પ્રકરણ 11

બીજગણિત

EP4H4T

11.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણો અગાઉનો અભ્યાસ આંકડા અને આકારો સાથેનો હતો. આપણે સંખ્યાઓ પરની ક્રિયાઓ અને તેના ગુણધર્મો વિશે શીખ્યાં. આપણે આંકડાઓના જ્ઞાનનો ઉપયોગ રોજિંદા જીવનમાં કર્યો. ગણિતની એવી શાખા જેમાં આંકડાઓનો અભ્યાસ કરવામાં આવે તેને અંકગણિત (Arithmetic) કહેવાય. આપણે બે અને ત્રણ પરિમાણવાળી આકૃતિઓ તથા તેના ગુણધર્મ વિશે શીખ્યાં. ગણિતની એવી શાખા કે જેમાં આકારોનો ઉપયોગ કરવામાં આવે તો તેને ભૂમિતિ (Geometry) કહેવાય. હવે આપણે ગણિતની બીજી શાખાના અભ્યાસની શરૂઆત કરીશું, જેને બીજગણિત (Algebra) કહેવામાં આવે છે.

આ નવી શાખાની વિશેષતા એ છે કે, જેમાં આપણે અક્ષરોનો ઉપયોગ આપણને નિયમ અને સૂત્રોને સામાન્ય સ્વરૂપે દર્શાવવા પરવાનગી આપશે.

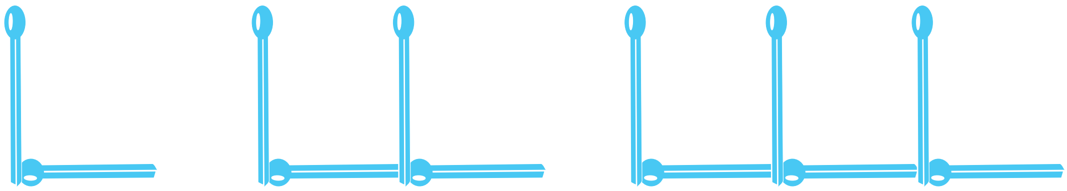
આપણે કોઈ પણ સંખ્યા વિશે વાત કરી શકીએ, માત્ર ચોક્કસ સંખ્યા માટે નહિ. બીજું અક્ષર કોઈ પણ અજ્ઞાત સંખ્યા માટે દર્શાવી શકાય છે. આ અજ્ઞાત સંખ્યા નક્કી કરવાની પદ્ધતિ શીખીને આપણે એવા સમર્થ ઉપકરણને વિકસાવી આપણા રોજિંદા જીવનમાં કોયડા અને ઘણા પ્રશ્નોને ઉકેલી શકીએ. આ અક્ષર અંકોની જગ્યાએ વાપરવામાં આવે છે. તેટલા માટે સંખ્યાઓની જેમ ક્રિયાઓ પણ અક્ષર પર કરી શકાય છે. આ આપણને બીજગણિતીય અભિવ્યક્તિ અને તેના ગુણધર્મો તરફ દોરી જાય છે.

તમે બીજગણિતને રસપ્રદ અને ઉપયોગી જોશો. તે સમસ્યા ઉકેલવામાં ખૂબ જ ઉપયોગી છે. ચાલો, એક સાદા ઉદાહરણ દ્વારા આપણે શીખવાની શરૂઆત કરીએ.

EA4E6S

11.2 મૅચસ્ટિક પૅટર્ન (દીવાસળી પૅટર્ન)

અમીના અને સરિતા દીવાસળીની મદદથી જુદી-જુદી પૅટર્ન બનાવે છે. તેઓ અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોની સાદી પૅટર્ન બનાવવાનું નક્કી કરે છે. અમીના બે દીવાસળીની સળી લે છે અને અંગ્રેજી મૂળાક્ષર L બનાવે છે, જે આકૃતિ 11.1 (a) માં દર્શાવેલ છે.



(a) (b) (c)

આકૃતિ 11.1

સરિતા બીજા મૂળાક્ષર L માટે બે સળી લે છે અને તે અમીનાએ ગોઠવેલ દિવાસળીઓ સાથે ગોઠવે છે. (આકૃતિ 11.1 (b))

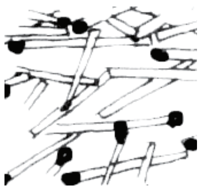
અમીના વધુ એક L ઉમેરે છે. જે આકૃતિ 11.1(c)માં દર્શાવેલ છે.

એટલામાં તેમનો મિત્ર અપ્પુ આવે છે. તે આ પૅટર્ન જુએ છે. અપ્પુ હંમેશાં પ્રશ્નો જ પૂછતો હોય છે. તે આ બંનેને પૂછે છે કે સાત L બનાવવા હોય તો કેટલી દિવાસળીઓની જરૂર પડે ? અમીના અને સરિતા બંનેનું કામ પદ્ધતિસરનું છે. 1L, 2L, 3L ની મદદથી તેઓ એક પૅટર્ન રચી તેનું કોષ્ટક તૈયાર કરે છે :

કોષ્ટક 1

રચેલ Lની સંખ્યા	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**...**	**...**
જરૂરી દીવાસળીની સંખ્યા	2	4	6	8	10	12	14	16	...	...

અપ્પુ કોષ્ટક 1 ઉપરથી જવાબ મેળવી લે છે કે 7L રચવા 14 દીવાસળીની જરૂર પડે છે.



કોષ્ટકમાં લખતાં અમીનાને ખ્યાલ આવે છે કે જેટલા L રચવાના છે તેના કરતાં બે ગણી દીવાસળીની જરૂર પડે છે. જરૂરી દીવાસળીની સંખ્યા = 2 × રચવામાં આવતા Lની સંખ્યા.

સરળતા ખાતર Lની સંખ્યા માટે આપણે n લખીએ.

જો એક L રચવો હોય તો n = 1, જો બે L રચવા હોય તો n = 2. આમ, n એ કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા 1, 2, 3, 4, 5,... હોઈ શકે. આપણે લખી શકીએ કે, જરૂરી દીવાસળીની સંખ્યા = 2 × n. 2 × n ની જગ્યાએ આપણે 2n પણ લખી શકીએ. નોંધો કે 2n અને 2 × n સરખા છે.

અમીનાએ તેના મિત્રને કહ્યું કે કોઈ પણ સંખ્યામાં L રચવા માટે તેના આ નિયમથી દીવાસળીની સંખ્યા જાણી શકાશે.

આમ, n = 1 માટે જરૂરી દીવાસળીની સંખ્યા = 2 × 1 = 2

n = 2 માટે જરૂરી દીવાસળીની સંખ્યા = 2 × 2 = 4

n = 3 માટે જરૂરી દીવાસળીની સંખ્યા = 2 × 3 = 6 વગેરે.

આ સંખ્યા કોષ્ટક 1માં દર્શાવેલ અંકો પ્રમાણેની જ છે.

સરિતાએ કહ્યું : આ નિયમ ખૂબ જ મહત્ત્વનો છે. આ નિયમનો ઉપયોગ કરી કદાચ 100L રચવા હોય તોપણ હું કહી શકું કે કેટલી દીવાસળીની જરૂર પડશે. જો આ નિયમ જાણીએ તો, મારે પૅટર્ન કે કોષ્ટક બનાવવાની જરૂર નથી. તમે સરિતા સાથે સહમત છો ?

DH5RHB

11.3 ચલ (Variable)નો વિચાર

ઉપરના ઉદાહરણમાં આપણે Lની રચના માટે કેટલી દીવાસળીઓની જરૂર પડશે તે શોધી કાઢ્યું. આ નિયમ છે :

જરૂરી દીવાસળીની સંખ્યા = 2n

અહીં n એ રચવામાં આવતા Lની સંખ્યા છે. nનું મૂલ્ય 1, 2, 3, 4... કોઈ પણ લઈ શકાય. ચાલો કોષ્ટક 1 ફરીથી જોઈએ. કોષ્ટકમાં nનું મૂલ્ય સતત બદલાતું (વધતું) જાય છે. પરિણામે દીવાસળીની સંખ્યા પણ બદલાતી જાય છે.

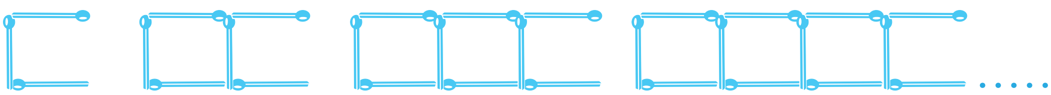
n એ ચલનું ઉદાહરણ છે. જેની કિંમત ચોક્કસ નથી. તેની કોઈ પણ કિંમત, 1, 2, 3, 4.... આપણે લઈ શકીએ. ચલ n નો ઉપયોગ કરી આપણે જરૂરી દીવાસળીની સંખ્યાનો નિયમ લખ્યો.

'ચલ' શબ્દનો અર્થ થાય કે જે કંઈક બદલાય છે. ચલની કિંમત ચોક્કસ હોતી નથી, તે જુદી જુદી કિંમત ધારણ કરી શકે.

ચલ વિશે વધુ અભ્યાસ કરવા માટે મૅચસ્ટિક પૅટર્નનું બીજું ઉદાહરણ જોઈએ :

11.4 વધુ મૅચસ્ટિક પૅટર્ન

અમીના અને સરિતાને મૅચસ્ટિક પેટર્નમાં ખૂબ જ રસ પડ્યો. તેમણે મૂળાક્ષર Cની પૅટર્ન રચવા પ્રયત્ન કર્યો. એક C રચવા તેમણે 3 દીવાસળીનો ઉપયોગ કર્યો. જે 11.2 (a)ની આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે.



(a) (b) (c) (d)

આકૃતિ 11.2

C ની પૅટર્ન રચવા માટે જરૂરી દીવાસળીની સંખ્યા માટેનું કોષ્ટક 2 આપેલ છે.

કોષ્ટક 2

રચેલ Cની સંખ્યા	1	2	3	4	5	6	7	8	...	...
જરૂરી દીવાસળીની સંખ્યા	3	6	9	12	15	18	21	24	...	...

કોષ્ટકમાં આપેલી ખાલી જગ્યા તમે પૂર્ણ કરી શકશો ?

સરિતા નિયમ લઈને આવે છે :

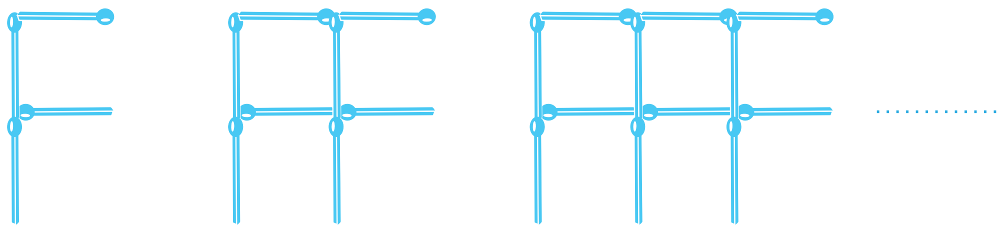
જરૂરી દીવાસળીની સંખ્યા = 3n

મૂળાક્ષર nનો ઉપયોગ તેણે રચેલ Cની સંખ્યા માટે કરેલ છે. n ચલ છે જેની કિંમત 1, 2, 3, 4, ...

તમે સરિતા સાથે સહમત છો ?

યાદ રાખો કે 3n એ $3 \times n$ જ છે.

હવે, અમીના અને સરિતાએ પૅટર્ન Fની રચના કરવાનું વિચાર્યું. એક Fની રચના કરવા તેમણે 4 દીવાસળીનો ઉપયોગ કર્યો, જે આકૃતિ 11.3(a)માં દર્શાવેલ છે.



(a) (b) (c)

આકૃતિ 11.3

રચેલ પૅટર્ન F માટે તમે કોઈ નિયમ લખી શકશો ?

દીવાસળીની સળીઓમાંથી મૂળાક્ષરો અને બીજા આકાર બનાવવાનું વિચારો. દા.ત. U (⊔), V, (∨), ત્રિકોણ (△), ચોરસ (□) વગેરે.

કોઈ પણ પાંચ મૂળાક્ષર પસંદ કરી તેમના માટે મૅચસ્ટિક પૅટર્ન રચવાનો નિયમ લખો.

11.5 ચલનાં વધુ ઉદાહરણો

ચલને દર્શાવવા માટે આપણે અક્ષર n નો ઉપયોગ કર્યો. રાજુએ પૂછ્યું કે m કેમ નહિ ?

n એ કોઈ વિશિષ્ટ નથી. કોઈપણ મૂળાક્ષર વાપરી શકાય.

> n માટે એવું કંઈ ખાસ નથી. કોઈ પણ અક્ષર વાપરી શકાય. ચલ દર્શાવવા માટે l, p, x, y, z વગેરે અક્ષર વાપરી શકાય. યાદ રાખો ચલ એક એવો અંક છે જેને ચોક્કસ કિંમત હોતી નથી. દાખલા તરીકે સંખ્યા 5 અથવા સંખ્યા 100 અથવા કોઈ પણ આપેલ સંખ્યા ચલ નથી. તેમની કિંમત ચોક્કસ હોય છે. જેમ કે ત્રિકોણના ખૂણાઓની સંખ્યા ચોક્કસ હોય છે, એટલે કે 3 છે તે ચલ નથી. ચતુષ્કોણના ખૂણાની સંખ્યા (4) એ ચોક્કસ હોય છે. તે પણ ચલ નથી. પણ ઉદાહરણમાં આપણે જોયું કે n એ ચલ છે કે જે જુદી-જુદી કિંમતો 1, 2, 3, 4.... ધારણ કરે છે.

ચાલો, કેટલાંક જાણીતા ઉદાહરણોમાં ચલની ગણતરી કરીએ.

શાળાના બુકસ્ટોરમાંથી વિદ્યાર્થીઓ નોટબુક ખરીદવા ગયા. એક નોટબુકની કિંમત 5 રૂપિયા છે. મુન્નુને 5 નોટબુક, અપ્પુને 7 નોટબુક જ્યારે સારાને 4 નોટબુક ખરીદવી છે. બુકસ્ટોરમાંથી નોટબુક ખરીદવા માટે તેમને કેટલા રૂપિયા જોઈએ ?

વિદ્યાર્થીઓ કેટલી નોટબુક ખરીદે છે. તેના પર તેનો આધાર છે. વિદ્યાર્થીઓએ ભેગા મળીને નીચેનું કોષ્ટક બનાવ્યું :

કોષ્ટક 3

જરૂરી નોટબુકની સંખ્યા	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**...**	**m**	**...**
કુલ કિંમત રૂપિયામાં	5	10	15	20	25	...	5m	...

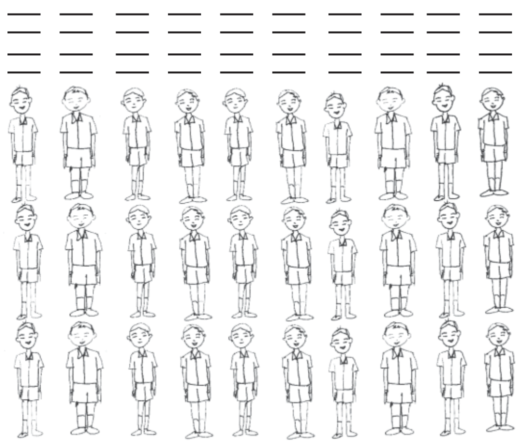
વિદ્યાર્થીઓ નોટબુક ખરીદવા માંગે છે. તેના માટે અક્ષર m ધારેલ છે. m એ ચલ છે કે જેની કિંમત 1, 2, 3, 4... કોઈ પણ હોઈ શકે. નિયમ પ્રમાણે m નોટબુકની

કુલ ચૂકવેલ કિંમત $=$ 5 $\times$ જરૂરી નોટની સંખ્યા

$= 5 \times m$

જો મુન્નુ 5 નોટબુક ખરીદવા માંગતો હોય તો $m = 5$ લેવા પડશે. આપણે કહી શકીશું કે મુન્નુએ ₹ 5×5 એટલે ₹ 25 રૂપિયા સ્કૂલમાં નોટબુક ખરીદવા ચૂકવવા પડશે.

ચાલો, બીજું એક ઉદાહરણ લઈએ. શાળામાં પ્રજાસત્તાકદિન ઊજવતી વખતે વિદ્યાર્થીઓએ મુખ્ય મહેમાન સામે સમૂહ કવાયત રજૂ કરવા 10ની હારમાં ઊભા રહ્યા. (આકૃતિ 11.4) તો સમૂહ કવાયતમાં કેટલા વિદ્યાર્થીઓ હશે ?



આકૃતિ 11.4

વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યાનો આધાર હારની સંખ્યા પર રહેશે. જો એક જ હાર હોય તો 10 વિદ્યાર્થીઓ હશે. જો 2 હાર હશે તો 2×10 એટલે કે, 20 વિદ્યાર્થીઓ હશે. જો 4 હાર હશે તો

વિદ્યાર્થીઓ $4r$ સમૂહ કવાયતમાં હશે. અહીં r એ ચલ છે કે જે હારની સંખ્યા દર્શાવે છે. જેની કિંમત 1, 2, 3, 4... છે.

બધાં જ ઉદાહરણોમાં દેખાઈ આવે છે કે ચલ એ અંક સાથે ગુણાયેલ છે. ચલમાં અંક ઉમેરવામાં આવે કે ચલમાંથી અંક બાદ કરવામાં આવે તો જુદી પરિસ્થિતિનું નિર્માણ થાય છે જે નીચે દર્શાવ્યું છે :

સરિતાએ કહ્યું કે, તેની પાસે અમીના કરતાં 10 લખોટી વધુ છે. જો અમીના પાસે 20 લખોટી હોય તો સરિતા પાસે 30 હોય. જો અમીના પાસે 30 હોય તો સરિતા પાસે 40 હોય. આપણે જાણતા નથી કે અમિતા પાસે કેટલી લખોટી છે. એની પાસે કોઈ પણ સંખ્યામાં લખોટી હોઈ શકે.

પરંતુ આપણે જાણીએ છીએ કે,

સરિતાની લખોટી = અમીનાની લખોટી + 10

આપણે અમીના પાસેની લખોટીને x વડે દર્શાવીએ. અહીં x ચલ છે કે જેની કિંમત 1, 2, 3, 4, ..., 10,...., 20, ...30... કોઈ પણ લઈ શકીએ. આપણે સરિતાની લખોટીને $x + 10$ લખી શકીએ. અભિવ્યક્ત કરેલ $(x + 10)$ને x વત્તા 10 એમ વંચાય. તેનો અર્થ x માં દસ ઉમેરવા છે. જો x એ 20 હોય, તો $(x + 10)$ એ 30 થાય. જો x એ 30 હોય તો $(x + 10)$ એ 40 થાય.

અભિવ્યક્તિ $(x + 10)$ ને વધુ સરળ રીતે રજૂ કરી શકતા નથી.

ગૂંચવાશો નહિ $x + 10$ અને $10x$, બંને અલગ છે. $10x$માં, x નો 10 સાથે ગુણાકાર છે, જ્યારે $(x + 10)$માં xમાં 10 ઉમેરવામાં આવે છે.

આપણે xની કેટલીક કિંમતો માટે ચકાસીએ :

ઉદાહરણ તરીકે,

જો $x = 2$, $10x = 10 \times 2 = 20$; $x + 10 = 2 + 10 = 12$

જો $x = 10$, $10x = 10 \times 10 = 100$; $x + 10 = 10 + 10 = 20$

રાજુ અને બાલુ બંને ભાઈઓ છે. બાલુ રાજુ કરતાં 3 વર્ષ નાનો છે. જો રાજુ 12 વર્ષનો હોય તો બાલુ 9 વર્ષનો હોય, જો રાજુ 15 વર્ષનો હોય તો બાલુ 12 વર્ષનો હોય. આપણે રાજુની ચોક્કસ ઉંમર જાણતા નથી. તે કોઈ પણ કિંમત હોઈ શકે ધારો કે રાજુની ઉંમરને x વર્ષ લઈએ x એ ચલ છે. રાજુની ઉંમર x વર્ષ હોય તો બાલુની ઉંમર $(x - 3)$ વર્ષ હશે. અભિવ્યક્તિ $(x - 3)$ ને x ઓછા 3 વડે વંચાય. જો તમે x ની કિંમત 12 લેવાની અપેક્ષા રાખશો તો $(x - 3)$ એ 9 થશે. જો x એ 15 હશે તો $(x - 3)$ એ 12 હશે.

સ્વાધ્યાય 11.1

1. નીચેની મૅચસ્ટિક પૅટર્ન બનાવવા માટે કેટલી દીવાસળીની જરૂર પડશે. તેનો નિયમ શોધો. નિયમ લખવા ચલનો ઉપયોગ કરો :

(a) મૂળાક્ષર T માટે પૅટર્ન T 

(b) મૂળાક્ષર z માટે પૅટર્ન Z 

(c) મૂળાક્ષર U માટે પૅટર્ન U 

(d) મૂળાક્ષર v માટે પૅટર્ન V 

(e) મૂળાક્ષર E માટે પૅટર્ન E 

(f) મૂળાક્ષર S માટે પૅટર્ન S 

(g) મૂળાક્ષર A માટે પૅટર્ન A 

2. આપણે મૂળાક્ષર L, C અને Fની પૅટર્ન માટેનો નિયમ જાણીએ છીએ. પ્રશ્ન 1માં આપેલા મૂળાક્ષરો (ઉપર આપેલ)માં કયા મૂળાક્ષરો Lના જેવો નિયમ આપે છે ? આવું કેમ બન્યું ?

3. સૈન્યના તાલીમાર્થીઓ પરેડમાં કૂચ કરે છે. દરેક હારમાં 5 તાલીમાર્થીઓ છે. આપેલ સૈન્યના તાલીમાર્થીઓની સંખ્યા અને હાર માટે કયો નિયમ થશે ? (હારની સંખ્યા માટે n વાપરો.)

4. જો પેટીમાં 50 કેરી છે. કેરીની કુલ સંખ્યા અને પેટીઓની સંખ્યાને કેવી રીતે લખી શકશો ? (પેટીઓની સંખ્યા માટે b સંકેત વાપરો.)

5. શિક્ષકે દરેક વિદ્યાર્થીને 5 પેન્સિલ વહેંચી. તમે કહી શકશો કે કેટલી પેન્સિલની જરૂર પડશે ? વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા આપેલ છે. (વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા માટે s વાપરો.)

6. એક પક્ષી એક મિનિટમાં 1 કિલોમીટર ઊડે છે. જો તે 1 મિનિટ ઊડે તો કેટલું અંતર આવરી શકશે તે તમે કહી શકશો ? (ઊડવાના સમય માટે t નો ઉપયોગ કરો.)

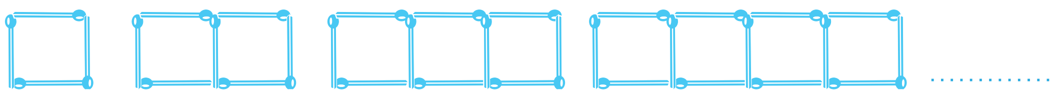
7. રાધા ચોક પાઉડરની મદદથી ડૉટ રંગોલી (ડૉટને જોડીને બનાવેલી સુંદર પૅટર્ન) દોરે છે. હારમાં 8 ડૉટ છે. તેની રંગોલીની r હારમાં કેટલા ડૉટ હશે ? જો 8 હાર હોય તો કેટલા ડોટ હશે? જો 10 હાર હોય તો ?

8. લીલા એ રાધાની નાની બહેન છે. લીલા એ રાધા કરતાં 4 વર્ષ નાની છે. રાધાની ઉંમરને આધારે લીલાની ઉંમર તમે લખી શકશો ? (રાધાની ઉંમર x વર્ષ છે.)

9. મમ્મીએ લાડુ બનાવ્યા. તેણે કેટલાક લાડુ મહેમાનો અને કુટુંબીજનોને આપ્યા. પછી 5 લાડુ બાકી રહ્યા. જો મમ્મીએ આપેલ લાડુની સંખ્યા l હોય, તો તેણે કેટલા લાડુ બનાવ્યા હશે ?

10. મોટી પેટીમાંથી નારંગી નાની પેટીમાં બદલવામાં આવી. જ્યારે મોટી પેટી ખાલી થઈ, ત્યારે બે નાની પેટીઓ ભરાઈ અને 10 નારંગી બહાર રહી ગઈ. જો નાની પેટીમાંની નારંગી માટે x લેવામાં આવે, તો મોટી પેટીમાં કેટલી નારંગીઓ હશે ?

11. (a) નીચેની આકૃતિ (11.6)માંની દીવાસળીની ગોઠવણી જુઓ. ચોરસ અલગ નથી. બે નજીકના ચોરસમાં કેટલીક દીવાસળી સામાન્ય છે. ગોઠવણીનું અવલોકન કરો અને



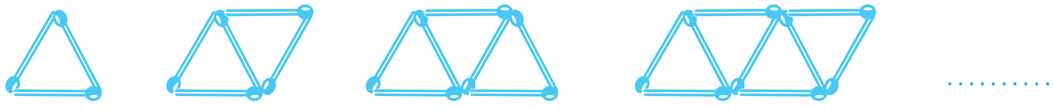
(a) (b) (c) (d)

આકૃતિ 11.6

દીવાસળીની સંખ્યાને આધારે ચોરસ માટેનો નિયમ તારવો.

(**સૂચન :** લંબરૂપે રહેલ દીવાસળી દૂર કરવામાં આવે તો C જેવી ગોઠવણી થશે.)

(b) આકૃતિ 11.7 ત્રિકોણની મૅચસ્ટિક પૅટર્ન દર્શાવે છે. સ્વાધ્યાય 11(a)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે, એવો સામાન્ય નિયમ તારવો કે જે ત્રિકોણની સંખ્યાના પદમાં જરૂરી દીવાસળીની સંખ્યા બતાવે.



આકૃતિ 11.7

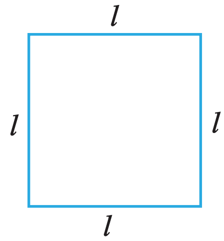
11.6 સામાન્ય નિયમોમાં ચલ

આપણે ગણિતમાં એવા કેટલાક ચોક્કસ નિયમો શીખી ગયાં છીએ કે જ્યાં ચલનો ઉપયોગ કરવામાં આવતો હોય.

ભૂમિતિના નિયમો

આપણે માપનના પ્રકરણમાં ચોરસ અને લંબચોરસની પરિમિતિ વિશે શીખી ગયાં છીએ. અહીં આપણે તેમને નિયમના સ્વરૂપમાં દર્શાવીએ.

1. ચોરસ (Square)ની પરિમિતિ : બહુકોણ (એવી બંધ આકૃતિ કે જે 3 કે તેથી વધુ રેખાખંડની બનેલી હોય)ની પરિમિતિ એ એની બાજુઓની લંબાઈનો સરવાળો છે તે આપણે જાણીએ છીએ. (ચોરસને ચાર બાજુઓ હોય છે. જેની બધી જ બાજુઓ સરખી હોય છે.) (આકૃતિ 11.8) તેથી,



આકૃતિ 11.8

ચોરસની પરિમિતિ = ચોરસની બધી બાજુઓનો સરવાળો

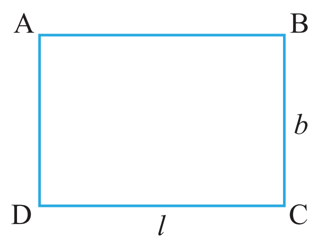
= 4 વખત ચોરસની બાજુની લંબાઈ

= $4 \times l = 4l$

આ રીતે ચોરસની પરિમિતિ માટેનો નિયમ મેળવી શકાય. ચલ lના ઉપયોગથી સામાન્ય નિયમ લખી શકાય. જે યાદ રાખવા માટે સંક્ષિપ્ત (ટૂંકો) અને સરળ હોય.

આપણે પરિમિતિને ચલ p વડે ઓળખીએ. આમ, ચોરસની લંબાઈ અને પરિમિતિ વચ્ચેના સંબંધનો સામાન્ય નિયમ $p = 4l$ રજૂ કરી શકાય.

2. લંબચોરસ (Rectangle)ની પરિમિતિ : આપણે જાણીએ છીએ કે લંબચોરસને ચાર બાજુઓ હોય છે. દાખલા તરીકે લંબચોરસ ABCD ને AB, BC, CD અને DA સામસામેની બાજુઓ કોઈ પણ લંબચોરસમાં સરખી જ હોય છે. આમ, લંબચોરસ ABCDમાં બાજુ AB અથવા CD માટેની લંબાઈને l કહીએ અને બાજુ



આકૃતિ 11.9

AD અને BC ની લંબાઈને b કહીએ તેથી,

લંબચોરસની પરિમિતિ = AB ની લંબાઈ + BC ની લંબાઈ + CD ની લંબાઈની લંબાઈ + AD ની લંબાઈ

= 2 × CD ની લંબાઈ + 2 × BC ની લંબાઈ

$= 2 \times l + 2 \times b = 2l + 2b$

જ્યાં l અને b એ લંબચોરસની લંબાઈ અને પહોળાઈ દર્શાવે છે. $\therefore$ $l = b$ હોય તો શું થાય ? ચર્ચા કરો.

જો આપણે લંબચોરસની પરિમિતિને p વડે દર્શાવીએ તો પરિમિતિ માટેનો નિયમ બનશે.

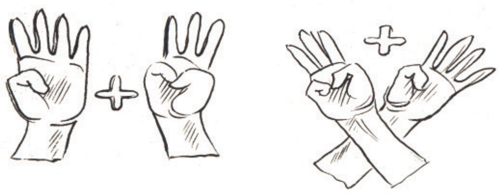
$$p = 2l + 2b$$

નોંધ : અહીં l અને b બંને ચલ છે. તે બંનેની કિંમતો સ્વતંત્ર છે. એટલે કે એક ચલની કિંમત લઈએ તે બીજા ચલની કેટલી કિંમત લીધી છે, તેના પર આધારિત નથી.

તમારા ભૂમિતિના અભ્યાસમાં સમતલ આકૃતિઓની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ તારવ્યાં અને ત્રિપરિમાણીય આકૃતિઓના ક્ષેત્રફળ અને ઘનફળ આધારિત કેટલાક નિયમો આવશે. બહુકોણના અંદરના ખૂણા માટેના દાખલા અને બહુકોણના વિકર્ણો અંગેનાં સૂત્રો મેળવવાના આવશે. સામાન્ય નિયમો અને સૂત્રો લખવા માટે ચલનો ખ્યાલ કે જે તમે શીખ્યાં તે ખૂબ જ ઉપયોગી પુરવાર થશે.

અંકગણિતનો નિયમ

3. બે અંકોના પરિવર્તનીય સરવાળા



આપણે જાણીએ છીએ કે,

4 + 3 = 7 અને 3 + 4 = 7

એટલે કે 4 + 3 = 3 + 4

પૂર્ણ સંખ્યાના પ્રકરણમાં આપણે જોયું કે કોઈ પણ બે અંકો માટે આ સાચું છે. અંકોના આ ગુણધર્મને **સરવાળા માટે ક્રમનો ગુણધર્મ** કહે છે. પરિવર્તનીય એટલે કે અંકોના ક્રમ બદલતાં સરવાળામાં કોઈ પણ ફેરફાર થતો નથી. આ ગુણધર્મને સરળતા માટે ચલના ઉપયોગની મદદથી સંક્ષિપ્તમાં રજૂ કરી શકાશે. a અને b એવા ચલ છે કે જે કોઈ પણ કિંમત ધારણ કરી શકે.

એટલે કે, $\boldsymbol{a + b = b + a}$

એક વખત આપણે આ રીતે નિયમ લખ્યા પછી ખાસ કિસ્સાઓમાં પણ તેનો સમાવેશ કરીશું.

જો $a = 4$ અને $b = 3$ હોય તો આપણે 4 + 3 = 3 + 4 મેળવી શકીએ. જો $a = 37$ અને $b = 73$ હોય, તો આપણે 37 + 73 = 73 + 37 મેળવી શકીએ.

4. બે અંકોના પરિવર્તનીય ગુણાકાર

આપણે પૂર્ણ સંખ્યાના પ્રકરણમાં જોયું કે બે અંકોનો ગુણાકાર કોઈ પણ ક્રમમાં કરવામાં આવે તો કોઈ ફર્ક નથી પડતો.

દાખલા તરીકે,

$4 \times 3 = 12$, $3 \times 4 = 12$

તેથી, $4 \times 3 = 3 \times 4$

અંકોના આ ગુણધર્મને **ગુણાકાર માટે ક્રમનો ગુણધર્મ** કહે છે. અંકોનો ક્રમ બદલી ગુણવામાં આવે તો ગુણાકારમાં કોઈ ફેર પડતો નથી. ગુણાકારના કિસ્સામાં a અને b ને આપણે ચલ તરીકે વાપરીએ તો બે અંકોના આ પરિવર્તનીય ગુણાકારને નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકીએ :

$\boldsymbol{a \times b = b \times a}$

a અને b ની કોઈ પણ કિંમત લઈ શકાય. આ ચલ છે.

જેમ કે,

$4 \times 3 = 3 \times 4$ અથવા $37 \times 73 = 73 \times 37$ જે સામાન્ય નિયમ પ્રમાણે છે.

5. અંકોનું વિભાજન

ધારો કે આપણને 7×38 કરવાનું કહ્યું. દેખીતી રીતે આપણે 38નો ઘડિયો ભણતા ન હોઈએ તો આપણે નીચે પ્રમાણે કરીએ :

$7 \times 38 = 7 \times (30 + 8) = 7 \times 30 + 7 \times 8 = 210 + 56 = 266$

કોઈ પણ ત્રણ અંક માટે આ સાચું છે. જેમ કે 7, 30 અને 8 માટે, આ ગુણધર્મને ગુણાકારનું સરવાળા પર વિભાજન કહેવાય.

ચલનો ઉપયોગ કરી આ ગુણધર્મને સરળ અને સંક્ષિપ્તમાં આપણે લખી શકીએ. a, b અને c ત્રણ ચલ છે. તેમાંનો દરેક કોઈ પણ કિંમત ધરાવી શકે છે. એટલે કે,

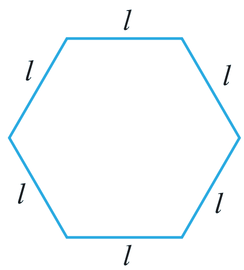
$\boldsymbol{a \times (b + c) = a \times b + a \times c}$

સંખ્યાઓના ગુણધર્મો રસપ્રદ છે. તેમાંના ઘણાબધા આ વર્ષે અને હવે પછીના ગણિતના અભ્યાસમાં તમે શીખશો. આ ગુણધર્મોને સંક્ષિપ્તમાં સરળતાથી રજૂ કરવા માટે ચલ ઉપયોગી થશે. સ્વાધ્યાય 11.2ના 5મા દાખલામાં સંખ્યાનો એક વધુ ગુણધર્મ આપવામાં આવ્યો છે. આ રીતે સંખ્યાના વધુ ગુણધર્મ શોધી ચલનો ઉપયોગ કરીને તમે દર્શાવો.

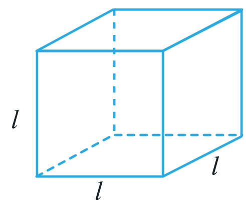
સ્વાધ્યાય 11.2

1. સમબાજુ ત્રિકોણની લંબાઈને l વડે દર્શાવી આ lનો ઉપયોગ કરીને સમબાજુ ત્રિકોણની પરિમિતિ દર્શાવો.

2. નિયમિત ષટ્કોણની (આકૃતિ 11.10)ની બાજુઓને l વડે દર્શાવી આ l ની મદદથી ષટ્કોણ પરિમિતિ દર્શાવો.
(**સૂચના :** નિયમિત ષટ્કોણની બધી જ બાજુઓ સરખી હોય છે.)



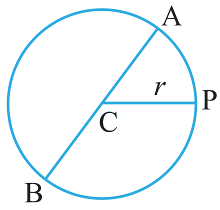
આકૃતિ 11.10



આકૃતિ 11.11

3. 6 સપાટી અને દરેક સપાટી ચોરસ હોય તેવો ત્રિપરિમાણીય ઘન આકૃતિ (11.11)માં દર્શાવેલ છે. ઘનની ધારની લંબાઈને l વડે દર્શાવી, આ ઘનની ધારની કુલ લંબાઈનું સૂત્ર મેળવો.

4. વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતા વર્તુળ પરનાં બે બિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ એ વર્તુળનો વ્યાસ છે. (આકૃતિ 11.12માં $\overline{AB}$ એ વર્તુળનો વ્યાસ છે. C એ તેનું કેન્દ્ર છે. ત્રિજ્યા r ના સંદર્ભમાં વ્યાસ d ને દર્શાવો.)



આકૃતિ 11.12

5. 14, 27 અને 13નો સરવાળો કરવાની આપણી પાસે બે રીતો છે :
   (a) સૌથી પહેલાં આપણે 14 અને 27નો સરવાળો કરી 41 મેળવીશું અને પછી તેમાં 13 ઉમેરીશું. તો કુલ સરવાળો 54 થશે. અથવા
   (b) 27 અને 13નો સરવાળો કરી 40 મેળવીશું અને પછી તેમાં 14 ઉમેરીશું તો સરવાળો 54 થશે. (14 + 27) + 13 = (27 + 13) + 14

આ કોઈ પણ ત્રણ અંક માટે કરી શકાય. આ ગુણધર્મ સરવાળા માટે જૂથનો નિયમ તરીકે ઓળખાય છે. પૂર્ણ સંખ્યાના પ્રકરણમાં આ ગુણધર્મને દર્શાવેલ છે. જે આપણે ભણી ગયાં છીએ. સામાન્ય રીતે અહીં ચલ a, b અને c નો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. તેનો ઉપયોગ કરીને દર્શાવો.

11.7 ચલ સાથે અભિવ્યક્તિ (Expressions)

યાદ કરો : આપણે અંકગણિતમાં અભિવ્યક્તિ (2 × 10) + 3, 3 × 100 + (2 × 10) + 4 રજૂ કરેલ છે. બીજી અભિવ્યક્તિમાં અંકો 2, 3, 4, 10 અને 100નો ઉપયોગ કરેલ છે. આ અભિવ્યક્તિમાં અંકોને સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકારની ક્રિયાથી જોડી શકાય છે. દા.ત., (2 × 10) + 3, અહીં આપણે 2નો 10 સાથે ગુણાકાર કરી 3 ઉમેરી પરિણામ મેળવીએ છીએ. અંકગણિતીય અભિવ્યક્તિનાં બીજાં કેટલાંક ઉદાહરણો.

3 + (4 × 5),	(–3 × 40) + 5
8 – (7 × 2),	14 – (5 – 2)
(6 × 2) –5,	(5 × 7) – (3 × 4)
7 + (8 × 2),	(5 × 7) – (3 × 4 – 7) વગેરે.

ચલનો ઉપયોગ કરીને પણ આ અભિવ્યક્તિ દર્શાવી શકાય. ટૂંકમાં, ચલ સાથેની અભિવ્યક્તિ આપણે જોઈશું. દા.ત., 2n, 5m, x + 10, x – 3 વગેરે. આ ચલ સાથેની અભિવ્યક્તિ સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર જેવી ક્રિયાઓ વડે મેળવી શકાય. દા.ત., અભિવ્યક્તિ 2n એ ચલ n અને 2ના ગુણાકાર વડે દર્શાવી શકાય. અભિવ્યક્તિ (x + 10) એ x માં 10 ઉમેરવાથી મેળવી શકાય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે ચલ જુદી-જુદી કિંમત ધારણ કરી શકે છે. તેને ચોક્કસ કિંમત હોતી નથી. પરંતુ, તેની ઘણી કિંમતો હોય છે. એટલા જ માટે તેમના ઉપર સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર જેવી ક્રિયાઓ કરવામાં આવે છે.

ચલ સંબંધિત અગત્યની બાબત નોંધવા જેવી છે કે આંકડાકીય અભિવ્યક્તિ જેવી કે (4 × 3) + 5 ની કિંમત (4 × 3) + 5 = 12 + 5 = 17 તરત જ મેળવી શકાય છે.

પરંતુ અભિવ્યક્તિ જેવી કે (4x + 5) જે ચલ x સાથેની છે. જેનું મૂલ્ય સીધી રીતે મેળવી શકાતું નથી. જો x ની કોઈ કિંમત આપેલ હોય તો અભિવ્યક્તિ (4x + 5)ની કિંમત ગણી શકાય.

દા.ત., જો x = 3 લેવામાં આવે તો, 4x + 5 = (4 × 3) + 5 = 17 જે આગળ આપણે મેળવેલ છે.

અભિવ્યક્તિ	**શું દર્શાવે છે ?**
(a) y + 5	y માં 5 ઉમેરો.
(b) t – 7	t માંથી 7 બાદ કરો.
(c) 10 a	a નો 10 સાથેનો ગુણાકાર
(d) $\frac{x}{3}$	xનો 3 વડે ભાગાકાર
(e) $-5q$	qનો –5 સાથે ગુણાકાર
(f) $3x + 2$	xનો 3 વડે ગુણાકાર કરી મળેલ ગુણાકારમાં 2 ઉમેરતાં,
(g) 2y – 5	y ને 2 વડે ગુણી, મળેલ પરિણામમાંથી 5 બાદ કરતાં,

આ રીતે બીજી 10 સાદી અભિવ્યક્તિ લખી અને તેને દર્શાવો.

આપેલી સૂચના પ્રમાણે અભિવ્યક્તિને કેવી રીતે લખી શકાય તે માટે નીચેનાં ઉદાહરણ જુઓ :

અભિવ્યક્તિ નીચે આપેલ છે :

(a) 12 ને z માંથી બાદ કરતાં	$z - 12$
(b) 25 ને r માં ઉમેરતાં	$r + 25$
(c) P ને 16 વડે ગુણતાં	$16\,p$
(d) y ને 8 વડે ભાગતાં	$\frac{y}{8}$
(e) m ને –9 વડે ગુણતાં	$-9\,m$
(f) y ને 10 વડે ગુણી મેળવેલ પરિણામમાં 7 ઉમેરતાં	$10\,y + 7$
(g) n ને 2 વડે ગુણાકાર કરી મેળવેલ પરિણામમાંથી 1 બાદ કરતાં	$2\,n - 1$

સરિતા અને અમીનાએ અભિવ્યક્તિની રમત રમવાનું નક્કી કર્યું. તેમને જોવું છે કે અંક 3 અને ચલ xનો ઉપયોગ કરી કેટલી અભિવ્યક્તિ રચી શકાય. શરત એ હતી કે ચાર ક્રિયામાંથી કોઈ પણ ક્રિયાનો એક કરતાં વધુ વખત ઉપયોગ કરવામાં ન આવે અને દરેકમાં x તો હોવો જ જોઈએ. તમે તેમને મદદ કરશો ?

સરિતાએ વિચાર્યું $(x + 3)$

પછી, અમીના $(x - 3)$ સાથે આવે છે.

શું $(3x + 5)$ હોઈ શકે ?
શું $(3x + 3)$ હોઈ શકે ?

તેને $3x$નું સૂચન કર્યું. સરિતાએ તરત જ $\frac{x}{3}$ દર્શાવ્યા.

આ પ્રકારની ચાર અભિવ્યક્તિ આપેલી શરતોને આધીન લખી શકાય ?

પછી તેમણે y, 3 અને 5ના સંયોજનનો પ્રયત્ન કર્યો. માત્ર શરત એટલી જ હતી કે, સરવાળા અથવા બાદબાકી અને ગુણાકાર અથવા ભાગાકારમાંથી કોઈ પણ એક ક્રિયાનો એક કરતાં વધુ વાર ઉપયોગ કરી શકાશે નહિ. અને દરેક અભિવ્યક્તિ yમાં જ હોવી જોઈએ. ચકાસો કે તેમનો જવાબ સાચો છે.

કેટલીક રચનાઓ કરવામાં આવી છે, જે નીચે દર્શાવેલ છે :

$y + 5, y + 3, y - 5, y - 3, 3y, 5y, \frac{y}{3}, \frac{y}{5},$

$3y + 5, 3y - 5, 5y + 3, 5y - 3$

શું તમે વધારે અભિવ્યક્તિ બનાવી શકશો ?

શું $\left(\frac{y}{3}+5\right)$ દર્શાવી શકાશે ?

$(y + 8)$ દર્શાવી શકાશે ?

$15y$ દર્શાવી શકાશે ?

સ્વાધ્યાય 11.3

1. દરેક અંકનો એકથી વધુ ઉપયોગ ન થાય તે રીતે 5, 7 અને 8ના અંકોની (ચલરહિત) જુદી-જુદી અભિવ્યક્તિ કરો. માત્ર સરવાળા, બાદબાકી અને ગુણાકારની ક્રિયાનો ઉપયોગ કરો :

(**Hint :** ત્રણ શક્ય અભિવ્યક્તિ $5 + (8 - 7)$, $5 - (8 - 7)$, $(5 \times 8) + 7$ છે. બીજી અભિવ્યક્તિઓ બનાવી લખો.

2. નીચેનામાંથી કઈ અભિવ્યક્તિ માત્ર આંકડાકીય છે ?

(a) $y + 3$ (b) $(7 \times 20) - 8z$

(c) $5\ (12 - 7) + 7 \times 2$ (d) 5

(e) $3x$ (f) $5 - 5n$

(g) $(7 \times 20) - (5 \times 10) - 45 + p$

3. નીચેની અભિવ્યક્તિમાંની ક્રિયાઓ (સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર) ઓળખી આ અભિવ્યક્તિ શું દર્શાવે છે તે કહો :

(a) $z + 1, z - 1, y + 17, y - 17$ (b) $17y, \frac{y}{17}, 5z$

(c) $2y + 17, 2y - 17$ (d) $7m, -7m + 3, -7m - 3$

4. નીચેના દરેકની અભિવ્યક્તિ આપો :

(a) 7 ને p માં ઉમેરતાં (b) 7 ને pમાંથી બાદ કરતાં

(c) p ને 7 વડે ગુણતાં (d) p ને 7 વડે ભાગતાં

(e) 7 ને – mમાંથી બાદ કરતાં (f) – p ને 5 વડે ગુણતાં

(g) – p ને 5 વડે ભાગતાં (h) p ને – 5 વડે ગુણતાં

5. નીચેની વિગતોની અભિવ્યક્તિ કરો :

(a) 11 ને 2mમાં ઉમેરતાં (b) 11 ને 2m માંથી બાદ કરતાં

(c) y ના 5 ગણામાં 3 ઉમેરતાં (d) y ના 5 ગણામાંથી 3 બાદ કરતાં

(e) y ને – 8 વડે ગુણતાં

(f) y ને– 8 વડે ગુણી મળતાં પરિણામમાં 5 ઉમેરતાં

(g) y ને 5 વડે ગુણી મળતા પરિણામને 16માંથી બાદ કરતાં

(h) y ને – 5 વડે ગુણી મળતા પરિણામમાં 16 ઉમેરતાં

6. (a) એક કરતાં વધુ વખત ક્રિયાઓનો ઉપયોગ ન કરવામાં આવે તે રીતે t અને 4 નો ઉપયોગ કરી અભિવ્યક્તિ લખો. દરેક અભિવ્યક્તિમાં t હોવો જોઈએ.

(b) માત્ર બે જ ક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરી અંકો y, 2 અને 7ની અભિવ્યક્તિ કરો. દરેક અભિવ્યક્તિમાં y હોય જ.

11.8 અભિવ્યક્તિનો વ્યાવહારિક ઉપયોગ

અભિવ્યક્તિ આપણને વ્યાવહારિક જીવનમાં પણ ઉપયોગી થાય છે. તેમાંથી કેટલીક યાદ કરીએ :

પરિસ્થિતિ (સામાન્ય પરિભાષામાં વર્ણન)	ચલ	અભિવ્યક્તિનો ઉપયોગ કરીને વિધાન
1. સરિતા પાસે અમીના કરતાં 10 લખોટી વધુ છે.	ધારો કે અમીના પાસે x લખોટી છે.	સરિતા પાસે $(x + 10)$ લખોટી છે.
2. બાલુ રાજુ કરતાં 3 વર્ષ નાનો છે.	ધારે કે રાજુની ઉંમર x વર્ષ છે.	બાલુની ઉંમર $(x – 3)$ વર્ષ છે.
3. બિકાશ રાજુ કરતાં બમણી ઉંમર ધરાવે છે.	ધારો કે રાજુની ઉંમર x વર્ષ છે.	બિકાશની ઉંમર $2x$ વર્ષ છે.
4. રાજુના પિતાની ઉંમર રાજુની ઉંમરના ત્રણ ગણાથી 2 વધુ છે.	ધારો કે રાજુની ઉંમર x વર્ષ છે.	રાજુના પિતાની ઉંમર $(3x + 2)$ વર્ષ છે.

ચાલો, આવી બીજી પરિસ્થિતિઓ જોઈએ :

પરિસ્થિતિ (સામાન્ય પરિભાષામાં વર્ણન)	ચલ	અભિવ્યક્તિનો ઉપયોગ કરીને વિધાન
5. આજથી 5 વર્ષ પછી સુશાન કેટલાં વર્ષનો હશે ?	ધારો કે સુશાનની હાલની ઉંમર x વર્ષ છે.	આજથી 5 વર્ષ પછી સુશાન $(x + 5)$ વર્ષનો હશે.
6. 4 વર્ષ પહેલાં સુશાન કેટલાં વર્ષનો હશે ?	ધારો કે સુશાનની હાલની ઉંમર x વર્ષ છે.	4 વર્ષ પહેલાં સુશાન $(x – 4)$ વર્ષનો હશે.
7. દર કિલોગ્રામ ઘઉંની કિંમત દર કિલોગ્રામ ચોખા કરતાં 5 રૂપિયા ઓછી છે.	ધારો કે ચોખાની એક કિલોગ્રામની કિંમત p રૂપિયા છે.	દર કિલોગ્રામ ઘઉંની કિંમત $(p – 5)$ રૂપિયા હશે.

8. દર લિટર તેલની કિંમત દર કિગ્રા ચોખાની કિંમત કરતાં 5 ગણી છે.	ધારો કે દર કિલોગ્રામ ચોખાની કિંમત p રૂપિયા છે.	દર લિટર તેલની કિંમત $5p$ રૂપિયા છે.
9. એક જ રસ્તા પર જતી બસની ઝડપ ટ્રકની ઝડપ કરતાં 10 કિમી/કલાક વધારે છે.	ધારો કે ટ્રકની ઝડપને y કિમી/કલાક છે.	બસની ઝડપ $(y + 10)$ કિમી/કલાક હશે.

આવી વધુ પરિસ્થિતિ શોધવાનો પ્રયત્ન કરો. તમે અનુભવશો કે સામાન્ય ભાષામાં આવાં ઘણાં વિધાનો છે કે જે ચલની અભિવ્યક્તિનો ઉપયોગ કરીને વિધાનો લખી શકશો. પછીના વિભાગમાં આપણે આપણા હેતુઓ માટે અભિવ્યક્તિનો આ વિધાનોમાં કેવી રીતે કરીએ તે જોઈશું.

સ્વાધ્યાય 11.4

1. નીચેનાના જવાબ આપો :

(a) સરિતાની હાલની ઉંમર y વર્ષ લો.

(i) 5 વર્ષ પછી તેની ઉંમર કેટલી હશે ?

(ii) 3 વર્ષ પહેલાંની તેની ઉંમર કેટલી હશે ?

(iii) સરિતાના દાદા તેનાથી છ ગણી ઉંમરના છે. તેના દાદાની ઉંમર કેટલી હશે?

(iv) દાદાજી કરતાં દાદીમા બે વર્ષ નાનાં છે, તો દાદીમાની ઉંમર કેટલી હશે ?

(v) સરિતાના પિતાની ઉંમર સરિતાની ઉંમરના 3 ગણાથી 5 વર્ષ વધારે છે, તો તેના પિતાની ઉંમર કેટલી હશે ?

(b) એક લંબચોરસ ખંડની લંબાઈ તેની પહોળાઈના ત્રણ ગણા કરતાં ચાર મીટર ઓછી છે. (તેની પહોળાઈ b મીટર છે.)

(c) એક લંબચોરસ પેટીની ઊંચાઈ h સેમી છે. તેની લંબાઈ ઊંચાઈ કરતાં 5 ગણી અને પહોળાઈ લંબાઈ કરતાં 10 સેમી ઓછી છે. લંબાઈ અને પહોળાઈને પેટીની ઊંચાઈના સંદર્ભમાં દર્શાવો.

(d) મીના, બીના અને લીના પગથિયાં ચઢી ટેકરીની ટોચ તરફ ચઢી રહ્યા છે. મીના 5મા પગથિયા પર છે જ્યારે બીના તેનાથી 8 પગથિયાં આગળ તથા લીના 7 પગથિયાં પાછળ છે. બીના અને લીના ક્યાં હશે ? ટેકરીનાં કુલ પગલાં મીનાએ ભરેલાં પગલાંના 4 ગણા કરતાં 10 ઓછાં છે. સીડીનાં કુલ પગથિયાંની સંખ્યાને ‘S’ નાં પદોમાં વ્યક્ત કરો.

(e) એક બસ v કિલોમીટર/કલાકની ઝડપે દાસપુરથી બીસપુર જઈ રહી છે. બસે 5 કલાક ગતિ કર્યા પછી બીસપુર 20 કિમી જેટલું દૂર છે. તો દાસપુર અને બીસપુર વચ્ચે કેટલું અંતર હશે ? v નો ઉપયોગ કરી દર્શાવો.

2. નીચેનાં આપેલાં વિધાનો કે જેમાં અભિવ્યક્તિનો ઉપયોગ કરેલ છે, તેને સામાન્ય ભાષામાં ફેરવો:
(દાખલા તરીકે, સલિમનો ક્રિકેટ મૅચમાં સ્કોર r રન છે. નવીનનો સ્કોર (r + 15) રન છે. સામાન્ય ભાષામાં નવીનનો સ્કોર સલિમ કરતાં 15 રન વધુ છે.
   (a) નોટબુકની કિંમત p રૂપિયા છે અને ચોપડીની કિંમત 3p રૂપિયા છે.
   (b) ટોમી ટેબલ પર q લખોટી મૂકે છે. તેની પાસે 8q લખોટી પેટીમાં છે.
   (c) અમારા વર્ગમાં n વિદ્યાર્થીઓ છે. શાળામાં 20n વિદ્યાર્થીઓ છે.
   (d) જગ્ગુની ઉંમર z વર્ષ છે. તેના કાકા 4z ઉંમરના છે તેનાં કાકીની ઉંમર (4z – 3) વર્ષ છે.
   (e) બિંદુઓની ગોઠવણીની r હાર છે અને દરેક હારમાં 5 બિંદુઓ છે.

3. (a) મુન્નુની ઉંમર x વર્ષ આપેલ છે. અનુમાન કરો કે $(x-2)$ શું દર્શાવે છે ?
   (**સૂચના :** મુન્નુના નાના ભાઈ માટે વિચારો.)
   $(x + 4)$ અને $(3x + 7)$ શું દર્શાવશે તે કહી શકશો ?
   (b) આજે સારાની ઉંમર y વર્ષ છે. તેની ભવિષ્યની અને ભૂતકાળની ઉંમર વિશે વિચારો.
   આપેલ અભિવ્યક્તિ શું દર્શાવે છે ? $y + 7, y - 3, y + 4\frac{1}{2}, y - 2\frac{1}{2}$
   (c) વર્ગના n વિદ્યાર્થીઓને ફૂટબૉલ ગમે છે. 2n શું દર્શાવશે ? $\frac{n}{2}$ શું દર્શાવશે ?
   (**સૂચન :** ફૂટબૉલ સિવાયની બીજી રમત વિશે વિચારો.)

11.9 સમીકરણ (Equation) શું છે ?

આકૃતિ 11.1માં દર્શાવેલ મૂળાક્ષર L માટેની મૅચસ્ટિક પૅટર્ન આપણે યાદ કરીએ. આપણી સરળતા માટે ફરીથી આકૃતિ 11.1 અહીં દોરીએ :

DHEMIY

(a) (b) (c)

જુદા-જુદા L માટે જુદી-જુદી સંખ્યામાં દીવાસળીની જરૂર પડે છે. જે અગાઉના કોષ્ટકને અહીં ફરીથી લખીએ :

કોષ્ટક 1

રચના માટેના Lની સંખ્યા	1	2	3	4	5	6	7	8	...
જરૂરી દીવાસળીની સંખ્યા	2	4	6	8	10	12	14	16	...

આપણે જાણીએ છીએ કે, જરૂરી દીવાસળીની સંખ્યા 2n નિયમથી મળે છે. જ્યાં L ની રચનાની સંખ્યાઓ માટે n લેવામાં આવે છે.

અપ્પુ હંમેશાં જુદી રીતે જ વિચારે છે. તે કહે છે, આપેલી સંખ્યા L ની રચના માટે જરૂરી દીવાસળીની સંખ્યા કેવી રીતે શોધી શકાય, તે આપણે જાણીએ છીએ? બીજી કોઈ રીતે જાણી શકાય ? આપેલી દીવાસળીની મદદથી કેટલા L રચી શકાય તે શોધો.

આ પ્રશ્ન આપણે પોતાની જાતને પૂછીએ :

જો દીવાસળી 10 આપી હોય તો કેટલા L રચી શકાય ? એનો અર્થ એ છે કે શોધવાના Lની સંખ્યાને n વડે દર્શાવીએ તો દીવાસળીની સળીઓ 10 આપેલી હોવાથી,

$2n = 10$ (1)

અહીં ચલ n ની મદદથી શરત સંતોષાય છે. આ શરત એ સમીકરણનું એક ઉદાહરણ છે.

કોષ્ટક 1માં આપણા પ્રશ્નના જવાબ nની જુદી-જુદી કિંમત માટે આપણે જોઈ શકીએ છીએ. જો $n = 1$ હોય તો દીવાસળીની સંખ્યા 2 છે. શરત આપણી સંતોષાતી નથી, કારણ કે 2 એ 10 નથી. ચાલો, આપણે ચકાસીએ.

n	2n	શરત સંતોષાય છે ? હા/ના
2	4	ના
3	6	ના
4	8	ના
5	10	હા
6	12	ના
7	14	ના

આપણે શોધી શક્યા કે $n = 5$ માટે, શરત એટલે કે સમીકરણ $2n = 10$ સંતોષાય છે.

ચાલો, આપણે બીજું ઉદાહરણ જોઈએ.

બાલુ એ રાજુ કરતાં 3 વર્ષ નાનો છે. રાજુની ઉંમર x વર્ષ લો. બાલુની ઉંમર $(x - 3)$ વર્ષ થશે. ધારો કે બાલુની ઉંમર 11 વર્ષ છે. રાજુની ઉંમર આપણી રીતે કેવી રીતે મળે છે, તે જોઈએ.

બાલુની ઉંમર, $x - 3 = 11$ વર્ષ છે. (2)

આ ચલ xનું સમીકરણ છે. જુદા-જુદા x માટે $(x - 3)$ નું કયું મૂલ્ય મળે છે ? તેનું કોષ્ટક તૈયાર કરીએ :

x	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$x - 3$	0	1	-	-	-	-	-	-	-	9	10	11	12	13	-	-

કોષ્ટકમાં આપેલ ખાલી જગ્યામાંની વિગત પૂર્ણ કરો. આપણે શોધી શક્યા $x = 14$ માટે શરત $x - 3 = 11$ સંતોષાય છે. બીજી કિંમતો જેમ કે $x = 16$ અથવા $x = 12$ માટે શરત સંતોષાતી નથી. તેથી રાજુની ઉંમર 14 વર્ષ છે.

સારાંશ એ છે કે **ચલ આધારિત ઉપર પ્રમાણેના કોઈ પણ સમીકરણ ચલની કોઈ ચોક્કસ કિંમત માટે જ સંતોષાય છે.** દાખલા તરીકે સમીકરણ $2n = 10$ એ ચલ nની માત્ર 5 કિંમત માટે સંતોષાય છે. તે જ રીતે, સમીકરણ $x - 3 = 11$ એ ચલ xની કિંમત 14 માટે સંતોષાય છે.

નોંધો કે સમીકરણની બંને બાજુઓ વચ્ચે **સરખાપણાનું ચિહ્ન (=)** હોય છે. સમીકરણ દર્શાવે છે કે ડાબી બાજુની કિંમત અને જમણી બાજુની કિંમત સરખી હોય છે. જો ડાબી બાજુ અને જમણી બાજુની કિંમત સરખી ન હોય, તો આપણે સમીકરણ મેળવી શકતા નથી.

દાખલા તરીકે $2n$ એ 10 કરતાં મોટા છે, તેવું વિધાન છે. એટલે કે $2n > 10$ એ સમીકરણ નથી તે જ રીતે $2n$ એ 10 કરતાં નાનો છે. એટલે કે $2n < 10$ એ પણ સમીકરણ નથી. વિધાન,

$(x - 3) > 11$ અથવા $(x - 3) < 11$ એ સમીકરણો નથી.

હવે, $8 - 3 = 5$ ગણીએ.

ડાબી બાજુ અને જમણી બાજુ વચ્ચે સરખાપણાનું ચિહ્ન છે. એક પણ બાજુ ચલ નથી. બંને માત્ર અંકો જ છે. જેને આપણે સંખ્યાત્મક સમીકરણ કહીએ છીએ. સામાન્ય રીતે શાબ્દિક સમીકરણમાં મોટે ભાગે એક અથવા વધુ ચલનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે.

ચાલો, મહાવરો કરીએ. નીચેનામાંથી કયાં સમીકરણો ચલ સાથેનાં છે. ચલ સાથેનું જે સમીકરણ હોય તો તેમાં કયો ચલ છે, તે ઓળખો :

(a)	$x + 20 = 70$	(હા, x)
(b)	$8 \times 3 = 24$	(ના, સંખ્યાત્મક સમીકરણ)
(c)	$2p > 30$	(ના)
(d)	$n - 4 = 100$	(હા, n)
(e)	$20b = 80$	(હા, b)
(f)	$\frac{y}{8} < 50$	(ના)

નીચે કેટલાંક સમીકરણનાં ઉદાહરણો આપેલ છે. (સમીકરણમાંથી ચલને પણ ઓળખો.)

જરૂર જણાય ત્યાં ખાલી જગ્યા પૂરો :

$x + 10 = 30$	(ચલ x)
$p - 3 = 7$	(ચલ p)
$3n = 21$	(ચલ ____)
$\frac{t}{5} = 4$	(ચલ ____)
$2l + 3 = 7$	(ચલ ____)
$2m - 3 = 5$	(ચલ ____)

11.10 સમીકરણનો ઉકેલ

અગાઉના અભ્યાસમાં આપણે જોયું કે સમીકરણ,

$$2n = 10 \qquad (1)$$

જે $n = 5$ વડે સંતોષાય છે. બીજી કોઈ પણ કિંમત માટે, સમીકરણ સંતોષાતું નથી. **ચલની જે કિંમત માટે સમીકરણ સંતોષાતું હોય તે કિંમતને સમીકરણનો ઉકેલ કહે છે.**

આ રીતે $n = 5$ સમીકરણ $2n = 10$ નો ઉકેલ છે. નોંધો કે $n = 6$ એ $2n = 10$ સમીકરણનો ઉકેલ નથી, કારણ કે જો $n = 6$ લેવામાં આવે, તો $2n = 2 \times 6 = 12$ એટલે કે 10 નથી. $n = 4$ પણ ઉકેલ નથી. કહો શા માટે ?

ચાલો સમીકરણ $x - 3 = 11$ લઈએ. (2)

આ સમીકરણ $x = 14$ ની કિંમત માટે સંતોષાય છે.

કારણ કે $x = 14$ માટે,

સમીકરણની ડાબી બાજુ $14 - 3 = 11$ = જમણી બાજુ તે $x = 16$ની કિંમત માટે સંતોષાતું નથી, કારણ કે $x = 16$ લેતાં સમીકરણની ડાબી બાજુ $= 16 - 3 = 13$ જે જમણી બાજુ બરાબર નથી.

આ રીતે $x = 14$ એ સમીકરણ $x - 3 = 11$ નો ઉકેલ છે, પણ $x = 16$ એ આ સમીકરણનો ઉકેલ નથી. $x = 12$ પણ આ સમીકરણનો ઉકેલ નથી. સમજાવો, શા માટે નથી ?

સમીકરણ $2n = 10$ માટેનો ઉકેલ શોધો. nની જુદી-જુદી કિંમત માટે, કોષ્ટક તૈયાર કરો અને તેમાંથી શોધી કાઢો કે n ની કઈ કિંમત સમીકરણનો ઉકેલ છે. (એટલે કે કઈ કિંમત સમીકરણ સંતોષે છે.) આપણે અજમાયશ દ્વારા ભૂલસુધાર પદ્ધતિ વાપરી શકીએ, પરંતુ આ ઉકેલ શોધવાની યોગ્ય અને સરળ પદ્ધતિ નથી.

નીચેના કોષ્ટકમાંની બાકીની વિગતો પૂર્ણ કરો અને બતાવો કે તમારો જવાબ હા કે ના કેમ છે ?

સમીકરણ	ચલની કિંમત	ઉકેલ હા/ના
1. $x + 10 = 30$	$x = 10$	ના
2. $x + 10 = 30$	$x = 30$	ના
3. $x + 10 = 30$	$x = 20$	હા
4. $p - 3 = 7$	$p = 5$	ના
5. $p - 3 = 7$	$p = 15$	–
6. $p - 3 = 7$	$p = 10$	–
7. $3n = 21$	$n = 9$	–
8. $3n = 21$	$n = 7$	–
9. $\frac{t}{5} = 4$	$t = 25$	–
10. $\frac{t}{5} = 4$	$t = 20$	–
11. $2l + 3 = 7$	$l = 5$	–
12. $2l + 3 = 7$	$l = 1$	–
13. $2l + 3 = 7$	$l = 2$	–

સમીકરણનો ઉકેલ શોધવાની સીધી રીત જરૂરી છે. સમીકરણના ઉકેલ માટેની વધુ વ્યવસ્થિત પદ્ધતિ આપણે હવે પછીના વર્ષમાં ભણીશું.

બીજગણિતની શરૂઆત

બીજગણિત એ ગણિતની એવી શાખા છે કે જેની શરૂઆત ઈ.સ. પૂર્વે 1550માં થઈ હોય એવું કહેવાય છે. 3500 વર્ષ પૂર્વે ઇજિપ્તના લોકોએ અજ્ઞાત સંખ્યાઓ ઓળખવા માટેના સંકેતનો ઉપયોગ કર્યો હતો.

300 વર્ષ પહેલાં ભારતમાં અજ્ઞાત સંખ્યાઓને અક્ષરોના ઉપયોગથી ઓળખવા અને અભિવ્યક્તિની રચના કરવી એ એક સામાન્ય બાબત હતી. ઘણા મહાન ગણિતશાસ્ત્રીઓ જેવા કે **આર્યભટ્ટ (જન્મ 476 ઈ.સ.)**, **બ્રહ્મગુપ્ત (જન્મ 598 ઈ.સ.)**, **મહાવીર (જે લગભગ 850 ઈ.સ.માં રહ્યા)** અને **ભાસ્કર II (જન્મ 1114 ઈ.સ.)** અને ઘણા બધાએ બીજગણિતના અભ્યાસમાં ઘણો ફાળો આપેલ છે. તેમણે નામ આપેલાં જેવા કે બીજ, વર્ણ વગેરે. અજ્ઞાત સંખ્યાને દર્શાવવા માટે રંગોનાં નામના પ્રથમ અક્ષરનો ઉપયોગ કર્યો. (જેમ કે કાળા માટે કા, અને ની એ નીલા (વાદળી) માટે. બીજગણિત નામ ભારતમાં આ પ્રાચીન ગણિતશાસ્ત્રીઓના સમયનું છે.

ઈ.સ. 825 પૂર્વે અરબના ગણિતશાસ્ત્રી દ્વારા લખાયેલ પુસ્તક 'Aljebar w'al almugabalah' શબ્દ લેવામાં આવેલ છે. તે ગણિતશાસ્ત્રી બગદાદના મહમદ ઈબ્ન અલખ્વારીઝમી હતા.

સ્વાધ્યાય 11.5

1. નીચેનાં પૈકી કયાં સમીકરણો છે, તે કહો. (ચલ સાથેના) તમારા જવાબનું કારણ આપો. ચલ સાથેના સમીકરણમાં કયો ચલ છે તે કહો :

(a) $17 = x + 7$ (b) $(t - 7) > 5$ (c) $\frac{4}{2} = 2$

(d) $(7 \times 3) - 19 = 8$ (e) $5 \times 4 - 8 = 2x$ (f) $x - 2 = 0$

(g) $2m < 30$ (h) $2n + 1 = 11$ (i) $7 = (11 \times 5) - (12 \times 4)$

(j) $7 = (11 \times 2) + p$ (k) $20 = 5y$ (l) $\frac{3q}{2} < 5$

(m) $z + 12 > 24$ (n) $20 - (10 - 5) = 3 \times 5$

(o) $7 - x = 5$

2. આપેલા કોષ્ટકના ત્રીજા સ્તંભમાંની વિગતો પૂર્ણ કરો.

અ.નં.	સમીકરણ	ચલની કિંમત	સમીકરણ સંતોષાય છે ? હા/ના
(a)	$10y = 80$	$y = 10$	
(b)	$10y = 80$	$y = 8$	
(c)	$10y = 80$	$y = 5$	
(d)	$4l = 20$	$l = 20$	
(e)	$4l = 20$	$l = 80$	
(f)	$4l = 20$	$l = 5$	
(g)	$b + 5 = 9$	$b = 5$	
(h)	$b + 5 = 9$	$b = 9$	
(i)	$b + 5 = 9$	$b = 4$	
(j)	$h - 8 = 5$	$h = 13$	
(k)	$h - 8 = 5$	$h = 8$	
(l)	$h - 8 = 5$	$h = 0$	
(m)	$p + 3 = 1$	$p = 3$	
(n)	$p + 3 = 1$	$p = 1$	
(o)	$p + 3 = 1$	$p = 0$	
(p)	$p + 3 = 1$	$p = -1$	
(q)	$p + 3 = 1$	$p = -2$	

3. કૌંસમાં આપેલી કિંમતોમાંથી દરેક સમીકરણનો કયો ઉકેલ છે, તે શોધી કાઢી બતાવો કે બીજી કિંમતો સમીકરણનું સમાધાન કરતી નથી.

(a) $5m = 60$ (10, 5, 12, 15)

(b) $n + 12 = 20$ (12, 8, 20, 0)

(c) $p - 5 = 5$ (0, 10, 5, – 5)

(d) $\frac{q}{2} = 7$ (7, 2, 10, 14)

(e) $r - 4 = 0$ (4, – 4, 8, 0)

(f) $x + 4 = 2$ (– 2, 0, 2, 4)

4. (a) કોષ્ટક પૂર્ણ કરો. કોષ્ટકનું નિરીક્ષણ કરી $m + 10 = 16$ નો ઉકેલ કયો છે, તે કોષ્ટકમાંથી શોધી કાઢો :

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	–	–	–
$m + 10$	–	–	–	–	–	–	–	–					

(b) કોષ્ટક પૂર્ણ કરો. આ કોષ્ટકનું નિરીક્ષણ કરી $5t = 35$ સમીકરણનો ઉકેલ શોધો :

t	3	4	5	6	7	8	9	10	11	–	–	–	–
$5t$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

(c) કોષ્ટક પૂર્ણ કરો. આ કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરી સમીકરણ $\frac{z}{3} = 4$નો ઉકેલ શોધો.

z	8	9	10	11	12	13	14	15	16	–	–	–	–
$\frac{z}{3}$	$2\frac{2}{3}$	3	$3\frac{1}{3}$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

(d) કોષ્ટક પૂર્ણ કરો અને સમીકરણ $m - 7 = 3$નો ઉકેલ શોધો.

m	5	6	7	8	9	10	11	12	13	–	–
$m–7$	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

5. નીચેના કોયડાનો અભ્યાસ કરો. તમે તમારી જાતે આ પ્રકારના કોયડા રચો :

હું કોણ છું ?

(i) ચોરસની ફરતે ફરો. દરેક ખૂણાને ત્રણવાર ગણો અને મારામાં સરવાળો કરીને 34 મેળવો.

(ii) અઠવાડિયાના દરેક દિવસને મારાથી આગળ ગણો. જો તમે કોઈ ભૂલ ન કરી હોય તો તમને ત્રેવીસ મળશે.

(iii) હું એક વિશિષ્ટ સંખ્યા છું. મારામાંથી છ કાઢો. તમે ક્રિકેટની એક આખી ટીમ બનાવવા માટે સક્ષમ છો.

(iv) બતાવો કે હું કોણ છું ? હું એક સુંદર ચાવી આપું છું. તમારે ફરીથી મને જોઈતી હોય તો જો તમે મને બાવીસમાંથી બાદ કરશો તો મળશે.

આપણે શી ચર્ચા કરી ?

1. આપેલા આકારો ફરીથી કરવા અને તે માટે દીવાસળીની સંખ્યા વચ્ચેનો સામાન્ય સંબંધ કેવી રીતે લખાય તે પણ આપણે શીખ્યાં. આ આકાર જેનાથી બનાવાય છે અને જેટલી વાર બનાવવામાં આવે છે તે સંખ્યા બદલાય છે તે કિંમત 1, 2, 3,... છે, જે ચલ છે અને તેને કોઈ અક્ષર n વડે ઓળખવામાં આવે છે.

2. ચલ એ જુદી-જુદી કિંમત ધારણ કરે છે, તેની કિંમત ચોક્કસ હોતી નથી. ચોરસની લંબાઈ પણ કોઈ કિંમત હોય છે, પરંતુ ત્રિકોણના ખૂણાઓની સંખ્યા ચોક્કસ હોય છે અને તે ત્રણ છે. તે ચલ નથી.
3. આપણે ચલ દર્શાવવા કોઈ પણ અક્ષર n, l, m, p, x, y, z વગેરે લઈ શકીએ.
4. વ્યાવહારિક સ્થિતિમાં ચલની મદદથી સંબંધો આપણે વ્યક્ત કરી શકીએ છીએ.
5. ચલ એ એવી સંખ્યાઓ છે જેની કિંમત ચોક્કસ નથી. આપણે તેનાં પર સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર જેવી ક્રિયાઓ ચોક્કસ સંખ્યાઓની જેમ કરી શકીએ. જુદી-જુદી ક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરી આપણે ચલ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકીએ, જેમ કે, $x - 3$, $x + 3$, $2n$, $5m$, $\frac{p}{3}$, $2y + 3$, $3l - 5$, વગેરે.

6. ભૂમિતિ અને અંકગણિત બંનેમાં એવા ઘણા સામાન્ય નિયમો આપણે ચલ વડે દર્શાવી શકીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે, એ નિયમ છે કે બે સંખ્યાઓનો સરવાળો. કોઈ પણ ક્રમમાં કરવાથી પરિણામ તે જ રહે છે. તેને $a + b = b + a$ સ્વરૂપમાં લખી શકાય છે. અહીં ચલ a અને b કોઈ પણ સંખ્યા 1, 32, 100, –7, –20 વગેરે માટે લઈ શકાય.
7. સમીકરણ એ ચલ પર આધારિત હોય છે. તે એક ચલ સાથેની અભિવ્યક્તિ અને ચોક્કસ સંખ્યા બરાબર હોય છે. જેમ કે, $x - 3 = 10$
8. સમીકરણને બે બાજુઓ હોય છે : ડા.બા. અને જ.બા. તેમની બંનેની વચ્ચે (=)ની નિશાની હોય છે.
9. સમીકરણમાંના ચલની કોઈ ચોક્કસ કિંમત માટે જ સમીકરણની જમણી બાજુ અને ડાબી બાજુ સરખી થાય છે. આપણે કહીશું કે ચલની ચોક્કસ કિંમત સમીકરણને સંતોષે છે. આ કિંમતને સમીકરણનો ઉકેલ કહે છે.
10. સમીકરણનો ઉકેલ મેળવવા માટેની એક પદ્ધતિ છે. અજમાયશ અને ભૂલની પદ્ધતિ આ પદ્ધતિમાં આપણને ચલની કેટલીક કિંમતો આપેલી હોય છે. એ તપાસી સમીકરણને સંતોષે તે નક્કી કરવામાં આવે છે. આપણને સમીકરણને સંતોષે તેવી કોઈ ચોક્કસ કિંમત ન મળે ત્યાં સુધી ચલની જુદી-જુદી કિંમતો લેવામાં આવે છે.