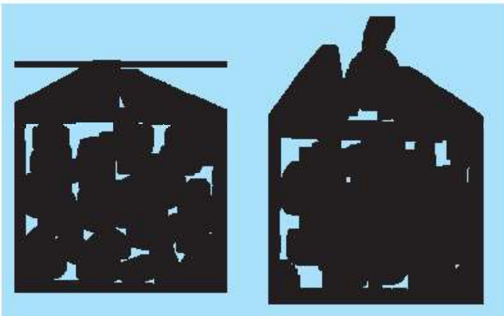
પ્રકરણ 1

પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ

1.1 પરિચય



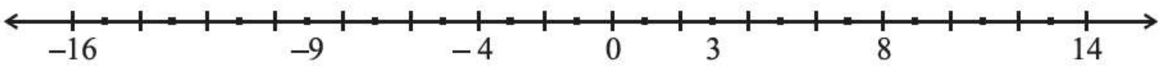
આપણે ધોરણ - 6માં પૂર્ણ સંખ્યાઓ અને પૂર્ણાંકો વિશે શીખી ગયાં છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો એક મોટો સમૂહ હોય છે જેમાં પૂર્ણ સંખ્યાઓ અને ઋણ સંખ્યાઓનો સમાવેશ થાય છે. શું તમે પૂર્ણ સંખ્યાઓ અને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ વચ્ચે તફાવત શોધી શકો છો ? આ પ્રકરણમાં આપણે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ અને તેમના ગુણધર્મો અને ક્રિયાઓ વિશે વધુ અભ્યાસ કરીશું. સૌ પ્રથમ આપણે અગાઉના ધોરણમાંની પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ વિશે સમીક્ષા અને પુનરાવર્તન કરીશું.

1.2 પુનરાવર્તન (Recall)

આપણે જાણીએ છીએ કે સંખ્યારેખા પર પૂર્ણાંક સંખ્યાઓને કેવી રીતે દર્શાવી શકાય. નીચે આપેલ સંખ્યારેખા પર કેટલીક પૂર્ણાંક સંખ્યાઓને અંકિત કરવામાં આવેલ છે.

શું તમે અંકિત કરેલી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓને ચડતા ક્રમમાં લખી શકો છો ? આ સંખ્યાઓનો ચડતો ક્રમ –5, –1, 3 છે. શા માટે આપણે –5 ને સૌથી નાની સંખ્યા તરીકે પસંદ કરી છે ?

નીચે આપેલ સંખ્યારેખા પર પૂર્ણાંક સંખ્યા સાથે કેટલાંક બિંદુ અંકિત કરવામાં આવેલ છે. એ પૂર્ણાંક સંખ્યાને ઊતરતા ક્રમમાં ગોઠવો.

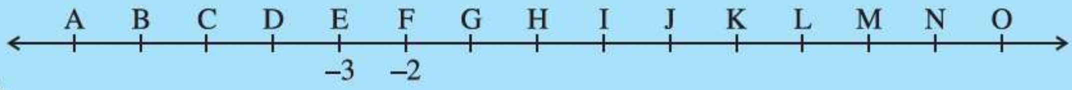


આ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ઊતરતો ક્રમ : 14, 8, 3,... છે.

ઉપરોક્ત સંખ્યારેખા ઉપર કેટલીક પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ દર્શાવી છે. દરેક બિંદુ આગળ યોગ્ય સંખ્યા દર્શાવો.

પ્રયત્ન કરો

1. નીચે આપેલ સંખ્યારેખા પર પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ દર્શાવી છે.



–3 અને –2 ને ક્રમશઃ E અને F પર અંકિત કરવામાં આવેલ છે. કઈ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ B, D, H, J, M અને O વડે દર્શાવાશે ?

2. 7, –5, 4, 0 અને –4 ને ચડતા ક્રમમાં ગોઠવી તેને સંખ્યારેખા પર દર્શાવીને તમારો જવાબ ચકાસો.

આપણે, અગાઉના ધોરણમાં પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના સરવાળા અને બાદબાકી કરતાં શીખી ગયાં છીએ.

નીચે આપેલાં વિધાનો વાંચો : સંખ્યારેખા પર,

(i) ધન પૂર્ણાંક ઉમેરતાં આપણે જમણી બાજુ ખસીએ છીએ.

(ii) ઋણ પૂર્ણાંક ઉમેરતાં આપણે ડાબી બાજુ ખસીએ છીએ.

(iii) ધન પૂર્ણાંકની બાદબાકી કરતાં આપણે ડાબી બાજુ ખસીએ છીએ.

(iv) ઋણ પૂર્ણાંકની બાદબાકી કરતાં આપણે જમણી બાજુ ખસીએ છીએ.

નીચે આપેલાં વિધાનો સાચાં છે કે ખોટાં તે જણાવો. જો ખોટાં હોય તો સુધારો :

(i) જ્યારે બે ધન પૂર્ણાંકોનો સરવાળો કરવામાં આવે તો આપણને ધન પૂર્ણાંક મળે છે.

(ii) જ્યારે બે ઋણ પૂર્ણાંકોનો સરવાળો કરવામાં આવે તો આપણને ધન પૂર્ણાંક મળે છે.

(iii) જ્યારે એક ધન પૂર્ણાંક અને એક ઋણ પૂર્ણાંકનો સરવાળો કરવામાં આવે તો હંમેશાં આપણને ઋણ પૂર્ણાંક મળે છે.

(iv) પૂર્ણાંક સંખ્યા 8 ની વિરોધી સંખ્યા (–8) છે અને પૂર્ણાંક સંખ્યા (–8) ની વિરોધી સંખ્યા 8 છે.

(v) બાદબાકી માટે જે પૂર્ણાંક સંખ્યાની બાદબાકી કરવાની હોય તેની વિરોધી સંખ્યા, બીજી પૂર્ણાંક સંખ્યામાં ઉમેરવામાં આવે છે.

(vi) $(-10) + 3 = 10 - 3$

(vii) $8 + (-7) - (-4) = 8 + 7 - 4$

નીચેના જવાબો સાથે તમારા જવાબની સરખામણી કરો.

(i) સાચું છે, ઉદાહરણ તરીકે :

(a) $56 + 73 = 129$ (b) $113 + 82 = 195$ વગેરે.

આ વિધાનને ચકાસવા અન્ય પાંચ ઉદાહરણો આપો.

(ii) ખોટું છે, કારણ કે $(-6) + (-7) = -13$ થશે જે ધન પૂર્ણાંક નથી. સાચું વિધાન આ પ્રમાણે થશે. જ્યારે બે ઋણ પૂર્ણાંકોનો સરવાળો કરવામાં આવે છે ત્યારે આપણને ઋણ પૂર્ણાંક જ મળે છે.

ઉદાહરણ તરીકે,

(a) $(-56) + (-73) = -129$ (b) $(-113) + (-82) = -195$, વગેરે

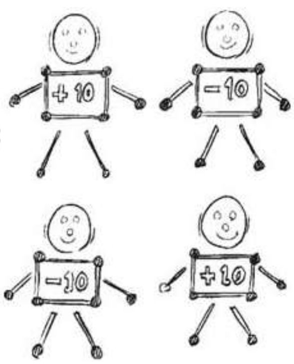
આ વિધાનને ચકાસવા અન્ય તમારા પાંચ ઉદાહરણો આપો.

(iii) ખોટું છે, કારણ કે $-9 + 16 = 7$ જે ઋણ પૂર્ણાંક નથી. સાચું વિધાન આ પ્રમાણે થશે. જ્યારે એક ધન પૂર્ણાંક અને એક ઋણ પૂર્ણાંકનો સરવાળો કરવામાં આવે છે ત્યારે એનો તફાવત લઈને મોટી પૂર્ણાંક સંખ્યાનું ચિહ્ન મૂકવામાં આવે છે. બંને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ચિહ્નની અવગણના કરી મોટી પૂર્ણાંક સંખ્યા દ્વારા ચિહ્ન નક્કી કરવામાં આવે છે. ઉદાહરણ તરીકે,

(a) $(-56) + (73) = 17$ (b) $(-113) + 82 = -31$

(c) $16 + (-23) = -7$ (d) $125 + (-101) = 24$

આ વિધાનને ચકાસવા અન્ય પાંચ ઉદાહરણો આપો.



(iv) સાચું છે, વિરોધી સંખ્યાઓનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે પ્રમાણે છે :

પૂર્ણાંક સંખ્યા	વિરોધી સંખ્યા
10	–10
–10	10
76	–76
–76	76

આમ, કોઈ પણ પૂર્ણાંક a ની વિરોધી સંખ્યા $-a$ અને $(-a)$ ની વિરોધી સંખ્યા a થશે.

(v) સાચું છે, બાદબાકી એ સરવાળાની વિરુદ્ધ હોવાથી આપણે બાદબાકીવાળી પૂર્ણાંક સંખ્યાની વિરોધી સંખ્યા સાથે બીજી પૂર્ણાંક સંખ્યાનો સરવાળો કરીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે,

(a) $56 - 73 = 56$ સાથે 73 ની વિરોધી સંખ્યાનો સરવાળો $= 56 + (-73) = -17$

(b) $56 - (-73) = 56$ સાથે (-73) ની વિરોધી સંખ્યાનો સરવાળો $= 56 + 73 = 129$

(c) $(-79) - 45 = (-79) + (-45) = -124$

(d) $(-100) - (-172) = -100 + 172 = 72$ વગેરે.

આ વાક્યની ચકાસણી કરવા માટે ઓછામાં ઓછાં પાંચ ઉદાહરણો આપો.

આ પ્રમાણે કોઈ પણ બે પૂર્ણાંક સંખ્યા a અને b માટે

$a - b = a + (b$ ની વિરોધી સંખ્યા$) = a + (-b)$

અને $a - (-b) = a + [(-b)$ ની વિરોધી સંખ્યા$] = a + b$

(vi) ખોટું છે કારણ કે $(-10) + 3 = -7$ અને $10 - 3 = 7$

એટલા માટે, $(-10) + 3 \neq 10 - 3$

(vii) ખોટું છે કારણ કે $8 + (-7) - (-4) = 8 + (-7) + 4 = 1 + 4 = 5$

અને $8 + 7 - 4 = 15 - 4 = 11$

એટલા માટે $8 + (-7) - (-4) \neq 8 + 7 - 4$

પ્રયત્ન કરો

અગાઉના વર્ગમાં આપણે સંખ્યાઓ સાથે વિવિધ પેટર્નના દાખલાઓ કર્યા છે. શું તમે નીચે આપેલ પ્રત્યેક માટે કઈ પેટર્ન લાગુ પડે છે એ ઓળખી શકો છો ? જો હા, તો નીચેની ખાલી જગ્યા પૂરો.

(a) 7, 3, –1, –5, ______, ______, ______.

(b) –2, –4, –6, –8, ______, ______, ______.

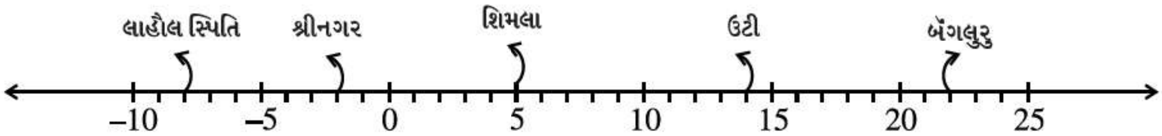
(c) 15, 10, 5, 0, ______, ______, ______.

(d) –11, –8, –5, –2, ______, ______, ______.

આવી બીજી પેટર્ન બનાવો અને તમારા મિત્રોને પૂર્ણ કરવા માટે કહો.

સ્વાધ્યાય 1.1

1. આપેલ સંખ્યા રેખા પર કોઈ એક દિવસનાં જુદાં જુદાં સ્થળોનાં તાપમાન ડિગ્રી સેલ્સિયસ (°C) વડે દર્શાવવામાં આવેલ છે.



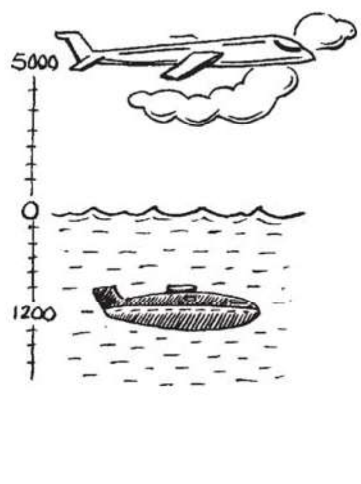
(a) આ સંખ્યારેખાને જુઓ અને એના પર દર્શાવેલ સ્થળોનાં તાપમાન લખો.

(b) ઉપર આપેલ સ્થળોનાં તાપમાનમાં સૌથી ગરમ અને સૌથી ઠંડાં સ્થળોના તાપમાનમાં શું તફાવત છે ?

(c) લાહૌલ સ્પિતિ અને શ્રીનગરના તાપમાનમાં શું તફાવત છે ?

(d) શું આપણે કહી શકીએ કે શ્રીનગર અને શિમલાનું સંયુક્ત તાપમાન શિમલાનાં તાપમાન કરતાં પણ ઓછું છે ? શું તે શ્રીનગરના તાપમાન કરતાં પણ ઓછું છે ?

2. કોઈ એક પ્રશ્નોત્તરીમાં સાચા જવાબ માટે ધન અંક આપવામાં આવે છે અને ખોટા જવાબ માટે ઋણ અંક આપવામાં આવે છે. જો પાંચ ક્રમિક રાઉન્ડમાં જૅકે પ્રાપ્ત કરેલ અંકો 25, –5, –10, 15 અને 10 છે, તો અંતમાં તેના કુલ ગુણ કેટલા થશે ?

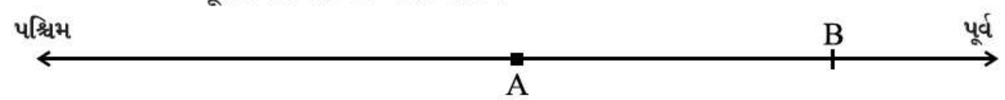


3. સોમવારે શ્રીનગરનું તાપમાન - 5°C હતું અને મંગળવારનું તાપમાન 2°C ઓછું થયું. તો મંગળવારે શ્રીનગરનું તાપમાન શું હતું ? બુધવારે તાપમાન 4°C વધી ગયું. તો આ દિવસે તાપમાન કેટલું હતું ?

4. એક વિમાન સમુદ્રતટથી 5000 મીટરની ઊંચાઈએ ઊડે છે. કોઈ એક ચોક્કસ બિંદુ પર આ વિમાન સમુદ્રની સપાટીથી 1200 મીટર નીચે તરતી સબમરીનની બરાબર ઉપર છે. સબમરીન અને વિમાન વચ્ચેનું લંબઅંતર શું થશે ?

5. મોહન તેના બેંકના ખાતામાં ₹ 2,000 જમા કરાવે છે અને બીજે દિવસે તેમાંથી ₹ 1,642 ઉપાડે છે. જો ઉપાડેલ રકમને ઋણ પૂર્ણાંક વડે દર્શાવાય તો જમા કરાવેલ રકમને તમે કઈ રીતે દર્શાવશો ? ઉપાડ પછી મોહનના ખાતામાં કેટલી સિલક છે તે શોધો.

6. રીટા બિંદુ A થી પૂર્વ દિશા તરફ બિંદુ B સુધી 20 કિલોમીટરનું અંતર કાપે છે. એ જ રસ્તે તે બિંદુ B થી પશ્ચિમ દિશા તરફ 30 કિલોમીટરનું અંતર કાપે છે. જો પૂર્વ તરફ કાપેલ અંતરને ધન પૂર્ણાંક દર્શાવવામાં આવે, તો પશ્ચિમ દિશા તરફ કાપેલ અંતરને તમે કેવી રીતે દર્શાવશો ? બિંદુ Aથી તેની અંતિમ સ્થિતિને તમે કઈ પૂર્ણાંક સંખ્યા વડે દર્શાવશો ?



7. એક જાદુઈ ચોરસમાં દરેક હરોળ, સ્તંભ અને વિકર્ણ સમાન સરવાળો ધરાવે છે. આપેલ ચોરસમાં કયો જાદુઈ ચોરસ છે તે તપાસો.

5	–1	–4
–5	–2	7
0	3	–3

1	–10	0
–4	–3	–2
–6	4	–7

8. નીચે આપેલી કિંમતો a અને b માટે $a - (-b) = a + b$ ચકાસો.

(i) $a = 21, b = 18$ (ii) $a = 118, b = 125$

(iii) $a = 75, b = 84$ (iv) $a = 28, b = 11$

9. વાક્યને સાચું બનાવવા માટે ખાનામાં >, < અથવા = ચિહ્નનો ઉપયોગ કરો.

(a) $(-8) + (-4)$ ☐ $(-8) - (-4)$

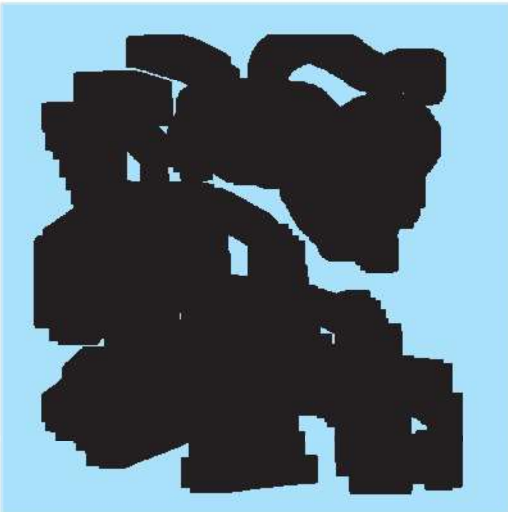
(b) $(-3) + 7 - (19)$ ☐ $15 - 8 + (-9)$

(c) $23 - 41 + 11$ ☐ $23 - 41 - 11$

(d) $39 + (-24) - (15)$ ☐ $36 + (-52) - (-36)$

(e) $-231 + 79 + 51$ ☐ $-399 + 159 + 81$

10. પાણીની ટાંકીની અંદર પગથિયાં આવેલાં છે. એક વાંદરો સૌથી ઉપરના પગથિયા પર બેઠો છે (અર્થાત્ સૌથી પહેલું પગથિયું) પાણીનું સ્તર નવમા પગથિયા પર છે.



(i) તે એક કૂદકામાં ત્રણ પગથિયાં નીચે અને પછીના કૂદકામાં 2 પગથિયાં ઉપર આવે છે. તો તે કેટલામા કૂદકે પાણીના સ્તરે પહોંચશે ?

(ii) પાણી પી લીધા પછી તે પાછો ફરે છે. આ માટે તે 4 પગથિયાં ઉપર કૂદકો મારે છે અને તે પછી દરેક ચાલમાં 2 પગથિયાં નીચે કૂદકો મારે છે તો તે કેટલામા કૂદકે ટોચના પગથિયે પાછો પહોંચશે ?

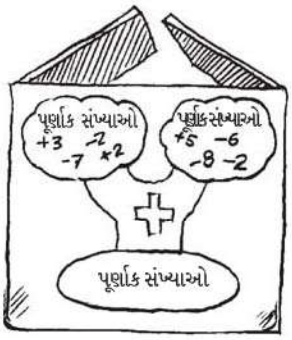
(iii) નીચેની તરફનાં પગથિયાંની સંખ્યાને ઋણ પૂર્ણાંક દર્શાવીએ અને ઉપરની તરફનાં પગથિયાંની સંખ્યાને ધન પૂર્ણાંક દર્શાવીએ. તેની ચાલને દર્શાવવા માટે ભાગ (i) અને (ii) દ્વારા નીચેની બાબતો પૂર્ણ કરો ; (a) $-3 + 2 - ... = -8$ (b) $4 - 2 + ... = 8$. જેમાં (a) રકમ (-8) એ આઠ પગથિયાં નીચે જવાનું દર્શાવે છે, તો (b) માં રકમ 8 શું દર્શાવે છે ?

1.3 પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના સરવાળા અને બાદબાકીના ગુણધર્મો (Properties of Addition and Subtraction of Integers)

1.3.1 સરવાળા વિશે સંવૃતતા (Closure under Addition)

39KSR5

આપણે શીખી ગયા છીએ કે કોઈ પણ બે પૂર્ણ સંખ્યાઓનો સરવાળો કરતાં ફરી પૂર્ણ સંખ્યા થાય છે. ઉદાહરણ તરીકે $17 + 24 = 41$ જે ફરીથી પૂર્ણ સંખ્યા છે. આપણે જાણીએ છીએ કે પૂર્ણ સંખ્યાઓ સરવાળા વિશે સંવૃતતા ધરાવે છે.



તો ચાલો, જોઈએ કે આ ગુણધર્મ પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે સાચો છે કે નહિ.
નીચે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓની કેટલીક જોડીઓ આપેલ છે. કોષ્ટકને ધ્યાનથી જુઓ અને પૂર્ણ કરો.

વિધાન	નિરીક્ષણ
(i) $17 + 23 = 40$	પરિણામ પૂર્ણાંક છે.
(ii) $(-10) + 3 =$ _______	_______
(iii) $(-75) + 18 =$ _______	_______
(iv) $19 + (-25) = -6$	પરિણામ પૂર્ણાંક છે.
(v) $27 + (-27) =$ _______	_______
(vi) $(-20) + 0 =$ _______	_______
(vii) $(-35) + (-10) =$ _______	_______

તમે શું નિરીક્ષણ કર્યું ? શું બે પૂર્ણાંક સંખ્યાનો સરવાળો હંમેશાં પૂર્ણાંક હોય છે ? જેમનો સરવાળો પૂર્ણાંક ના હોય તેવી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓની જોડી શું તમે શોધી શકો છો ? પૂર્ણાંક સંખ્યાનો સરવાળો કરવાથી પૂર્ણાંક સંખ્યા જ મળે છે. **તેથી આપણે કહી શકીએ છીએ કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સરવાળા વિશે સંવૃતતા ધરાવે છે.** વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ બે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a અને b માટે $a + b$ પૂર્ણાંક છે.

1.3.2 બાદબાકી વિશે સંવૃતતા (Closure under Subtraction)

જ્યારે આપણે એક પૂર્ણાંક સંખ્યામાંથી બીજી પૂર્ણાંક સંખ્યા બાદ કરીએ છીએ ત્યારે શું થાય છે ? શું આપણે કહી શકીએ છીએ કે તેમનો તફાવત એક પૂર્ણાંક છે ?
નીચે આપેલા કોષ્ટકને જુઓ અને પૂર્ણ કરો.

વિધાન	નિરીક્ષણ
(i) $7 - 9 = -2$	પરિણામ પૂર્ણાંક છે.
(ii) $17 - (-21) =$ _______	_______
(iii) $(-8) - (-14) = 6$	પરિણામ પૂર્ણાંક છે.
(iv) $(-21) - (-10) =$ _______	_______
(v) $32 - (-17) =$ _______	_______
(vi) $(-18) - (-18) =$ _______	_______
(vii) $(-29) - 0 =$ _______	_______

તમે શું નિરીક્ષણ કર્યું ? શું તમે જેમની બાદબાકી પૂર્ણાંક ના હોય તેવી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓની જોડી શોધી શકો છો ? શું આપણે કહી શકીએ છીએ કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ બાદબાકી વિશે સંવૃતતા ધરાવે છે ? હા, આપણે કહી શકીએ છીએ કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ બાદબાકી વિશે સંવૃતતા ધરાવે છે.

જો a અને b બે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ હોય તો $a - b$ પણ પૂર્ણાંક છે. શું પૂર્ણ સંખ્યા આ ગુણધર્મને અનુસરે છે ?

1.3.3 ક્રમનો ગુણધર્મ (Commutative Property)

આપણે જાણીએ છીએ કે 3 + 5 = 5 + 3 = 8 એટલે કે પૂર્ણ સંખ્યાઓનો કોઈ પણ ક્રમમાં સરવાળો કરી શકાય છે. બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો પૂર્ણ સંખ્યાનો સરવાળો સમક્રમી હોય છે. શું આપણે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે પણ આમ કહી શકીએ છીએ ?

આપણી પાસે 5 + (–6) = – 1 અને (–6) + 5 = –1

તેથી 5 + (–6) = (–6) + 5

નીચેનાં સમાન છે ?

(i) (–8) + (–9) અને (–9) + (–8)

(ii) (–23) + 32 અને 32 + (–23)

(iii) (–45) + 0 અને 0 + (–45)

પૂર્ણાંક સંખ્યાઓની અન્ય પાંચ જોડીઓ માટે આ પ્રયત્ન કરો. શું તમે પૂર્ણાંક સંખ્યાની કોઈ એવી જોડી શોધી શકો જેમાં પૂર્ણાંકનો ક્રમ બદલવાથી તેનો સરવાળો પણ બદલાઈ જાય છે ? ચોક્કસપણે શક્ય નથી. આ રીતે આપણે તારણ કાઢી શકીએ છીએ કે **પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે સરવાળો સમક્રમી છે.** વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ બે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a અને b માટે આપણે કહી શકીએ કે,

$$\boxed{a + b = b + a}$$

- આપણે જાણીએ છીએ કે પૂર્ણ સંખ્યા માટે બાદબાકી સમક્રમી હોતી નથી. શું પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે બાદબાકી સમક્રમી છે ?

  5 અને (–3) પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે વિચારો.

  શું 5 – (–3) અને (–3) – 5 સરખા છે ? ના. કારણ કે 5 – (–3) = 5 + 3 = 8 અને (–3) – 5 = –3 –5 = –8.

  પૂર્ણાંક સંખ્યાની ઓછામાં ઓછી પાંચ અલગ જોડીઓ લઈને આ તપાસો.

  આપણે કહી શકીએ છીએ કે **પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે બાદબાકી સમક્રમી નથી.**

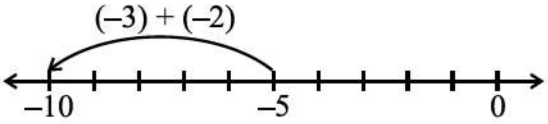
1.3.4 જૂથનો ગુણધર્મ (Associative Property)

આપેલાં ઉદાહરણો જુઓ :

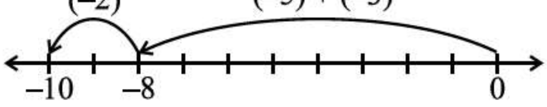
–3, –2 અને –5 પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે વિચારીએ.

(–5) + [(–3) + (–2)] અને [(–5) + (–3)] + (–2) જુઓ.

પ્રથમ રકમમાં (–3) અને (–2) નું જૂથ બનેલું છે. જ્યારે બીજીમાં (–5) અને (–3) નું જૂથ બનેલું છે. હવે આપણે ભિન્ન પરિણામ મળે કે કેમ તે તપાસીશું.



(–5) + [(–3) + (–2)]



[(–5) + (–3)] + (–2)

આ બન્ને કિસ્સામાં –10 પ્રાપ્ત થાય છે.

ઉ.દા. $(-5) + [(-3) + (-2)] = [(-5) + (-3)] + (-2)$

તે જ રીતે –3, 1 અને 7 માટે.

$(-3) + [1 + (-7)] = -3 +$ ___________ = ___________

$[(-3) + 1] + (-7) = -2 +$ ___________ = ___________

શું $(-3) + [(1 + (-7)]$ અને $[(-3) + 1] + (-7)$ સરખા છે ?

અન્ય પાંચ ઉદાહરણો લો. એવાં ઉદાહરણો તમને મળશે નહિ જેના માટે સરવાળો અલગ હોય. આ દર્શાવે છે કે પૂર્ણાંકો માટે **સરવાળો જૂથનો ગુણધર્મ ધરાવે છે.**

વ્યાપક રીતે કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a, b અને c માટે આપણે કહી શકીએ છીએ કે,

$$\boxed{a + (b + c) = (a + b) + c}$$

1.3.5 સરવાળાનો તટસ્થતાનો ગુણધર્મ (Additive Identity)

જ્યારે આપણે પૂર્ણ સંખ્યામાં શૂન્ય ઉમેરીએ છીએ ત્યારે આપણને તે જ પૂર્ણ સંખ્યા મળે છે. પૂર્ણ સંખ્યા માટે શૂન્ય તટસ્થ છે. શું એ અન્ય પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે પણ તટસ્થ છે ?
ઉપરોક્ત ગુણધર્મ પરથી નીચે આપેલી ખાલી જગ્યા પૂરો :

(i) $(-8) + 0 = (-8)$ (ii) $0 + (-8) = (-8)$

(iii) $(-23) + 0 =$ _______ (iv) $0 + (-37) = (-37)$

(v) $0 + (-59) =$ _______ (vi) $0 +$ _______ $= (-43)$

(vii) $(-61) +$ _______ $= (-61)$ (viii) _______ $+ 0 =$ _______

ઉપરોક્ત ઉદાહરણો દર્શાવે છે કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે શૂન્ય તટસ્થ છે. તમે અન્ય પાંચ પૂર્ણાંક સંખ્યા સાથે શૂન્ય ઉમેરી ચકાસણી કરો. વ્યાપક રીતે કોઈ પણ પૂર્ણાંક a માટે,

$$\boxed{a + 0 = a = 0 + a}$$

પ્રયત્ન કરો

1. પૂર્ણાંક સંખ્યાની એવી જોડી બનાવો કે જેનો સરવાળો નીચે મુજબ થાય.
   (a) ઋણ પૂર્ણાંક હોય (b) શૂન્ય હોય
   (c) બંને પૂર્ણાંક સંખ્યા કરતાં નાનો પૂર્ણાંક હોય. (d) માત્ર એક પૂર્ણાંક સંખ્યા કરતાં નાનો પૂર્ણાંક હોય.
   (e) બંને પૂર્ણાંક સંખ્યા કરતાં મોટી પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય.
2. પૂર્ણાંક સંખ્યાની એવી જોડી લખો, જેનો તફાવત નીચે મુજબ થાય.
   (a) ઋણ પૂર્ણાંક હોય (b) શૂન્ય હોય
   (c) બંને પૂર્ણાંક સંખ્યા કરતાં નાનો પૂર્ણાંક હોય (d) માત્ર એક પૂર્ણાંક સંખ્યા કરતાં નાનો પૂર્ણાંક હોય
   (e) બંને પૂર્ણાંક સંખ્યા કરતાં મોટી પૂર્ણાંક સંખ્યા હોય

ઉદાહરણ 1 પૂર્ણાંક સંખ્યાની જોડી લખો જેનો,

(a) સરવાળો (–3) હોય (b) તફાવત (–5) હોય

(c) તફાવત 2 હોય (d) સરવાળો 0 હોય

જવાબો

(a) (–1) + (–2) = (–3) અથવા (–5) + 2 = (–3)

(b) (–9) – (–4) = (–5) અથવા (–2) – 3 = (–5)

(c) (–7) – (–9) = 2 અથવા 1 – (–1) = 2

(d) (–10) + 10 = 0 અથવા 5 + (–5) = 0

આ ઉદાહરણો પરથી તમે વધુ જોડી બનાવી શકો છો ?

સ્વાધ્યાય 1.2

1. પૂર્ણાંક સંખ્યાઓની જોડી લખો. જેનો,

   (a) સરવાળો (–7) હોય (b) તફાવત (–10) હોય (c) સરવાળો 0 હોય

2. (a) જેનો તફાવત 8 હોય એવા ઋણ પૂર્ણાંકોની જોડી લખો.

   (b) જેનો સરવાળો (–5) હોય એવા ઋણ પૂર્ણાંક અને ધન પૂર્ણાંક લખો.

   (c) જેનો તફાવત (–3) હોય એવા ઋણ પૂર્ણાંક અને ધન પૂર્ણાંક લખો.

3. ક્વીઝના ત્રણ ક્રમિક રાઉન્ડ પછી ટીમ A ના ગુણ (–40), 10, 0 છે અને ટીમ B ના ગુણ 10, 0, –40 છે. કઈ ટીમના ગુણ વધુ છે ? શું આપણે કહી શકીએ કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓને કોઈ પણ ક્રમમાં ઉમેરી શકીએ ?

4. નીચે આપેલ વિધાનોને સાચાં બનાવવા માટે ખાલી જગ્યા પૂરો :

   (i) (–5) + (–8) = (–8) + (..........)

   (ii) (–53) + ... = (–53)

   (iii) 17 + ... = 0

   (iv) [13 + (–12)] + (..........) = 13 + [(–12) + (–7)]

   (v) (–4) + [15 + (–3)] = [(–4) + 15] + ...

1.4 પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર (Multiplication of Integers)

આપણે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો સરવાળો અને બાદબાકી શીખ્યા, તો ચાલો હવે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કેવી રીતે થાય એ શીખીએ.

1.4.1 ધન અને ઋણ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર (Multiplication of a Positive and a Negative Integer)

આપણે જાણીએ છીએ કે પૂર્ણ સંખ્યાઓનો ગુણાકાર પુનરાવર્તિત સરવાળો છે. દાખલા તરીકે,

$$5 + 5 + 5 = 3 \times 5 = 15$$

શું તમે એ જ રીતે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો સરવાળો દર્શાવી શકો છો ?

પ્રયત્ન કરો

સંખ્યા રેખાની મદદથી શોધો.

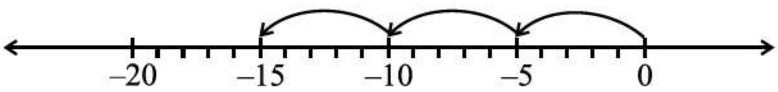
$4 \times (-8)$,

$8 \times (-2)$,

$3 \times (-7)$,

$10 \times (-1)$

આપણે નીચેની સંખ્યારેખા પર $(-5) + (-5) + (-5) = -15$ જોઈ શકીએ છીએ.

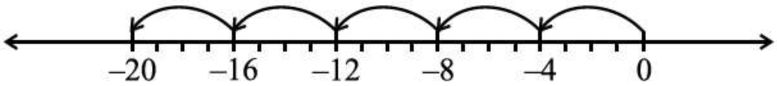


આપણે આ રીતે પણ લખી શકીએ

$$(-5) + (-5) + (-5) = 3 \times (-5)$$

એટલે કે, $3 \times (-5) = -15$

એ જ રીતે, $(-4) + (-4) + (-4) + (-4) + (-4) = 5 \times (-4) = (-20)$



અને $(-3) + (-3) + (-3) + (-3) =$ ________ $=$ ________

વળી, $(-7) + (-7) + (-7) =$ ________ $=$ ________

ચાલો, આપણે જોઈએ કે સંખ્યા રેખાની મદદ વિના ધન પૂર્ણાંક અને ઋણ પૂર્ણાંકના ગુણાકાર કેવી રીતે થાય છે.

ચાલો $3 \times (-5)$ ને બીજી રીતે શોધીએ. પ્રથમ 3×5 શોધો અને જવાબની આગળ (–)નું ચિહ્ન મૂકો. તમને –15 મળશે એટલે કે (–15) મેળવવા માટે આપણે $-(3 \times 5)$ કર્યા.

એ જ રીતે $5 \times (-4) = -(5 \times 4) = (-20)$

એ જ રીતે શોધો,

$4 \times (-8) =$ _____ $=$ _____, $3 \times (-7) =$ _____ $=$ _____

$6 \times (-5) =$ _____ $=$ _____, $2 \times (-9) =$ _____ $=$ _____

આપણે આ પદ્ધતિનો ઉપયોગ કરીને,

$10 \times (-43) = -(10 \times 43) = -430$ મેળવી શકીએ.

પ્રયત્ન કરો

શોધો :

(i) $6 \times (-19)$

(ii) $12 \times (-32)$

(iii) $7 \times (-22)$

અત્યાર સુધી, આપણે (ધન પૂર્ણાંક) × (ઋણ પૂર્ણાંક) એ રીતે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કર્યો. :

ચાલો હવે, તેના ગુણાકાર (ઋણ પૂર્ણાંક) × (ધન પૂર્ણાંક) પ્રમાણે કરીએ.

આપણે પ્રથમ $(-3) \times 5$ શોધીએ.

તે શોધવા માટે નીચેની પેટર્ન જુઓ.

હવે આપણે $3 \times 5 = 15$

$2 \times 5 = 10 = 15 - 5$

$1 \times 5 = 5 = 10 - 5$

$0 \times 5 = 0 = 5 - 5$

એટલે કે, $(-1) \times 5 = 0 - 5 = (-5)$

$$(-2) \times 5 = -5 - 5 = (-10)$$

$$(-3) \times 5 = -10 - 5 = (-15)$$

આપણી પાસે પહેલેથી જ, $3 \times (-5) = -15$ છે.

તેથી આપણને $(-3) \times 5 = -15 = 3 \times (-5)$

આ પેટર્નનો ઉપયોગ કરીને $(-5) \times 4 = (-20) = 5 \times (-4)$ મળે.

આ રીતનો ઉપયોગ કરીને શોધો : $(-4) \times 8$, $(-3) \times 7$, $(-6) \times 5$ અને $(-2) \times 9$

ચકાસો કે, $(-4) \times 8 = 4 \times (-8)$, $(-3) \times 7 = 3 \times (-7)$, $(-6) \times 5 = 6 \times (-5)$

અને $(-2) \times 9 = 2 \times (-9)$

આનો ઉપયોગ કરીને, $(-33) \times 5 = 33 \times (-5) = -165$ મળે.

આમ, આપણે ધન પૂર્ણાંક અને ઋણ પૂર્ણાંકનો ગુણાકાર શોધવા, પૂર્ણ સંખ્યાનો ગુણાકાર કરી એ પછી જે જવાબ મળે છે તેની આગળ ઋણનું ચિહ્ન (–) મૂકીએ છીએ. એટલે આપણને ઋણ પૂર્ણાંક મળે છે.

પ્રયત્ન કરો

1. શોધો (a) $15 \times (-16)$ (b) $21 \times (-32)$
   (c) $(-42) \times 12$ (d) -55×15
2. ચકાસો (a) $25 \times (-21) = (-25) \times 21$ (b) $(-23) \times 20 = 23 \times (-20)$
   આવાં અન્ય પાંચ ઉદાહરણો લખો.

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ બે ધન પૂર્ણાંકો a અને b માટે કહી શકીએ કે,

$$\boxed{a \times (-b) = (-a) \times b = -(a \times b)}$$

1.4.2 બે ઋણ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર (Multiplication of two Negative Integers)

શું તમે $(-3) \times (-2)$નો જવાબ શોધી શકો છો ?

નીચેની ગણતરી જુઓ.

$$-3 \times 4 = -12$$

$$-3 \times 3 = -9 = -12 - (-3)$$

$$-3 \times 2 = -6 = -9 - (-3)$$

$$-3 \times 1 = -3 = -6 - (-3)$$

$$-3 \times 0 = 0 = -3 - (-3)$$

$$-3 \times -1 = 0 - (-3) = 0 + 3 = 3$$

$$-3 \times -2 = 3 - (-3) = 3 + 3 = 6$$

શું તમને આમાં કોઈ પેટર્ન દેખાય છે ? જવાબ કેવી રીતે બદલાય છે તે જુઓ.

અવલોકનના આધારે નીચેનું પૂર્ણ કરો :

$$-3 \times -3 = \_\_\_\_, \; -3 \times -4 = \_\_\_\_$$

હવે, આ જવાબોના અવલોકનના આધારે ખાલી જગ્યા પૂરો :

$-4 \times 4 = -16$

$-4 \times 3 = -12 = -16 + 4$

$-4 \times 2 = \_\_\_\_\_\_ = -12 + 4$

$-4 \times 1 = \_\_\_\_\_\_$

$-4 \times 0 = \_\_\_\_\_\_$

$-4 \times (-1) = \_\_\_\_\_\_$

$-4 \times (-2) = \_\_\_\_\_\_$

$-4 \times (-3) = \_\_\_\_\_\_$

પ્રયત્ન કરો

(i) $(-5) \times 4$ થી શરૂ કરીને $(-5) \times (-6)$ શોધો.

(ii) $(-6) \times 3$ થી શરૂ કરીને $(-6) \times (-7)$ શોધો.

આ રીતથી આપણે અવલોકન કરીએ છીએ કે,

$(-3) \times (-1) = 3 = 3 \times 1$

$(-3) \times (-2) = 6 = 3 \times 2$

$(-3) \times (-3) = 9 = 3 \times 3$

અને $(-4) \times (-1) = 4 = 4 \times 1$

તેથી, $(-4) \times (-2) = 4 \times 2 = \_\_\_\_\_\_$

$(-4) \times (-3) = \_\_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_\_$

તેથી, આ જવાબોના અવલોકન પરથી આપણે કહી શકીએ છીએ કે બે ઋણ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર ધન પૂર્ણાંક થાય છે. આપણે બે ઋણ પૂર્ણાંકોને પૂર્ણ સંખ્યા માનીને ગુણાકાર કરતાં જે જવાબ મળે તેની આગળ ધન ચિહ્ન મૂકીએ છીએ.

એટલે, આપણે $(-10) \times (-12) = +120 = 120$

એ જ રીતે $(-15) \times (-6) = +90 = 90$

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ બે ધન પૂર્ણાંકો a અને b માટે,

$$\boxed{(-a) \times (-b) = a \times b}$$

પ્રયત્ન કરો **શોધો :** $(-31) \times (-100)$, $(-25) \times (-72)$, $(-83) \times (-28)$

રમત 1

(i) આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે (–104) થી 104 સુધી અંકિત થયેલું એક બૉર્ડ લો.

(ii) બે વાદળી અને બે લાલ પાસાં ધરાવતી બૅગ લો. વાદળી પાસાં પર બિંદુઓની સંખ્યા ધન પૂર્ણાંક દર્શાવે છે અને લાલ પાસાં પર બિંદુઓની સંખ્યા ઋણ પૂર્ણાંકો દર્શાવે છે.

(iii) દરેક ખેલાડી પોતાના કાઉન્ટરને શૂન્ય પર મૂકશે.

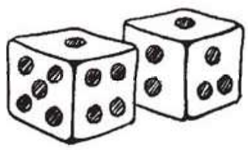
(iv) પ્રત્યેક ખેલાડી બૅગમાંથી એકસાથે બે પાસાં કાઢીને ઉછાળશે.

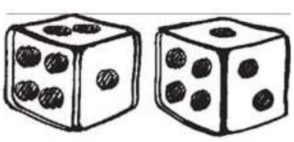
104	103	102	101	100	99	98	97	96	95	94
83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93
82	81	80	79	78	77	76	75	74	73	72
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
60	59	58	57	56	55	54	53	52	51	50
39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
38	37	36	35	34	33	32	31	30	29	28
17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6
–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
–6	–7	–8	–9	–10	–11	–12	–13	–14	–15	–16
–27	–26	–25	–24	–23	–22	–21	–20	–19	–18	–17
–28	–29	–30	–31	–32	–33	–34	–35	–36	–37	–38
–49	–48	–47	–46	–45	–44	–43	–42	–41	–40	–39
–50	–51	–52	–53	–54	–55	–56	–57	–58	–59	–60
–71	–70	–69	–68	–67	–66	–65	–64	–63	–62	–61
–72	–73	–74	–75	–76	–77	–78	–79	–80	–81	–82
–93	–92	–91	–90	–89	–88	–87	–86	–85	–84	–83
–94	–95	–96	–97	–98	–99	–100	–101	–102	–103	–104

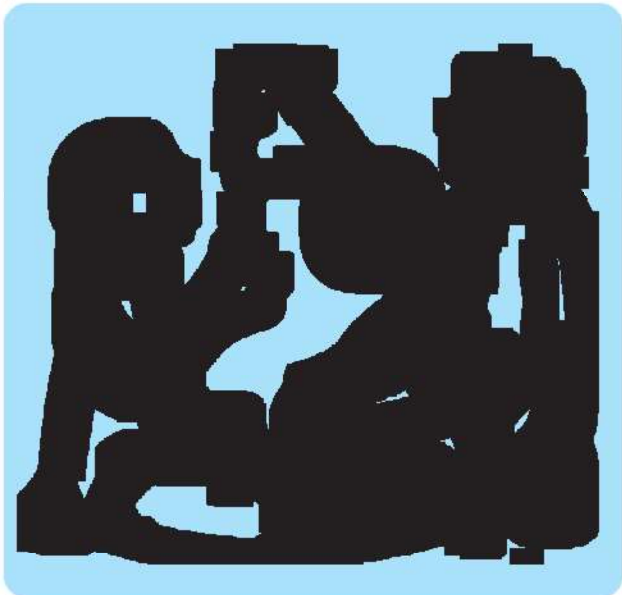
(v) પાસાંઓને ઉછાળ્યા બાદ ખેલાડીએ પાસાં પર અંકિત સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કરવાનો છે.

(vi) જો જવાબ ધન હશે તો તે ખેલાડી તેના કાઉન્ટરને 104 તરફ ખસેડશે અને જો જવાબ ઋણ પૂર્ણાંક હોય તો તે ખેલાડી તેના કાઉન્ટરને (–104) તરફ ખસેડશે.

(vii) જે ખેલાડી (–104) અથવા 104 પર પહેલો પહોંચશે તે વિજેતા ગણાશે.







1.4.3 ત્રણ કે તેથી વધુ ઋણ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર (Product of three or more Nagative Integers)

Euler ઑઇલર સૌ પ્રથમ એવા ગણિતશાસ્ત્રી હતા જેમણે તેના પુસ્તક Ankitung Zur Algebra (1770)માં $(-1) \times (-1) = 1$ થાય એમ સાબિત કરવાનો પ્રયત્ન કર્યો હતો.

આપણે જોયું કે બે ઋણ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર ધન પૂર્ણાંક આવે છે તો ત્રણ ઋણ પૂર્ણાંકનો ગુણાકાર શું આવશે ? ચાર ઋણ પૂર્ણાંકો માટે શું?

ચાલો આપણે ઉદાહરણો જોઈએ :

(a) $(-4) \times (-3) = 12$

(b) $(-4) \times (-3) \times (-2) = [(-4) \times (-3)] \times (-2) = 12 \times (-2) = -24$

(c) $(-4) \times (-3) \times (-2) \times (-1) = [(-4) \times (-3) \times (-2)] \times (-1) = (-24) \times (-1)$

(d) $(-5) \times [(-4) \times (-3) \times (-2) \times (-1)] = (-5) \times 24 = -120$

ઉપરોક્ત જવાબ પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે

(a) બે ઋણ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર એક ધન પૂર્ણાંક છે.

(b) ત્રણ ઋણ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર એક ઋણ પૂર્ણાંક છે.

(c) ચાર ઋણ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર એક ધન પૂર્ણાંક છે.

(d) પાંચ ઋણ પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર શું થશે ?

તો, છ ઋણ પૂર્ણાંકનો ગુણાકાર શું થશે ?

આ ઉપરાંત આપણે એ પણ જોઈ શકીએ છીએ કે ઉપરોક્ત (a) અને (c) ઋણ પૂર્ણાંકોનો બેકી સંખ્યામાં (ક્રમશઃ બે, ચાર) ગુણાકાર કરતાં (a) અને (c) નો જવાબ ધન પૂર્ણાંકમાં મળે છે. (b) અને (d) માં ઋણ પૂર્ણાંકો એકી સંખ્યામાં છે, તેથી તેમના ગુણાકારોના જવાબો ઋણ પૂર્ણાંકોમાં મળે છે.

એક વિશેષ સ્થિતિ

આપેલાં વિધાનોના મળેલ ગુણાકાર પર વિચાર કરો :

$(-1) \times (-1) = +1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = +1$

$(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = -1$

એનો અર્થ એ થાય છે કે પૂર્ણાંક (-1)નો બેકી સંખ્યામાં ગુણાકાર કરતાં જવાબ $(+1)$ મળે છે અને પૂર્ણાંક (-1) ને એકી સંખ્યામાં ગુણાકાર કરતાં (-1) જવાબ મળે છે. તમે (-1)ની જોડી બનાવી આ વિધાનને ચકાસી શકો છો. પૂર્ણાંક સંખ્યાના ગુણાકાર મેળવવા માટે આ ઉપયોગી થશે.

આપણે જોયું કે ઋણ પૂર્ણાંકોની સંખ્યા બેકી હોય તો ગુણાકાર ધન પૂર્ણાંક મળશે અને જો ઋણ પૂર્ણાંકની સંખ્યા એકી હોય તો ગુણાકાર ઋણ પૂર્ણાંક મળશે.

દરેકને ચકાસવા માટે અન્ય પાંચ વધુ ઉદાહરણો આપો.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

(i) $(-9) \times (-5) \times (-6) \times (-3)$ નો જવાબ ધન છે જ્યારે $(-9) \times (-5) \times 6 \times (-3)$ નો જવાબ ઋણ છે. શા માટે ?

(ii) આપેલી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કરતાં મળતાં જવાબનું ચિહ્ન શું થશે ?

(a) 8 ઋણ પૂર્ણાંકો અને 3 ધન પૂર્ણાંકો

(b) 5 ઋણ પૂર્ણાંકો અને 4 ધન પૂર્ણાંકો

(c) (–1), બાર વખત ?

(d) (–1), $2m$ વખત, m એ પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે.

1.5 પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગુણાકાર વિશેના ગુણધર્મો (Properties of Multipli cation of Integers)

1.5.1 ગુણાકાર વિશે સંવૃતતા (Closure under Multiplication)

1. નીચેનું કોષ્ટક ધ્યાનપૂર્વક જુઓ અને તેને પૂર્ણ કરો :

3A4JUF

વિધાન	તારણ
$(-20) \times (-5) = 100$	જવાબ પૂર્ણાંક છે
$(-15) \times 17 = -255$	જવાબ પૂર્ણાંક છે
$(-30) \times 12 =$ _______	
$(-15) \times (-23) =$ _______	
$(-14) \times (-13) =$ _______	
$12 \times (-30) =$ _______	

તમે શું નિરીક્ષણ કર્યું ? શું તમે એવી પૂર્ણાંક સંખ્યાની જોડી શોધી શકો છો જેનો ગુણાકાર પૂર્ણાંક નથી ? ના, એનાથી આપણને એવું માલૂમ પડે છે કે બે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કરવાથી ફરીથી એક પૂર્ણાંક સંખ્યા જ મળે છે. તેથી આપણે કહી શકીએ છીએ કે ગુણાકાર માટે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સંવૃત છે. વ્યાપક રીતે,

બધી પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a અને b માટે $a \times b$ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

પાંચ વધુ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓની જોડી બનાવી અને ઉપરોક્ત વિધાનને ચકાસો.

1.5.2 ગુણાકાર માટેનો ક્રમનો ગુણધર્મ (Commutativity of Multiplication)

આપણે જાણીએ છીએ કે પૂર્ણ સંખ્યાઓ માટે ગુણાકાર સમક્રમી છે. શું આપણે કહી શકીએ કે પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે પણ ગુણાકાર સમક્રમી છે.

નીચેના કોષ્ટકને ધ્યાનપૂર્વક જુઓ અને તેને પૂર્ણ કરો.

વિધાન-1	વિધાન-1	તારણ
$3 \times (-4) = -12$	$(-4) \times 3 = -12$	$3 \times (-4) = (-4) \times 3$
$(-30) \times 12 =$ _______	$12 \times (-30) =$ _______	
$(-15) \times (-10) = 150$	$(-10) \times (-15) = 150$	
$(-35) \times (-12) =$ _______	$(-12) \times (-35) =$ _______	
$(-17) \times 0 =$ _______		
_______ = _______	$(-1) \times (-15) =$ _______	

તમે શું અવલોકન કરી શક્યા ? ઉપરોક્ત ઉદાહરણો સૂચવે છે કે ગુણાકાર પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે સમક્રમી છે. વધુ પાંચ ઉદાહરણો લખો અને ચકાસો.

વ્યાપક રીતે કોઈપણ બે પૂર્ણાંકો a અને b માટે,

$$a \times b = b \times a$$

1.5.3 શૂન્ય વડે ગુણાકાર (Multiplication by Zero)

આપણે જાણીએ છીએ કે જ્યારે કોઈ પણ પૂર્ણ સંખ્યાને શૂન્ય વડે ગુણવામાં આવે છે ત્યારે તેનો જવાબ શૂન્ય આવે છે. નીચે આપેલ ઋણ પૂર્ણાંક અને શૂન્ય વચ્ચે થતાં ગુણાકાર જુઓ. આ અગાઉ અભ્યાસ કરેલી પેટર્ન પરથી,

$(-3) \times 0 = 0$

$0 \times (-4) = 0$

$(-5) \times 0 =$ ______

$0 \times (-6) =$ ______

એ દર્શાવે છે કે ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા અને શૂન્ય વચ્ચે ગુણાકાર કરવામાં આવે તો જવાબ શૂન્ય મળે છે.

વ્યાપક રીતે કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે,

$$a \times 0 = 0 \times a = 0$$

1.5.4 ગુણાકારની તટસ્થ સંખ્યા (Multiplicative Identity)

આપણે જાણીએ છે કે 1 એ ગુણાકારમાં પૂર્ણ સંખ્યાઓ માટે તટસ્થ સંખ્યા છે. ચકાસણી કરીએ કે 1 એ ગુણાકારમાં પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે પણ તટસ્થ સંખ્યા છે. નીચે આપેલ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના 1 સાથે ગુણાકાર કરતાં મળતાં જવાબો જુઓ.

$(-3) \times 1 = -3$	$1 \times 5 = 5$
$(-4) \times 1 =$ ______	$1 \times 8 =$ ______
$1 \times (-5) =$ ______	$3 \times 1 =$ ______
$1 \times (-6) =$ ______	$7 \times 1 =$ ______

આ દર્શાવે છે કે કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યાનો 1 સાથે ગુણાકાર કરતાં પરિણામ તેની તે જ પૂર્ણાંક સંખ્યા મળે.

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે,

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

જ્યારે આપણે કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યાને (–1) વડે ગુણીએ ત્યારે શું થશે ? નીચે આપેલ ખાલી જગ્યા પૂર્ણ કરો.

$(-3) \times (-1) = 3$

$3 \times (-1) = -3$

$(-6) \times (-1) =$ ______

$(-1) \times 13 =$ ______

$(-1) \times (-25) =$ ______

$18 \times (-1) =$ ______

> 0 એ સરવાળા માટે તટસ્થ સંખ્યા છે, જ્યારે 1 એ ગુણાકાર માટે તટસ્થ સંખ્યા છે. કોઈપણ સંખ્યાની વિરોધી સંખ્યા શોધવા માટે તેને (–1) વડે ગુણવામાં આવે છે.
>
> ઉદાહરણ : $a \times (-1) = (-1) \times a = -a$

તમે શું જોયું ?

શું આપણે કહી શકીએ છે કે (–1) એ પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે ગુણાકાર માટેની તટસ્થ સંખ્યા છે ? ના.

1.5.5 ગુણાકાર માટે જૂથનો નિયમ (Associativity for Multiplication)

$-3, -2$ અને 5 લો.

$[(-3) \times (-2)] \times 5$ અને $(-3) \times [(-2) \times 5]$ નું અવલોકન કરો.

પહેલા જૂથમાં (-3) અને (-2) બંને સાથે છે અને બીજા જૂથમાં (-2) અને 5 બંને સાથે છે.

જુઓ કે $[(-3) \times (-2)] \times 5 = 6 \times 5 = 30$

અને $(-3) \times [(-2) \times 5] = (-3) \times (-10) = 30$

આમ, આપણને બંને ઉદાહરણોમાં સરખો જવાબ મળ્યો.

તેથી, $[(-3) \times (-2)] \times 5 = (-3) \times [(-2) \times 5]$

નીચે આપેલ ખાલી જગ્યા પૂર્ણ કરો :

$[(7) \times (-6)] \times 4 =$ ______ $\times 4 =$ ______

$7 \times [(-6) \times 4] = 7 \times$ ______ $=$ ______

શું $[7 \times (-6)] \times 4 = 7 \times [(-6) \times 4]$?

શું પૂર્ણાંકોનાં જૂથ બદલવાથી ગુણાકાર બદલાય છે ? ના.

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણાંક a, b અને c માટે,

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

a, b અને c માટે કોઈ પણ પાંચ કિંમત લો અને તેના ગુણધર્મો ચકાસો.

તેથી, પૂર્ણ સંખ્યાની જેમ, ત્રણ પૂર્ણાંક સંખ્યાનો ગુણાકાર તેમના જૂથ પર આધારિત નથી. તેથી તેને પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગુણાકાર માટે જૂથનો ગુણધર્મ કહે છે.

1.5.6 વિભાજનનો ગુણધર્મ (Distributive Property) :

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$16 \times (10 + 2) = (16 \times 10) + (16 \times 2)$ [ગુણાકારનું સરવાળા પર વિભાજન]

ચાલો, જોઈએ કે આ પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે પણ સાચું છે કે નહિ.

નીચેનાં ઉદાહરણ જુઓ.

(a) $(-2) \times (3 + 5) = -2 \times 8 = -16$

અને $[(-2) \times 3] + [(-2) \times 5] = (-6) + (-10) = -16$

તેથી, $(-2) \times (3 + 5) = [(-2) \times 3] + [(-2) \times 5]$

(b) $(-4) \times [(-2) + 7] = (-4) \times 5 = -20$

અને $[(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7] = 8 + (-28) = -20$

તેથી, $(-4) \times [(-2) + 7] = [(-4) \times (-2)] + [(-4) \times 7]$

(c) $(-8) \times [(-2) + (-1)] = (-8) \times (-3) = 24$

અને $[(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)] = 16 + 8 = 24$

તેથી, $(-8) \times [(-2) + (-1)] = [(-8) \times (-2)] + [(-8) \times (-1)]$

શું આપણે કહી શકીએ કે, સરવાળા પર ગુણાકારનું વિભાજન એ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે પણ સાચું છે ? હા. વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ પૂર્ણાંક a, b અને c માટે,

$$\boxed{a \times (b + c) = a \times b + a \times c}$$

કોઈ પણ પાંચ જુદી-જુદી કિંમતો a, b અને c માટે ઉપરોક્ત વિભાજનના ગુણધર્મના આધારે ચકાસો.

પ્રયત્ન કરો

(i) શું $10 \times [6 + (-2)] = 10 \times 6 + 10 \times (-2)$?

(ii) શું $(-15) \times [(-7) + (-1)] = (-15) \times (-7) + (-15) \times (-1)$?

હવે, આ ચકાસો :

શું આપણે કહી શકીએ કે $4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$?

ચાલો ચકાસીએ :

$$4 \times (3 - 8) = 4 \times (-5) = -20$$

$$4 \times 3 - 4 \times 8 = 12 - 32 = -20$$

તેથી, $4 \times (3 - 8) = 4 \times 3 - 4 \times 8$

હવે, નીચેનાને ચકાસો :

$$(-5) \times [(-4) - (-6)] = (-5) \times 2 = -10$$

$$[(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)] = 20 - 30 = -10$$

તેથી, $(-5) \times [(-4) - (-6)] = [(-5) \times (-4)] - [(-5) \times (-6)]$

હવે, $(-9) \times [10 - (-3)]$ અને $[(-9) \times 10] - [(-9) \times (-3)]$ ચકાસો.

તમે જોશો કે આ બંને પણ સરખા જ છે.

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણાંક સંખ્યા a, b અને c માટે,

$$\boxed{a \times (b - c) = a \times b - a \times c}$$

કોઈ પણ પાંચ જુદી જુદી કિંમતો a, b અને c માટે લો અને તેના ગુણધર્મો ચકાસો.

પ્રયત્ન કરો

(i) શું $10 \times [6 - (-2)] = 10 \times 6 - 10 \times (-2)$?

(ii) શું $(-15) \times [(-7) - (-1)] = (-15) \times (-7) - (-15) \times (-1)$?

1.5.7 ગુણાકારને સરળ બનાવવા (Making Multiplication Easier) :

નીચેનાને ચકાસો :

(i) આપણે $(-25) \times 37 \times 4$, ની ગણતરી કરીએ.

$$[(-25) \times 37] \times 4 = (-925) \times 4 = -3700$$

અથવા, હવે આ રીતે ગણીએ.

$(-25) \times 37 \times 4 = (-25) \times 4 \times 37 = [(-25) \times 4] \times 37 = (-100) \times 37 = -3700$

કયું સરળ છે ?

ખરેખર બીજી રીત સરળ છે. કારણ કે, (-25) અને 4 નો ગુણાકાર -100 છે જેને 37 વડે ગુણવાનું સરળ છે, અહીં નોંધ લેશો કે બીજી રીત પૂર્ણાંક સંખ્યાના ક્રમના નિયમ અને જૂથના નિયમને સમાવે છે. તેથી, આપણે જોયું કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ક્રમનો, જૂથનો અને વિભાજનનો ગુણધર્મ આપણી ગણતરીને સરળ બનાવવામાં મદદ કરે છે. ચાલો, થોડા વધુ ઉદાહરણોમાં જોઈએ કે આ ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીને ગણતરી કેવી રીતે સરળ બનાવી શકાય.

(ii) શોધો 16×12

16×12 ને નીચેની રીતે પણ લખી શકીએ $16 \times (10 + 2)$.

$16 \times 12 = 16 \times (10 + 2) = 16 \times 10 + 16 \times 2 = 160 + 32 = 192$

(iii) $(-23) \times 48 = (-23) \times [50 - 2] = (-23) \times 50 - (-23) \times 2 = (-1150) - (-46) = -1104$

(iv) $(-35) \times (-98) = (-35) \times [(-100) + 2] = (-35) \times (-100) + (-35) \times 2 = 3500 + (-70) = 3430$

(v) $52 \times (-8) + (-52) \times 2$

$(-52) \times 2$ ને આ રીતે પણ લખી શકાય $52 \times (-2)$.

તેથી, $52 \times (-8) + (-52) \times 2 = 52 \times (-8) + 52 \times (-2)$

$= 52 \times [(-8) + (-2)] = 52 \times [(-10)] = -520$

પ્રયત્ન કરો

વિભાજનના ગુણધર્મનો ઉપયોગ કરી શોધો : $(-49) \times 18$; $(-25) \times (-31)$; $70 \times (-19) + (-1) \times 70$

ઉદાહરણ 2 નીચે આપેલ દરેક દાખલાની ગણતરી કરો :

(i) $(-18) \times (-10) \times 9$ (ii) $(-20) \times (-2) \times (-5) \times 7$

(iii) $(-1) \times (-5) \times (-4) \times (-6)$

જવાબ

(i) $(-18) \times (-10) \times 9 = [(-18) \times (-10)] \times 9 = 180 \times 9 = 1620$

(ii) $(-20) \times (-2) \times (-5) \times 7 = (-20) \times [(-2) \times (-5)] \times 7 = [-20 \times 10] \times 7 = -1400$

(ii) $(-1) \times (-5) \times (-4) \times (-6) = [(-1) \times (-5)] \times [(-4) \times (-6)] = 5 \times 24 = 120$

ઉદાહરણ 3 ચકાસો : $(-30) \times [13 + (-3)] = [(-30) \times 13] + [(-30) \times (-3)]$

જવાબ $(-30) \times [13 + (-3)] = (-30) \times 10 = -300$

$[(-30) \times 13] + [(-30) \times (-3)] = -390 + 90 = -300$

તેથી, $(-30) \times [13 + (-3)] = [(-30) \times (13)] + [(-30) \times (-3)]$

ઉદાહરણ 4 વર્ગકસોટીપત્રમાં 15 સવાલ છે, દરેક સાચા જવાબ માટે 4 ગુણ અને દરેક ખોટા જવાબના (–2) ગુણ છે.

(i) મીના બધા સવાલો લખે છે, પરંતુ તેના 9 જવાબો જ સાચા છે, તેના કુલ ગુણ કેટલા હશે ?

(ii) તેના એક મિત્રના ફક્ત 5 જવાબો જ સાચા છે. તો તેના મિત્રના ગુણ કેટલા હશે ?

જવાબ

(i) એક સાચા જવાબના ગુણ = 4

તેથી, 9 સાચા જવાબના ગુણ $= 4 \times 9 = 36$

એક ખોટા જવાબના ગુણ $= -2$

તેથી, 6 (= 15 – 9) ખોટા જવાબના ગુણ $= (-2) \times 6 = -12$

તેથી, મીનાના કુલ ગુણ $= 36 + (-12) = 24$

(ii) એક સાચા જવાબના ગુણ = 4

તેથી, 5 સાચા જવાબના ગુણ $= 4 \times 5 = 20$

એક ખોટા જવાબના ગુણ $= -2$

તેથી, 10 (= 15 – 5) ખોટા જવાબના ગુણ $= (-2) \times 10 = -20$

તેથી, તેના મિત્રના કુલ ગુણ $= 20 + (-20) = 0$

ઉદાહરણ 5 ધારો કે આપણે જમીનથી ઉપરનું અંતર ધન પૂર્ણાંક સંખ્યામાં અને જમીનથી નીચેનું અંતર ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યામાં લઈએ, તો નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

(i) એક લિફ્ટ (એલિવેટર) 5 મીટર પ્રતિ મિનિટના દરે ખાણમાં ઊતરે છે, તો એક કલાક પછી તેની સ્થિતિ શું હશે ?

(ii) જો એ જમીનથી 15 મીટર ઉપરથી ઊતરતી હોય તો 45 મિનિટ પછી એની સ્થિતિ શું હશે ?

જવાબ

(i) જે રીતે લિફ્ટ (એલિવેટર) નીચે ઊતરતી જાય છે, તો તેના દ્વારા કપાતું અંતર ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા વડે દર્શાવાય છે.

એલિવેટરની 1 મિનિટમાં બદલાતી સ્થિતિ = –5 મી

60 મિનિટ પછી એલિવેટરની સ્થિતિ $= (-5) \times 60 = -300$ મી એટલે કે એલિવેટરની શરૂઆતની સ્થિતિથી 300 મી નીચે હશે.

(ii) 45 મિનિટ પછી એલિવેટરની બદલાતી સ્થિતિ $= (-5) \times 45 = -225$ મી $\therefore$ 225 મીટર નીચે ઊતરે છે.

તેથી, એલિવેટરની અંતિમ સ્થિતિ $= -225 + 15 = -210$ મી એટલે કે 210 મીટર જમીનથી નીચે હશે.

સ્વાધ્યાય 1.3

1. નીચે આપેલ દરેકના જવાબ લખો :
   (a) $3 \times (-1)$ (b) $(-1) \times 225$
   (c) $(-21) \times (-30)$ (d) $(-316) \times (-1)$
   (e) $(-15) \times 0 \times (-18)$ (f) $(-12) \times (-11) \times 10$
   (g) $9 \times (-3) \times (-6)$ (h) $(-18) \times (-5) \times (-4)$
   (i) $(-1) \times (-2) \times (-3) \times 4$ (j) $(-3) \times (-6) \times (-2) \times (-1)$
2. નીચેનાને ચકાસો :
   (a) $18 \times [7 + (-3)] = [18 \times 7] + [18 \times (-3)]$
   (b) $(-21) \times [(-4) + (-6)] = [(-21) \times (-4)] + [(-21) \times (-6)]$
3. (i) કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે, $(-1) \times a$ બરાબર શું થાય?
   (ii) નીચેની પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો (-1) સાથેનો ગુણાકાર શું થશે ?
   (a) -22 (b) 37 (c) 0
4. $(-1) \times 5$ થી શરૂ કરીને, નિશ્ચિત પેટર્ન વડે વિવિધ ગુણાકારો લઈને દર્શાવો કે $(-1) \times (-1) = 1$ થાય.
5. યોગ્ય ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીને જવાબ શોધો :
   (a) $26 \times (-48) + (-48) \times (-36)$ (b) $8 \times 53 \times (-125)$
   (c) $15 \times (-25) \times (-4) \times (-10)$ (d) $(-41) \times 102$
   (e) $625 \times (-35) + (-625) \times 65$ (f) $7 \times (50 - 2)$
   (g) $(-17) \times (-29)$ (h) $(-57) \times (-19) + 57$
6. ઠંડું કરવાની પ્રક્રિયા માટે ઓરડાના તાપમાનને 40°C થી શરૂ કરીને 5°C પ્રતિ કલાકના દરે ઘટાડવું જરૂરી છે. પ્રક્રિયા ચાલુ કર્યાના 10 કલાક પછી ઓરડાનું તાપમાન કેટલું હશે ?
7. વર્ગ કસોટીપત્રમાં કુલ 10 પ્રશ્નો છે. દરેક સાચા જવાબના 5 ગુણ અને દરેક ખોટા જવાબના (-2) ગુણ છે અને પ્રશ્નનો જવાબ નહિ લખવાના 0 ગુણ આપવામાં આવે છે.
   (i) મોહનના 4 સાચા અને 6 ખોટા જવાબ છે, તો તેના ગુણ કેટલા હશે ?
   (ii) રેશ્માના 5 સાચા અને 5 ખોટા જવાબ છે, તો તેના ગુણ કેટલા હશે ?
   (iii) હીના 7 જવાબો લખે છે, જેમાંથી 2 સાચા અને 5 ખોટા જવાબો છે, તો તેના ગુણ કેટલા હશે ?
8. એક સિમેન્ટકંપનીને સફેદ સિમેન્ટની એક ગુણ વેચતાં 8 રૂપિયા નફો મળે છે અને એક ગુણ રાખોડી સિમેન્ટની વેચતાં 5 રૂપિયાની ખોટ થાય છે.
   (a) કંપનીએ એક મહિનામાં 3000 ગુણ સફેદ સિમેન્ટની અને 5000 ગુણ રાખોડી સિમેન્ટની વેચી છે તો તે કંપનીને કેટલો નફો કે ખોટ થઈ હશે ?

(b) જો રાખોડી સિમેન્ટની 6400 ગુણ વેચાઈ હોય, તો સફેદ સિમેન્ટની કેટલી ગુણ વેચાય તો નફો પણ ન થાય અને ખોટ પણ ન જાય ?

9. ખાલી જગ્યાને પૂર્ણાંક સંખ્યા વડે પૂરી સાચું વિધાન બનાવો.

(a) $(-3) \times$ ______ $= 27$ (b) $5 \times$ ______ $= -35$

(c) ______ $\times (-8) = -56$ (d) ______ $\times (-12) = 132$

1.6 પૂર્ણાંકોનો ભાગાકાર (Division of Integers)

3ADFW3

આપણે જાણીએ છીએ કે ભાગાકાર એ ગુણાકારથી ઊલટી (વ્યસ્ત) પ્રક્રિયા છે. પૂર્ણ સંખ્યાઓ માટે એક ઉદાહરણ જોઈએ,

જુઓ $3 \times 5 = 15$

તેથી $15 \div 5 = 3$ અને $15 \div 3 = 5$

એ જ રીતે, $4 \times 3 = 12$ તેથી $12 \div 4 = 3$ અને $12 \div 3 = 4$ મળે.

તેથી આપણે કહી શકીએ છીએ કે ગુણાકારના દરેક વિધાન માટે આપણે ભાગાકારનાં બે વિધાન બનાવી શકીએ છીએ.

શું તમે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે ગુણાકારનું વિધાન અને તેને લગતાં ભાગાકારના વિધાન લખી શકશો ?

- આપેલ કોષ્ટકનું અવલોકન કરો અને પૂર્ણ કરો :

ગુણાકારનું વિધાન	ભાગાકારનું અનુરૂપ વિધાન		
$2 \times (-6) = (-12)$	$(-12) \div (-6) = 2$	,	$(-12) \div 2 = (-6)$
$(-4) \times 5 = (-20)$	$(-20) \div (5) = (-4)$	,	$(-20) \div (-4) = 5$
$(-8) \times (-9) = 72$	$72 \div$ ______ = ______	,	$72 \div$ ______ = ______
$(-3) \times (-7) =$ ______	______ $\div (-3) =$ ______	,	______
$(-8) \times 4 =$ ______	______	,	______
$5 \times (-9) =$ ______	______	,	______
$(-10) \times (-5) =$	______	,	______

ઉપરના કોષ્ટક પરથી આપણે જોયું કે,

$(-12) \div 2 = (-6)$

$(-20) \div 5 = (-4)$

$(-32) \div 4 = (-8)$

$(-45) \div 5 = (-9)$

પ્રયત્ન કરો

શોધો :

(a) $(-100) \div 5$ (b) $(-81) \div 9$

(c) $(-75) \div 5$ (d) $(-32) \div 2$

આપણે જોયું કે જ્યારે આપણે ઋણ સંખ્યાનો ધન સંખ્યા વડે ભાગાકાર કરીએ છીએ ત્યારે આપણે તેનો પૂર્ણ સંખ્યા વડે ભાગાકાર કરી પછી જવાબમાં ઋણ (–) ચિહ્ન મૂકીએ છીએ. આમ, આપણને ઋણ પૂર્ણાંક મળે છે.

શું આપણે કહી શકીએ કે

$(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$?

ચાલો ચકાસણી કરીએ,

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$(-48) \div 8 = -6$

અને $48 \div (-8) = -6$

તેથી $(-48) \div 8 = 48 \div (-8)$

નીચેના માટે તપાસો :

(i) $90 \div (-45)$ અને $(-90) \div 45$

(ii) $(-136) \div 4$ અને $136 \div (-4)$

- આપણે એ પણ જોયું કે,

$72 \div (-8) = -9$ અને $50 \div (-10) = -5$

$72 \div (-9) = -8$ $\quad 50 \div (-5) = -10$

તેથી કહી શકાય કે જ્યારે આપણે ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાનો ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા વડે ભાગાકાર કરીએ છીએ ત્યારે પહેલાં આપણે તેમને પૂર્ણ સંખ્યા માનીને ભાગીએ છીએ અને પછી જવાબમાં ઋણ (–) ચિહ્ન મૂકીએ છીએ. વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ બે ધન પૂર્ણાંક a અને b માટે

$$a \div (-b) = (-a) \div b \quad \text{જ્યાં } b \neq 0$$

પ્રયત્ન કરો

શોધો : (a) $125 \div (-25)$ (b) $80 \div (-5)$ (c) $64 \div (-16)$

- છેલ્લે આપણે જોયું કે,

$(-12) \div (-6) = 2$; $(-20) \div (-4) = 5$; $(-32) \div (-8) = 4$; $(-45) \div (-9) = 5$

તેથી આપણે કહી શકીએ છીએ કે જ્યારે આપણે ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાને ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા વડે ભાગીએ છીએ ત્યારે આપણે પહેલા તેમને પૂર્ણ સંખ્યા માનીને ભાગીએ છીએ અને ત્યાર પછી જવાબમાં ધન (+) ચિહ્ન મૂકીએ છીએ.

વ્યાપક રીતે, કોઈ પણ બે ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા a અને b માટે,

$$(-a) \div (-b) = a \div b \quad \text{જ્યાં } b \neq 0$$

પ્રયત્ન કરો

શોધો : (a) $(-36) \div (-4)$ (b) $(-201) \div (-3)$ (c) $(-325) \div (-13)$

1.7 પૂર્ણાંકના ભાગાકારના ગુણધર્મો (Properties of Division of Integers) :

નીચેનું કોષ્ટક જુઓ અને પૂર્ણ કરો :

વિધાન	તારણ	વિધાન	તારણ
$(-8) \div (-4) = 2$	જવાબ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.	$(-8) \div 3 = \frac{-8}{3}$	______________
$(-4) \div (-8) = \frac{-4}{-8}$	જવાબ પૂર્ણાંક સંખ્યા નથી.	$3 \div (-8) = \frac{3}{-8}$	______________

તમે શું જોયું ? આપણે જોયું કે પૂર્ણાંકો ભાગાકાર માટે સંવૃત નથી.

તમારાં પોતાનાં પાંચ ઉદાહરણ લઈ ખાતરી કરો.

- આપણે જાણીએ છીએ કે પૂર્ણ સંખ્યાઓ માટે ભાગાકાર સમક્રમી નથી. ચાલો પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે ચકાસીએ.

તમે કોષ્ટક પરથી જોયું કે $(-8) \div (-4) \neq (-4) \div (-8)$

શું $(-9) \div 3$ અને $3 \div (-9)$ સરખાં છે ?

શું $(-30) \div (-6)$ અને $(-6) \div (-30)$ સરખાં છે ?

શું આપણે કહી શકીએ કે પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે ભાગાકાર સમક્રમી છે ? ના.

તમે વધુ પાંચ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓની જોડ લઈ એને ચકાસો.

- પૂર્ણ સંખ્યાની જેમ કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યાનો શૂન્ય વડે ભાગાકાર કરવો અર્થહીન છે અને શૂન્યને શૂન્ય સિવાયની કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા વડે ભાગાકાર કરતાં શૂન્ય મળે છે, એટલે કે કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે $a \div 0$ એવું વ્યાખ્યાયિત નથી, પરંતુ $0 \div a = 0$ જ્યાં $a \neq 0$.
- જ્યારે આપણે પૂર્ણ સંખ્યાને 1 વડે ભાગીએ છીએ ત્યારે તેનો જવાબ તે જ પૂર્ણ સંખ્યા મળે છે, ચાલો જોઈએ કે આ ઋણ પૂર્ણાંક માટે પણ સાચું છે કે નહિ.

જુઓ :

$(-8) \div 1 = (-8)$ $\quad$ $(-11) \div 1 = -11$ $\quad$ $(-13) \div 1 = -13$

$(-25) \div 1 =$ ______ $\quad$ $(-37) \div 1 =$ ______ $\quad$ $(-48) \div 1 =$ ______

ઉપરોક્ત દર્શાવે છે કે કોઈ પણ ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાને 1 વડે ભાગાકાર કરતાં તે જ ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા મળે છે, તેથી કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યાને 1 વડે ભાગાકાર કરતાં એની એ જ પૂર્ણાંક સંખ્યા મળે છે. વ્યાપક રીતે કોઈ પણ પૂર્ણાંક a માટે,

$$a \div 1 = a$$

- જ્યારે આપણે કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યાનો (-1) વડે ભાગાકાર કરીએ તો શું થાય ?

નીચેની ખાલી જગ્યા પૂર્ણ કરો :

$(-8) \div (-1) = 8$ $\quad$ $11 \div (-1) = -11$ $\quad$ $13 \div (-1) =$ ______

$(-25) \div (-1) =$ ______ $\quad$ $(-37) \div (-1) =$ ______ $\quad$ $(-48) \div (-1) =$ ______

તમે શું જોયું ?

આપણે જોયું કે જો કોઈ પૂર્ણાંક સંખ્યાને (-1) વડે ભાગીએ તો એની એ પૂર્ણાંક સંખ્યા મળતી નથી.

પ્રયત્ન કરો

શોધો :

(i) $1 \div a = 1$?

(ii) કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે.

$a \div (-1) = -a$? aની જુદી-જુદી કિંમત લઈ ચકાસણી કરો.

- શું આપણે કહી શકીએ, $[(-16) \div 4] \div (-2)$ અને $(-16) \div [4 \div (-2)]$ બંને સરખાં છે ?

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$[(-16) \div 4] \div (-2) = (-4) \div (-2) = 2$

અને $\quad (-16) \div [4 \div (-2)] = (-16) \div (-2) = 8$

તેથી $\quad [(-16) \div 4] \div (-2) \neq (-16) \div [4 \div (-2)]$

શું તમે કહી શકો કે ભાગાકાર એ પૂર્ણાંક સંખ્યા માટે જૂથના નિયમનું પાલન કરે છે ? ના.

તમારાં પોતાનાં વધુ પાંચ ઉદાહરણો લઈ ચકાસો.

ઉદાહરણ 6 એક પરીક્ષામાં બધા સાચા જવાબો માટે +5 ગુણ અને બધા ખોટા જવાબો માટે (-2) ગુણ આપવામાં આવે છે. (i) રાધિકાએ બધા પ્રશ્નોના જવાબ આપ્યા અને 30 ગુણ મેળવ્યા,

કેમકે તેના 10 જવાબો સાચા હતા. (ii) જયે પણ બધા પ્રશ્નોના જવાબ લખ્યા અને (–12) ગુણ મેળવ્યા, કેમ કે તેના 4 જવાબો સાચા હતા. તો તે બંનેએ કેટલા ખોટા જવાબો આપ્યા હતા ?

જવાબ

(i) એક સાચા જવાબ માટે આપવામાં આવતા ગુણ = 5

તેથી 10 સાચા જવાબો માટે આપવામાં આવતા ગુણ $= 5 \times 10 = 50$

રાધિકાએ મેળવલ ગુણ = 30

ખોટા જવાબો માટે મેળવેલ ગુણ $= 30 - 50 = -20$

એક ખોટા જવાબ માટે આપવામાં આવતા ગુણ = (–2)

તેથી, ખોટા જવાબોની સંખ્યા $= (-20) \div (-2) = 10$

(ii) 4 સાચા જવાબો માટે આપવામાં આવતા ગુણ $= 5 \times 4 = 20$

જયના ગુણ = –12

ખોટા જવાબો માટે મેળવેલ ગુણ $= -12 - 20 = -32$

એક ખોટા જવાબ માટે આપવામાં આવતા ગુણ = (–2)

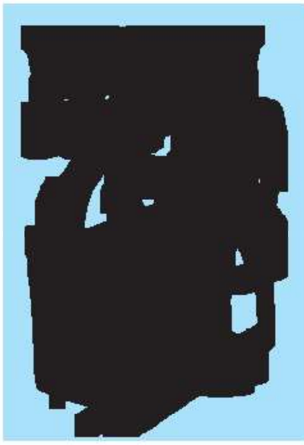
તેથી ખોટા જવાબોની સંખ્યા $= (-32) \div (-2) = 16$

ઉદાહરણ 7 એક દુકાનદારને એક પેન વેચવાથી 1 ₹નો નફો થાય છે, જ્યારે તેના પેન્સિલના જૂના જથ્થામાંથી પેન્સિલ વેચતાં તેને 40 પૈસા પ્રતિ પેન્સિલ ખોટ જાય છે.

(i) કોઈ એક મહિનામાં તેમને ₹ 5 ની ખોટ જાય છે. તે મહિના દરમિયાન તેઓ 45 પેન વેચે છે, તો તેમણે તે મહિના દરમિયાન કેટલી પેન્સિલ વેચી હશે ?

(ii) પછીના મહિનામાં તેને નફો પણ નથી થતો કે ખોટ પણ નથી જતી. જો તે 70 પેન વેચે તો તેણે કેટલી પેન્સિલ વેચી હશે ?

જવાબ



(i) 1 પેન વેચવાથી મળતો નફો = ₹ 1

45 પેન વેચવાથી મળતો નફો = ₹ 45 જેને આપણે +45 વડે દર્શાવીશું.

કુલ આવેલી ખોટ = ₹ 5, જેને આપણે –5 વડે દર્શાવીશું.

મળેલ નફો + થયેલ ખોટ = કુલ ખોટ

તેથી, થયેલ ખોટ = કુલ ખોટ – મળેલ નફો

= ₹ (–5 –45) = ₹ (–50) = –5000 પૈસા

1 પેન્સિલ વેચવાથી થયેલ ખોટ = 40 પૈસા. જેને આપણે –40 વડે દર્શાવીશું.

તેથી, વેચાયેલી પેન્સિલની સંખ્યા $= (-5000) \div (-40) = 125$

(ii) તે પછીના મહિનામાં તેમને નફો કે ખોટ થતી નથી.

તેથી, મળેલ નફો + થયેલ ખોટ = 0

એટલે કે મળેલ નફો = – થયેલ ખોટ

હવે, 70 પેન વેચવાથી મળેલ નફો = ₹ 70

તેથી, પેન્સિલ વેચવાથી થયેલ ખોટ = ₹ 70 જેને આપણે ₹ –70 અથવા – 7,000 પૈસા વડે દર્શાવીશું.

કુલ વેચાયેલી પેન્સિલની સંખ્યા = (–7000) ÷ (–40) = 175 પેન્સિલ.

સ્વાધ્યાય 1.4

1. નીચે આપેલ દરેકના જવાબ લખો :

   (a) (–30) ÷ 10 (b) 50 ÷ (–5) (c) (–36) ÷ (–9)

   (d) (–49) ÷ (49) (e) 13 ÷ [(–2) + 1] (f) 0 ÷ (–12)

   (g) (–31) ÷ [(–30) + (–1)] (h) [(–36) ÷ 12] ÷ 3 (i) [(–6) + 5)] ÷ [(–2) + 1]

2. નીચેના દરેક a, b અને c ની કિંમતો માટે $a \div (b + c) \neq (a \div b) + (a \div c)$ ને ચકાસો.

   (a) $a = 12, b = -4, c = 2$ (b) $a = (-10), b = 1, c = 1$

3. ખાલી જગ્યા પૂરો :

   (a) 369 ÷ ________ = 369 (b) (–75) ÷ ________ = –1

   (c) (–206) ÷ ________ = 1 (d) –87 ÷ ________ = 87

   (e) ________ ÷ 1 = –87 (f) ________ ÷ 48 = –1

   (g) 20 ÷ ________ = –2 (h) ________ ÷ (4) = –3

4. પૂર્ણાંક સંખ્યા (a, b) ની પાંચ જોડ લખો જેથી $a \div b = -3$ થાય. આવી એક જોડ (6, –2) છે કારણ કે 6 ÷ (–2) = (–3).

5. બપોરે 12 વાગ્યાનું તાપમાન શૂન્યથી ઉપર 10°C છે. જો એ 2°C પ્રતિ કલાકના દરે મધ્યરાત્રિ સુધી ઓછું થતું જાય તો કયા સમયે તાપમાન શૂન્યથી નીચે 8°C હોય ? મધ્યરાત્રિનું તાપમાન શું હોય ?

6. વર્ગપરીક્ષામાં (+3) દરેક સાચા જવાબ માટે અને (–2) દરેક ખોટા જવાબ માટે આપવામાં આવે છે અને કોઈ પણ સવાલના જવાબ માટે જો પ્રયત્ન ન કરવામાં આવે તો તેનો એક પણ ગુણ આપવામાં આવતો નથી.

   (i) રાધિકાએ 20 ગુણ મેળવ્યા. જો તેણે 12 સાચા જવાબો આપ્યા હોય, તો તેના કેટલા જવાબો ખોટા છે ?

   (ii) મોહિનીએ આ પરીક્ષામાં (–5) ગુણ મેળવ્યા. જો કે તેના 7 સાચા જવાબો હતા તો તેણે કેટલા ખોટા જવાબો લખ્યા ?

7. એક લિફ્ટ (એલિવેટર) 6 મીટર પ્રતિ મિનિટના દરે ખાણમાં ઊતરે છે. જો તે જમીનથી 10 મીટર ઉપરથી નીચે ઊતરતી હોય તો (–350) મીટર સુધી પહોંચતાં તેને કેટલો સમય લાગશે ?

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. પૂર્ણાંક સંખ્યા એ સંખ્યાઓનો મોટો સમૂહ છે જેમાં પૂર્ણ સંખ્યાઓ અને તેમની ઋણ સંખ્યાઓનો સમાવેશ થાય છે. જેનો અભ્યાસ આપણે ધોરણ 6માં કરી ચૂક્યાં છીએ.
2. અગાઉના ધોરણમાં આપણે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનું સંખ્યારેખા પર નિરૂપણ કરવું અને તેના સરવાળા અને બાદબાકી વિશે અભ્યાસ કરી ચૂક્યાં છીએ.
3. આપણે હમણાં સરવાળા અને બાદબાકી દ્વારા પાલન થતા ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કર્યો છે.
   (a) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ સરવાળા અને બાદબાકી બંને વિશે સંવૃતતા ધરાવે છે. અર્થાત્ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a અને b માટે $a + b$ અને $a - b$ મેળવતાં પૂર્ણાંક સંખ્યા મળે છે.
   (b) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો સરવાળો સમક્રમી એટલે કે બધી જ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a અને b માટે $a + b = b + a$.
   (c) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે સરવાળો જૂથનો નિયમ ધરાવે છે. એટલે કે, બધી જ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a, b અને c માટે $(a + b) + c = a + (b + c)$.
   (d) પૂર્ણાંક સંખ્યા 0 એ સરવાળા માટે તટસ્થ સંખ્યા છે. એટલે કે, દરેક પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે $a + 0 = 0 + a = a$.
4. અભ્યાસ કર્યા પછી આપણને એ જાણવા મળ્યું છે કે ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા અને ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાનો ગુણાકાર કરવાથી ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા મળે છે, જ્યારે બે ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર કરવાથી ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા મળે છે. ઉદાહરણ, $-2 \times 7 = -14$ અને $-3 \times -8 = 24$.
5. ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો બેકી સંખ્યામાં ગુણાકાર કરતાં જવાબ ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા મળે છે, જ્યારે ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો એકી સંખ્યામાં ગુણાકાર કરતાં જવાબ ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા મળે છે.
6. પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગુણાકાર વિશેના કેટલાક ગુણધર્મો :
   (a) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ ગુણાકાર વિશે સંવૃતતા ધરાવે છે. અર્થાત્ કોઈ પણ બે પૂર્ણાંક સંખ્યા a અને b માટે $a \times b$ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.
   (b) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર સમક્રમી છે. અર્થાત્ કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે $a \times b = b \times a$.
   (c) પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ માટે ગુણાકાર જૂથનો નિયમ ધરાવે છે. એટલે કે, કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a, b અને c માટે $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$.
   (d) પૂર્ણાંક સંખ્યા 1 એ ગુણાકાર માટે તટસ્થ સંખ્યા છે. એટલે કે, કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે $1 \times a = a \times 1 = a$.
7. સરવાળા અને ગુણાકાર હેઠળ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ વિભાજનનો ગુણધર્મ ધરાવે છે. અર્થાત્ કોઈ પણ ત્રણ પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ a, b અને c માટે $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$.

8. સરવાળા અને ગુણાકારમાં ક્રમનો ગુણધર્મ, જૂથનો ગુણધર્મ અને વિભાજનનો ગુણધર્મ આપણી ગણતરી સરળ બનાવવામાં મદદ કરે છે.
9. આપણે એ પણ શીખી ગયાં છીએ કે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો કઈ રીતે ભાગાકાર થાય. આપણે જોયું કે,
   (a) જ્યારે ધન પૂર્ણાંક સંખ્યાનો અન્ય ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા વડે ભાગાકાર કરવામાં આવે કે ઋણ પૂર્ણાંકનો ધન પૂર્ણાંક વડે ભાગાકાર કરવામાં આવે ત્યારે ઋણ સંખ્યા પ્રાપ્ત થાય છે.
   (b) ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યાનો અન્ય ઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા વડે ભાગાકાર કરવામાં આવે છે ત્યારે ધન પૂર્ણાંક સંખ્યા પ્રાપ્ત થાય છે.
10. કોઈ પણ પૂર્ણાંક સંખ્યા a માટે,
   (a) $a \div 0$ એ વ્યાખ્યાયિત નથી.
   (b) $a \div 1 = a$