4

લક્ષ

(Limit)

વિષયવસ્તુ :

4.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે ધોરણ 11માં વિધેયનો અભ્યાસ કર્યો. એ પ્રકરણમાં આપણે જોયું કે જ્યારે વિધેયમાં ચલની કોઈ ચોક્કસ કિંમત મૂકવામાં આવે ત્યારે તેને અનુરૂપ વિધેયની કોઈ એક કિંમત મળે છે. દાખલા તરીકે, જો વિધેય $f(x) = 2x + 3$ માં $x = 2$ મૂકીએ, તો આપણને $f(2) = 7$ મળે અને જો વિધેય $f(x) = \frac{3-x}{3x+2}$ માં $x = 1$ મૂકીએ તો $f(1) = \frac{2}{5}$ મળે. પણ આ દરેક વિધેય અને ચલની બધી જ કિંમતો માટે શક્ય નથી. ધારો કે આપણે $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ વિધેય લઈએ અને તેમાં $x = 3$ મૂકીએ તો $f(3) = \frac{0}{0}$ મળે જે અનિયત (indeterminate) કિંમત છે. વિધેયની $f(3)$ ની આસાદિત (approximate) કિંમત મેળવવા માટે આપણે વિધેયના લક્ષનો ખ્યાલ મેળવવો જરૂરી છે. આમ, જ્યારે વિધેયની કોઈ કિંમત અનિયત હોય ત્યારે લક્ષનો ઉપયોગ કરી વિધેયની તે કિંમતની આસાદિત કિંમત મેળવી શકાય છે.

ઉપર્યુક્ત ખ્યાલ સમજવા માટે આપણે નીચેનું ઉદાહરણ લઈએ :

ધારો કે આપણે ઇન્ટરનેટ પર ફૂટબૉલની મૅચ જોતા હોઈએ અને કમનસીબે, ઇન્ટરનેટના જોડાણમાં ખલેલ થાય અને આપણે 14:00મી મિનિટે (મૅચ શરૂ થયાના 14 મિનિટ પછી) શું થયું તે ચૂકી ગયાં.

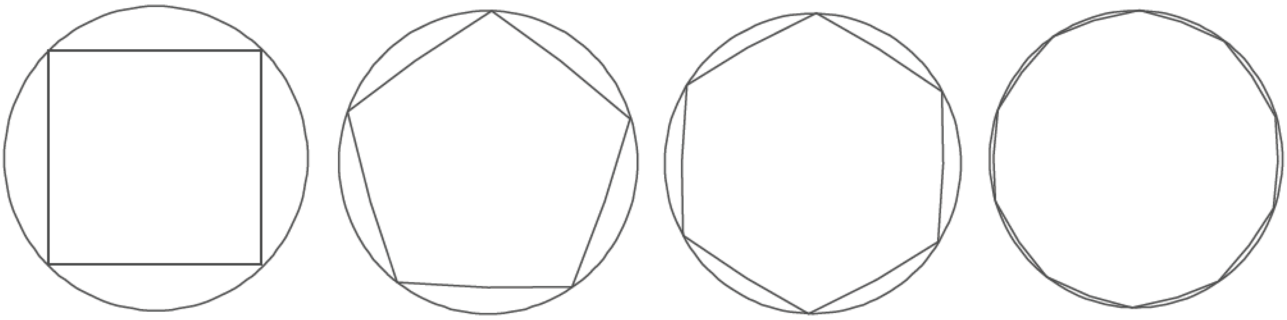
મૅચ શરૂ થયાની 14:00 મિનિટે દડાનું સ્થાન શું હશે ? આપણે 13:58 (મૅચ શરૂ થયાને 13 મિનિટ અને 58 સેકન્ડે), 13:59, 14:01, 14:02 મિનિટે દડાનું સ્થાન જોઈ શકીએ છીએ.

આપણે 14:00 મિનિટની નજીકના સમય (13:59 અને 14:01) વખતે દડાના સ્થાન જોઈ 14:00થી મિનિટે દડાના સ્થાનનું અનુમાન કરીશું. આપણું અનુમાન છે કે '14:00 મિનિટે, દડાનું સ્થાન 13:59 અને 14:01 મિનિટે દડાના સ્થાનની વચ્ચે ક્યાંક હશે.' સ્લો-મોશન કૅમેરા વડે, આપણે એવું પણ કહી શકીએ '14:00 મિનિટે દડાનું સ્થાન 13:59.999 અને 14:00.001ના સ્થાનની વચ્ચે ક્યાંક હશે.' એનો અર્થ એવો થાય કે જ્યારે 14:00 મિનિટની નજીકમાં નજીકનો સમય લઈએ ત્યારે આપણી અંદાજિત કિંમતમાં સુધારો થાય છે. દડાના આસાદિત સ્થાનને દડાના મૂળ સ્થાનની અનુલક્ષિત કિંમત કહીં શકાય.

આમ, આપણે કહી શકીએ કે, 'લક્ષ એ વિશ્વસનીય આસાદિત કિંમત શોધવાની એક રીત છે.'

આપણે બીજું એક ઉદાહરણ લઈએ.

ધારો કે આપણે વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ શોધવાનું છે. વર્તુળના ક્ષેત્રફળની અંદાજિત કિંમત વર્તુળની અંદર દોરવામાં આવેલ બહુકોણના ક્ષેત્રફળથી મેળવી શકાય છે.



4 બાજુ 5 બાજુ 6 બાજુ 10 બાજુ

ઉપરની આકૃતિઓ પરથી જોઈ શકાય કે, જેમ બહુકોણની બાજુઓ વધતી જાય તેમ બહુકોણનું ક્ષેત્રફળ, વર્તુળના ક્ષેત્રફળની નજીક પહોંચે છે. બહુકોણના ક્ષેત્રફળની અનુલક્ષિત કિંમત એ વર્તુળના ક્ષેત્રફળની શ્રેષ્ઠ આસાદિત કિંમત છે.

આમ, અજ્ઞાત કિંમતોની આસપાસની કિંમતોને લઈ તેની આસાદિત કિંમત શોધવા માટે લક્ષનો ઉપયોગ કરી શકાય છે. આસપાસની કિંમતો જેટલી નજીક લઈએ તેટલું આસાદન વધુ સારું મળે છે.

લક્ષનો ખ્યાલ મેળવવા માટે, આપણે નીચેનાં કેટલાંક મૂળભૂત પદો સમજીએ :

4.2 વાસ્તવિક રેખા અને તેના અંતરાલ

વાસ્તવિક રેખા : જે રેખાનાં બિંદુઓ વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય તેવી રેખાને વાસ્તવિક રેખા અથવા વાસ્તવિક સંખ્યા રેખા કહેવાય છે.

અંતરાલ : કોઈ પણ બે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની વચ્ચેની વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણને અંતરાલ કહેવાય છે.

સંવૃત્ત અંતરાલ : જો $a \in R, b \in R$ અને $a < b$ ની સંખ્યાઓ a, b તથા a અને b વચ્ચેની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણને સંવૃત્ત અંતરાલ કહેવાય છે. આ સંવૃત્ત અંતરાલને $[a, b]$ વડે દર્શાવાય છે.

$$[a, b] = \{x \mid a \le x \le b, \ x \in R\}$$

વિવૃત્ત અંતરાલ : જો $a \in R, b \in R$ અને $a < b$ તો a અને bને નહિ સમાવતી પરંતુ a અને bની વચ્ચેની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણને વિવૃત્ત અંતરાલ કહેવાય છે. વિવૃત્ત અંતરાલને (a, b) વડે દર્શાવાય છે.

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b, \ x \in R\}$$

સંવૃત્ત-વિવૃત્ત અંતરાલ : જો $a \in R, b \in R$ અને $a < b$ તો aને સમાવતી પરંતુ bને નહિ સમાવતી તથા a અને b વચ્ચેની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણને સંવૃત્ત-વિવૃત્ત અંતરાલ કહેવાય છે. તેને $[a, b)$ વડે દર્શાવાય છે.

$$[a, b) = \{x \mid a \le x < b, \ \ x \in R\}$$

વિવૃત્ત-સંવૃત્ત અંતરાલ : જો $a \in R, b \in R$ અને $a < b$ તો a ને નહિ સમાવતી પરંતુ b ને સમાવતી તથા a અને b વચ્ચેની તમામ વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણને વિવૃત્ત-સંવૃત્ત અંતરાલ કહેવાય છે. તેને $(a, b]$ વડે દર્શાવાય છે.

$$(a, b] = \{x \mid a < x \le b, \ \ x \in R\}$$

4.3 માનાંક

જો $x \in R$ હોય તો

$|x| = x$ જો $x \ge 0$

$= -x$ જો $x < 0$

વાસ્તવિક સંખ્યાનો માનાંક હંમેશાં અઋણ હોય છે.

દા.ત. $|3| = 3, \ |-4| = 4, \ |0| = 0$

$|x-a| < \delta$ (*Delta*) નો અર્થ

માનાંકની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરીને

$|x-a| < \delta = (x-a) < \delta$ જો $x \ge a$ **અથવા** $x < a+\delta$ જો $x \ge a$

$= (a-x) < \delta$ જો $x < a$ **અથવા** $x > a-\delta$ જો $x < a$

$\therefore \ |x-a| < \delta \iff x \in (a-\delta, \ a+\delta)$

4.4 સામીપ્ય

ધારો કે $a \in R$ છે, તો a ને સમાવતા વિવૃત્ત અંતરાલને a નું **સામીપ્ય** કહેવાય છે.

a નું δ સામીપ્ય :

જો $a \in R$ અને δ એ અઋણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો વિવૃત્ત અંતરાલ $(a-\delta, \ a+\delta)$ ને a નું δ સામીપ્ય કહેવાય છે. તેને $N(a, \delta)$ વડે દર્શાવાય છે.

અહીં, સમજી શકીએ કે

$$N(a, \delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta, \ \ x \in R\}$$
$$= \{x \mid |x-a| < \delta, \ x \in R\}$$

'a નું δ સામીપ્ય'ને નીચે મુજબ જુદી-જુદી રીતે દર્શાવી શકાય.

સામીપ્ય સ્વરૂપ	માનાંક સ્વરૂપ	અંતરાલ સ્વરૂપ
$N(a, \delta)$	$\|x-a\| < \delta$	$(a-\delta, \ a+\delta)$

ઉદાહરણ 1 : $N(5, 0.2)$ ને માનાંક અને અંતરાલ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

$N(5, 0.2)$ ને $N(a, \delta)$ સાથે સરખાવતાં આપણને $a = 5$ અને $\delta = 0.2$ મળે.

માનાંક સ્વરૂપ : $|x-a| < \delta$

$a=5$ અને $\delta=0.2$ મૂકતાં,

$N(5, 0.2) = |x-5| < 0.2$

અંતરાલ સ્વરૂપ : $(a-\delta,\ a+\delta)$

$a=5$ અને $\delta=0.2$ મૂકતાં,

$$N(5, 0.2) = (5-0.2,\ 5+0.2)$$
$$= (4.8,\ 5.2)$$

ઉદાહરણ2 : 3નું 0.001 સામીપ્ય ને માનાંક અને અંતરાલ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

3નું 0.001 સામીપ્યને aનું δ સામીપ્ય સાથે સરખાવતાં આપણને $a = 3$ અને $\delta = 0.001$ મળે.

માનાંક સ્વરૂપ : $|x-a| < \delta$

$a = 3$ અને $\delta = 0.001$ મૂકતાં,

3નું 0.001 સામીપ્ય $= |x-3| < 0.001$

અંતરાલ સ્વરૂપ : $(a-\delta,\ a+\delta)$

$a = 3$ અને $\delta = 0.001$ મૂકતાં,

3નું 0.001 સામીપ્ય $= (3-0.001,\ 3+0.001)$

$= (2.999,\ 3.001)$

ઉદાહરણ3 : $|x+1| < 0.5$ ને સામીપ્ય અને અંતરાલ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

$|x+1| < 0.5$ ને $|x-a| < \delta$ સાથે સરખાવતાં આપણને $a=-1$ અને $\delta=0.5$ મળે.

સામીપ્ય સ્વરૂપ : $N(a, \delta)$

$a=-1$ અને $\delta = 0.5$ મૂકતાં,

$|x+1| < 0.5 = N(-1,\ 0.5)$

અંતરાલ સ્વરૂપ : $(a-\delta,\ a+\delta)$

$a=-1$ અને $\delta = 0.5$ મૂકતાં,

$$|x+1| < 0.5 = (-1-0.5,\ -1+0.5)$$
$$= (-1.5,\ -0.5)$$

ઉદાહરણ4 : $(0.9, 1.1)$ ને સામીપ્ય અને માનાંક સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

$(0.9, 1.1)$ ને $(a-\delta,\ a+\delta)$ સાથે સરખાવતાં, આપણને $a-\delta=0.9$ અને $a+\delta=1.1$ મળે.

$a-\delta=0.9$ અને $a+\delta=1.1$નો સરવાળો કરતાં, આપણને $2a=2$ $\quad \therefore\ a=1$ મળે.

$a=1$ ને $a+\delta=1.1$ માં મૂકતાં, આપણને $\delta = 0.1$ મળે.

સામીપ્ય સ્વરૂપ : $N(a, \delta)$

$a=1$ અને $\delta = 0.1$ મૂકતાં,

$(0.9, 1.1) = N(1, 0.1)$

માનાંક સ્વરૂપ : $|x-a| < \delta$

$a=1$ અને $\delta = 0.1$ મૂકતાં,

$(0.9, 1.1) = |x-1| < 0.1$

aનું છિદ્રિત δ સામીપ્ય :

જો $a \in R$ અને δ એ અઋણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો વિવૃત્ત અંતરાલ $(a-\delta, a+\delta) - \{a\}$ ને aનું છિદ્રિત δ સામીપ્ય કહેવાય છે. તેને $N^*(a, \delta)$ વડે દર્શાવાય છે.

અહીં, સમજી શકીએ કે

$$N^*(a, \delta) = N(a, \delta) - \{a\}$$

$$= \{x \mid a-\delta < x < a+\delta,\ x \neq a,\ x \in R\}$$

$$= \{x \mid |x-a| < \delta,\ x \neq a,\ x \in R\}$$

દા.ત. $N^*(5, 2) = N(5, 2) - \{5\}$

$$= \{x \mid 3 < x < 7, x \neq 5,\ x \in R\}$$

$$= \{x \mid |x-5| < 2,\ x \neq 5,\ x \in R\}$$

સ્વાધ્યાય 4.1

1. નીચેનાને માનાંક અને અંતરાલ સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

(1) 4નું 0.4 સામીપ્ય (2) 2નું 0.02 સામીપ્ય

(3) 0નું 0.05 સામીપ્ય (4) –1નું 0.001 સામીપ્ય

2. નીચેનાને અંતરાલ અને સામીપ્ય સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

(1) $|x-2| < 0.01$ (2) $|x+5| < 0.1$

(3) $|x| < \frac{1}{3}$ (4) $|x+3| < 0.15$

3. નીચેનાને માનાંક અને સામીપ્ય સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

(1) $3.8 < x < 4.8$ (2) $1.95 < x < 2.05$

(3) $-0.4 < x < 1.4$ (4) $1.998 < x < 2.002$

4. $N(16, 0.5)$ ને અંતરાલ અને માનાંક સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

5. જો $N(3, b) = (2.95, k)$ હોય, તો b અને kની કિંમતો શોધો.

6. જો $|x-10| < k_1 = (k_2, 10.01)$ હોય, તો k_1 અને k_2ની કિંમતો શોધો.

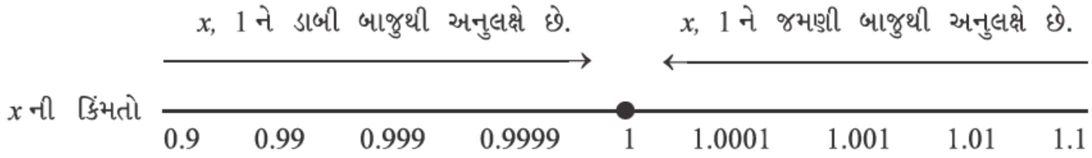
*

$x \to a$ નો અર્થ :

જો કોઈ ચલ x ની કિંમત ઘટાડતાં કે વધારતાં કોઈ એક ચોક્કસ સંખ્યા 'a' ની ખૂબ જ નજીક લાવવામાં આવે, તો x, a ને અનુલક્ષે છે એમ કહેવાય. તેને સંકેતમાં $x \to a$ વડે દર્શાવાય છે.

અહીં નોંધવું જરૂરી છે કે $x \to a$ એટલે કે x ની કિંમતો a થી ખૂબ જ નજીક છે પણ $x = a$ નથી.

આપણે $x \to 1$ નો અર્થ સમજીએ.

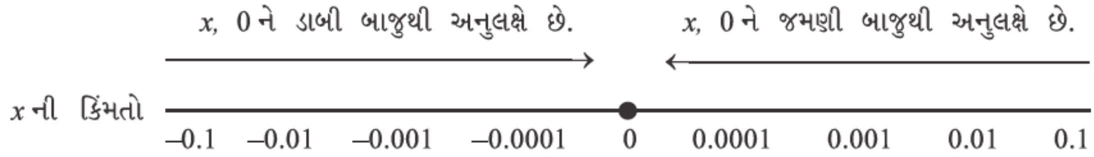


$x \to 0$ નો અર્થ :

જો કોઈ ચલ x ની ધન કિંમતો ઘટાડતાં કે x ની ઋણ કિંમતો વધારતા '0' ની ખૂબ જ નજીક લાવવામાં આવે, તો x, 0 (શૂન્ય)ને અનુલક્ષે છે એમ કહેવાય. તેને સંકેતમાં $x \to 0$ વડે દર્શાવાય છે.

અહીં નોંધવું જરૂરી છે કે $x \to 0$ એટલે કે x ની કિંમતો '0' ની ખૂબ જ નજીક છે પણ $x = 0$ નથી.

આપણે $x \to 0$ નો અર્થ સમજીએ.



4.5 વિધેયનું લક્ષ

જો ચલ x ની કિંમત કોઈ એક સંખ્યા 'a' ની વધુ ને વધુ નજીક લઈ જવામાં આવે ત્યારે વિધેય $f(x)$ ની કિંમત કોઈ નિશ્ચિત સંખ્યા l ની વધુ ને વધુ નજીક જાય તો એમ કહેવાય કે જ્યારે x, a ને અનુલક્ષે છે ત્યારે $f(x)$ એ l ને અનુલક્ષે છે એટલે કે $x \to a$, ત્યારે $f(x) \to l$. તેને સંકેતમાં $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ એમ દર્શાવાય. l ને $f(x)$ ની અનુલક્ષિત કિંમત કહેવાય છે.

વ્યાખ્યા : જો ગમે તેટલી નાની આપેલ પૂર્વ નિર્ધારિત સંખ્યા $\varepsilon > 0$ માટે આપણે એવી એક ધન સંખ્યા δ શોધી શકીએ કે જેથી જ્યારે $|x - a| < \delta$ હોય ત્યારે x ની દરેક કિંમત માટે $|f(x) - l| < \varepsilon$ (*Epsilon*) થાય તો જ્યારે x, a ને અનુલક્ષે ત્યારે વિધેય $f(x)$ લક્ષ l ધરાવે છે.

હવે આપણે વિધેયનું લક્ષ કેવી રીતે મેળવવું તે સમજીએ.

ધારો કે આપણે $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ની $x = 1$ માટે કિંમત શોધવાની છે.

જો $x = 1$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ માં મૂકવામાં આવે, તો $f(1) = \frac{0}{0}$ મળે જે અનિયત કિંમત છે. તેથી આપણે $f(1)$ ની કિંમત શોધી શકતા નથી પણ x ની 1 થી ખૂબ જ નજીકની કિંમત ધારવામાં આવે તો આપણે $f(1)$ ની આસાદિત કિંમત મેળવી શકીએ. જો x, 1 ને અનુલક્ષે તો $f(x)$ ની કિંમતોમાં ફેરફાર જોઈએ.

x (1 ની ડાબી બાજુથી 1 તરફ)	$f(x)$	x (1 ની જમણી બાજુથી 1 તરફ)	$f(x)$
0.9	1.9	1.1	2.1
0.99	1.99	1.01	2.01
0.999	1.999	1.001	2.001
0.9999	1.9999	1.0001	2.0001
. . .	. . .	. . .	. . .

આપણે x ની 1 થી નજીકની કોઈ પણ કિંમત ધારી શકીએ છે. સામાન્ય રીતે આપણે $x = 1$ ની બંને બાજુ 0.1 ના અંતરે આવેલી કિંમતોથી શરૂ કરીશું. એટલે કે $x = 0.9$ અને 1.1 થી શરૂ કરીશું અને પછી x ને બંને બાજુથી 1ની નજીકની કિંમતો લેતાં જઈશું.

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ થાય છે કે, જે x ની કિંમતો વધારતાં કે ઘટાડતાં 1 ની નજીક લાવવામાં આવે તો $f(x)$ ની કિંમત 2 ને અનુલક્ષે છે. એટલે કે જ્યારે $x \to 1$ ત્યારે $f(x) \to 2$ એમ દર્શાવાય. તેને સંકેતમાં $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

x ની અલગ-અલગ કિંમતોને $f(x)$ માં મૂકી, ઉપર દર્શાવ્યા પ્રમાણે કોષ્ટક રચી લક્ષ મેળવવામાં આવે છે. તેથી લક્ષ મેળવવાની આ રીતને **કોષ્ટકની રીત** કહેવાય છે.

ઉદાહરણ 5 : $\lim\limits_{x \to 3} 2x+5$ ની કિંમત કોષ્ટકની રીતથી મેળવો.

અહીં $f(x) = 2x+5$ છે. આપણે 3ની ખૂબ જ નજીકની x ની કિંમતો લઈ નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બનાવીશું :

x	$f(x)$	x	$f(x)$
2.9	10.8	3.1	11.2
2.99	10.98	3.01	11.02
2.999	10.998	3.001	11.002
2.9999	10.9998	3.0001	11.0002
. . .	. . .	. . .	. . .

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે જ્યારે x ની કિંમતો વધારતાં કે ઘટાડતાં 3 ની ખૂબ જ નજીક લાવવામાં આવે ત્યારે $f(x)$ ની કિંમત 11 ની નજીક જાય છે. એટલે કે જ્યારે $x \to 3$ ત્યારે $f(x) \to 11$

$\therefore \lim\limits_{x \to 3} 2x+5 = 11$

ઉદાહરણ 6 : $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1}$, $x \in R - \{-1\}$ ની કિંમત કોષ્ટકની રીતે મેળવો.

અહીં $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ છે. આપણે -1 ની ખૂબ જ નજીકની x ની કિંમતો લઈ નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બનાવીશું :

x	$f(x)$	x	$f(x)$
–1.1	–2.1	–0.9	–1.9
–1.01	–2.01	–0.99	–1.99
–1.001	–2.001	–0.999	–1.999
–1.0001	–2.0001	–0.9999	–1.9999
. . .	. . .	. . .	. . .

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે જ્યારે x ની કિંમતો વધારતાં કે ઘટાડતાં -1 ની ખૂબ જ નજીક લાવવામાં આવે ત્યારે $f(x)$ ની કિંમત -2 ની નજીક જાય છે. એટલે કે જ્યારે $x \to -1$ ત્યારે $f(x) \to -2$

$$\therefore \lim_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x+1} = -2$$

ઉદાહરણ 7 : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x^2+3x}{x}$, $x \in R - \{0\}$ ની કિંમત કોષ્ટકની રીતે મેળવો.

અહીં, $f(x) = \frac{2x^2+3x}{x}$ છે. આપણે 0 ની ખૂબ જ નજીકની x ની કિંમતો લઈ નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બનાવીશું :

x	$f(x)$	x	$f(x)$
–0.1	2.8	0.1	3.2
–0.01	2.98	0.01	3.02
–0.001	2.998	0.001	3.002
–0.0001	2.9998	0.0001	3.0002
. . .	. . .	. . .	. . .

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે જ્યારે x ની કિંમતો વધારતાં કે ઘટાડતાં 0 ની ખૂબ જ નજીક લાવવામાં આવે ત્યારે $f(x)$ ની કિંમત 3 ની ખૂબ જ નજીક જાય છે. એટલે કે જ્યારે $x \to 0$ ત્યારે $f(x) \to 3$

$$\therefore \lim_{x \to 0} \frac{2x^2+3x}{x} = 3$$

ઉદાહરણ 8 : $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$, $x \in R - \{1\}$ ની કિંમત કોષ્ટકની રીતે મેળવો.

અહીં, $f(x) = \frac{1}{x-1}$ છે. આપણે 1 ની ખૂબ જ નજીકની x ની કિંમતો લઈ નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બનાવીશું :

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.9	–10	1.1	10
0.99	–100	1.01	100
0.999	–1000	1.001	1000
0.9999	–10000	1.0001	10000
⋮	⋮	⋮	⋮

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે જ્યારે x ની કિંમતો વધારતાં કે ઘટાડતાં 1 ની ખૂબ જ નજીક લાવવામાં આવે ત્યારે $f(x)$ ની કિંમતો કોઈ ચોક્કસ સંખ્યા તરફ જતી નથી, એટલે કે જ્યારે $x \to 1$ ત્યારે $f(x)$ કોઈ એક ચોક્કસ કિંમતને અનુલક્ષતું નથી. આમ, આ વિધેયનું લક્ષ અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી.

$\therefore \lim\limits_{x \to 1} \frac{1}{x-1}$ અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી.

ઉદાહરણ 9 : $\lim\limits_{x \to 2} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - 4}$, $x \in R - \{2\}$ ની કિંમત કોષ્ટકની રીતે મેળવો.

અહીં, $f(x) = \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - 4}$ છે. આપણે અગાઉના ઉદાહરણોમાં કરેલ ગણતરી પ્રમાણે અહીં પણ લક્ષની કિંમત મેળવી શકાય. પણ ગણતરીની સરળતા ખાતર વિધેય $f(x)$ ના અંશ અને છેદના સામાન્ય અવયવ $(x-2)$ દૂર કરી ત્યાર બાદ લક્ષની કિંમત મેળવી શકાય.

$$\lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(3x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{3x+2}{x+2} \qquad (\because \ x - 2 \neq 0)$$

આપણે 2 ની ખૂબજ નજીકની x ની કિંમતો લઈ નીચે પ્રમાણે કોષ્ટક બનાવીશું :

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.9	1.9744	2.1	2.02439
1.99	1.9975	2.01	2.002494
1.999	1.9997	2.001	2.0002499
1.9999	1.9999	2.0001	2.000025
⋮	⋮	⋮	⋮

કોષ્ટક પરથી સ્પષ્ટ છે કે જ્યારે x ની કિંમતો વધારતાં કે ઘટાડતાં 2 ની ખૂબજ નજીક લાવવામાં આવે ત્યારે $f(x)$ ની કિંમત 2 ની નજીક જાય છે. એટલે કે જ્યારે $x \to 2$ ત્યારે $f(x) \to 2$

$$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 4x - 4}{x^2 - 4} = 2$$

સ્વાધ્યાય 4.2

1. **કોષ્ટકની રીતે નીચેનાની કિંમતો મેળવો :**

(1) $\lim\limits_{x \to 1} 2x+1$ (2) $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$

(3) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 + 3x - 14}{x - 2}$ (4) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 9x + 9}{x + 3}$

(5) $\lim\limits_{x \to 2} x$

2. કોષ્ટકની રચના કરી $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2}{x - 3}$ અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી તે બતાવો.

3. જો $y = \dfrac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ હોય તો કોષ્ટકની રીતે સાબિત કરો કે જ્યારે $x \to 2$ ત્યારે $y \to 5$

4. જો $y = 5 - 2x$ હોય તો કોષ્ટકની રીતે સાબિત કરો કે જ્યારે $x \to -1$ ત્યારે $y \to 7$

*

4.6 લક્ષના કાર્યનિયમો

નીચેના નિયમો સાબિતી વગર સ્વીકારી લઈશું :

જો $f(x)$ અને $g(x)$ વાસ્તવિક ચલ x ના બે વાસ્તવિક વિધેય છે અને $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ અને $\lim\limits_{x \to a} g(x) = m$, તો

(1) $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x)\right] = l \pm m$

બે વિધેયોના સરવાળા અથવા બાદબાકીનું લક્ષ તે વિધેયોના લક્ષના સરવાળા અથવા બાદબાકી બરાબર થાય છે.

(2) $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) \times g(x)\right] = l \times m$

બે વિધેયોના ગુણાકારનું લક્ષ તે બે વિધેયોના લક્ષના ગુણાકાર બરાબર થાય છે.

(3) $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{l}{m}, \quad m \neq 0$

બે વિધેયોના ભાગાકારનું લક્ષ તેમના લક્ષના ભાગાકાર બરાબર થાય છે. અહીં છેદના વિધેયનું લક્ષ શૂન્ય હોવું જોઈએ નહિ.

(4) $\lim\limits_{x \to a} k\, f(x) = kl$, k અચળ છે.

વિધેયના કોઈ અચળાંક સાથે ગુણાકારનું લક્ષ એ વિધેયના લક્ષના તે અચળાંક સાથેના ગુણાકાર બરાબર થાય છે.

4.7 લક્ષનાં પ્રામાણિત રૂપો

(1) **બહુપદીનું લક્ષ**

ધારો કે $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ હોય, તો લક્ષના કાર્યનિયમોનો ઉપયોગ કરી,

$$\lim_{x \to b} f(x) = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + ... + a_n b^n$$

(2) $\lim_{x \to a} \left[\frac{x^n - a^n}{x - a}\right] = n a^{n-1}, \quad n \in Q$

આપણે લક્ષનાં કાર્યનિયમો અને પ્રામાણિત રૂપો આધારિત ઉદાહરણ જોઈશું.

ઉદાહરણ 10 : $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x + 3}$ ની કિંમત શોધો.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 2x + 3} = \frac{(0)^2 + 5(0) + 6}{(0)^2 + 2(0) + 3}$$

$$= \frac{6}{3}$$

$$= 2$$

ઉદાહરણ 11 : $\lim_{x \to 2} \frac{2x + 3}{x - 1}$ ની કિંમત શોધો.

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x + 3}{x - 1} = \frac{2(2) + 3}{2 - 1}$$

$$= \frac{7}{1}$$

$$= 7$$

ઉદાહરણ 12 : $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$ ની કિંમત શોધો.

જો $x = 3$ વિધેય $f(x)$ માં મૂકીએ તો વિધેયની કિંમત $\frac{0}{0}$ મળે જે અનિયત છે. એથી અંશ અને છેદના અવયવ પાડીશું. $x \to 3$ છે તેથી $(x - 3)$ અંશ અને છેદનો સામાન્ય અવયવ હશે.

નોંધ : જો આપેલ વિધેયમાં $x = a$ મૂકતાં વિધેયની કિંમત $\frac{0}{0}$ મળે તો અંશ અને છેદમાં $(x - a)$ સામાન્ય અવયવ હોય.

અંશ $= x^2 - 2x - 3$

$= x^2 - 3x + x - 3$

$= x(x - 3) + 1(x - 3)$

$= (x - 3)\ (x + 1)$

છેદ $= x^2 - 5x + 6$

$= x^2 - 3x - 2x + 6$

$= x(x - 3) - 2(x - 3)$

$= (x - 3)\ (x - 2)$

હવે, $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)\ (x + 1)}{(x - 3)(x - 2)}$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x + 1)}{(x - 2)} \qquad (\because\ x - 3 \neq 0)$$

$$= \frac{3+1}{3-2}$$

$$= \frac{4}{1}$$

$$= 4$$

ઉદાહરણ 13 : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1}$ ની કિંમત શોધો.

જો $x = 1$ વિધેય $f(x)$ માં મૂકીએ, તો વિધેયની કિંમત $\frac{0}{0}$ મળે જે અનિયત છે.

અંશ $= 2x^2 + x - 3$

$= 2x^2 + 3x - 2x - 3$

$= x(2x+3) - 1(2x+3)$

$= (2x+3)\ (x-1)$

છેદ $= x^2 - 1$

$= (x+1)\ (x-1)$

હવે, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 1} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{2x+3}{x+1} \qquad (\because \ x - 1 \neq 0)$$

$$= \frac{2(1)+3}{1+1}$$

$$= \frac{5}{2}$$

ઉદાહરણ 14 : $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 7x + 3}{3x^2 + 8x - 3}$ ની કિંમત શોધો.

જો $x = -3$ વિધેય $f(x)$ માં મૂકીએ તો વિધેયની કિંમત $\frac{0}{0}$ મળે જે અનિયત છે.

અંશ $= 2x^2 + 7x + 3$

$= 2x^2 + 6x + x + 3$

$= 2x(x+3) + 1(x+3)$

$= (x+3)\ (2x+1)$

છેદ $= 3x^2 + 8x - 3$

$= 3x^2 + 9x - x - 3$

$= 3x(x+3) - 1(x+3)$

$= (x+3)\ (3x-1)$

હવે, $\lim_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 7x + 3}{3x^2 + 8x - 3} = \lim_{x \to -3} \dfrac{(x + 3)(2x + 1)}{(x + 3)(3x - 1)}$

$$= \lim_{x \to -3} \frac{2x + 1}{3x - 1} \qquad (\because \quad x + 3 \neq 0)$$

$$= \frac{2(-3) + 1}{3(-3) - 1}$$

$$= \frac{-6 + 1}{-9 - 1}$$

$$= \frac{-5}{-10}$$

$$= \frac{1}{2}$$

ઉદાહરણ 15 : $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 - x - 1}{4x^2 + 8x + 3}$ ની કિંમત શોધો.

જો $x = -\frac{1}{2}$, વિધેય $f(x)$ માં મૂકીએ તો વિધેયની કિંમત $\frac{0}{0}$ મળે જે અનિયત છે.

અંશ $= 2x^2 - x - 1$

$= 2x^2 - 2x + x - 1$

$= 2x(x - 1) + 1(x - 1)$

$= (x - 1)(2x + 1)$

છેદ $= 4x^2 + 8x + 3$

$= 4x^2 + 6x + 2x + 3$

$= 2x(2x + 3) + 1(2x + 3)$

$= (2x + 3)(2x + 1)$

હવે, $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 - x - 1}{4x^2 + 8x + 3} = \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{(x - 1)(2x + 1)}{(2x + 3)(2x + 1)}$

$$= \lim_{x \to -\frac{1}{2}} \frac{x - 1}{2x + 3} \qquad (\because \quad 2x + 1 \neq 0)$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} - 1}{2\left(-\frac{1}{2}\right) + 3}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2}}{-1 + 3}$$

$$= \frac{-\frac{3}{2}}{2}$$

$$= -\frac{3}{4}$$

ઉદાહરણ 16 : $\lim\limits_{x \to 2} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-2x}\right]$ **ની કિંમત શોધો.**

$$\lim_{x \to 2} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x^2-2x}\right] = \lim_{x \to 2} \left[\frac{1}{x-2} - \frac{2}{x(x-2)}\right]$$

$$= \lim_{x \to 2} \left[\frac{x-2}{x(x-2)}\right]$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{1}{x} \qquad (\because \ x-2 \neq 0)$$

$$= \frac{1}{2}$$

ઉદાહરણ 17 : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} \left[\frac{2x+3}{3x-5} + \frac{3}{5}\right]$ **ની કિંમત શોધો.**

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left[\frac{2x+3}{3x-5} + \frac{3}{5}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left[\frac{5(2x+3) + 3(3x-5)}{5(3x-5)}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left[\frac{10x+15+9x-15}{5(3x-5)}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \left[\frac{19x}{5(3x-5)}\right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{19}{5(3x-5)} \qquad (\because \ x \neq 0)$$

$$= \frac{19}{5[3(0)-5]}$$

$$= \frac{19}{5(-5)}$$

$$= -\frac{19}{25}$$

ઉદાહરણ 18 : જો $f(x) = x^2 + x$ **હોય તો** $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x^2 - 4}$ **ની કિંમત શોધો.**

અહીં, $f(x) = x^2 + x$ છે.

$$\therefore \ f(2) = (2)^2 + 2$$

$$= 4 + 2$$

$$= 6$$

હવે, $\lim_{x\to 2} \dfrac{f(x)-f(2)}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x^2+x)-6}{x^2-4}$

અંશ $= x^2+x-6$

$= x^2+3x-2x-6$

$= x(x+3)-2(x+3)$

$= (x+3)(x-2)$

છેદ $= x^2-4$

$= (x+2)(x-2)$

તેથી, $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^2-4} = \lim_{x\to 2} \dfrac{(x+3)(x-2)}{(x+2)(x-2)}$

$= \lim_{x\to 2} \dfrac{x+3}{x+2} \qquad (\because \ x-2\neq 0)$

$= \dfrac{2+3}{2+2}$

$= \dfrac{5}{4}$

ઉદાહરણ 19 : જો $f(x)=x^3$ હોય તો $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3-h)}{2h}$ ની કિંમત શોધો.

અહીં, $f(x)=x^3$

$\therefore \ f(3+h) = (3+h)^3$

$= 27+27h+9h^2+h^3$

અને

$f(3-h) = (3-h)^3$

$= 27-27h+9h^2-h^3$

હવે, $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{(27+27h+9h^2+h^3)-(27-27h+9h^2-h^3)}{2h}$

$= \lim_{h\to 0} \dfrac{27+27h+9h^2+h^3-27+27h-9h^2+h^3}{2h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{54h + 2h^3}{2h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h\left(54 + 2h^2\right)}{2h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{54 + 2h^2}{2} \qquad (\because \ h \neq 0)$$

$$= \frac{54 + 2(0)^2}{2}$$

$$= \frac{54}{2}$$

$$= 27$$

ઉદાહરણ 20 : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x}$ ની કિંમત શોધો.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x}$$

(અંશ અને છેદને $\sqrt{3+x} + \sqrt{3}$ વડે ગુણતાં)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}{x} \times \frac{\sqrt{3+x} + \sqrt{3}}{\sqrt{3+x} + \sqrt{3}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{3+x}\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2}{x\left(\sqrt{3+x} + \sqrt{3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{3 + x - 3}{x\left(\sqrt{3+x} + \sqrt{3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x}{x\left(\sqrt{3+x} + \sqrt{3}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt{3+x} + \sqrt{3}\right)} \qquad (\because \ x \neq 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3+0} + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

ઉદાહરણ 21 : $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$ **ની કિંમત શોધો.**

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2}$$

(અંશ અને છેદને $\sqrt{x+7}+3$ વડે ગુણતાં)

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+7}-3}{x-2} \times \frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}+3}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x+7}\right)^2-(3)^2}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+7-9}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x+7}+3} \qquad (\because\ x-2 \neq 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2+7}+3}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{9}+3}$$

$$= \frac{1}{3+3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

ઉદાહરણ 22 : જો $f(x)=\sqrt{x},\ x>0$ **હોય તો** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ **ની કિંમત શોધો.**

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$\therefore\ f(x+h) = \sqrt{x+h}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$

(અંશ અને છેદને $\sqrt{x+h}+\sqrt{x}$ વડે ગુણતાં)

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2-\left(\sqrt{x}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \qquad (\because \quad h \neq 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ઉદાહરણ 23 : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - 8}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$ ની કિંમત શોધો.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}$$

(અંશ અને છેદને $\sqrt{x} + \sqrt{2}$ વડે ગુણતાં)

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{\sqrt{x} - \sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{x} + \sqrt{2}}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)\left(x^2 + 2x + 4\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2}\right)}{(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 2} \left(x^2 + 2x + 4\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{2}\right) \qquad (\because \quad x - 2 \neq 0)$$

$$= \left[(2)^2 + 2(2) + 4\right]\left[\sqrt{2} + \sqrt{2}\right]$$

$$= (4 + 4 + 4)\left(2\sqrt{2}\right)$$

$$= 12\left(2\sqrt{2}\right)$$

$$= 24\sqrt{2}$$

ઉદાહરણ 24 : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3}$ ની કિંમત શોધો.

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3}$$

(અંશ અને છેદને $\sqrt{x+3}+2$ અને $\sqrt{x+8}+3$ વડે ગુણતાં)

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3} \times \frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2} \times \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2 - (2)^2}{\left(\sqrt{x+8}\right)^2 - (3)^2} \times \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+3}+2}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x+3-4) \times \left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x+8-9) \times \left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+3}+2} \qquad (\because \; x-1 \neq 0)$$

$$= \frac{\sqrt{1+8}+3}{\sqrt{1+3}+2}$$

$$= \frac{\sqrt{9}+3}{\sqrt{4}+2}$$

$$= \frac{3+3}{2+2}$$

$$= \frac{6}{4}$$

$$= \frac{3}{2}$$

ઉદાહરણ 25 : $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^5-32}{x-2}$ ની કિંમત શોધો.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^5-32}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^5-2^5}{x-2}$$

$$= 5(2)^{5-1} \qquad \left[\because \; \lim_{x \to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = n a^{n-1}\right]$$

$$= 5(2)^4$$

$$= 5(16)$$

$$= 80$$

ઉદાહરણ 26 : $\lim\limits_{x\to3} \dfrac{x^5-243}{x^3-27}$ **ની કિંમત શોધો.**

$$\lim_{x\to3} \frac{x^5-243}{x^3-27} = \lim_{x\to3} \frac{x^5-3^5}{x^3-3^3}$$

(અંશ અને છેદને $(x-3)$ વડે ગુણતાં)

$$= \lim_{x\to3} \frac{x^5-3^5}{x-3} \times \frac{x-3}{x^3-3^3}$$

$$= \lim_{x\to3} \left[\frac{x^5-3^5}{x-3} \div \frac{x^3-3^3}{x-3}\right]$$

$$= 5(3)^{5-1} \div 3(3)^{3-1} \qquad \left[\because \lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}\right]$$

$$= \frac{5(3)^4}{3(3)^2}$$

$$= \frac{5\times81}{3\times9}$$

$$= 15$$

ઉદાહરણ 27 : $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^7+128}{x+2}$ **ની કિંમત શોધો.**

$$\lim_{x\to-2} \frac{x^7+128}{x+2} = \lim_{x\to-2} \frac{x^7-(-2)^7}{x-(-2)}$$

$$= 7(-2)^{7-1} \qquad \left[\because \lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}\right]$$

$$= 7(-2)^6$$

$$= 7(64)$$

$$= 448$$

ઉદાહરણ 28 : $\lim\limits_{h\to0} \dfrac{(x+h)^5-x^5}{h}$ **ની કિંમત શોધો.**

$$\lim_{h\to0} \frac{(x+h)^5-x^5}{h}$$

($x+h=t$ લેતાં, જ્યારે $h\to0$ ત્યારે $t\to x$ થાય.)

$$= \lim_{t\to x} \frac{t^5-x^5}{t-x} \qquad (\because x+h=t)$$

$$= 5(x)^{5-1} \qquad \left[\because \lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}\right]$$

$$= 5x^4$$

ઉદાહરણ 29 : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x}$ **ની કિંમત શોધો.**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^{\frac{1}{n}}-1^{\frac{1}{n}}}{x}$$

($x+1=t$ લેતાં, જ્યારે $x\to 0$ ત્યારે $t\to 1$ થાય.)

$$= \lim_{t\to 1} \frac{t^{\frac{1}{n}}-1^{\frac{1}{n}}}{t-1} \quad (\because x+1=t \quad \therefore x=t-1)$$

$$= \frac{1}{n}(1)^{\frac{1}{n}-1} \qquad \left[\because \lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a} = na^{n-1}\right]$$

$$= \frac{1}{n} \times 1$$

$$= \frac{1}{n}$$

સારાંશ

- **સામીપ્ય :** ધારો કે $a \in R$ છે, તો a ને સમાવતા વિવૃત્ત અંતરાલને 'a' નું સામીપ્ય કહેવાય છે.
- ***a* નું δ સામીપ્ય :** જો $a \in R$ અને δ એ અઋણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય, તો વિવૃત્ત અંતરાલ $(a-\delta, a+\delta)$ ને 'a' નું સામીપ્ય કહેવાય છે.
- **$x\to a$ નો અર્થ :** જો કોઈ ચલ x ની કિંમત ઘટાડતાં કે વધારતાં કોઈ એક ચોક્કસ સંખ્યા 'a' ની ખૂબ જ નજીક લાવવામાં આવે તો x, a ને અનુલક્ષે છે એમ કહેવાય. તેને સંકેતમાં $x\to a$ વડે દર્શાવાય છે.
- **$x\to 0$ નો અર્થ :** જો કોઈ ચલ x ની ધન કિંમતો ઘટાડતાં કે x ની ઋણ કિંમતો વધારતાં '0' ની ખૂબ જ નજીક લાવવામાં આવે તો x, 0 ને અનુલક્ષે છે એમ કહેવાય. તેને સંકેતમાં $x\to 0$ વડે દર્શાવાય છે.
- **વિધેયનું લક્ષ**

  જો ગમે તેટલી નાની આપેલ પૂર્વ નિર્ધારિત સંખ્યા $\varepsilon > 0$ માટે આપણે એવી એક ધન સંખ્યા δ શોધી શકીએ કે જેથી જ્યારે $|x-a| < \delta$ હોય ત્યારે x ની દરેક કિંમત માટે $|f(x)-l| < \varepsilon$ થાય તો જ્યારે x, a ને અનુલક્ષે ત્યારે વિધેય $f(x)$ લક્ષ l ધરાવે છે.

સૂત્રોની યાદી :

- $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) \pm g(x) \right] = l \pm m$
- $\lim\limits_{x \to a} \left[f(x) \times g(x) \right] = l \times m$
- $\lim\limits_{x \to a} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} \right] = \dfrac{l}{m}, \quad m \neq 0$
- $\lim\limits_{x \to a} k\, f(x) = kl$, k અચળ છે.
- જો $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ હોય, તો

  $\lim\limits_{x \to b} f(x) = a_0 + a_1 b + a_2 b^2 + ... + a_n b^n$
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x^n - a^n}{x - a} = n a^{n-1}, \quad n \in Q$

સ્વાધ્યાય 4

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. 3 નું 0.3 સામીપ્યનું માનાંક સ્વરૂપ કયું છે ?

(a) $|x - 0.3| < 3$ (b) $|x - 3| < 0.3$ (c) $|x + 3| < 0.3$ (d) $|x - 3| > 0.3$

2. -2 નું 0.02 સામીપ્યને અંતરાલ સ્વરૂપ કયું છે ?

(a) $(1.98,\ 2.02)$ (b) $(-1.98,\ 2.02)$ (c) $(-2.02,\ -1.98)$ (d) $(-2.02,\ 1.98)$

3. $|x - 5| < 0.25$ ને અંતરાલ સ્વરૂપ કયું છે ?

(a) $(4.75,\ 5.25)$ (b) $(-4.75,\ +5.25)$ (c) $(-5.25,\ -4.75)$ (d) $(-5.25,\ 4.75)$

4. $|2x + 1| < \frac{1}{5}$ ને અંતરાલ સ્વરૂપ કયું છે ?

(a) $\left(-\frac{6}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$ (b) $\left(-\frac{6}{10},\ -\frac{4}{10}\right)$ (c) $\left(\frac{4}{10},\ \frac{6}{10}\right)$ (d) $\left(-\frac{6}{10},\ \frac{4}{10}\right)$

5. $N(5,\ 0.02)$ ને માનાંક સ્વરૂપ કયું છે ?

(a) $|x + 5| < 0.02$ (b) $|x - 0.02| < 5$ (c) $|x - 5| > 0.02$ (d) $|x - 5| < 0.02$

6. જો $N(a,\ 0.07)$ નું માનાંક સ્વરૂપ $|x - 10| < k$ હોય, તો k ની કિંમત શું હોય ?

(a) a (b) 0.7 (c) 0.07 (d) 9.93

7. $\lim\limits_{x \to 3} 3x - 1$ ની કિંમત શું થાય ?

(a) 9 (b) 10 (c) $\frac{4}{3}$ (d) 8

8. $\lim_{x \to 4} \sqrt{4x+9}$ ની કિંમત શું થાય ?

(a) 5 (b) 25 (c) $\frac{7}{4}$ (d) 7

9. $\lim_{x \to -2} 10$ ની કિંમત શું થાય ?

(a) 10 (b) –2 (c) 8 (d) અનિયત

10. $\lim_{x \to 3} \frac{x^4 - 81}{x - 3}$ ની કિંમત શું થાય ?

(a) 192 (b) 324 (c) 36 (d) 108

11. $\lim_{x \to -1} \frac{x^5 + 1}{x + 1}$ ની કિંમત શું થાય ?

(a) –5 (b) 5 (c) 4 (d) –4

12. જો $y = 10 - 3x$ હોય અને $x \to -3$ હોય, તો y કઈ કિંમતને અનુલક્ષે છે ?

(a) 1 (b) 9 (c) 19 (d) 7

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. 0 નું 0.09 સામીપ્યને અંતરાલ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

2. –5 નું 0.001 સામીપ્યને માનાંક સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

3. $|x - 10| < \frac{1}{10}$ ને સામીપ્ય સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

4. $|2x| < \frac{1}{2}$ ને અંતરાલ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

5. $N(50, 0.8)$ ને માનાંક સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

6. જો $N(a, 0.2) = |x - 7| < b$ હોય, તો aની કિંમત શોધો.

7. જો $|x + 4| < 0.04 = (k, -3.96)$ હોય, તો kની કિંમત શોધો.

8. $\lim_{x \to 5} (3x + 5)$ ની કિંમત શોધો.

9. $\lim_{x \to -3} \sqrt[3]{2 - 2x}$ ની કિંમત શોધો.

10. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{3x^2 - 4x + 10}{2x + 5} \right)$ ની કિંમત શોધો.

11. $\lim_{x \to 2} \frac{x^5 - 32}{x - 2}$ ની કિંમત શોધો.

12. $\lim_{x \to -a} \frac{x^m + a^m}{x + a}$ (જ્યાં m એકી સંખ્યા છે)ની કિંમત શોધો.

13. $\lim\limits_{x \to -1} 4x + k = 6$ હોય તો kની કિંમત શોધો.

14. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{2}{3x+k} = \dfrac{1}{7}$ હોય તો kની કિંમત શોધો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. વિવૃત્ત અંતરાલની વ્યાખ્યા આપો.

2. aનું δ સામીપ્યની વ્યાખ્યા આપો.

3. aનું δ છિદ્રિત સામીપ્યની વ્યાખ્યા આપો.

4. અંતરાલ સ્વરૂપ $(-0.5, 0.5)$ને માનાંક સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

5. અંતરાલ સ્વરૂપ $(-8.75, -7.25)$ને સામીપ્ય સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

6. જો $N(k_1, 0.5) = (19.5, k_2)$ હોય, તો k_1 અને k_2 ની કિંમત શોધો.

7. $|3x+1| < 2$ ને સામીપ્ય અને અંતરાલ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

8. જો $|x - A_1| < 0.09 = (A_2, 4.09)$ હોય, તો A_1 અને A_2 ની કિંમત શોધો.

9. $x \to a$ નો અર્થ સમજાવો.

10. $x \to 0$ નો અર્થ સમજાવો.

11. વિધેયનું લક્ષની વ્યાખ્યા આપો.

12. લક્ષનો ગુણાકારનો કાર્યનિયમ જણાવો.

13. લક્ષનો ભાગાકારનો કાર્યનિયમ જણાવો.

14. બહુપદીનું લક્ષનું પ્રામાણિત રૂપ જણાવો.

વિભાગ D

નીચેનાની કિંમત શોધો :

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{x - 1}$

2. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x - 3}{2x^2 - 3x - 9}$

3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3x^2 - 2x - 5}{x + 1}$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$

5. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{4x^2 - 1}$

6. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 9x + 9}{2x^2 + 7x + 3}$

7. $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{2x^2 - x - 1}$

8. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{9x^2 + 5x - 26}{5x^2 + 17x + 14}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{5x+14}{3x+7} - 2\right]$

10. $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{2}{x-2} - \dfrac{4}{x^2 - 2x}\right]$

11. $\lim\limits_{x \to 0} 1 + \dfrac{2}{3 + \frac{4}{x}}$

12. $\lim\limits_{x \to -p} \dfrac{x^4 - p^4}{x^3 + p^3}$

13. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^6 - 729}{x^4 - 81}$

14. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^{10} - 1024}{x^5 + 32}$

15. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^{2017} + 1}{x^{2018} - 1}$

16. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{\frac{7}{2}} - 1}{x^{\frac{3}{2}} - 1}$

17. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$

વિભાગ E

I. માંગ્યા પ્રમાણે જવાબ આપો :

1. જો $y = 5x + 7$ હોય તો કોષ્ટકની રીતે સાબિત કરો કે, જ્યારે $x \to 2$ ત્યારે $y \to 17$

2. જો $y = \dfrac{3x^2 + 16x + 16}{x + 4}$ હોય તો કોષ્ટકની રીતે સાબિત કરો કે, જ્યારે $x \to -4$ ત્યારે $y \to -8$

3. કોષ્ટકની રીતથી સાબિત કરો કે, $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3}{x + 1}$ અસ્તિત્વ ધરાવતું નથી.

II. નીચેનાની કોષ્ટકની રીતથી કિંમત શોધો :

1. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 3x - 10}{x - 5}$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{x - 1}$

3. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4x^2 + 5x + 1}{x + 1}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} 3x - 1$

III. નીચેનાની કિંમત શોધો :

1. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^7 - x^7}{h}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt[10]{1 + x} - 1}{x}$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1 + x)^n - 1}{x}$

4. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{2x - 1}$ જ્યાં $f(x) = x^2 + x - 1$

5. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ જ્યાં $f(x) = x^3$

6. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$ જ્યાં $f(x) = x^7$

7. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ જ્યાં $f(x) = \sqrt{x + 7}$

8. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(2 + h) - f(2)}{h}$ જ્યાં $f(x) = 2x^2 + 3$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(2 + x) - f(2 - x)}{2x}$ જ્યાં $f(x) = x^2$

10. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ જ્યાં $f(x) = x^2 + x$

Srinivasa Ramanujan
(1887 - 1920)

Srinivasa Ramanujan was one of the greatest mathematical geniuses of India. He made substantial contributions to the analytical theory of numbers and worked on elliptic functions, continued fractions and infinite series. Ramanujan independently discovered results of Gauss, Kummer and others on hyper geometric series. Ramanujan initially developed his own mathematical research in isolation; it was quickly recognized by Indian mathematicians. When his skills became obvious and known to the wider mathematical community, centered in Europe at the time, he began a famous partnership with the English mathematician G. H. Hardy, who realized that Ramanujan had rediscovered previously known theorems in addition to producing new ones. On 18 February 1918 Ramanujan was elected as fellow of the Cambridge Philosophical Society. On the 125th anniversary of his birth, India declared the birthday of Ramanujan, December 22, as 'National Mathematics Day and also declared that the year 2012 would be celebrated as the National Year of Mathematics.