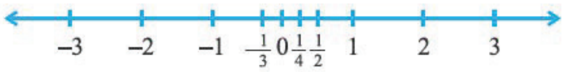
પ્રકરણ 1

સંખ્યા પદ્ધતિ

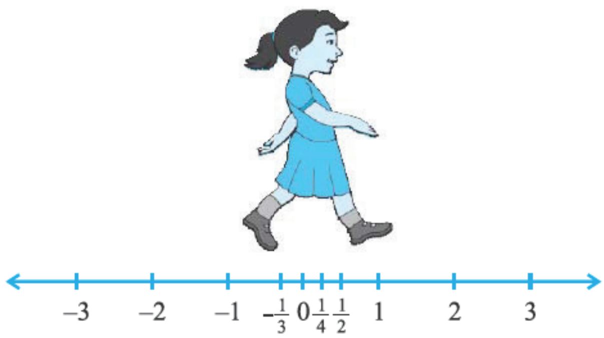
1.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉના વર્ગમાં તમે સંખ્યારેખા વિશે શીખી ગયાં છો અને વિવિધ પ્રકારની સંખ્યાઓનું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કેવી રીતે કરી શકાય એ પણ શીખી ગયાં છો (આકૃતિ 1.1 જુઓ).



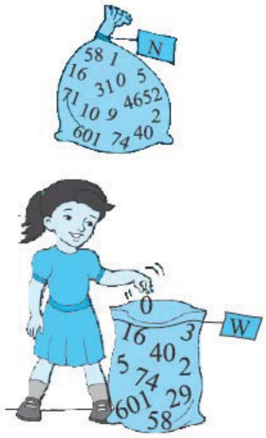
આકૃતિ 1.1 સંખ્યારેખા

કલ્પના કરો કે તમે શૂન્યથી ચાલવાનું શરૂ કરો છો અને સંખ્યારેખા પર ધન દિશામાં ચાલો છો. જ્યાં સુધી તમે જોઈ શકો છો (ક્ષિતિજ સુધી) ત્યાં સુધી તમને સંખ્યાઓ, સંખ્યાઓ અને સંખ્યાઓ જ જોવા મળે છે.



આકૃતિ 1.2

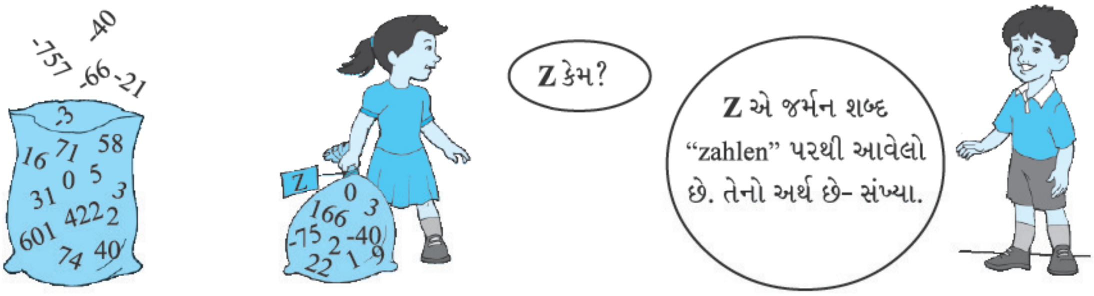
ધારો કે તમે સંખ્યારેખા પર ચાલવાનું શરૂ કરો છો અને કેટલીક સંખ્યાઓ એકત્રિત કરતાં જાવ છો. આ સંખ્યાઓને એકત્રિત કરવા માટે એક થેલો તૈયાર રાખો.



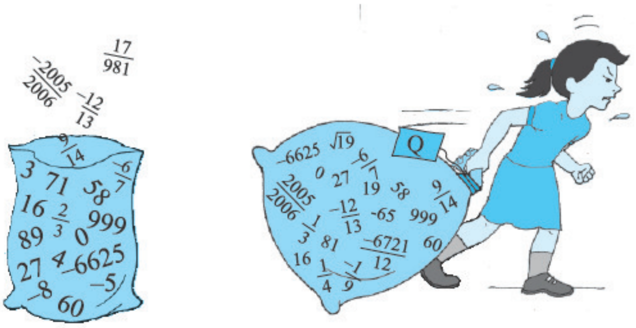
શક્ય છે કે તમે 1, 2, 3 અને આવી બધી ફક્ત ***પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓને*** *(natural numbers)* લેવાની શરૂઆત કરો છો. તમે જાણો છો કે આ યાદી હંમેશાં આગળ વધતી જ જાય છે. આવું કેમ જણાય છે? આમ, હવે તમારા થેલામાં પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ ભરાઈ ગઈ છે. તમને યાદ હશે કે આ પ્રકારની સંખ્યાના જથ્થાને સંકેતમાં N વડે દર્શાવાય છે.

હવે તમે પાછા ફરી અને આનાથી વિરુધ્ધ દિશામાં ચાલતાં શૂન્યને લઈને તેને પણ થેલામાં મૂકી દો. આથી તમને ***પૂર્ણ સંખ્યાઓ*** *(Whole numbers)* નો એક જથ્થો મળે છે. તેને સંકેતમાં W વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

હવે તમને ઘણીબધી ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ દેખાશે. તમે આ બધી ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓને પણ થેલામાં મૂકી દો. આ નવો જથ્થો શેનો બનેલો છે ? તમને યાદ હશે કે આ ***પૂર્ણાંકો*** *(Integers)*નો જથ્થો છે અને સંકેતમાં તેને Z વડે દર્શાવવામાં આવે છે.



શું હજુ પણ આ રેખા પર સંખ્યાઓ બાકી રહી છે ? નિશ્ચિતપણે, હા. રેખા પર $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ અથવા $\frac{-2005}{2006}$ જેવી સંખ્યાઓ પણ છે. જો તમે આ પ્રકારની બધી સંખ્યાઓ થેલામાં એકત્રિત કરો તો તમને ***સંમેય સંખ્યાઓ*** *(Rational numbers)*નો જથ્થો મળશે.



સંખ્યાના આ જથ્થાને Q વડે દર્શાવાય છે. અંગ્રેજી શબ્દ Rational એ ratio પરથી આવેલો છે અને Q સંકેત એ અંગ્રેજી શબ્દ Quotient પરથી લેવામાં આવ્યો છે.

તમને યાદ હશે કે સંમેય સંખ્યાની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે છે :

જો p અને q પૂર્ણાંક હોય અને q શૂન્યેતર હોય તથા સંખ્યા ‘r’ને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય તો ‘r’ને સંમેય સંખ્યા કહે છે. (અહીં, આપણે $q \neq 0$નો આગ્રહ કેમ રાખીએ છીએ ?)

જુઓ કે થેલામાં રહેલી બધી સંખ્યાઓને p પૂર્ણાંક તથા q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે. ઉદાહરણ તરીકે -25 ને $\frac{-25}{1}$ ના સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે. અહીંયા $p = -25$ અને $q = 1$ છે. આથી સંમેય સંખ્યાઓમાં પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ, પૂર્ણ સંખ્યાઓ અને પૂર્ણાંકોનો પણ સમાવેશ થાય છે.

તમે એ પણ જાણો છો કે સંમેય સંખ્યાઓને p પૂર્ણાંક હોય તથા q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં અનન્ય રીતે દર્શાવી શકાતી નથી. ઉદાહરણ તરીકે $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{10}{20} = \frac{25}{50} = \frac{47}{94}$ વગેરે. આ ***સમાન સંમેય સંખ્યાઓ*** (*Equivalent rational numbers*) અથવા ***અપૂર્ણાંક*** છે, છતાં પણ આપણે $\frac{p}{q}$ સંમેય સંખ્યા છે તેમ કહીએ છીએ અથવા $\frac{p}{q}$ નું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કરીએ છીએ ત્યારે સ્વીકારી લઈએ છીએ કે $q \neq 0$ અને p અને q ને 1 સિવાયનો કોઈ સામાન્ય અવયવ નથી(એટલે કે p અને q પરસ્પર અવિભાજ્ય(*co-prime*) છે). આમ, સંખ્યારેખા પર $\frac{1}{2}$ ને સમાન હોય તેવી અગણિત સંખ્યાઓમાંથી $\frac{1}{2}$ ને જ લઈએ છીએ અને $\frac{1}{2}$ તેને સમાન બધી સંખ્યાઓનું નિરૂપણ કરે છે.

ચાલો હવે આપણે અગાઉના ધોરણમાં શીખી ગયેલાં હોઈએ તેવી જુદી જુદી સંખ્યાઓનાં ઉદાહરણો ઉકેલીએ.

ઉદાહરણ 1 : નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય ? કારણ સહિત ઉત્તર આપો.

(i) દરેક પૂર્ણ સંખ્યા એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

(ii) દરેક પૂર્ણાંક એ સંમેય સંખ્યા છે.

(iii) દરેક સંમેય સંખ્યા એ પૂર્ણાંક છે.

ઉકેલ : (i) આ વિધાન અસત્ય છે, કારણ કે 0 એ પૂર્ણ સંખ્યા છે, પરંતુ પ્રાકૃતિક સંખ્યા નથી.

(ii) આ વિધાન સત્ય છે, કારણ કે દરેક પૂર્ણાંક m ને $\frac{m}{1}$ ના સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે અને તેથી તે સંમેય સંખ્યા છે.

(iii) આ વિધાન અસત્ય છે, કારણ કે $\frac{3}{5}$ એ સંમેય સંખ્યા છે, પરંતુ પૂર્ણાંક નથી.

ઉદાહરણ 2 : 1 અને 2 વચ્ચેની પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

આ પ્રશ્નનો ઉકેલ ઓછામાં ઓછી બે રીતે વિચારી શકાય :

રીત 1 : તમને યાદ હશે કે તમે r અને s વચ્ચેની એક સંમેય સંખ્યા શોધવા માટે r અને s નો સરવાળો કરીને સરવાળાને 2 વડે ભાગો છો એટલે કે $\frac{r+s}{2}$ એ r અને s ની વચ્ચે હોય છે. આથી $\frac{3}{2}$ એ 1 અને 2 ની વચ્ચેની એક સંખ્યા છે. આ પદ્ધતિથી આગળ વધો તો તમને 1 અને 2 વચ્ચેની બીજી ચાર સંમેય સંખ્યાઓ મળે. આવી અન્ય ચાર સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ અને $\frac{7}{4}$ છે.

રીત 2 : બીજી રીતમાં એક જ સોપાનમાં પાંચેય સંમેય સંખ્યા શોધી શકાય છે. આપણે પાંચ સંખ્યાઓ શોધવા માંગીએ છીએ તેથી $5 + 1 = 6$ ને છેદ તરીકે લઈને 1 અને 2 ને છેદમાં 6 હોય તેવી સમાન સંમેય સંખ્યાના સ્વરૂપમાં લખીએ એટલે કે $1 = \frac{6}{6}$ અને $2 = \frac{12}{6}$. તેથી આપણે કહી શકીએ કે $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}, \frac{11}{6}$ એ બધી સંખ્યાઓ 1 અને 2 વચ્ચેની સંમેય સંખ્યાઓ છે. તેથી માંગેલ પાંચ સંખ્યાઓ $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ અને $\frac{11}{6}$ છે.

નોંધ : ધ્યાન રાખો કે ઉદાહરણ 2 માં 1 અને 2 વચ્ચેની ફક્ત પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ જ શોધવાનું કહ્યું છે. પરંતુ આપને સમજાયું હશે કે 1 અને 2 વચ્ચે અસંખ્ય સંમેય સંખ્યાઓ હોય છે. વ્યાપક રીતે કહીએ તો આપેલ બે સંમેય સંખ્યાઓ વચ્ચે અનંત સંમેય સંખ્યાઓ હોય છે.

હવે આપણે ફરીથી સંખ્યારેખાને નિહાળીએ. શું આપણે આ રેખા પરની બધી જ સંખ્યાઓને લઈ લીધી છે ? ના, હજુ સુધી તો નહિ જ. તેનું કારણ એ છે કે સંખ્યારેખા પર હજુ ઘણીબધી સંખ્યાઓ બાકી રહી છે. તમે જે સંખ્યાઓ ઊંચકેલી તેમની વચ્ચે ખાલી જગ્યા રહી છે અને આ ખાલી જગ્યામાં ફક્ત એક કે બે નહી પરંતુ અનંત સંખ્યાઓ રહેલી છે. આશ્ચર્યજનક બાબત એ છે કે કોઈ પણ બે સ્થાનોની વચ્ચે અગણિત અનંત સંખ્યાઓ આવેલી છે !

તેથી આપણી સામે નીચે પ્રકારના પ્રશ્નો રહે છે :

1. સંખ્યારેખા પર બાકી રહેલી સંખ્યાઓને શું કહી શકાય ?
2. તેમને આપણે કેવી રીતે ઓળખીશું ? એટલે કે આપણે આ સંખ્યાઓને સંમેય સંખ્યાઓથી કેવી રીતે જુદી પાડીશું ?

આ પ્રશ્નોના ઉત્તર હવે પછીના વિભાગમાં આપીશું.

સ્વાધ્યાય 1.1

1. શું શૂન્ય એ એક સંમેય સંખ્યા છે ? શું તમે તેને p પૂર્ણાંક તથા q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં લખી શકશો ?
2. 3 અને 4 વચ્ચેની છ સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.
3. $\frac{3}{5}$ અને $\frac{4}{5}$ વચ્ચેની પાંચ સંમેય સંખ્યાઓ શોધો.
4. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય ? કારણ સહિત ઉત્તર આપો.

   (i) દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા એ પૂર્ણ સંખ્યા છે.

   (ii) દરેક પૂર્ણાંક એ પૂર્ણ સંખ્યા છે.

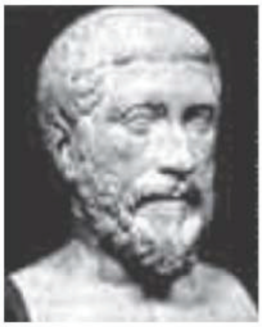
   (iii) દરેક સંમેય સંખ્યા એ પૂર્ણ સંખ્યા છે.

1.2 અસંમેય સંખ્યાઓ

આ પહેલાનાં વિભાગમાં આપણે જોયું કે સંખ્યારેખા પર જે સંમેય સંખ્યા ન હોય તેવી સંખ્યાઓ પણ હોય છે.

હવે આપણે આવી સંખ્યાઓની ચર્ચા કરીશું. p અને q પૂર્ણાંક હોય અને $q \neq 0$ હોય તેવા p, q માટે આપણે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપની સંખ્યાઓની ચર્ચા કરી છે. આથી તમને એવો પ્રશ્ન થાય કે શું જે આ સ્વરૂપમાં ન હોય એવી પણ સંખ્યાઓ છે? ખરેખર તેવી સંખ્યાઓ હોય છે.

The Pythagoreans in Greece, followers of the famous mathematician and philosopher Pythagoras, were the first to discover the numbers which were not rationals, around 400 BC. These numbers are called *irrational numbers* (*irrationals*), because they cannot be written in the form of a ratio of integers. There are many myths surrounding the discovery of irrational numbers by the Pythagorean, Hippacus of Croton. In all the myths, Hippacus has an unfortunate end, either for discovering that $\sqrt{2}$ is irrational or for disclosing the secret about $\sqrt{2}$ to people outside the secret Pythagorean sect!



Pythagoras
(569 BCE – 479 BCE)
આકૃતિ 1.3

તો ચાલો આપણે આ સંખ્યાઓને વિધિવત્ વ્યાખ્યાયિત કરીએ :

જો સંખ્યા s ને p પૂર્ણાંક અને q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં મૂકી ના શકાય તો તેવી સંખ્યા s ને *અસંમેય* સંખ્યા કહે છે.

તમે જાણો છો કે સંમેય સંખ્યાઓ અનંત હોય છે. એવી જ રીતે અસંમેય સંખ્યાઓ પણ અનંત હોય છે. અસંમેય સંખ્યાનાં કેટલાંક ઉદાહરણો આ પ્રમાણે છે :

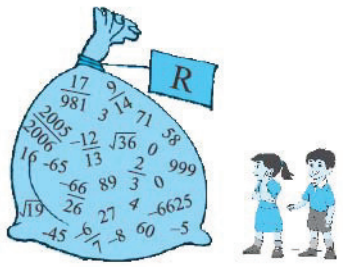
$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, 0.10110111011110...$

નોંધ : તમને યાદ હશે કે જ્યારે આપણે $\sqrt{\ }$, ના સંકેતનો ઉપયોગ કરીએ છીએ ત્યારે એ સ્વીકારી લઈએ છીએ કે સંદર્ભની સંખ્યાનું વર્ગમૂળ એ ધન વર્ગમૂળ છે. $\sqrt{4} = 2$ છે, પરંતુ 2 અને -2 એ બંને 4નાં વર્ગમૂળ તો છે જ.

ઉપર આપેલી કેટલીક અસંમેય સંખ્યાઓ વિશે તમે જાણો છો. ઉદાહરણ તરીકે ઉપરની યાદીની સંખ્યામાં આવેલાં વર્ગમૂળ વિશે અને સંખ્યા π વિશે તમે અગાઉથી જાણો જ છો.

પાયથાગોરસના અનુયાયીઓએ $\sqrt{2}$ એ અસંમેય સંખ્યા છે તે સાબિત કર્યું હતું. ત્યાર બાદ ઈ. પૂ. 425 ની આસપાસ સાઈરિનના નિવાસી ***Theodorus*** એ સાબિત કર્યું કે $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, \sqrt{12}, \sqrt{13}, \sqrt{14}, \sqrt{15}$ અને $\sqrt{17}$ પણ અસંમેય સંખ્યાઓ છે. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ વગેરે અસંમેય છે તેની સાબિતી માટે આપણે ધોરણ10 માં ચર્ચા કરીશું. જો π ની વાત કરીએ તો હજારો વર્ષોથી વિવિધ સંસ્કૃતિઓ તેનાથી પરિચિત છે. પરંતુ ઈ.સ.1700 ના અંતમાં જ ***Lambert*** અને ***Legendre*** એ π તે એક અસંમેય સંખ્યા છે તેમ સાબિત કર્યું હતું. હવે આપણે 0.10110111011110... અને π એ અસંમેય સંખ્યા કેમ છે તેની ચર્ચા આગળના વિભાગમાં કરીશું.

ચાલો આપણે પાછળના વિભાગના અંતમાં ઉપસ્થિત કરેલા પ્રશ્નો પર ફરી વિચાર કરીએ. તેના માટે સંમેય સંખ્યાવાળો થેલો લો. જો આ થેલામાં આપણે અસંમેય સંખ્યાઓ પણ મૂકી દઈએ. તો શું સંખ્યારેખા પર હજુ કોઈ સંખ્યા બાકી રહેશે ? આનો જવાબ છે 'ના'. આમ, એક સાથે લેવામાં આવેલી સંમેય સંખ્યા અને અસંમેય સંખ્યાનો જે સમૂહ મળે છે તેને ***વાસ્તવિક સંખ્યાઓ***નો સમૂહ (*Real numbers*) કહેવામાં આવે છે. તેને R વડે દર્શાવવામાં આવે છે.



આમ, વાસ્તવિક સંખ્યાઓ સંમેય અથવા અસંમેય સંખ્યાઓ હોઈ શકે છે. આપણે કહી શકીએ કે **પ્રત્યેક વાસ્તવિક સંખ્યાનું સંખ્યારેખા પરના એક અનન્ય બિંદુ તરીકે નિરૂપણ કરી શકાય છે. એવી જ રીતે સંખ્યારેખાનું પ્રત્યેક બિંદુ એ એક વાસ્તવિક સંખ્યા દર્શાવે છે.** આ કારણથી જ સંખ્યારેખાને ***વાસ્તવિક સંખ્યારેખા*** (*real number-line*) કહેવામાં આવે છે.

(R.Dedekind (1831-1916)

આકૃતિ 1.4

In the 1870s two German mathematicians, Cantor and Dedekind, showed that : Corresponding to every real number, there is a point on the real number line, and corresponding to every point on the number line, there exists a unique real number.

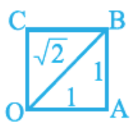
(G. Cantor (1845-1918)

આકૃતિ 1.5

હવે આપણે જોઈશું કે સંખ્યારેખા પર અસંમેય સંખ્યાને કેવી રીતે દર્શાવી શકાય.

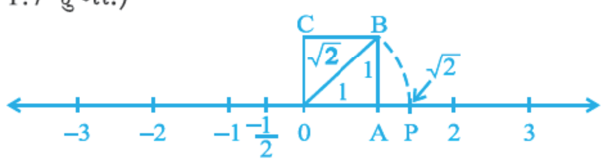
ઉદાહરણ 3 : સંખ્યારેખા પર $\sqrt{2}$ દર્શાવો.

ઉકેલ : એ સરળતાથી જોઈ શકાય છે કે કેવી રીતે ગ્રીસના લોકોએ $\sqrt{2}$ ની શોધ કરી હશે. એક એકમ લંબાઈની બાજુઓવાળા ચોરસ OABC (આકૃતિ 1.6 જુઓ)નો વિચાર કરો.



આકૃતિ.1.6

તમે પાયથાગોરસ પ્રમેય પરથી જોઈ શકો છો કે $OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$. વિચાર કરો કે સંખ્યારેખા પર તમે $\sqrt{2}$ નું નિરૂપણ કેવી રીતે કરશો? આ ખૂબ જ સરળ છે. આકૃતિ 1.6 ને સંખ્યારેખા પર એવી રીતે લઈ જાવ કે જેથી શિરોબિંદુ O શૂન્ય પર આવે.(આકૃતિ 1.7 જુઓ.)



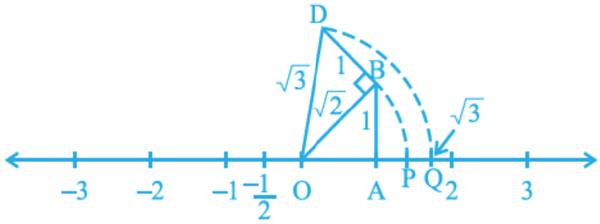
આકૃતિ 1.7

આપણે હમણાં જ જોયું છે કે $OB = \sqrt{2}$. પરિકર દ્વારા O ને કેન્દ્ર લઈ OB જેટલી ત્રિજ્યા લઈ સંખ્યારેખાને

P માં છેદતું ચાપ દોરીએ ત્યારે મળતું સંખ્યારેખા પરનું બિંદુ P એ $\sqrt{2}$ ને સંગત બિંદુ થાય છે.

ઉદાહરણ 4 : સંખ્યારેખા પર $\sqrt{3}$ દર્શાવો.

ઉકેલ : ફરી પાછા આકૃતિ 1.7 પર આવીએ.



આકૃતિ 1.8

OB પર એકમ લંબાઈનો લંબ BD દોરીએ. (આકૃતિ 1.8) પાયથાગોરસ પ્રમેય પ્રમાણે OD $=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$ મળે. પરિકરથી O કેન્દ્ર અને OD જેટલી ત્રિજ્યા લઈ સંખ્યારેખાને Q માં છેદતું એક ચાપ દોરીએ. તેથી બિંદુ Q એ $\sqrt{3}$ ને સંગત છે. આ જ પ્રમાણે n કોઈ ધન પૂર્ણાંક હોય તો $\sqrt{n-1}$ નું નિરૂપણ કર્યા પછી $\sqrt{n}$ નું નિરૂપણ સંખ્યારેખા પર કરી શકાય છે.

સ્વાધ્યાય 1.2

1. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય ? કારણ સહિત ઉત્તર આપો.

   (i) દરેક અસંમેય સંખ્યા એ વાસ્તવિક સંખ્યા છે.

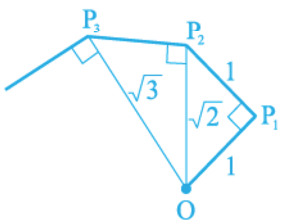
   (ii) સંખ્યારેખા પરનું દરેક બિંદુ કોઈક પ્રાકૃતિક સંખ્યા m માટે $\sqrt{m}$ સ્વરૂપનું હોય છે.

   (iii) દરેક વાસ્તવિક સંખ્યા એ અસંમેય સંખ્યા છે.

2. શું દરેક ધન પૂર્ણાંકનું વર્ગમૂળ અસંમેય હોય છે ? જો ના, તો એવી એક સંખ્યાનું ઉદાહરણ આપો જેનું વર્ગમૂળ સંમેય સંખ્યા હોય?

3. $\sqrt{5}$ ને સંખ્યારેખા પર કેવી રીતે દર્શાવી શકાય તે બતાવો.

4. **વર્ગ-પ્રવૃત્તિ : વર્ગમૂળ કુંતલની *(Spiral)* રચના :** એક મોટો કાગળ લો અને નીચે બતાવેલી પદ્ધતિથી 'વર્ગમૂળ કુંતલ'ની રચના કરો. સૌથી પહેલાં એક બિંદુ O લો અને એકમ લંબાઈનો રેખાખંડ OP_1 દોરો. OP_1 ને લંબ હોય તેવો એકમ લંબાઈનો રેખાખંડ P_1P_2 દોરો. (આકૃતિ 1.9 જુઓ.) હવે રેખાખંડ OP_2 પર એકમ લંબાઈનો લંબ રેખાખંડ P_2P_3 દોરો. ત્યાર પછી રેખાખંડ OP_3 પર એકમ લંબાઈનો લંબ રેખાખંડ P_3P_4 દોરો. આ જ રીતે આ પ્રક્રિયા ચાલુ રાખીને રેખાખંડ OP_{n-1} પર એકમ લંબાઈનો લંબ રેખાખંડ $P_{n-1}P_n$ મેળવી શકાય છે. આમ, આપણે O, P_1, P_2, P_3… P_n…. બિંદુઓ મેળવી શકીશું અને તેમને જોડતાં $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt{4},....$ ને દર્શાવતું સુંદર વર્ગમૂળ કુંતલ મળશે.



આકૃતિ 1.9
વર્ગમૂળ કુંતલની રચના

1.3 વાસ્તવિક સંખ્યા અને તેની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ

આ વિભાગમાં એક જુદા પ્રકારના દૃષ્ટિકોણથી સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓનો અભ્યાસ કરીશું. તેના માટે આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની દશાંશ- અભિવ્યક્તિ નો વિચાર કરીશું અને નક્કી કરીશું કે આપણે સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓને અલગ પાડવા આ અભિવ્યક્તિનો ઉપયોગ કરી શકીએ કે નહિ. આપણે દશાંશ અભિવ્યક્તિનો ઉપયોગ કરીને વાસ્તવિક સંખ્યાઓને સંખ્યારેખા પર કેવી દર્શાવી શકીએ તેનો પણ અભ્યાસ કરીશું. આપણે સંમેય સંખ્યાઓથી વધારે પરિચિત હોવાથી,આપણી ચર્ચા તેવી સંખ્યાઓથી શરૂ કરીશું.

અહીં તેનાં ત્રણ ઉદાહરણો આપેલાં છે : $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$. તેના ભાગફળનો વિચાર કરીએ તો આપણે તેમાં કોઈ ચોક્કસ માળખું મેળવી શકીએ છીએ.

ઉદાહરણ 5 : $\frac{10}{3}$, $\frac{7}{8}$ અને $\frac{1}{7}$ ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ મેળવો.

ઉકેલ :

$$\begin{array}{r|l} & 3.333... \\ \hline 3 & 10 \\ & 9 \\ \hline & 10 \\ & 9 \\ \hline & 10 \\ & 9 \\ \hline & 10 \\ & 9 \\ \hline & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.875 \\ \hline 8 & 7.0 \\ & 64 \\ \hline & 60 \\ & 56 \\ \hline & 40 \\ & 40 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} & 0.142857... \\ \hline 7 & 1.0 \\ & 7 \\ \hline & 30 \\ & 28 \\ \hline & 20 \\ & 14 \\ \hline & 60 \\ & 56 \\ \hline & 40 \\ & 35 \\ \hline & 50 \\ & 49 \\ \hline & 1 \end{array}$$

શેષ : 1, 1, 1, 1, 1...
ભાજક : 3

શેષ : 6, 4, 0
ભાજક : 8

શેષ : 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1......
ભાજક : 7

અહીં તમે શું અવલોકન કર્યું ? તમારે ઓછામાં ઓછી ત્રણ વિગતોનું અવલોકન કરવું જોઈએ.

(i) અમુક પગલાં પછી શેષ 0 બને અથવા તેમનું પુનરાવર્તન થવાનું શરૂ થાય છે.

(ii) શેષ તરીકે પુનરાવર્તિત અંકોના જૂથમાં અંકોની સંખ્યા ભાજક કરતાં નાની હોય ($\frac{1}{3}$ માં એક અંકનું પુનરાવર્તન થાય છે અને ભાજક 3 છે. $\frac{1}{7}$ ના ભાગફળમાં 326451 એવા છ અંકોના જૂથનું પુનરાવર્તન થાય છે. 7 એ ભાજક છે.)

(iii) જો શેષ પુનરાવર્તિત હોય તો ભાગફળમાં અંક અથવા અંકોના જૂથનું પુનરાવર્તન થાય છે.($\frac{1}{3}$ના ભાગફળમાં 3 નું પુનરાવર્તન થાય છે અને $\frac{1}{7}$ માટે ભાગફળનું પુનરાવર્તન જૂથ 142857 મળે છે.)

આપણે ફક્ત ઉપરોક્ત ઉદાહરણો દ્વારા જ આ પ્રકારની તરાહ મેળવી છે. તેમ છતાં તે $q \neq 0$ માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપની બધી સંમેય સંખ્યાઓ માટે પણ એ સત્ય છે. જો આપણે p ને q વડે ભાગીએ તો શેષ શૂન્ય મળે અથવા ક્યારેય શૂન્ય ન મળે અને અમુક તબક્કા પછી શેષના જૂથનું પુનરાવર્તન થાય છે.

હવે આપણે દરેક વિકલ્પનાં વિવિધ ઉદાહરણ જોઈએ.

વિકલ્પ 1 : શેષ શૂન્ય થાય છે.

$\frac{7}{8}$ વાળા ઉદાહરણમાં આપણે જોયું કે કેટલાંક પગલાં પછી શેષ શૂન્ય થઈ જાય છે અને $\frac{7}{8}$ની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ $\frac{7}{8} = 0.875$ છે. અન્ય ઉદાહરણો $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{639}{250} = 2.556$ છે. અમુક પગલાં પછી આ બધી સંખ્યાઓની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ સાન્ત બને છે. આપણે આવી દશાંશ-અભિવ્યક્તિને ***સાન્ત દશાંશ અભિવ્યક્તિ****(terminating decimal* ***expression****)* કહીશું.

વિકલ્પ 2 : શેષ ક્યારેય શૂન્ય ન થાય.

$\frac{1}{3}$ અને $\frac{1}{7}$ વાળા ઉદાહરણમાં આપણે જોયું કે અમુક ચોક્કસ સોપાન પછી શેષ પુનરાવર્તિત થાય છે અને દશાંશ-અભિવ્યક્તિ સતત આગળ ચાલે છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો આવી દશાંશ અભિવ્યક્તિમાં ભાગફળમાં અંકોનું પુનરાવર્તિત જૂથ મળે છે. આ પ્રકારની દશાંશ અભિવ્યક્તિને ***અનંત આવૃત*** (*Non-terminating Recurring*) કહીશું. ઉદાહરણ તરીકે $\frac{1}{3} = 0.3333...$ અને $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857...$ છે. $\frac{1}{3}$ની દશાંશ-અભિવ્યક્તિમાં તેના ભાગફળમાં અંક 3નું પુનરાવર્તન થાય છે તેવું બતાવવા આપણે $\frac{1}{3}$ને $0.\bar{3}$ રીતે લખીશું. તે જ પ્રમાણે $\frac{1}{7}$ના ભાગફળમાં 142857 નું જૂથ પુનરાવર્તિ થાય છે. તેને દર્શાવવા આપણે $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ રીતે લખીશું. અહીં અંક કે અંકો પર દોરેલી લીટી ($\bar{\ }$) જે તે અંક કે અંકોના સમૂહનું પુનરાવર્તન દર્શાવે છે. એ જ રીતે 3.57272...ને $3.5\overline{72}$ તરીકે લખીશું. આમ, આ બધાં ઉદાહરણોમાં દશાંશ અભિવ્યક્તિઓ અનંત આવૃત (પુનરાવર્તિત) મળે છે.

આમ, આપણે જોયું કે સંમેય સંખ્યાઓની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ માટે માત્ર બે વિકલ્પો સાન્ત અથવા અનંત આવૃત હોય છે.

આથી ઊલટું તમે માની લો કે સંખ્યારેખા પર ચાલતાં તમને 3.142678 જેવી સંખ્યા મળે છે. તેની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ સાન્ત છે અથવા 1.272727... એટલે કે $1.\overline{27}$ જેવી સંખ્યા મળે છે. તેની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ અનંત આવૃત છે. શું આ પરથી તમે તારવી શકશો કે આ સંખ્યાઓ સંમેય છે ? તેનો જવાબ હા છે. તેને સાબિત નહીં કરીએ પરંતુ કેટલાંક ઉદાહરણ પરથી આ હકીકતને સમજીશું. સાન્ત અભિવ્યક્તિના કિસ્સાઓ સરળ છે.

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે 3.142678 સંમેય સંખ્યા છે. બીજા શબ્દોમાં, p પૂર્ણાંક હોય અને q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તે પ્રમાણે 3.142678 ને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$ છે અને તેથી તે એક સંમેય સંખ્યા છે.

હવે આપણે અનંત આવૃત દશાંશ-અભિવ્યક્તિ લઈએ.

ઉદાહરણ 7 : સાબિત કરો કે $0.3333... = 0.\bar{3}$ ને p પૂર્ણાંક હોય અને q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

ઉકેલ : $0.\bar{3}$ શું છે તે આપણે જાણતા ન હોવાથી, આપણે તેને x લઈએ અને તેથી $x = 0.3333...$

આપણે અહીં કોઈ યુક્તિનો પ્રયોગ કરીએ. જુઓ કે

$$10\,x = 10 \times (0.3333...) = 3.3333...$$

હવે, $3.3333... = 3 + 0.3333...$

$\therefore 10x = 3 + x$ જ્યાં $x = 3.3333...$

તેથી x માં ઊકેલ મેળવવા માટે $9\,x = 3$ એટલે કે $x = \frac{1}{3}$ મળે.

ઉદાહરણ 8 : સાબિત કરો કે $1.272727... = 1.\overline{27}$ ને p પૂર્ણાંક હોય, q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવાં p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

ઉકેલ : ધારો કે $x = 1.272727...$

અહીં બે અંકોનું પુનરાવર્તન થાય છે તેથી આપણે બંને બાજુ 100 વડે ગુણીએ, તો

$$100x = 127.2727..$$

તેથી, $100x = 126 + 1.2727... = 126 + x$

$\therefore 100x - x = 126$

$\therefore \quad 99x = 126$

એટલે કે $x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$ મળે.

એનાથી ઊલટું તમે $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$ પણ ચકાસી શકો છો.

ઉદાહરણ 9 : સાબિત કરો કે $0.2353535... = 0.2\overline{35}$ ને p પૂર્ણાંક હોય, q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે.

ઉકેલ : ધારો કે $x = 0.2\overline{35}$. અહીં જુઓ કે 2 પુનરાવર્તિત થતો નથી, પરંતુ સંખ્યાજૂથ 35 નું પુનરાવર્તન થાય છે. અહીં બે અંક પુનરાવર્તિત થાય છે. તેથી x ને 100 વડે ગુણવામાં આવે છે. આમ આપણને

$100\,x = 23.53535...$ મળશે.

$$100\,x = 23.3 + 0.23535... = 23.3 + x$$

એટલે કે, $99\,x = 23.3$

માટે $99\,x = \dfrac{233}{10}$ જેથી $x = \dfrac{233}{990}$ મળશે.

હવે આનાથી ઊલટું એટલે કે $\dfrac{233}{990} = 0.2\overline{35}$ પણ સાબિત કરી શકાય છે.

આમ, અનંત આવૃત દશાંશ-અભિવ્યક્તિ વાળી દરેક સંખ્યાને p પૂર્ણાંક હોય, q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા p, q માટે $\dfrac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે. તો ચાલો આપણે ઉપરનાં પરિણામો પરથી સંક્ષિપ્તમાં નીચે પ્રમાણેનો સારાંશ મેળવીએ.

કોઈ પણ સંમેય સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ કાં તો સાન્ત હોય છે અથવા અનંત આવૃત હોય છે. ઉપરાંત જે સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ સાન્ત હોય અથવા અનંત આવૃત હોય તે એક સંમેય સંખ્યા હોય છે.

હવે આપણે જાણીએ છીએ કે સંમેય સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ કેવી રીતે મળે છે. પરંતુ હવે એ પ્રશ્ન થાય છે કે અસંમેય સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ કેવી રીતે મળી શકે ? ઉપર જણાવ્યા મુજબ એવો નિષ્કર્ષ મળે છે કે આવી સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ ***અનંત અને અનાવૃત*** (*non-terminating non-recurring*) છે. ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણે અસંમેય સંખ્યાના ગુણધર્મો સંમેય સંખ્યાના ગુણધર્મો જેવા જ છે.

અસંમેય સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ અનંત અને અનાવૃત હોય છે. ઉપરાંત જે સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ અનંત અને અનાવૃત હોય તે અસંમેય સંખ્યા છે.

અગાઉના વિભાગમાં આપણે એક અસંમેય સંખ્યા $s = 0.10110111011110...$ લીધી હતી. આપણે એ ખાસ નોંધીએ કે આ સંખ્યા અનંત અને અનાવૃત દશાંશ છે. તેથી ઉપર બતાવેલ ગુણધર્મ પરથી તે અસંમેય સંખ્યા છે. ઉપરાંત એ પણ ધ્યાન રાખો કે આપણે તેના જેવી ઘણીબધી અસંમેય સંખ્યાઓનું સર્જન કરી શકીએ છીએ.

જાણીતી અસંમેય સંખ્યાઓ $\sqrt{2}$ અને π વિશે તમે શું જાણો છો ? અહીં આપણે કેટલાક દશાંશ સ્થાન સુધી તેમની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ બતાવેલી છે.

$$\sqrt{2} = 1.4142135623730950488016887242096...$$

$$\pi = 3.14159265358979323846264338327950...$$

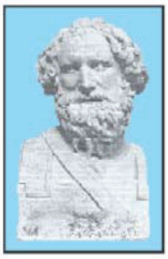
(નોંધીએ કે $\dfrac{22}{7}$ એ π નું આશરે પડતું(આસન્ન) મૂલ્ય છે પરંતુ $\pi \neq \dfrac{22}{7}$)

ગણિતશાસ્ત્રીઓએ ઘણા વર્ષથી અસંમેય સંખ્યાઓની દશાંશ-અભિવ્યક્તિમાં વધુમાં વધુ અંકો મળે તે માટેની ભિન્ન-ભિન્ન પધ્ધતિઓ વિકસાવી છે. ઉદાહરણ તરીકે તમે ભાગાકારની રીતે $\sqrt{2}$ ની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ મેળવવાનું શીખી ગયા હશો. રસપ્રદ વાત એ પણ છે જે વૈદિક યુગ (ઈ.પૂ. 800 થી ઈ.પૂ. 500) ના ગાણિતિક ગ્રંથ સૂલ્બાસૂત્રો(જીવાના નિયમો)માં છે તે $\sqrt{2}$ ની લગભગ નજીકની કિંમત તમે જોઈ શકો છો અને તે આ પ્રમાણે છે.

$$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{34}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

તમે અવલોકન કરશો તો આ કિંમતનાં પ્રથમ પાંચ સ્થાન આગળ આપેલી $\sqrt{2}$ ની દશાંશ-અભિવ્યક્તિના પ્રથમ પાંચ સ્થાનને સમાન જ છે. π ના દશાંશ વિસ્તરણમાં અંકોની શોધનો એક રસપ્રદ ઇતિહાસ છે.

The Greek genius Archimedes was the first to compute digits in the decimal expansion of π. He showed $3.140845 < \pi < 3.142857$. Aryabhatta (476 – 550 C.E.), the great Indian mathematician and astronomer, found the value of π correct to four decimal places (3.1416). Using high speed computers and advanced algorithms, π has been computed to over 1.24 trillion decimal places!



Archimedes (287 BCE – 212 BCE)
આકૃતિ 1.10

હવે આપણે અસંમેય સંખ્યાઓ કેવી રીતે મેળવી શકાય તે જોઈશું.

ઉદાહરણ 10 : $\frac{1}{7}$ અને $\frac{2}{7}$ વચ્ચેની એક અસંમેય સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : આપણે જોયું કે $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ છે. આથી, એકદમ સરળતાથી $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$ ની ગણતરી તમે કરી શકશો.

$\frac{1}{7}$ અને $\frac{2}{7}$ વચ્ચે એક અસંમેય સંખ્યા શોધવા માટે એક એવી સંખ્યા લઈએ કે જે આ સંખ્યાઓની વચ્ચે એક અનંત અનાવૃત સંખ્યા હોય. અલબત્ત, તમે આવી અનંત સંખ્યાઓ શોધી શકશો. આવી એક સંખ્યાનું ઉદાહરણ 0.150150015000150000... છે.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. નીચેની સંખ્યાઓને દશાંશ સ્વરૂપમાં લખો અને તે કેવા પ્રકારની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ છે તે જણાવો.

   (i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$

   (iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. તમે જાણો છો કે $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ છે. શું તમે ખરેખર ભાગાકારની લાંબી પ્રક્રિયા કર્યા વગર $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ ની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ શું મળશે તેનું અનુમાન કરી શકશો ? જો હા, તો કેવી રીતે ?

   (**સૂચન :** $\frac{1}{7}$ નું મૂલ્ય મેળવતી વખતે મળતી શેષનું અવલોકન કરો)

3. p પૂર્ણાંક હોય, q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં નીચેની સંખ્યાને દર્શાવો.

   (i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.4\overline{7}$ (iii) $0.\overline{001}$

4. 0.99999..... ને $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં દર્શાવો. શું તમને તમારા ઉત્તરથી આશ્ચર્ય થાય છે ? તમારા શિક્ષક અને વર્ગના સહ-અધ્યાયીઓ સાથે તમારા જવાબની સત્યાર્થતાની ચર્ચા કરો.

5. $\frac{1}{17}$ ની દશાંશ-અભિવ્યક્તિમાં પુનરાવર્તિત અંકોની સંખ્યા વધુમાં વધુ કેટલી હશે ? તમારો જવાબ ભાગાકાર કરીને ચકાસો.

6. જેમાં p અને q ને 1 સિવાયનો કોઈ સામાન્ય અવયવ ન હોય તથા જેની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સાન્ત હોય તેવા $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ સ્વરૂપના સંમેય સંખ્યાનાં કેટલાંક ઉદાહરણ લો. (જ્યાં p અને q પૂર્ણાંક છે અને $q \neq 0$ છે.) શું તમે અનુમાન લગાવી શકો છો કે q એ કયા ગુણધર્મનું પાલન કરવું જોઈએ ?

7. જેની દશાંશ અભિવ્યક્તિ અનંત અનાવૃત હોય તેવી ત્રણ સંખ્યાઓ લખો.

8. સંમેય સંખ્યાઓ $\frac{5}{7}$ અને $\frac{9}{11}$ ની વચ્ચે આવેલી ત્રણ ભિન્ન અસંમેય સંખ્યાઓ શોધો.

9. નીચેની સંખ્યાઓનું સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓમાં વર્ગીકરણ કરો.

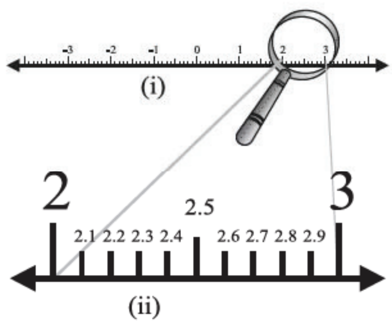
   (i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

   (iv) 7.478478... (v) 1.101001000100001...

1.4 સંખ્યારેખા પર વાસ્તવિક સંખ્યાનું નિરૂપણ

અગાઉના વિભાગમાં આપણે જોયું કે કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યાને એક દશાંશ-અભિવ્યક્તિ હોય છે. તેની મદદથી વાસ્તવિક સંખ્યાનું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કરી શકાય છે. તો ચાલો આપણે જોઈએ કે કેવી રીતે તેનું નિરૂપણ કરી શકાય.

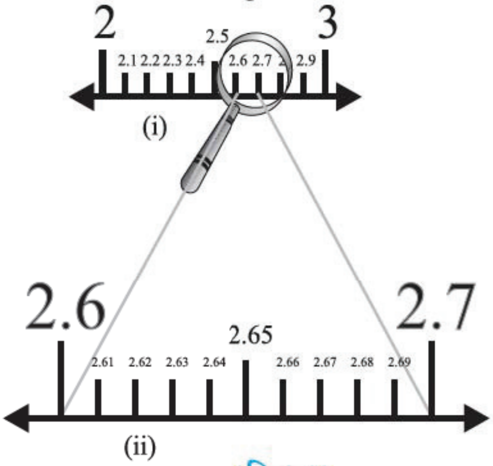
માનો કે આપણે સંખ્યારેખા પર 2.665નું નિરૂપણ કરવા માંગીએ છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે આ સંખ્યા 2 અને 3 ની વચ્ચે રહેલી છે.



આકૃતિ 1.11

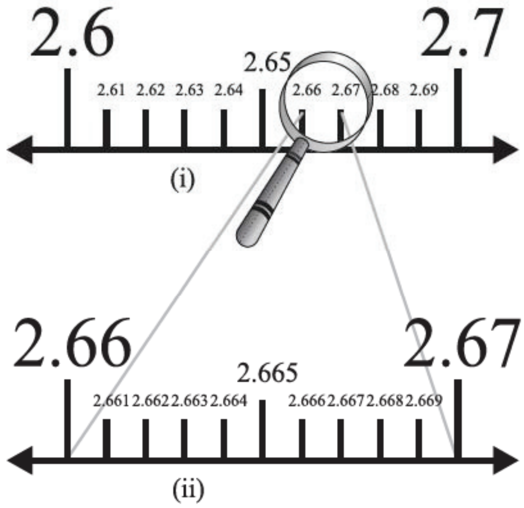
હવે આપણે 2 અને 3 ની વચ્ચેના સંખ્યારેખાના ભાગને ધ્યાનથી જોઈએ. ધારો કે, આ ભાગને બરાબર એક સરખા 10 ભાગમાં વિભાજિત કરીને તેને આકૃતિ 1.11 (i) માં બતાવ્યા પ્રમાણે આંકીએ ત્યારે 2 ની જમણી બાજુનો પ્રથમ આંક 2.1 દર્શાવે છે. બીજો આંક 2.2 દર્શાવે છે અને તે પ્રમાણે આગળ. તમને આકૃતિ 1.11 (i)માં 2 અને 3 વચ્ચેના વિભાજિત ભાગને જોવામાં તકલીફ પડતી હશે. તેને સ્પષ્ટ જોવા માટે તમે એક ***વિપુલ દર્શક કાચ*** (*Magnifying glass*)નો ઉપયોગ કરી ને 2 અને 3 વચ્ચેના ભાગને જોઈ શકો છો. તમને આકૃતિ 1.11 (ii) માં છે તેવું દેખાશે. હવે 2.665 એ 2.6 અને 2.7 ની વચ્ચે છે. આથી આપણે 2.6 અને 2.7 વચ્ચે ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીએ. [આકૃતિ 1.12(i) જુઓ] આપણે ફરીથી તે ભાગને 10 સરખા ભાગમાં વિભાજિત કરીશું. પહેલો આંક 2.61 દર્શાવે,

બીજો આંક 2.62 વગેરે. તેને સ્પષ્ટ જોવા માટે આપણે આકૃતિ 1.12 (ii) પ્રમાણે તે ભાગને મોટો કરીશું.



આકૃતિ 1.12

હવે ફરીથી 2.665 એ 2.66 અને 2.67 ની વચ્ચે છે. તેથી આપણે સંખ્યારેખા પર તે ભાગ પર ધ્યાન કેન્દ્રિત કરીએ. [આકૃતિ 1.13(i) જુઓ] અને કલ્પના કરો કે આ ભાગને 10 એક સરખા ભાગમાં વિભાજિત કરેલો છે. તેને સ્પષ્ટ રીતે જોવા માટે તે ભાગને મોટો કરીએ. જે આકૃતિ 1.13(ii) માં બતાવ્યુ છે. પહેલો આંક 2.661 દર્શાવે છે ત્યાર પછીનો આંક 2.662 અને તે પ્રમાણે આગળ. આથી આ પ્રકારના પેટા વિભાજનમાં પાંચમો ભાગ 2.665 નું નિરૂપણ કરે છે.



આકૃતિ 1.13

આમ વિપુલ દર્શક કાચની મદદથી સંખ્યારેખા પર સંખ્યાઓને દર્શાવવાની આ પદ્ધતિને *ક્રમિક વિપુલ દર્શિતાની પદ્ધતિ* (*Process of successive magnification*) કહે છે.

આ પ્રમાણે આપણે જોયું કે ક્રમિક વિપુલ દર્શિતાની પદ્ધતિ દ્વારા સંખ્યારેખા પર સાન્ત દશાંશ-અભિવ્યક્તિવાળી વાસ્તવિક સંખ્યાઓનું નિરૂપણ કરવું શક્ય છે. હવે આપણે સંખ્યારેખા પર અનંત અનાવૃત હોય તેવી એક વાસ્તવિક સંખ્યાનું નિરૂપણ કરવાનો પ્રયત્ન કરીએ. વિપુલદર્શક કાચની મદદથી યોગ્ય અંતરાલોને જોઈશું અને ક્રમિક વિપુલ દર્શિતાની પદ્ધતિ દ્વારા તે સંખ્યાનું નિરૂપણ સંખ્યારેખા પર કરીશું.

ઉદાહરણ 11 : $5.3\overline{7}$ ને 5 દશાંશ સ્થળ સુધી એટલે કે 5.37777 ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

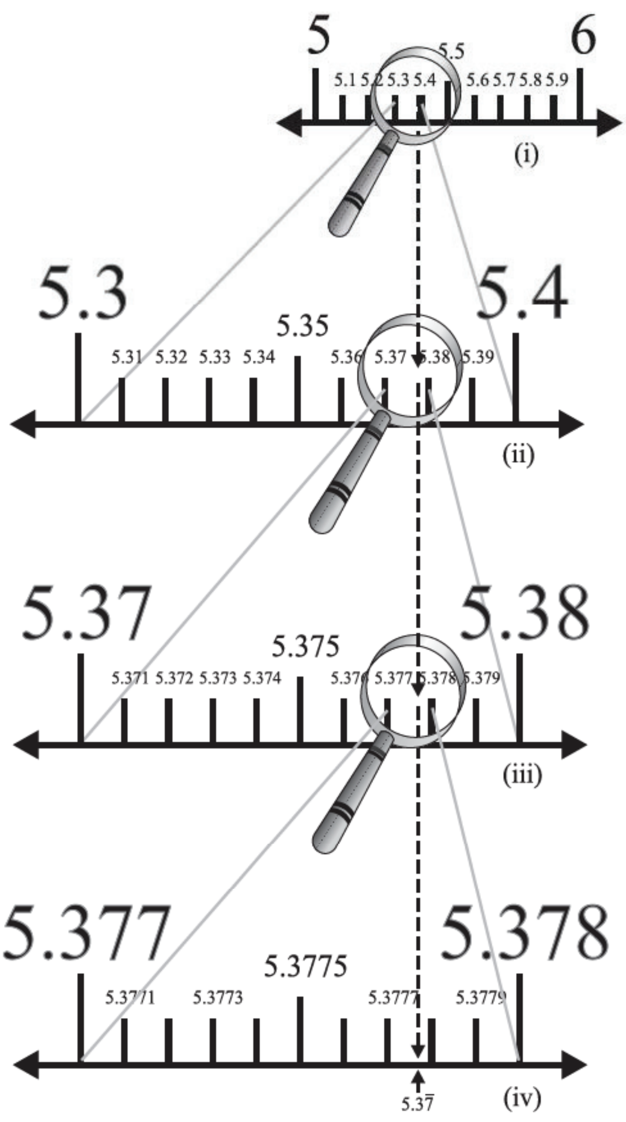
ઉકેલ : એકવાર ફરીથી ક્રમિક વિપુલદર્શિતાની પદ્ધતિ લઇએ અને સંખ્યારેખાના ભાગોની લંબાઇ ક્રમશઃ $5.3\overline{7}$ મળે ત્યાં સુધી ઘટાડીએ. સૌ પ્રથમ આપણે જોઈએ કે 5 અને 6 ની વચ્ચે $5.3\overline{7}$ છે. આગળના પગલામાં $5.3\overline{7}$ નું સ્થાન 5.3 અને 5.4 ની વચ્ચે નક્કી કરીશું. આ સંખ્યાનું નિરૂપણ વધારે સ્પષ્ટ રીતે જોવા માટે સંખ્યારેખાના આ ભાગને 10 સરખા ભાગમાં વિભાજિત કરી અને વિપુલદર્શક કાચથી નિરીક્ષણ કરીએ કે $5.3\overline{7}$ એ 5.37 અને 5.38 ની વચ્ચે છે.

$5.3\overline{7}$ નું વધારે સ્પષ્ટ નિરૂપણ કરવા માટે 5.377 અને 5.378 ના વચ્ચેના ભાગને બરાબર એક સરખા 10 ભાગમાં વિભાજિત કરીશું. તે આકૃતિ 1.14(iv) માં દર્શાવેલું છે. ધ્યાન રાખો કે $5.3\overline{7}$ એ 5.3777 ના કરતાં 5.3778 ની વધારે નજીક છે [આકૃતિ 1.14(iv) જુઓ]

નોંધ : વિપુલદર્શક કાચથી ઉત્તરોત્તર અને સંખ્યારેખાના જે ભાગમાં $5.3\overline{7}$ આવેલ હોય તેની લંબાઈમાં સતત ઘટાડો કરવાના અનુમાનને નિરંતર આગળ વધારી શકીએ છીએ. આપણે સંખ્યારેખા પર સંખ્યાનું સ્થાન જોવા માંગતા હોઈએ તો સંખ્યારેખાના ભાગનું માપ કેટલું લેવું તે ચોક્કસાઈની માત્રા પર આધારિત છે.

હવે તમને ચોક્કસ સમજાયું હશે કે આ પ્રક્રિયાથી સંખ્યારેખા પર અનંત અનાવૃત દશાંશ-અભિવ્યક્તિનું પણ નિરૂપણ કરી શકીએ છીએ.

ઉપરોક્ત કરવામાં આવેલી ચર્ચાઓ અને નિદર્શન પરથી આપણે કહી શકીએ કે દરેક વાસ્તવિક સંખ્યાને સંગત સંખ્યારેખા પર અનન્ય બિંદુ હોય છે અને આથી ઉલટું સંખ્યારેખાના દરેક બિંદુને સંગત એક અને માત્ર એક વાસ્તવિક સંખ્યા હોય છે.



આકૃતિ 1.14

સ્વાધ્યાય 1.4

1. ક્રમિક વિપુલ દર્શિતા પદ્ધતિની મદદથી સંખ્યારેખા પર 3.765 દર્શાવો.
2. ક્રમિક વિપુલ દર્શિતા પદ્ધતિની મદદથી સંખ્યારેખા પર $4.\overline{26}$ ને 4 દશાંશ સ્થળ સુધી દર્શાવો.

1.5 વાસ્તવિક સંખ્યાઓ પર ગાણિતિક પ્રક્રિયાઓ.

અગાઉના વર્ગોમાં તમે શીખી ગયા કે સંમેય સંખ્યાઓના સરવાળા અને ગુણાકાર એ ***ક્રમનો નિયમ*** *(commutative law)*, ***જૂથનો નિયમ*** *(associative law)* અને ***વિભાજનના*** *(distributive law)* નિયમોનું પાલન કરે છે. ઉપરાંત, આપણે બે સંમેય સંખ્યાઓને ઉમેરીએ, બાદ કરીએ, ગુણીએ કે ભાગીએ (શૂન્ય સિવાયની સંખ્યા વડે) તો આપણને સંમેય સંખ્યા જ મળે છે (એટલે કે સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર વિશે સંમેય સંખ્યા સંવૃત્તતાનો ગુણધર્મ ધરાવે છે). અસંમેય સંખ્યાઓ પણ સરવાળા અને ગુણાકાર માટે ક્રમના, જૂથના તથા વિભાજનના નિયમોનું પાલન કરે છે. જો કે અસંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો, તફાવત, ગુણનફળ, ભાગફળ હંમેશા અસંમેય સંખ્યા જ હોય તે જરૂરી નથી.

ઉદાહરણ તરીકે $\left(\sqrt{6}\right)+\left(-\sqrt{6}\right), \left(\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{2}\right), \left(\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{3}\right)$ અને $\dfrac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ સંમેય સંખ્યાઓ છે.

હવે એક સંમેય સંખ્યામાં એક અસંમેય સંખ્યા ઉમેરીએ છીએ અને એક સંમેય સંખ્યાનો અસંમેય સંખ્યા વડે ગુણાકાર કરીએ છીએ ત્યારે શું થાય છે તે જોઈએ.

ઉદાહરણ તરીકે $\sqrt{3}$ એક અસંમેય સંખ્યા છે. તો $2+\sqrt{3}$ અને $2\sqrt{3}$ કેવી સંખ્યાઓ છે ? અહી $\sqrt{3}$ એક અનંત અનાવૃત દશાંશ-અભિવ્યક્તિ છે. તેથી તે $2+\sqrt{3}$ અને $2\sqrt{3}$ માટે પણ આ ગુણધર્મ સત્ય છે. આમ, $2+\sqrt{3}$ અને $2\sqrt{3}$ બંને અસંમેય સંખ્યાઓ છે.

ઉદાહરણ 12 : $7\sqrt{5}, \dfrac{7}{\sqrt{5}}, \sqrt{2}+21, \pi-2$ એ અસંમેય સંખ્યાઓ છે કે નહિ ? ચકાસો.

ઉકેલ : $\sqrt{5} = 2.236..., \sqrt{2} = 1.4142..., \pi = 3.1415...$ છે.

તેથી $7\sqrt{5} = 15.652...,\ \dfrac{7}{\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304..$ થાય.

$\sqrt{2}+21 = 22.4142...,\ \pi-2 = 1.1415..$

આ બધી સંખ્યાઓ અનંત અનાવૃત દશાંશ-અભિવ્યક્તિ છે. તેથી આ બધી સંખ્યાઓ અસંમેય સંખ્યાઓ છે.

જો આપણે અસંમેય સંખ્યાઓના સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર, ભાગાકાર કરીએ તથા વર્ગમૂળ અને કોઈપણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n માટે n-મૂળ પણ લઈએ, તો મહદ્ અંશે શું બનશે તે આપણે જોઈએ. ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 13 : $2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}$ અને $\sqrt{2} - 3\sqrt{3}$ નો સરવાળો કરો.

ઉકેલ : $\left(2\sqrt{2} + 5\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{2} - 3\sqrt{3}\right) = \left(2\sqrt{2} + \sqrt{2}\right) + \left(5\sqrt{3} - 3\sqrt{3}\right)$

$$= \left(2+1\right)\sqrt{2} + \left(5-3\right)\sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$$

ઉદાહરણ 14 : $6\sqrt{5}$ નો $2\sqrt{5}$ સાથે ગુણાકાર કરો.

ઉકેલ : $6\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} = 6 \times 2 \times \sqrt{5} \times \sqrt{5} = 12 \times 5 = 60$

ઉદાહરણ 15 : $8\sqrt{15}$ નો $2\sqrt{3}$ વડે ભાગાકાર કરો.

ઉકેલ : $8\sqrt{15} \div 2\sqrt{3} = \dfrac{8\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{3}} = 4\sqrt{5}$

ઉપરનાં ઉદાહરણો આપણને નીચેની સત્ય હકીકત તરફ દોરી જાય છે.

(i) સંમેય સંખ્યાઓનો અસંમેય સંખ્યા સાથેનો સરવાળો અથવા તફાવત અસંમેય હોય છે.

(ii) શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા સાથે અસંમેય સંખ્યાનો ગુણાકાર કે ભાગાકાર અસંમેય હોય છે.

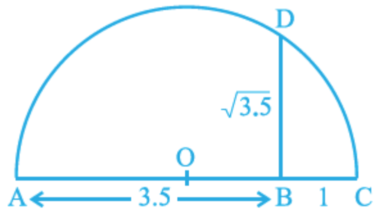
(iii) બે અસંમેય સંખ્યાઓનો સરવાળો, તફાવત, ગુણાકાર કે ભાગાકાર સંમેય અથવા અસંમેય હોઇ શકે.

હવે આપણે વાસ્તવિક સંખ્યાના વર્ગમૂળ કાઢવા માટેની પ્રક્રિયા તરફ આપણું ધ્યાન દોરીશું. તમને યાદ હશે કે જો a એક પ્રાકૃતિક સંખ્યા હોય તો $\sqrt{a} = b$ નો અર્થ $b^2 = a$ અને $b > 0$ થાય છે. આ શરત ધન વાસ્તવિક સંખ્યા પર પણ લાગુ પડી શકે છે.

ધારો કે $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે તો $\sqrt{a} = b$ નો અર્થ $b^2 = a$ અને $b > 0$ થાય છે.

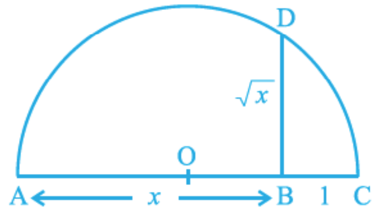
આપણે વિભાગ 1.2માં જોયું કે કેવી રીતે રેખા પર $\sqrt{n}$ (જ્યાં n ધનપૂર્ણાંક છે)નું નિરૂપણ કરી શકાય છે. હવે આપણે $\sqrt{x}$ ને (જ્યાં x એ ધન વાસ્તવિક સંખ્યા છે) ભૌમિતિક રીતે કેવી રીતે મેળવાય તે જોઇશું. ઉદાહરણ તરીકે $x = 3.5$ નું વર્ગમૂળ શોધીએ. એટલે કે આપણે $\sqrt{3.5}$ ભૌમિતિક રીતે શોધીએ.

એક આપેલી રેખા પરના બિંદુ A થી 3.5 એકમ દૂર એક બિંદુ B લો. AB = 3.5 એકમ થશે. (આકૃતિ 1.15 જુઓ) B થી 1 એકમ અંતરે બિંદુ C લો. AC નું મધ્યબિંદુ શોધીને તેને O કહો. O કેન્દ્ર અને OC જેટલી ત્રિજ્યાવાળુ એક અર્ધવર્તુળ દોરો. B માંથી પસાર થતી AC ને લંબ અને અર્ધવર્તુળને D માં છેદતી રેખા દોરો. તો BD = $\sqrt{3.5}$ થાય.



આકૃતિ 1.15

વ્યાપક રીતે, $\sqrt{x}$ નું મૂલ્ય શોધવા માટે (જ્યાં x એક ધન વાસ્તવિક સંખ્યા છે) AB = x એકમ થાય એવું બિંદુ B લો અને આકૃતિ 1.16 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે BC = 1 એકમ થાય એવું બિંદુ C લો. x=3.5 ના કિસ્સામાં જોયું તે પ્રમાણે BD = $\sqrt{x}$ મળશે.



આકૃતિ 1.16 (a), $x > 1$

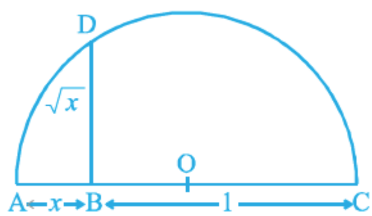
આ પરિણામને આપણે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને સાબિત કરી શકીએ.

અહીં આકૃતિ 1.16 (a) માં Δ OBD એક કાટકોણ ત્રિકોણ છે. વળી, વર્તુળની ત્રિજ્યા $\dfrac{x+1}{2}$ એકમ છે.

આથી $OC = OD = OA = \dfrac{x+1}{2}$ એકમ

હવે $OB = x - \left(\dfrac{x+1}{2}\right) = \dfrac{x-1}{2}$, (આકૃતિ 1.16 (a) માં)

અથવા $OB = \dfrac{x+1}{2} - x = \dfrac{1-x}{2}$, (આકૃતિ 1.16 (b) માં)



આકૃતિ 1.16 (b), $x < 1$

એટલે કે જો $x = 3{\cdot}6$ તો $OB = 1{\cdot}3$ [આકૃતિ 1·16 (a)] તથા જો $x = 0{\cdot}6$ તો $OB = 0{\cdot}2$ [આકૃતિ 1·16 (b)]

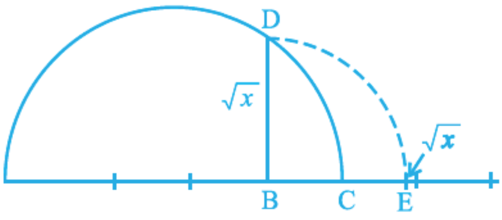
પાયથાગોરસ પ્રમેય પરથી

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x. \text{(આકૃતિ 1.16 (a))}$$

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x. \text{(આકૃતિ 1.16 (b))}$$

આથી BD = $\sqrt{x}$ મળે.

આ રચના આપણને વાસ્તવિક સંખ્યા $x > 0$ માટે $\sqrt{x}$ નું અસ્તિત્વ તથા તેને દર્શાવવાની ભૌમિતિક રીત દર્શાવે છે. જો આપણે સંખ્યારેખા પર $\sqrt{x}$ નું નિરૂપણ કરવા માંગતા હોઈએ તો આપણે રેખા BC ને સંખ્યા રેખા, B ને શૂન્ય લઈ અને C ને 1 તરીકે લઈએ. B ને કેન્દ્ર અને BD ને ત્રિજ્યા લઈને એક ચાપ દોરીએ. તે સંખ્યારેખાને બિંદુ E માં છેદશે. (જુઓ આકૃતિ 1.17). E એ $\sqrt{x}$ નું નિરૂપણ કરે છે.



આકૃતિ 1.17, $x > 1$

$0 < x < 1$ માટે $\sqrt{x}$ ની રજૂઆત પણ તે જ રીતે થઈ શકે.

હવે આપણે કોઈ પણ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાના વર્ગમૂળ વિશેના ખ્યાલને ઘનમૂળ, ચતુર્થમૂળ અને વ્યાપક રીતે ધન પૂર્ણાંક n માટે વાસ્તવિક સંખ્યાના n- મૂળ સુધી પણ વિસ્તૃત કરી શકીએ.

આગળના વર્ગોમાં વર્ગમૂળ અને ઘનમૂળ માટેની મેળવેલી સમજને તમે યાદ કરો.

$\sqrt[3]{8}$ શું છે ? આપણે જાણીએ છીએ કે જેનો ઘન 8 હોય તેવી એક ધન સંખ્યા છે. તમે અનુમાન કર્યું જ હશે કે $\sqrt[3]{8} = 2$ છે. ચાલો આપણે $\sqrt[5]{243}$ નું મૂલ્ય શોધીએ. શું તમે જાણો છો કે $b^5 = 243$ થાય તેવી કોઈ સંખ્યા b છે ? તેનો જવાબ છે 3. તેથી $\sqrt[5]{243} = 3$.

આ ઉદાહરણોથી, $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા હોય અને n એક ધન પૂર્ણાંક હોય તેવા a અને n માટે શું તમે $\sqrt[n]{a}$ વ્યાખ્યાયિત કરી શકશો ?

ધારો કે $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે અને n એક ધન પૂર્ણાંક છે. $b > 0$ માટે, જો $b^n = a$ તો $\sqrt[n]{a} = b$ છે. અહીં ધ્યાન રાખો કે $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[n]{a}$, વગેરેમાં '$\sqrt{\ }$' સંકેતને ***કરણી ચિહ્ન*** *(Radical Sign)* કહેવામાં આવે છે.

આપણે વિવિધ ક્રિયાઓ માટે ઉપયોગી હોય તેવા વર્ગમૂળને લગતા કેટલાક ***નિત્યસમ****(Identities)* લઈએ. તમે અગાઉના ધોરણમાં આમાંના કેટલાકથી પરિચિત થયા છો. બાકીના વાસ્તવિક સંખ્યાના સરવાળા પરના ગુણાકારના વિભાજનના નિયમથી અને નિત્યસમ $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ થી મળે છે. (x, y વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે)

ધારો કે a અને b ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે.

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

(ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a - b$

(iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2 - b$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}+\sqrt{d}\right) = \sqrt{ac}+\sqrt{ad}+\sqrt{bc}+\sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

આ નિત્યસમ પર આધારિત કેટલાક વિશિષ્ટ ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 16: નીચેના પ્રશ્નોમાં સાદુંરૂપ આપો.

(i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)$ (ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)$

ઉકેલ: (i) $\left(5+\sqrt{7}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)=10+5\sqrt{5}+2\sqrt{7}+\sqrt{35}$

(ii) $\left(5+\sqrt{5}\right)\left(5-\sqrt{5}\right)=5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=25-5=20$

(iii) $\left(\sqrt{3}+\sqrt{7}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2=3+2\sqrt{21}+7=10+2\sqrt{21}$

(iv) $\left(\sqrt{11}-\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{11}+\sqrt{7}\right)=\left(\sqrt{11}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2=11-7=4$

નોંધ : ધ્યાન રાખો કે ઉપરના ઉદાહરણમાં 'સાદુંરૂપ' શબ્દનો અર્થ એ થાય છે કે ''આ વિસ્તરણને સંમેય સંખ્યા અને અસંમેય સંખ્યાના સરવાળા તરીકે દર્શાવો''.

આપણે નીચેના પ્રશ્નનો વિચાર કરી આ વિભાગની ચર્ચા પૂર્ણ કરીશું. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ને સંખ્યારેખા પર ક્યાં દર્શાવી શકાય ? તમે જાણો છો કે તે અસંમેય સંખ્યા છે. જો છેદ સંમેય સંખ્યા હોય તો તે સરળ પડશે. જો આપણે છેદનું સંમેયીકરણ કરી શકીએ તો છેદ સંમેય સંખ્યા બનશે. તે માટે વર્ગમૂળના નિત્યસમોની જરૂર પડશે. આ કેવી રીતે શક્ય બને તે જોઈએ.

ઉદાહરણ 17: $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : આપણે જેનો છેદ સંમેય સંખ્યા હોય એવી એક સમકક્ષ અભિવ્યક્તિમાં $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ને દર્શાવીશું . આપણે જાણીએ છીએ કે $\sqrt{2}\,.\sqrt{2}$ સંમેય સંખ્યા છે. આપણે એ પણ જાણીએ છીએ કે $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ને $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ વડે ગુણવાથી તેને સમકક્ષ અભિવ્યક્તિ મળે છે, કારણ કે $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$ છે. આ બંને તથ્યોને ભેગાં કરીએ તો આપણને $\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ મળે. આ સ્વરૂપમાં સંખ્યારેખા પર $\frac{1}{\sqrt{2}}$ નું નિરૂપણ કરવું સહેલું થઇ જાય. આ સંખ્યા 0 અને $\sqrt{2}$ નું મધ્યબિંદુ છે.

ઉદાહરણ 18 : $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : આપણે ઉપરના નિત્યસમ (iv) નો ઉપયોગ કરીશું. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ નો $2-\sqrt{3}$ વડે ગુણાકાર અને ભાગાકાર કરવાથી આપણને

$\frac{1}{2+\sqrt{3}}\times\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$ મળશે.

ઉદાહરણ 19 : $\dfrac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : અહીં આપણે ઉપરોક્ત નિત્યસમ (iii) નો ઉપયોગ કરીશું.

$$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5} = \left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

ઉદાહરણ 20: $\dfrac{1}{7+3\sqrt{2}}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

ઉકેલ : $\dfrac{1}{7+3\sqrt{2}} = \dfrac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \left(\dfrac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right) = \dfrac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \dfrac{7-3\sqrt{2}}{31}$

આમ, જ્યારે કોઈ અભિવ્યક્તિના છેદમાં વર્ગમૂળવાળું પદ (અથવા કરણી ચિહ્નની અંદરની સંખ્યા) હોય ત્યારે જેનો છેદ એક સંમેય સંખ્યા હોય તેવી સમતુલ્ય અભિવ્યક્તિમાં તેને રૂપાંતરિત કરવાની પદ્ધતિને ***છેદનું સંમેયીકરણ*** (*Rationalising the denominator*) કહેવાય છે.

સ્વાધ્યાય 1.5

1. આપેલી સંખ્યાઓનું સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓમાં વર્ગીકરણ કરો :

(i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$ (iii) $\dfrac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

(iv) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. સાદું રૂપ આપો :

(i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

(iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

3. યાદ કરો કે π ને એક વર્તુળના પરિઘ (c) અને તેના વ્યાસ (d) ના ગુણોત્તર તરીકે દર્શાવવામાં આવે છે. એટલે કે $\pi = \dfrac{c}{d}$. તે વિરોધાભાસી છે, કારણકે π એ અસંમેય સંખ્યા છે. આ વિરોધાભાસનો ઉકેલ કેવી રીતે લાવશો ?

4. $\sqrt{9.3}$ ને સંખ્યારેખા પર દર્શાવો.

5. આપેલ સંખ્યાઓના છેદનું સંમેયીકરણ કરો.

(i) $\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ (iii) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\dfrac{1}{\sqrt{7}-2}$

1.6 વાસ્તવિક સંખ્યાઓ માટે ઘાતાંકના નિયમો

શું તમને યાદ છે કે નીચે આપેલી સંખ્યાઓનું સાદુંરૂપ કેવી રીતે આપી શકાય?

(i) $17^2 \cdot 17^5 =$ (ii) $\left(5^2\right)^7 =$ (iii) $\dfrac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3 \cdot 9^3 =$

શું તમે તેના જવાબો મેળવ્યા ? આ જવાબો નીચે મુજબ છે.

(i) $17^2 \cdot 17^5 = 17^7$ (ii) $(5^2)^7 = 5^{14}$

(iii) $\dfrac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3 \cdot 9^3 = 63^3$

આ જવાબો મેળવવા માટે તમે નીચે દર્શાવેલા અગાઉના ધોરણમાં શીખેલા તે *ઘાતાંકના નિયમો* નો ઉપયોગ કર્યો હશે. (અહીં a, n અને m એ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ છે. તમને એ પણ યાદ હશે કે a ને *આધાર* (*base*) અને m અને n ને *ઘાતાંક* (*exponents*) કહેવામાં આવે છે.)

(i) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$

(iii) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n},\ m > n$ (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

$(a)^0$ ની કિંમત શું છે ? તેની કિંમત 1 થાય. આ ઉપરાંત $(a)^0 = 1$ થાય તેનો અભ્યાસ તમે કરી ગયા છો. ઉપરોક્ત નિયમ (iii) નો ઉપયોગ કરીને $\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ પણ મેળવી શકાય.

આ નિયમોનો ઉપયોગ ઋણ ઘાતાંક માટે પણ કરી શકાય છે.

ઉદાહરણ તરીકે,

(i) $17^2 \cdot 17^{-5} = 17^{-3} = \dfrac{1}{17^3}$ (ii) $\left(5^2\right)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\dfrac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3} \cdot (9)^{-3} = (63)^{-3}$

ધારો કે આપણે નીચેની ગણતરી કરવી છે.

(i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$ (iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

હવે આપણે આગળ કેવી રીતે વધીશું ? આધાર ધન વાસ્તવિક સંખ્યા હોય અને ઘાતાંક સંમેય સંખ્યા હોય ત્યારે આપણે જેનો અગાઉ અભ્યાસ કર્યો છે તેવા ઘાતાંકના નિયમોનો વિસ્તાર કરીશું. (હવે પછી તમે ઘાતાંક વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તે પ્રમાણેના નિયમોનો વિસ્તાર કરશો.) પરંતુ આ નિયમોને દર્શાવતાં પહેલાં અને આ નિયમોનું જ્ઞાન મેળવતાં પહેલાં એ જાણવું જરૂરી છે કે $4^{\frac{3}{2}}$ નો અર્થ શો થાય ? આપણે તે અંગે થોડુંક કાર્ય કરવું પડશે !

વિભાગ 1.4 માં વાસ્તવિક સંખ્યા $a > 0$ માટે $\sqrt[n]{a}$ ને નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કર્યું છે.

ધારો કે $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે અને n ધન પૂર્ણાંક છે તો જ્યારે $b^n = a$ હોય ત્યારે $\sqrt[n]{a} = b$ થાય અને $b > 0$ છે.

ઘાતાંકની ભાષામાં આપણે $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ લઈએ છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$

હવે, $4^{\frac{3}{2}}$ બે રીતે વિચારીશું.

$$\text{(i) } 4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$\text{(ii) } 4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

આ પરથી તેની વ્યાખ્યા નીચે મુજબ મળે.

જો $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા હોય તથા m અને n જેમને 1 સિવાય કોઈ સામાન્ય અવયવ ન હોય તેવા પૂર્ણાંક હોય અને $n > 0$ હોય.

તો $a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ થાય.

આપણને હવે ઘાતાંકના વિસ્તૃત નિયમો નીચે પ્રમાણે મળે છે.

ધારો કે $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા છે અને p અને q એ સંમેય સખ્યાઓ છે,

(i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (ii) $(a^p)^q = a^{pq}$

(iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

હવે તમે અગાઉ પૂછેલા પ્રશ્નોના જવાબ શોધવા ઉપરોક્ત નિયમોનો ઉપયોગ કરી શકો છો.

ઉદાહરણ 21 : સાદું રૂપ આપો (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}}$

ઉકેલ : (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}} \cdot 17^{\frac{1}{5}} = (13 \times 17)^{\frac{1}{5}} = 221^{\frac{1}{5}}$

સ્વાધ્યાય 1.6

1. કિંમત શોધો : (i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$

2. કિંમત શોધો : (i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$

3. સાદું રૂપ આપો : (i) $2^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{2}}$

1.7 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. જો p તથા q પૂર્ણાંક હોય તથા q શૂન્યેતર હોય તથા $r = \frac{p}{q}$ હોય તો r ને સંમેય સંખ્યા કહે છે.

2. જો વાસ્તવિક સંખ્યા s ને જ્યાં p પૂર્ણાંક હોય, q શૂન્યેતર પૂર્ણાંક હોય તેવા $\frac{p}{q}$ સ્વરૂપમાં ન દર્શાવી શકાય તો s ને અસંમેય સંખ્યા કહે છે.

3. સંમેય સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ એ સાન્ત અથવા અનંત આવૃત્ત હોય છે. વધુમાં જે સંખ્યાની દશાંશ અભિવ્યક્તિ સાન્ત અથવા અનંત આવૃત હોય તે સંમેય સંખ્યા છે.

4. અસંમેય સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ અનંત અનાવૃત્ત હોય છે. વધુમાં જે સંખ્યાની દશાંશ-અભિવ્યક્તિ અનંત અનાવૃત્ત હોય, તે સંખ્યા અસંમેય સંખ્યા છે.

5. બધી સંમેય અને અસંમેય સંખ્યાઓને એકત્રિત કરવાથી વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો સમૂહ બને છે.

6. સંખ્યારેખા પરના દરેક બિંદુને સંગત અનન્ય વાસ્તવિક સંખ્યા હોય છે અને દરેક વાસ્તવિક સંખ્યાને સંગત સંખ્યારેખા પર અનન્ય બિંદુ મળે છે.

7. જો r સંમેય સંખ્યા હોય અને s અસંમેય સંખ્યા હોય તો $r + s$ અને $r - s$ અસંમેય સંખ્યા છે તથા શૂન્યેતર સંમેય સંખ્યા r માટે $r \cdot s$ અને $\frac{r}{s}$ અસંમેય સંખ્યા થાય છે.

8. નીચેના ગુણધર્મો ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ a અને b માટેના છે.

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$

(iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2-b$ (v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$

9. $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ ના છેદનું સંમેયીકરણ કરવા માટે તેનો $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ વડે ગુણાકાર કરવો જોઈએ. a અને b પૂર્ણાંક છે.

10. જો $a > 0$ એક વાસ્તવિક સંખ્યા હોય અને p અને q સંમેય સંખ્યા હોય, તો

(i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (ii) $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$ (iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$