદેશ $A = P = D_f = \{-2, -1, 0, 1\}$

સહપ્રદેશ $B = S = \{-4, -3, -2, -1\}$

$h(x) = x - 2$, પ્રત્યેક $x \in P$ માટે $h(x)$ મેળવીશું.

$x = -2$ માટે $h(-2) = -2 - 2 = -4$

$x = -1$ માટે $h(-1) = -1 - 2 = -3$

$x = 0$ માટે $h(0) = 0 - 2 = -2$

$x = 1$ માટે $h(1) = 1 - 2 = -1$

$\therefore$ વિસ્તાર $R_f = \{-4, -3, -2, -1\}$

અહીં વિધેયનો વિસ્તાર અને સહપ્રદેશ સમાન છે.

(4) અહીં પ્રદેશ A = $D_f = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$

સહપ્રદેશ B = Z

વિધેય $k\ (x) = 4x^2 + 3$ છે. તેથી પ્રત્યેક $x \in A$ માટે k (x) મેળવીશું.

$x = -\frac{1}{2}$ માટે $k\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = 1 + 3 = 4$

$x = 0$ માટે $k\ (0) = 4\ (0)^2 + 3 = 0 + 3 = 3$

$x = \frac{1}{2}$ માટે $k\left(\frac{1}{2}\right) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = 1 + 3 = 4$

$\therefore$ વિધેયનો વિસ્તાર $R_f = \{3, 4\}$

અહીં વિધેયનો વિસ્તાર એ તેના સહપ્રદેશનો ઉપગણ છે.

ઉદાહરણ 3 : નીચે આપેલ વિધેયોના પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર જાણવો :

(1) $f : A \to N,\ f\ (x) = x^2 + 1,\ A = \{x \mid -2 \le x < 1,\ x \in Z\}$

(2) $f : Z \to N,\ f\ (x) = x^2 + 2,\ x \in Z$

(3) $f : N \to N,\ f\ (x) = 4x,\ x \in N$

(1) પ્રદેશ $D_f = A = \{-2, -1, 0\}$

સહપ્રદેશ B = N

વિધેય $f\ (x) = x^2 + 1$

$x = -2$ માટે $f\ (-2) = 4 + 1 = 5$

$x = -1$ માટે $f\ (-1) = 1 + 1 = 2$

$x = 0$ માટે $f\ (0) = 0 + 1 = 1$

$\therefore$ વિસ્તાર $R_f = \{5, 2, 1\}$

(2) પ્રદેશ $D_f = A = Z$

સહપ્રદેશ B = N

વિધેય $f\ (x) = x^2 + 2$ માટેનો વિસ્તાર

$R_f = \{....., f\ (-2), f\ (-1), f\ (0), f\ (1), f\ (2), ...\}$ થશે.

$= \{....., 2, 3, 6, 11, ...\}$ થશે.

(3) પ્રદેશ $D_f = A = N$

સહપ્રદેશ B = N

$f\ (x) = 4x$

વિસ્તાર $R_f = \{f\ (1), f\ (2), f\ (3), f\ (4), ...\}$

$= \{4, 8, 12, 16, ...\}$

પ્રવૃત્તિ

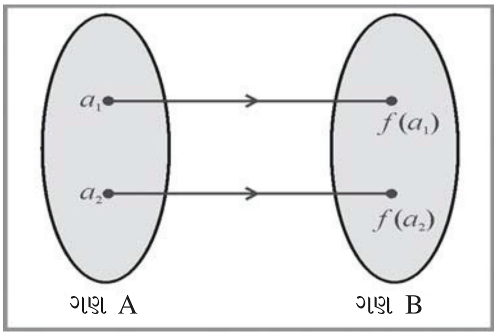
તમે જોયેલી છેલ્લી ક્રિકેટ મૅચમાં પાંચ બૉલરનાં નામ દર્શાવતો ગણ રચો. તેમજ મૅચમાં તેને મળેલી શક્ય વિકેટોની સંખ્યા દર્શાવતો ગણ બનાવો અને આ માહિતી પરથી બૉલર અને તેને મળેલી વિકેટની સંખ્યા વચ્ચેના સંબંધને વિધેય કહેવાય ? જો હા તો આ વિધેય માટે તેનો પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો.

8.4 વિધેયના પ્રકારો (Types of Function)

વિધેયના અનેક પ્રકારો છે. તેમાંથી મુખ્ય ત્રણ પ્રકારો નીચે મુજબ છે :

(1) એક-એક વિધેય (2) અનેક-એક વિધેય (3) અચળ વિધેય

8.4.1 એક-એક વિધેય (one–one function)



ધારો કે $f : A \rightarrow B$, પ્રદેશ ગણ A ના કોઈ પણ બે ભિન્ન ઘટકો માટે સહપ્રદેશ ગણમાં મળતાં પ્રતિબિંબો કે વિધેયાત્મક કિંમતો ભિન્ન હોય, તો તે વિધેય f ને એક-એક વિધેય કહે છે.

એટલે કે વિધેય $f : A \rightarrow B$ માટે જો $a_1 \neq a_2$ તથા $a_1, a_2 \in A$ માટે જો $f(a_1) \neq f(a_2)$ થતું હોય, તો વિધેય f ને એક-એક વિધેય કહેવાય.

દા.ત., $g : X \rightarrow Y$ જ્યાં $X = \{-2, -1, 0\}$, $Y = \{0, 1, 2, 3\}$ અને $g(x) = x + 2$ છે.

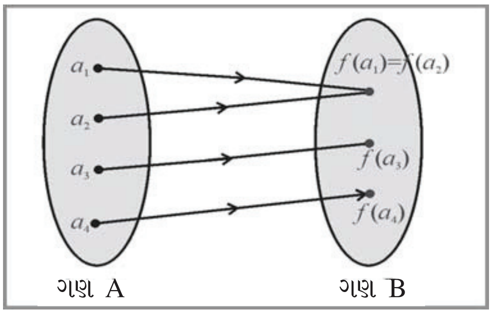
હવે $x = -2$ માટે $g(-2) = 0$

$x = -1$ માટે $g(-1) = 1$

$x = 0$ માટે $g(0) = 2$

આમ $a_1 \neq a_2$ માટે $g(a_1) \neq g(a_2)$ મળે છે. એટલે કે પ્રદેશની બે ભિન્ન કિંમતો માટે સહપ્રદેશમાં તેના પ્રતિબિંબ ભિન્ન મળે છે. તેથી આપેલ વિધેય g એ એક-એક વિધેય છે.

8.4.2 અનેક-એક વિધેય (many–one function)



ધારો કે $f : A \rightarrow B$, પ્રદેશ ગણ A ના કોઈ પણ બે ભિન્ન ઘટકો માટે સહપ્રદેશ ગણમાં મળતાં પ્રતિબિંબો કે વિધેયાત્મક કિંમતો સમાન હોય, તો તે વિધેય f ને અનેક-એક વિધેય કહે છે.

એટલે કે $f : A \rightarrow B$ માટે જો $a_1 \neq a_2$, $a_1, a_2 \in A$ માટે જો $f(a_1) = f(a_2)$ થતું હોય, તો વિધેય f ને અનેક-એક વિધેય કહેવાય.

દા.ત., $f : A \rightarrow B$, $A = \{-2, -1, 1, 2\}$ અને $B = \{2, 5\}$, $f(x) = x^2 + 1$ છે. તો પ્રદેશ ગણના પ્રત્યેક કિંમત માટે તેમની વિધેયાત્મક કિંમત મેળવો,

$x = -2$ માટે $f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$

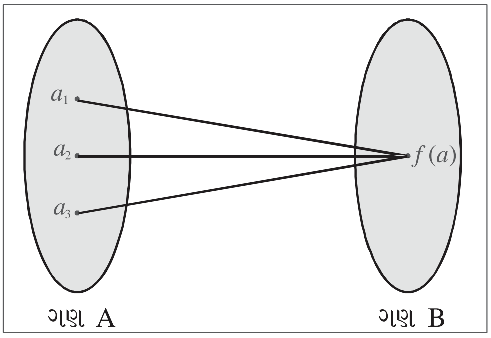
$x = -1$ માટે $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$

$x = 1$ માટે $f(1) = (1)^2 + 1 = 2$

$x = 2$ માટે $f(2) = (2)^2 + 1 = 5$

આમ $a_1 \neq a_2$ માટે $f(a_1) = f(a_2)$ મળે છે એટલે કે પ્રદેશની બે ભિન્ન કિંમતો માટે તેમનાં પ્રતિબિંબો સમાન મળે છે. તેથી આપેલ વિધેય f એ અનેક-એક વિધેય છે.

8.4.3 અચળ વિધેય (constant function)



ધારો કે $f : A \rightarrow B$ છે. જો પ્રદેશ ગણ A ના પ્રત્યેક ઘટક માટે સહપ્રદેશ ગણ B માં ફક્ત એક જ પ્રતિબિંબ મળતું હોય, તો વિધેય f ને અચળ વિધેય કહે છે.

દા.ત., $f = \{1, 2, 3\} \rightarrow \{4, 5, 6\}$ અને $f(x) = 5$ છે એટલે કે x ની કિંમત અનુક્રમે 1, 2 અને 3 લેતાં $f(x)$ની કિંમત 5 જ મળશે. તેથી વિધેય f એ અચળ વિધેય છે.

ઉદાહરણ 4 : જો $f : N \to N$ અને $f(x) = x^2$ હોય, તો વિધેય f નો પ્રકાર જણાવો.

પ્રદેશ ગણ $D_f = N = \{1, 2, 3, ...\}$

સહપ્રદેશ ગણ $B = N = \{1, 2, 3, ...\}$

$f(x) = x^2$ માં $x = 1, 2, 3, ...$ લેતાં તેનાં પ્રતિબિંબ 1, 4, 9,... વગેરે મળે.

આમ, પ્રદેશની બે ભિન્ન કિંમતો માટે સહપ્રદેશમાં ભિન્ન પ્રતિબિંબો મળે છે. તેથી આપેલ વિધેય એક-એક વિધેય છે.

ઉદાહરણ 5 : જો $f : Z \to N \cup \{0\}$ અને $f(x) = x^2$ હોય, તો વિધેય f નો પ્રકાર જણાવો.

પ્રદેશ ગણ $D_f = Z = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

સહપ્રદેશ ગણ $B = N \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

$x = -2, -1, 0, 1, 2$ લેતાં વિધેયની કિંમત અનુક્રમે 4, 1, 0, 1, 4 મળશે.

આમ, પ્રદેશ ગણની બે ભિન્ન કિંમતો $\{-2, 2\}$ અને $\{-1, 1\}$ માટેનાં પ્રતિબિંબો સમાન મળે છે. તેથી તે અનેક-એક વિધેય છે.

ઉદાહરણ 6 :

(i) $f : Z \to R$ અને $f(x) = 100$ હોય તો વિધેય f નો પ્રકાર જણાવો.

અહીં પ્રદેશ ગણ $A = D_f = Z = \{....., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ અને સહપ્રદેશ ગણ $B = R$ છે. પ્રદેશ ગણની કોઈ પણ કિંમત માટે સહપ્રદેશ ગણ B માં ફક્ત એક જ પ્રતિબિંબિત કિંમત 100 મળે છે.

તેથી આપેલ વિધેય f અચળ વિધેય છે.

(ii) કોઈ એક મહિનાની તારીખો અને વાર વચ્ચેના વિધેયનો પ્રકાર જણાવો.

એક મહિનામાં ચાર અઠવાડિયાં પૂરાં હોય તેથી અઠવાડિયાના વાર મહિનાની તારીખ પ્રમાણે ઓછામાં ઓછા ચાર વખત પુનરાવર્તિત થાય.

તેથી તે અનેક-એક વિધેય કહેવાય.

પ્રવૃત્તિ

તમારા પાંચ મિત્રોનાં નામનો ગણ અને તેમના કુટુંબના સભ્યોની સંખ્યા વચ્ચે સંબંધ દર્શાવતા વિધેયનો પ્રકાર જણાવો.

8.5 વિધેયોની સમાનતા (Equal Functions)

બે ભિન્ન વિધેયો f અને g નીચેની શરતોનું સમાધાન કરે તો તેમને સમાન વિધેયો કહેવામાં આવે છે. સંકેતોમાં તેને $f = g$ વડે દર્શાવાય છે.

(1) બંને વિધેયોના પ્રદેશ ગણ સમાન હોવા જોઈએ એટલે કે બંને વિધેયો એક જ પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત હોવા જોઈએ.

(2) પ્રદેશ ગણના પ્રત્યેક ઘટક x માટે $f(x) = g(x)$ થવું જોઈએ. એટલે કે પ્રદેશની પ્રત્યેક કિંમત માટે તેમનાં પ્રતિબિંબો સમાન હોવા જોઈએ.

સંકેતમાં સમાન વિધેયની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે આપી શકાય :

જો $f : A \to B$ અને $g : A \to C$ હોય તેમજ પ્રત્યેક $x \in A$ માટે $f(x) = g(x)$ થાય તો $f = g$ કહેવાય.

ઉદાહરણ 7 : જો $f = N \to N$, $f(x) = x^2$ અને $g = Z - \{0\} \to N$, $g(x) = x^2$ છે, તો શું f અને g સમાન વિધેયો છે ?

વિધેય f નો પ્રદેશ ગણ $D_f = A = N$

વિધેય g નો પ્રદેશ ગણ $D_f = A = Z - \{0\}$

બંને વિધેયો જુદા જુદા પ્રદેશ ગણ પર વ્યાખ્યાયિત હોવાથી તે સમાન વિધેયો નથી.

ઉદાહરણ 8 : $f : A \to B$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 4, 9, 16\}$, $f(x) = x^2$ છે. તેમજ $g : A \to B$, $A = \{1, 3\}$, $B = \{1, 4, 7, 9, 11\}$ $g(x) = 4x - 3$ છે, તો f અને g વિધેયોની સમાનતા ચકાસો.

અહીં બંને વિધેયો એક જ પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત થયેલ છે.

તેમજ $x = 1, f(1) = 1^2$, $g(1) = 4(1) - 3$

$= 1$ $= 1$

$x = 3, f(3) = 3^2$, $g(3) = 4(3) - 3$

$= 9$ $= 9$

આમ, પ્રત્યેક $x \in A$ માટે $f(x) = g(x)$ છે. તેથી f અને g સમાન વિધેયો છે.

ઉદાહરણ 9 : $f : A \rightarrow B, f(x) = 1 - 4x$ તથા $g : A \rightarrow C, g(x) = 6x + 1$ અને $A = \{0, 1, 2\}$ તો શું f અને g સમાન વિધેયો છે ?

અહીં બંને વિધેયોના પ્રદેશ ગણ સમાન છે.

$x = 0$ માટે $f(0) = 1 - 4(0) = 1$ અને $g(0) = 6(0) + 1 = 1$

$x = 1$ માટે $f(1) = 1 - 4(1) = -3$ અને $g(1) = 6(1) + 1 = 7$

આમ, $f(1) \neq g(1)$ તેથી f અને g સમાન વિધેયો નથી.

8.6 વાસ્તવિક વિધેય (Real Function)

જો $f : A \rightarrow B$ જ્યાં $A \subset R$ હોય તો વિધેય f ને વાસ્તવિક ચલનું વિધેય કહે છે અને જો તેનો વિસ્તાર પણ વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ R પર વ્યાખ્યાયિત હોય, તો f ને વાસ્તવિક વિધેય કહે છે. દા.ત., $f : Z \rightarrow R$ માટે પ્રદેશ ગણ Z એ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગણ છે જ્યારે તેનો સહપ્રદેશ ગણ R જે વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ પોતે જ છે. તેથી વિધેય f વાસ્તવિક વિધેય કહેવાય. ટૂંકમાં જે વિધેયનો પ્રદેશ ગણ અને સહપ્રદેશ ગણ એ વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ R કે તેના કોઈ પણ ઉપગણ હોય, તો તે વિધેયને વાસ્તવિક વિધેય કહે છે.

ઉદાહરણ 10 : જો $f(x)$ $\frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x + 1}$ જ્યાં $x \in Z - \{1\}$ હોય, તો $f(-2), f(-1)$ અને $f(0)$ મેળવો.

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$f(-2) = \frac{(-2)^3 + 1}{(-2)^2 - 2(-2) + 1}; \qquad f(-1) = \frac{(-1)^3 + 1}{(-1)^2 - 2(-1) + 1}$$

$$= \frac{-8 + 1}{4 + 4 + 1} \qquad = \frac{-1 + 1}{1 + 2 + 1}$$

$$= -\frac{7}{9} \qquad = \frac{0}{4}$$

$$= 0$$

$$f(0) = \frac{0^3 + 1}{0^2 - 2(0) + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

ઉદાહરણ 11 : જો $f(x) = x^3 + 3^x - x^2 - 2^x$ હોય તો $f(3) - 6f(2)$ ની કિંમત શોધો.

$f(x) = x^3 + 3^x - x^2 - 2^x$

$f(3) = (3)^3 + 3^3 - (3)^2 - (2)^3$ અને $f(2) = 2^3 + 3^2 - 2^2 - 2^2$

$= 27 + 27 - 9 - 8$ $= 8 + 9 - 4 - 4$

$= 37$ $= 9$

$\therefore \quad f(3) - 6f(2) = 37 - 6(9)$

$= 37 - 54$

$= -17$

ઉદાહરણ 12 : વિધેય $f(x) = x(2x - 7)$ જ્યાં $x \in \mathbf{R}$ છે. જો $f(x) = 15$ હોય, તો x ની કિંમત મેળવો.

$f(x) = 15$

$\therefore \quad x(2x - 7) = 15$

$\therefore \quad 2x^2 - 7x - 15 = 0$

$\therefore \quad 2x^2 + 3x - 10x - 15 = 0$

$\therefore \quad x(2x + 3) - 5(2x + 3) = 0$

$\therefore \quad (2x + 3)(x - 5) = 0$

$\therefore \quad (2x + 3) = 0$ અથવા $(x - 5) = 0$

$\therefore \quad x = -\frac{3}{2}$ અથવા $x = 5$

ઉદાહરણ 13 : જો $f(x) = x^2 - 4x + 8$ હોય, તો x ની કઈ કિંમત માટે $f(2x) = 2f(x)$ થાય ?

$f(x) = x^2 - 4x + 8$

$\therefore \quad f(2x) = (2x)^2 - 4(2x) + 8$

$= 4x^2 - 8x + 8$

હોય, $f(2x) = 2f(x)$

$\therefore \quad 4x^2 - 8x + 8 = 2x^2 - 8x + 16$

$\therefore \quad 2x^2 - 8 = 0$

$\therefore \quad x^2 - 4 = 0$

$\therefore \quad x^2 = 4$

$\therefore \quad x = \pm 2$

$\therefore$ જ્યારે $x = \pm 2$ હોય ત્યારે $f(2x) = 2f(x)$ થાય.

સારાંશ

- બે અરિક્ત ગણોના ઘટકો વચ્ચેના અનન્ય સંબંધને વિધેય કહેવાય.
- વિધેય $f : A \rightarrow B$ હોય તો ગણ A ને પ્રદેશ જ્યારે ગણ B ને સહપ્રદેશ કહેવામાં આવે છે.
- પ્રદેશ ગણની પ્રત્યેક કિંમત માટે મળતી પ્રતિબિંબિત કિંમતોના ગણને વિધેયનો વિસ્તાર કહે છે.
- વિધેયનો વિસ્તાર એ સહપ્રદેશ ગણનો ઉપગણ અથવા સહપ્રદેશ પોતે જ હોય છે.
- વિધેયના પ્રદેશની ભિન્ન કિંમતો માટે જો તેમનાં પ્રતિબિંબો પણ ભિન્ન હોય, તો તેને એક-એક વિધેય કહે છે.
- વિધેયના પ્રદેશની કોઈ બે કે તેથી વધુ ભિન્ન કિંમતો માટે જો તેમનાં પ્રતિબિંબો સમાન હોય તો તેને અનેક-એક વિધેય કહે છે.
- વિધેયના પ્રદેશની પ્રત્યેક કિંમત માટે જો તેમનાં પ્રતિબિંબો સમાન જ રહે તો તેને અચળ વિધેય કહે છે.
- સમાન પ્રદેશ પર વ્યાખ્યાયિત થયેલ તેમજ પ્રદેશની પ્રત્યેક કિંમતો માટે જો બે ભિન્ન વિધેયોનાં પ્રતિબિંબો સમાન હોય, તો તેમને સમાન વિધેયો કહે છે.
- જો વિધેયનો પ્રદેશ વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ R નો ઉપગણ હોય, તો વિધેય f ને વાસ્તવિક ચલનું વિધેય કહે છે.
- જો વિધેયનો પ્રદેશ અને તેનો વિસ્તાર વાસ્તવિક સંખ્યા ગણ R પર વ્યાખ્યાયિત હોય, તો તેને વાસ્તવિક વિધેય કહે છે.

સ્વાધ્યાય 8

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુ વિકલ્પ પ્રશ્ન માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. નીચે આપેલ વિધાનો પૈકી ક્યાં વિધાનો સાચાં છે ?

(a) f : { 1, 2, 3, 4 } → { 3, 4, 5 }, 'પ્રદેશ ગણની કિંમતમાં 2 નો વધારો કરો' આ નિયમ વિધેય નથી.

(b) $f : A \rightarrow B$, $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, માટે $f(x) = x^2$ વિધેય નથી.

(c) $g : P \rightarrow Q$, $P = \{-1, 0, 1\}$, $Q = \{-\frac{1}{3}\ -1, 3\}$, $g(x) = \frac{x+2}{x-2}$ છે, તો g ને વિધેય કહી શકાય.

(d) $g : \{2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ માટે $g(x) = 4x - 3$ વિધેય છે.

2. વિધેય f: A → B માટેના વિસ્તાર માટે નીચેના વિધાનોપૈકી કયું વિધાન સાચું છે.

(a) $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$ (b) સહપ્રદેશ ગણનો ઉપગણ કે સહપ્રદેશ પોતે ન હોય

(c) પ્રદેશ તેનો વિસ્તાર હોય છે. (d) $f(A) = \{f(x) \mid x \in B\}$

3. $g : X \rightarrow Y$, $X = \{-1, 0\}$, $Y = \{2, 4\}$, $g(x) = 4 - 2x$. આ પરથી જણાવો કે નીચેના પૈકી કયું વિધાન સાચું છે.

(a) g ને વિધેય કહી શકાય. (b) g ને વિધેય ના કહી શકાય.

(c) X ને વિધેય કહી શકાય. (d) Y ને વિધેય કહી શકાય.

4. $f : A \rightarrow B$ માટે પ્રદેશ ગણ A માંની કોઈ બે ભિન્ન કિંમતો માટે વિધેયાત્મક કિંમત સમાન મળે તો તે સંબંધને શું કહેવાય ?

(a) એક-એક વિધેય કહેવાય. (b) અનેક-એક વિધેય કહેવાય.

(c) એક-અનેક વિધેય કહેવાય. (d) અનેક-અનેક વિધેય કહેવાય.

5. $f : A \rightarrow B$ માટે ગણ A ની પ્રત્યેક કિંમત માટે ગણ B માં ફક્ત એક જ પ્રતિબિંબ મળતું હોય તેને કેવા પ્રકારનું વિધેય કહેવાય ?

(a) વિધેય ન કહેવાય. (b) એક-એક વિધેય (c) અચળ વિધેય કહેવાય. (d) અનેક-એક વિધેય

6. એક-એક વિધેય માટે નીચેનાં પૈકી કયું વિધાન સાચું છે ?

(a) પ્રદેશની ફક્ત બે જ કિંમતો માટે પ્રતિબિંબો ભિન્ન હોવાં જોઈએ.

(b) પ્રદેશની કોઈ બે કિંમતો માટે પ્રતિબિંબો સમાન હોવાં જોઈએ.

(c) પ્રદેશની કોઈ બે ભિન્ન કિંમતો માટે પ્રતિબિંબો ભિન્ન હોવાં જોઈએ.

(d) પ્રદેશની પ્રત્યેક કિંમતો માટે પ્રતિબિંબો સમાન હોવાં જોઈએ.

7. $f : Z - \{0\} \rightarrow N$ અને $f(x) = x^2$, $x \in Z - \{0\}$ એ કયા પ્રકારનું વિધેય છે ?

(a) એક-એક વિધેય છે. (b) અનેક-એક વિધેય છે. (c) અચળ વિધેય છે. (d) $f(x)$ એ વિધેય નથી.

8. બે ભિન્ન વિધેયો સમાન થાય તે માટે નીચેની પૈકી કઈ શરત પર્યાપ્ત છે ?

(a) બંને વિધેયોનો પ્રદેશ સમાન હોવા જોઈએ. (b) બંને વિધેયોના વિસ્તાર સમાન હોવા જોઈએ.

(c) (a) અને (b) (d) (a) અથવા (b)

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. વિધેય વ્યાખ્યાયિત થવા માટેની જરૂરી શરત જણાવો.

2. $f : A \rightarrow B$, $A = \{-3\ -1, 1, 3\}$, $B = \{1, 0, 9\}$, $f(x) = x^2$. શું f એ વિધેય છે ?

3. $g : N \rightarrow N$, પ્રદેશ ગણના પ્રત્યેક ઘટકમાંથી 2 બાદ કરો. આ નિયમને વિધેય કહી શકાય ?

4. એક-એક વિધેયની સાંકેતિક વ્યાખ્યા આપો.

5. અનેક-એક વિધેયની સાંકેતિક વ્યાખ્યા આપો.

6. અચળ વિધેયની સાંકેતિક વ્યાખ્યા આપો.

7. $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow N$, $g : \{2, 3, 4\} \rightarrow N$, $f(x) = 2x + 1$ અને $g(x) = x - 1$
f અને g સમાન વિધેય છે ? શા માટે ?

8. વિધેય $f : Z \rightarrow N$, $f(t) = t^2 + 1\ t \in Z$ છે, તો f નો પ્રકાર નક્કી કરો.

9. વિધેય $f : N \rightarrow N$, $f(t) = t^2 + 1\ t \in N$ છે, તો f નો પ્રકાર નક્કી કરો.

10. વાસ્તવિક ચલનું વિધેયને વ્યાખ્યાયિત કરો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. વિધેયની વ્યાખ્યા આપો.

2. વિધેયના પ્રદેશ અને સહપ્રદેશની વ્યાખ્યા આપો.

3. વિધેયના વિસ્તાર વ્યાખ્યાયિત કરો.

4. વિધેય $g : A \rightarrow N$, $A = \{x \mid x \in N, 1 < x \leq 4\}$ $g(x) = x + 1$ નો વિસ્તાર શોધો.

5. $k : X \rightarrow Y$ માટે $X = \{t \mid t \in Z, -3 \leq t \leq 3\}$, $Y = \{a \mid a \in N, 1 \leq a \leq 20\}$, $k(t) = t^2 + 2$ હોય તો વિધેય k નો પ્રકાર જણાવો.

6. $h : A \rightarrow B$ માટે $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $h(x) = x + 5$ માટે વિધેય h નો પ્રકાર જણાવો.

7. જો $P : A \rightarrow B$, $P(x) = 2x - 3$ અને $R_f = \{-2, -1, 0\}$ હોય, તો વિધેયનો પ્રદેશ ગણ મેળવો.

8. જો $f(x) = 1 - \frac{1}{1-x^2}$, $x \in R - \{-1, 1\}$ હોય તો $f(2) - f(-2)$ ની કિંમત મેળવો.

9. જો $f : N \rightarrow N$, $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$ નો પ્રદેશગણ $\{0, 3, 6\}$ હોય, તો તેનો વિસ્તાર શોધો.

10. જો વાસ્તવિક વિધેય $f(x) = \frac{x^2(x+1)^2}{4}$ હોય, તો $f(3) - f(2)$ની કિંમત મેળવો.

11. જો $f : R \rightarrow R$ તેમજ $f(x) = x^2 + 2x - 1$ હોય, તો વિધેય f નો પ્રકાર જણાવો.

12. વાસ્તવિક વિધેય $f(x) = \frac{2x-4}{x+7}$ માટે x ની કઈ કિંમત માટે પ્રતિબિંબ શૂન્ય મળે.

13. $f : Z - \{2\} \rightarrow Z$, $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x-2}$ વિધેયનો પ્રકાર જણાવો.

14. વાસ્તવિક વિધેય $f(x) = 6x^3 - 5^x + 15$ માટે $f(0)$ની કિંમત શોધો.

15. વાસ્તવિક વિધેય $f(x) = x^3 - 2x + \frac{1}{x}$ માટે $f(3) + f(-3)$ ની કિંમત શોધો.

વિભાગ D

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. $f: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$, $\mathrm{A} = \{10, 20, 30\}$, $\mathrm{B} = \{18, 48, 98, 128, 148\}$, $f(x) = 5x - 2$ માટે પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર મેળવો.

2. $f: \mathrm{P} \rightarrow \mathrm{Q}$, $\mathrm{P} = \left\{-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$, $\mathrm{Q} = \left\{-\frac{1}{5}, 1, \frac{1}{3}, 3\right\}$, $f(x) = \frac{x}{2-x}$ માટે પ્રદેશ, સહપ્રદેશ અને વિસ્તાર શોધો.

3. જો $f: \mathrm{R}-\{0\} \rightarrow \mathrm{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1$ હોય, તો $f(-1)$, $f(-2)$ અને $f\left(\frac{1}{2}\right)$ની કિંમત મેળવો.

4. જો વિધેય $f: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}$, $f(x) = 4x - 3$ માટે $\mathrm{R}_f = \{9, 13, 17, 25\}$ હોય તો D_f મેળવો.

5. જો વાસ્તવિક વિધેય $f(x) = 2x^2 - 5x + 4$ હોય, તો x ની કઈ કિંમત માટે $f(3x) - 3f(x) + 5 = 0$ થાય ?

6. જો $f: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{M}$, $\mathrm{A} = \{x \mid x \in \mathrm{N}, 1 \le x < 5\}$ અને $\mathrm{M} = \{x \mid x \in \mathrm{N}, 1 \le x \le 20\}$ તેમજ $f(x) = x^2 + 1$ હોય, તો વિધેય f નો વિસ્તાર શોધો.

7. જો $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ જ્યાં $x \in \mathrm{Z} - \{2\}$ હોય, તો $f(0) + f(1) - f(-2)$ની કિંમત શોધો.

8. વિધેય $f: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{N} \cup \{0\}, f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ નો પ્રદેશ $\mathrm{A} = \{4, 5\}$ હોય, તો તેનો વિસ્તાર શોધો.

9. જો $f(x) = x^2$ અને $g(x) = 5x - 6$ જ્યાં $x \in \{2, 3, 4,\}$ છે, તો બંને વિધેયોની સમાનતા ચકાસો.

10. જો $k: \mathrm{R} \rightarrow \mathrm{R}$ તેમજ $k(x) = x^2 + 3x - 12$ હોય તો વિધેય k નો પ્રકાર જણાવો.

11. જો $f(x) = x(3x-2)$ તેમજ $g(x) = x^3$ અને $x \in \{0, 1, 2,\}$ હોય તો સાબિત કરો કે f અને g સમાન વિધેયો છે.

12. જો $f(x) = \frac{2x+3}{5x+2}$, $x \in \mathrm{R} - \left\{-\frac{2}{5}\right\}$ હોય, તો $f(2) \cdot f\left(\frac{1}{2}\right)$ ની કિંમત મેળવો.

13. જો $f(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}$, $x \in \mathrm{R}-\{0\}$ હોય, તો $f(3) + f(-3)$ ની કિંમત મેળવો.

14. જો $f(x) = 15x^3 - 4x^2 + x + 10$, $x \in \mathrm{R}$ હોય, તો $\frac{f(2)}{f(1)}$ ની કિંમત મેળવો.

15. જો $f: \mathrm{A} \rightarrow \mathrm{N} \cup \{0\}, \mathrm{A} = \{500, 1000, 1300, 1400\}, f(x) = \sqrt{5600 - 4x}$ હોય, તો $x = 1000$ માટે $f(x)$ શોધો. ઉપરાંત x ની કઈ કિંમત માટે $f(x) = 20$ થશે ?

Pierre-Simon Laplace
(1749 - 1827)

Pierre-Simon Laplace : He was an influential French scholar whose work was important to the development in the fields of mathematics, statistics, physics, and astronomy. His work translated the geometric study of classical mechanics to one based on calculus, opening up a broader range of problems in statistics. He was pioneer in the development of classical probabity theory. The Bayesian interpretation of probability was developed by Laplace.

●