યામ ભૂમિતિ 7

Y4S5Q6

7.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ IX માં આપણે શીખ્યાં કે, સમતલમાં કોઈ બિંદુનું સ્થાન દર્શાવવા માટે આપણને પરસ્પર લંબ યામાક્ષોની જોડની જરૂર પડે છે. y-અક્ષથી કોઈ બિંદુના અંતરને x-યામ અથવા **કોટિ** કહે છે. x-અક્ષથી કોઈ બિંદુના અંતરને y-યામ અથવા **ભુજ** કહે છે. x-અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુના યામ $(x, 0)$ સ્વરૂપમાં અને y-અક્ષ પરના કોઈ પણ બિંદુના યામ $(0, y)$ સ્વરૂપમાં હોય છે.

આપણે એક રમત રમીએ આલેખપત્ર પર પરસ્પર લંબ હોય તેવા અક્ષોની જોડી લો. હવે નીચે દર્શાવેલાં બિંદુઓનું નિરૂપણ કરો અને સૂચના પ્રમાણે જોડો : બિંદુ A(4, 8), B(3, 9), C(3, 8), D(1, 6), E(1, 5), F(3, 3), G(6, 3), H(8, 5), I(8, 6), J(6, 8), K(6, 9), L(5, 8) ને ક્રમશઃ જોડી L ને A સાથે જોડો. હવે બિંદુઓ P(3.5, 7), Q (3, 6) અને R(4, 6) ને ક્રમશઃ જોડમાં જોડવાથી એક ત્રિકોણ રચાશે. વળી બિંદુઓ X(5.5, 7), Y(5, 6) અને Z(6, 6) ને ક્રમશઃ જોડમાં જોડવાથી એક ત્રિકોણ બનશે. હવે S(4, 5), T(4.5, 4) અને U(5, 5)ને ક્રમશઃ જોડમાં જોડવાથી ત્રિકોણ બનશે. અંતમાં S ને બિંદુઓ (0, 5) અને (0, 6) સાથે તથા U ને બિંદુઓ (9, 5) અને (9, 6) સાથે જોડો. તમને કેવું ચિત્ર મળશે ?

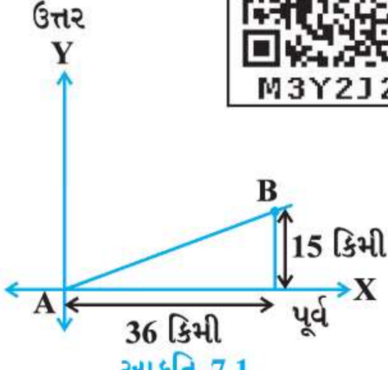
વળી, તમે જોયું છે કે, $ax + by + c = 0$ (a, b બંને એક સાથે શૂન્ય નથી.) સ્વરૂપના દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનું આલેખપત્ર પર નિરૂપણ કરતાં એક રેખા મળે છે. વધુમાં પ્રકરણ 2 માં આપણે $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ નો પરવલય સ્વરૂપનો આલેખ જોયો હતો. ખરેખર તો યામભૂમિતિનો વિકાસ આકૃતિઓની ભૂમિતિ સમજવા માટે એક બીજગણિતીય ઉપકરણ તરીકે કરવામાં આવ્યો છે. તે આપણને બીજગણિતનો ઉપયોગ કરીને ભૂમિતિનો અભ્યાસ કરવા અને ભૂમિતિની મદદથી બીજગણિત સમજવામાં મદદરૂપ થાય છે. આ કારણે યામભૂમિતિ, ભૌતિકશાસ્ત્ર, ઈજનેરી, નૌકાશાસ્ત્ર, ભૂકંપશાસ્ત્ર, કલા જેવાં વિવિધ ક્ષેત્રોમાં વ્યાપક રીતે વપરાય છે.

આ પ્રકરણમાં, આપણે જેમના યામ આપેલા હોય એવાં બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર શોધતાં શીખીશું અને આપેલાં ત્રણ બિંદુઓથી રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધીશું. આપણે આપેલાં બે બિંદુઓને જોડતા રેખાખંડનું આપેલા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુના યામ કેવી રીતે શોધી શકાય તેનો પણ અભ્યાસ કરીશું.

7.2 અંતરસૂત્ર

ચાલો, આપણે નીચેની પરિસ્થિતિનો વિચાર કરીએ :

એક શહેર A થી શહેર B પૂર્વમાં 36 કિમી અને ઉત્તરમાં 15 કિમી અંતરે આવેલ છે. ખરેખર માપ્યા વગર તમે શહેર A અને શહેર B વચ્ચેનું અંતર કેવી રીતે શોધી શકો? ચાલો આપણે જોઈએ. આ પરિસ્થિતિને આકૃતિ 7.1માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આલેખમાં દર્શાવી શકાય. તમે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી અંતરની ગણતરી કરી શકો.



આકૃતિ 7.1

હવે, ધારો કે બે બિંદુઓ x-અક્ષ પર આવેલાં હોય, તો આપણે તેમની વચ્ચેનું અંતર શોધી શકીએ? ઉદાહરણ તરીકે બે બિંદુઓ A (4, 0) અને B (6, 0) લો. આકૃતિ 7.2 માં બિંદુઓ A અને B x-અક્ષ પર આવેલાં છે.

આકૃતિ પરથી તમે જોઈ શકો કે, OA = 4 એકમ અને OB = 6 એકમ છે.

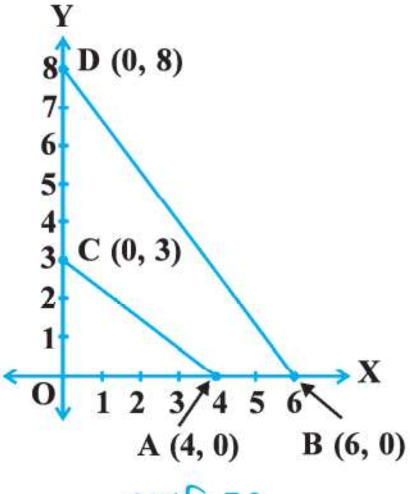
આથી, B થી A સુધીનું અંતર,

AB = OB – OA = 6 – 4 = 2 એકમ

માટે, જો બે બિંદુઓ x-અક્ષ પર આવેલાં હોય, તો આપણે સરળતાથી તેમની વચ્ચેનું અંતર શોધી શકીએ.

હવે, ધારો કે આપણે બે બિંદુઓ y-અક્ષ પર લઈએ. શું આપણે તેમની વચ્ચેનું અંતર શોધી શકીએ ? ધારો કે, બિંદુઓ C (0, 3) અને D (0, 8) y-અક્ષ પર આવેલાં છે. તે જ રીતે આપણે મેળવી શકીએ કે,

CD = 8 – 3 = 5 એકમ (જુઓ આકૃતિ 7.2.)

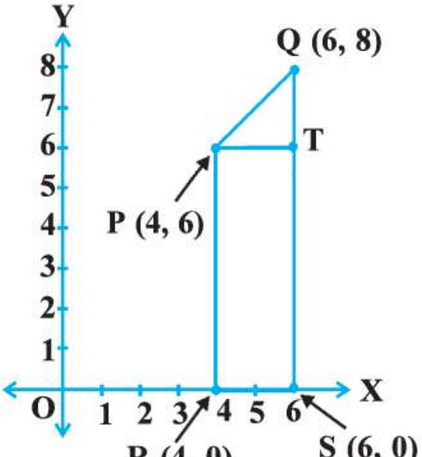


આકૃતિ 7.2

હવે, તમે A થી C નું અંતર શોધી શકો ? (આકૃતિ 7.2માં) OA = 4 એકમ અને OC = 3 એકમ હોવાથી, A થી C સુધીનું અંતર AC = $\sqrt{3^2+4^2}$ = 5 એકમ. આ જ પ્રમાણે તમે B થી D સુધીનું અંતર BD = 10 એકમ મેળવી શકો.

હવે, જો આપણે અક્ષો પર ન હોય તેવાં બે બિંદુઓ વિચારીએ તો, શું આપણે તે બંને વચ્ચેનું અંતર શોધી શકીએ ? હા ! આપણે તે મેળવવા માટે પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી શકીએ. ચાલો, આપણે એક ઉદાહરણ જોઈએ.

આકૃતિ 7.3 માં બિંદુઓ P (4, 6) અને Q (6, 8) પ્રથમ ચરણમાં આવેલાં છે. આ બંને વચ્ચેનું અંતર શોધવા માટે આપણે કેવી રીતે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીશું ? ચાલો, આપણે P અને Q માંથી x-અક્ષ પરના લંબ અનુક્રમે PR અને QS દોરીએ. વળી, P માંથી QS ને T માં છેદતો QS પરનો લંબ દોરીએ. આથી, R અને S ના યામ અનુક્રમે (4, 0) અને (6, 0) થાય. માટે, RS = 2 એકમ. વળી, QS = 8 એકમ અને TS = PR = 6 એકમ.



આકૃતિ 7.3

આથી, QT = 2 એકમ અને PT = RS = 2 એકમ.

હવે, પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં

આપણને $PQ^2 = PT^2 + QT^2$

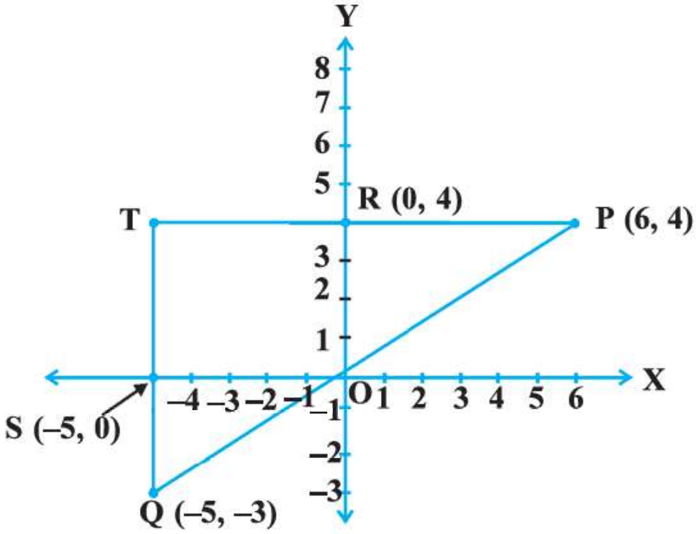
$= 2^2 + 2^2 = 8$

આથી, $PQ = 2\sqrt{2}$ એકમ મળે.

અલગ-અલગ ચરણમાં રહેલાં બે બિંદુઓ વચ્ચેનું અંતર આપણે કેવી રીતે મેળવીશું ?

બે બિંદુઓ P (6, 4) અને Q (–5, –3)નો વિચાર કરો. (જુઓ આકૃતિ 7.4.)

x-અક્ષ પરનો લંબ QS દોરો. બિંદુ P માંથી QS પર (લંબાવતાં...) લંબ PT પણ દોરો. તે y-અક્ષ ને R બિંદુએ છેદે છે.



આકૃતિ 7.4

આથી PT = 11 એકમ અને QT = 7 એકમ (શા માટે ?)

કાટકોણ ત્રિકોણ PTQ માટે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં આપણને $PQ = \sqrt{11^2+7^2} = \sqrt{170}$ એકમ મળે.

ચાલો, હવે આપણે કોઈ પણ બે બિંદુઓ P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) વચ્ચેનું અંતર શોધીએ. x-અક્ષ પરના લંબ PR અને QS દોરીએ. બિંદુ P માંથી QS પરનો લંબ દોરતાં તે QS ને બિંદુ T માં મળે છે. (જુઓ આકૃતિ 7.5.)

તેથી $OR = x_1$, $OS = x_2$ આથી, $RS = x_2 - x_1 = PT$

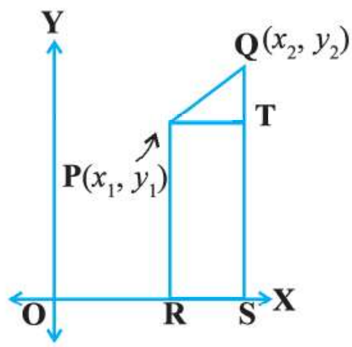
વળી, $SQ = y_2$, $ST = PR = y_1$ આથી, $QT = y_2 - y_1$

હવે, Δ PTQ માટે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરતાં, આપણને

$PQ^2 = PT^2 + QT^2$ મળે.

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

આથી, $PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$



આકૃતિ 7.5

નોંધ કરો કે અંતર હંમેશાં અનૃણ હોય. આથી આપણે માત્ર ધન વર્ગમૂળ જ લઈશું. માટે બિંદુઓ P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) વચ્ચેનું અંતર,

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

આને **અંતરસૂત્ર** કહે છે.

નોંધ :

1. ખાસ કરીને, બિંદુ P (x, y)નું ઊગમબિંદુ O (0, 0)થી અંતર $OP = \sqrt{x^2 + y^2}$ દર્શાવી શકાય.

2. આપણે, $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ પણ લખી શકીએ (શા માટે ?)

3. આ સાબિતી આપણે P તથા Q ને પ્રથમ ચરણમાં લઈને આપી છે, પરંતુ તેમની કોઈ પણ સ્થિતિ માટે સૂત્ર યથાર્થ છે.

ઉદાહરણ 1 : બિંદુઓ (3, 2), (–2, –3) અને (2, 3) એક ત્રિકોણ બનાવશે ? જો હા, તો રચાયેલ ત્રિકોણનો પ્રકાર જણાવો.

ઉકેલ : આપેલ બિંદુઓ P (3, 2), Q (–2, –3) અને R (2, 3) માટે અંતર PQ, QR અને PR શોધવા માટે અંતરસૂત્રનો ઉપયોગ કરીએ.

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07 \text{ (આશરે)}$$

$$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21 \text{ (આશરે)}$$

$$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41 \text{ (આશરે)}$$

કોઈ પણ બે બાજુની લંબાઈનો સરવાળો ત્રીજી બાજુની લંબાઈ કરતાં વધારે હોવાથી બિંદુઓ P, Q અને R ત્રિકોણ રચશે. વળી, $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ હોવાથી પાયથાગોરસના પ્રતિપ્રમેયના વિધાન પરથી કહી શકાય કે, $\angle P = 90°$. માટે ત્રિકોણ PQR એ કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

ઉદાહરણ 2 : બિંદુઓ A (1, 7), B (4, 2), C (–1, –1) અને D (– 4, 4) એ એક ચોરસનાં શિરોબિંદુઓ છે તેમ દર્શાવો.

ઉકેલ : A (1, 7), B (4, 2), C (–1, –1) અને D (– 4, 4) એ આપેલાં બિંદુઓ છે. ABCD ચોરસ છે તે દર્શાવવા માટેનો એક રસ્તો એ છે કે ચોરસની બધી બાજુઓ સમાન હોય તથા તેના વિકર્ણો પણ સમાન હોય એ ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીએ. હવે,

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

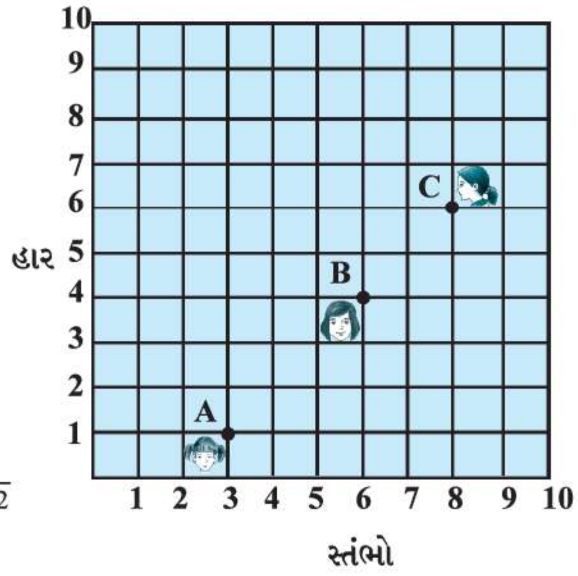
$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

AB = BC = CD = DA અને AC = BD હોવાથી ચતુષ્કોણ ABCDની ચારેય બાજુઓ સમાન છે અને તેના વિકર્ણો AC અને BD પણ સમાન છે. આથી, ABCD એ એક ચોરસ છે.

વૈકલ્પિક ઉકેલ : આપણે ચારેય બાજુઓ તથા એક વિકર્ણ AC ઉપર પ્રમાણે શોધીએ. અહીં, $AD^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$. આથી પાયથાગોરસના પ્રમેયના પ્રતીપ અનુસાર $\angle D = 90°$ થાય. એક ચતુષ્કોણ કે જેની ચારેય બાજુઓ સમાન હોય તથા જેનો એક ખૂણો 90° હોય તે ચોરસ છે. માટે ABCD એક ચોરસ છે.

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 7.6 એક વર્ગખંડમાં પાટલીઓની ગોઠવણી દર્શાવે છે. અસીમા, ભારતી અને કેમેલિયા અનુક્રમે A (3, 1), B (6, 4) અને C (8, 6) સ્થાન પર બેઠેલાં છે. તમે કલ્પી શકો છો કે, તે એક જ રેખામાં બેઠેલાં છે ? તમારા ઉત્તર માટેનું કારણ દર્શાવો.



આકૃતિ 7.6

ઉકેલ : અંતરસૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં આપણી પાસે ...

$$AB = \sqrt{(6-3)^2+(4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2+(6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2+(6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$ હોવાથી, આપણે કહી શકીએ કે, બિંદુઓ A, B અને C સમરેખ છે. આથી, અસીમા, ભારતી અને કેમેલિયા એક જ હરોળમાં બેઠા છે.

ઉદાહરણ 4 : બિંદુ (x, y) એ બિંદુઓ (7, 1) અને (3, 5) થી સમાન અંતરે છે તો x અને y વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવો.

ઉકેલ : ધારો કે $P(x, y)$ એ બિંદુઓ $A(7, 1)$ અને $B(3, 5)$ થી સમાન અંતરે છે.

આપણને $AP = BP$ આપેલ છે.

આથી, $AP^2 = BP^2$ થાય.

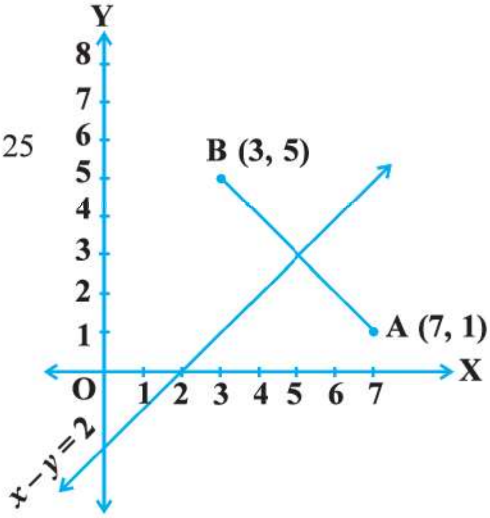
$$(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

$$\therefore x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

$$\therefore \qquad x - y = 2$$

એ માંગેલ સંબંધ છે.

નોંધ : આપણે નોંધીએ કે, સમીકરણ $x - y = 2$ નો આલેખ રેખા છે. તમારા ભૂમિતિના અગાઉના અભ્યાસ પરથી, તમે જાણો છો કે, બિંદુ A અને B થી સમાન અંતરે આવેલ બિંદુ AB ના લંબદ્વિભાજક પરનું બિંદુ હોય. આથી, $x - y = 2$ નો આલેખ એ AB નો લંબદ્વિભાજક છે. (જુઓ આકૃતિ 7.7.)



આકૃતિ 7.7

ઉદાહરણ 5 : બિંદુઓ A (6, 5) અને B (– 4, 3) થી સમાન અંતરે આવેલ હોય તેવું y-અક્ષ પરનું બિંદુ શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, y-અક્ષ પરનું કોઈ પણ બિંદુ $(0, y)$ સ્વરૂપમાં હોય. આથી, ધારો કે P $(0, y)$ એ A અને B થી સમાન અંતરે આવેલ છે. તેથી

$$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$$

$$\therefore\ 36 + 25 - 10y + y^2 = 16 + 9 - 6y + y^2$$

$$\therefore\ 4y = 36$$

$$\therefore\ y = 9$$

આથી, માંગેલ બિંદુ (0, 9) છે.

ચાલો, આપણે ઉકેલ ચકાસીએ : $AP = \sqrt{(6-0)^2+(5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$BP = \sqrt{(-4-0)^2+(3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

નોંધ : ઉપરની નોંધનો અભ્યાસ કરતાં જણાશે કે, (0, 9) એ AB ના લંબદ્વિભાજક અને y-અક્ષનું છેદબિંદુ છે.

સ્વાધ્યાય 7.1

1. નીચે આપેલ બિંદુઓની જોડ વચ્ચેનું અંતર શોધો :

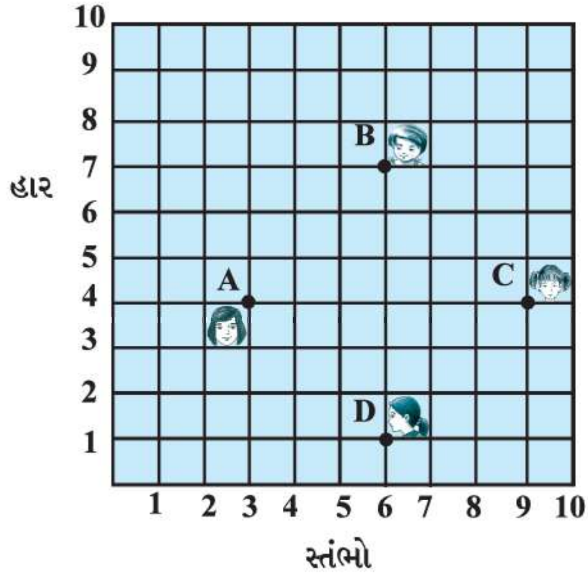
(i) (2, 3), (4, 1) (ii) (– 5, 7), (– 1, 3) (iii) $(a, b), (-a, -b)$

2. બિંદુઓ (0, 0) અને (36, 15) વચ્ચેનું અંતર શોધો. હવે, તમે વિભાગ 7.2 માં જેની ચર્ચા કરેલ તે બે શહેરો A અને B વચ્ચેનું અંતર શોધી શકો.

3. બિંદુઓ (1, 5), (2, 3) અને (–2, –11) અસમરેખ છે તેમ પ્રસ્થાપિત કરો.

4. ચકાસો કે, (5, –2), (6, 4) અને (7, –2) એ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓ છે.

5. એક વર્ગખંડમાં ચાર મિત્રો આકૃતિ 7.8માં દર્શાવેલ બિંદુઓ A, B, C અને D દ્વારા દર્શાવેલ સ્થાન પર બેઠા છે. ચંપા અને ચમેલી વર્ગમાં આવી અને થોડી મિનિટોના અવલોકન બાદ ચંપાએ ચમેલીને પૂછ્યું કે "શું તું એવું માને છે કે, ABCD ચોરસ છે ? ચમેલી અસહમત થાય છે. અંતરસૂત્રનો ઉપયોગ કરી કોણ સાચું છે તે શોધો.



આકૃતિ 7.8

6. નીચે દર્શાવેલાં બિંદુઓથી જો ચતુષ્કોણ રચાતો હોય તો તેનો પ્રકાર જણાવો અને તમારા જવાબ માટે કારણ આપો :

(i) (–1, –2), (1, 0), (–1, 2), (–3, 0)

(ii) (–3, 5), (3, 1), (0, 3), (–1, – 4)

(iii) (4, 5), (7, 6), (4, 3), (1, 2)

7. જે (2, –5) અને (–2, 9) થી સમાન અંતરે હોય તેવું x-અક્ષ પરનું બિંદુ શોધો.

8. બિંદુઓ P (2, – 3) અને Q (10, y) વચ્ચેનું અંતર 10 એકમ હોય તો, y ની કિંમત શોધો.

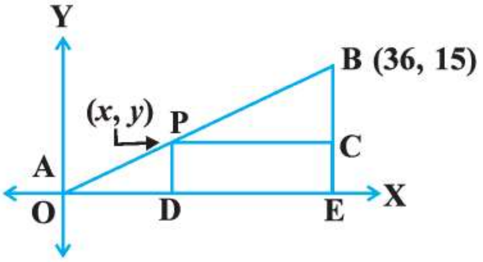
9. જો Q (0, 1) એ P (5, –3) અને R (x, 6) થી સમાન અંતરે હોય તો, x ની કિંમત શોધો. અંતર QR અને PR પણ શોધો.

10. બિંદુ (x, y) એ બિંદુઓ (3, 6) અને (–3, 4) થી સમાન અંતરે હોય, તો x અને y વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.

7.3 વિભાજન સૂત્ર

R8T6T4

ચાલો, વિભાગ 7.2 ની પરિસ્થિતિ યાદ કરીએ. ધારો કે એક ટેલિફોન કંપની પોતાના પ્રસારણ ટાવર P ને A અને B ની વચ્ચે એવી રીતે સ્થાપવા માંગે છે કે, જેથી ટાવર P થી B નું અંતર એ P થી A ના અંતર કરતાં બમણું હોય. જો P એ AB પર આવેલ હોય, તો તે AB ને 1:2 ગુણોત્તરમાં વિભાગે. (જુઓ આકૃતિ 7.9). જો આપણે A ને ઊગમબિંદુ O તરીકે લઈએ અને બંને અક્ષો પર 1 એકમને 1 કિમી તરીકે લઈએ. B ના યામ (36, 15) થાય. ટાવરનું સ્થાન જાણવા માટે આપણે P ના યામ જાણવા જ પડે. આ યામ આપણે કેવી રીતે શોધી શકીએ ?



આકૃતિ 7.9

ધારો કે, P ના યામ (x, y) છે. P અને B માંથી x-અક્ષ પર દોરેલા લંબ તેને અનુક્રમે D અને E માં મળે છે. P માંથી BE ને લંબ PC દોરો. બાદમાં, પ્રકરણ 6માં ભણી ગયા છો તે સમરૂપતાની ખૂખૂ શરત પ્રમાણે ΔPOD અને Δ BPC સમરૂપ થશે.

માટે, $\frac{\text{OD}}{\text{PC}} = \frac{\text{OP}}{\text{PB}} = \frac{1}{2}$ અને $\frac{\text{PD}}{\text{BC}} = \frac{\text{OP}}{\text{PB}} = \frac{1}{2}$

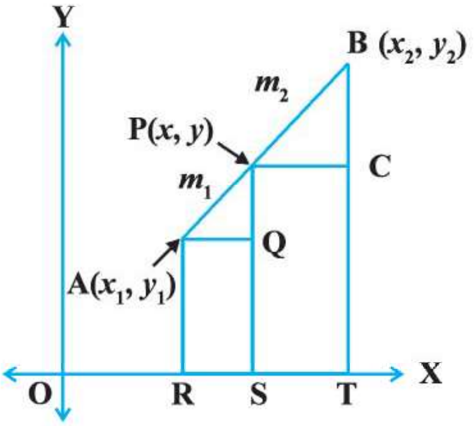
તેથી, $\frac{x}{36-x} = \frac{1}{2}$ અને $\frac{y}{15-y} = \frac{1}{2}$

આ સમીકરણો પરથી $x = 12$ અને $y = 5$ મળે.

તમે ચકાસી શકો કે, P(12, 5) હોય, તો OP : PB = 1 : 2 ની સ્થિતિ બને.

હવે, આ ઉદાહરણ દ્વારા વ્યાપક સૂત્ર મેળવવા માટેની જે સમજ તમે વિકસાવી છે તેનો ઉપયોગ કરીશું.

કોઈ પણ બે બિંદુઓ A (x_1, y_1) અને B (x_2, y_2)નો વિચાર કરો અને ધારો કે, P (x, y) એ ABનું $m_1 : m_2$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે.



આકૃતિ 7.10

તેથી $\frac{\text{PA}}{\text{PB}} = \frac{m_1}{m_2}$ (જુઓ આકૃતિ 7.10.)

x-અક્ષ પર લંબ AR, PS અને BT દોરો. AQ અને PC એ x-અક્ષને સમાંતર દોરો. બાદમાં સમરૂપતાની ખૂખૂ શરત મુજબ,

$$\Delta \text{ PAQ} \sim \Delta \text{ BPC}$$

માટે, $$\frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC} \qquad (1)$$

હવે, $$AQ = RS = OS - OR = x - x_1$$
$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$
$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$
$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

આ કિંમતોને પરિણામ (1)માં મૂકતાં, આપણને,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x-x_1}{x_2-x} = \frac{y-y_1}{y_2-y} \text{ મળે.}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x-x_1}{x_2-x} \text{ લેતાં, આપણને } x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2} \text{ મળે.}$$

આ જ પ્રમાણે $\frac{m_1}{m_2} = \frac{y-y_1}{y_2-y}$ લેતાં, આપણને $y = \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$ મળે.

આથી, બિંદુઓ A (x_1, y_1) અને B (x_2, y_2)ને જોડતા રેખાખંડનું $m_1 : m_2$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતા બિંદુ P (x, y)ના યામ,

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right) \text{ મળે.} \qquad (2)$$

આ સૂત્ર વિભાજન સૂત્ર તરીકે ઓળખાય છે.

y-અક્ષ પર A, P અને B માંથી લંબ દોરીને પણ આ સૂત્ર ઉપરની પ્રક્રિયા અનુસાર મેળવી શકાય.

જો P એ AB નું $k : 1$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે તો P ના યામ

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}\right) \text{ થાય.}$$

એક અગત્યનું તારણ : રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ રેખાખંડનું 1:1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે. માટે, A (x_1, y_1) અને B (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુ P ના યામ

$$\left(\frac{1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2}{1+1}, \frac{1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

ચાલો આપણે વિભાજન સૂત્ર આધારિત કેટલાંક ઉદાહરણો ગણીએ.

ઉદાહરણ 6 : બિંદુઓ (4, –3) અને (8, 5) ને જોડતા રેખાખંડનું 3:1 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતા બિંદુના યામ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે, P (x, y) એ માંગેલ બિંદુ છે. વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં આપણને,

$$x = \frac{3(8)+1(4)}{3+1} = 7, \quad y = \frac{3(5)+1(-3)}{3+1} = 3 \text{ મળે.}$$

માટે, (7, 3) એ માંગેલ બિંદુ છે.

ઉદાહરણ 7 : બિંદુ $(-4, 6)$ એ બિંદુઓ A $(-6, 10)$ અને B $(3, -8)$ ને જોડતા રેખાખંડનું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે ?

ઉકેલ : ધારો કે, $(-4, 6)$ એ AB નું $m_1 : m_2$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે. વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં, આપણને,

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad (1)$$

યાદ કરો કે, જો $(x, y) = (a, b)$ તો $x = a$ અને $y = b$

આથી, $-4 = \dfrac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ અને $6 = \dfrac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$

હવે, $-4 = \dfrac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ પરથી,

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$
$$7m_1 = 2m_2$$
$$m_1 : m_2 = 2 : 7$$

તમે ચકાસી શકો છો કે, આ ગુણોત્તર y-યામનું પણ સમાધાન કરે છે.

હવે, $\dfrac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \dfrac{-8\dfrac{m_1}{m_2} + 10}{\dfrac{m_1}{m_2} + 1}$ (m_2 વડે અંશ અને છેદને ભાગતાં)

$$= \frac{-8 \times \frac{2}{7} + 10}{\frac{2}{7} + 1} = 6$$

માટે, બિંદુ $(-4, 6)$ એ બિંદુઓ A $(-6, 10)$ અને B $(3, -8)$ ને જોડતા રેખાખંડનું $2 : 7$ ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

વૈકલ્પિક રીતે : ગુણોત્તર $m_1 : m_2$ ને $\dfrac{m_1}{m_2} : 1$ અથવા $k : 1$ પણ લખી શકાય. ધારો કે, $(-4, 6)$ એ AB નું $k : 1$ ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે. વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં આપણને,

$$(-4, 6) = \left(\frac{3k - 6}{k + 1}, \frac{-8k + 10}{k + 1}\right) \text{ મળે.} \qquad (2)$$

આથી, $-4 = \dfrac{3k - 6}{k + 1}$

$$\therefore -4k - 4 = 3k - 6$$
$$\therefore 7k = 2$$
$$\therefore k : 1 = 2 : 7$$

તમે y-યામ માટે પણ આ પરિણામ ચકાસી શકો.

આથી, બિંદુ (– 4, 6) એ બિંદુઓ A (– 6, 10) અને B (3, – 8) ને જોડતા રેખાખંડનું 2 : 7 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.

નોંધ : જો A, P અને B સમરેખ છે તેમ આપેલું હોય તો તમે અંતર PA અને PB શોધી PA અને PBનો ગુણોત્તર મેળવી આ ગુણોત્તર પણ શોધી શકો, જો કે વિભાજન માટે સમરેખતા આવશ્યક છે.

ઉદાહરણ 8 : બિંદુઓ A (2, –2) અને B (–7, 4) ને જોડતા રેખાખંડનાં ત્રિભાગ બિંદુઓ (અહીં, બિંદુઓ રેખાખંડનું ત્રણ સમાન ભાગમાં વિભાજન કરે છે.) ના યામ શોધો.

આકૃતિ 7.11

ઉકેલ : ધારો કે, P અને Q એ AB ને ત્રિભાગતાં બિંદુઓ છે.

જેથી, AP = PQ = QB (જુઓ આકૃતિ 7.11.)

માટે, P એ AB નું 1:2 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે છે. આથી, વિભાજન સૂત્રનો ઉપયોગ કરતા બિંદુ P ના યામ,

$$\left(\frac{1(-7)+2(2)}{1+2}, \frac{1(4)+2(-2)}{1+2}\right) = (-1, 0)$$

હવે, Q એ AB નું 2:1 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરે. માટે, Q ના યામ,

$$\left(\frac{2(-7)+1(2)}{2+1}, \frac{2(4)+1(-2)}{2+1}\right) = (-4, 2)$$

આથી, A અને B ને જોડતા રેખાખંડના ત્રિભાગ બિંદુઓના યામ (–1, 0) અને (–4, 2) થાય.

નોંધ : આપણે Q ને PBના મધ્યબિંદુ તરીકે લઈને પણ તેના યામ મેળવી શકીએ. આ માટે આપણે મધ્યબિંદુના સૂત્રનો ઉપયોગ કરી તેના યામ મેળવી શકીએ.

ઉદાહરણ 9 : y-અક્ષ એ બિંદુઓ (5, –6) અને (–1, –4) ને જોડતા રેખાખંડનું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે, તે શોધો અને આ છેદબિંદુ પણ મેળવો.

ઉકેલ : ધારો કે, $k : 1$ માંગેલ ગુણોત્તર છે. આથી, વિભાજનસૂત્રની મદદથી ABનું $k : 1$ માં વિભાજન કરતા બિંદુના યામ,

$$\left(\frac{-k+5}{k+1}, \frac{-4k-6}{k+1}\right) \text{ થાય.}$$

આ બિંદુ y-અક્ષ પર આવેલું છે અને આપણે જાણીએ છીએ કે, y-અક્ષ પરના બિંદુનો x-યામ 0 હોય.

માટે, $\frac{-k+5}{k+1} = 0$

આથી, $k = 5$

આમ, માંગેલ ગુણોત્તર 5 : 1 થશે. કિંમત $k = 5$ $\left(\frac{-4k-6}{k+1}\right)$ માં મૂકતાં આપણને છેદબિંદુ $\left(0, \frac{-13}{3}\right)$ મળશે.

ઉદાહરણ 10 : જો બિંદુઓ A (6, 1), B (8, 2), C (9, 4) અને D (p, 3) એ આ જ ક્રમમાં સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ હોય, તો p ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના વિકર્ણો પરસ્પર દુભાગે છે.

આથી, AC ના મધ્યબિંદુના યામ = BD ના મધ્યબિંદુના યામ

$$\therefore \left(\frac{6+9}{2}, \frac{1+4}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{2+3}{2}\right)$$

$$\therefore \left(\frac{15}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{8+p}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

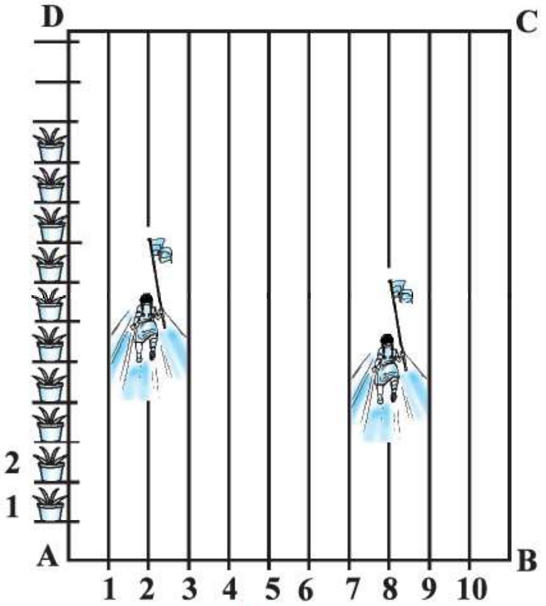
$$\therefore \quad \frac{15}{2} = \frac{8+p}{2}$$

$$\therefore \quad p = 7$$

સ્વાધ્યાય 7.2

1. બિંદુઓ (– 1, 7) અને (4, –3) ને જોડતા રેખાખંડનું 2 : 3 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરતા બિંદુના યામ શોધો.
2. બિંદુઓ (4, – 1) અને (–2, –3) ને જોડતા રેખાખંડનાં ત્રિભાગ બિંદુઓના યામ મેળવો.
3. તમારી શાળાના લંબચોરસ આકારના મેદાન ABCD માં રમતગમત દિવસની પ્રવૃત્તિઓ યોજેલ છે. ચોક પાઉડરની મદદથી એક એક મીટરના અંતરે રેખાઓ દોરેલી છે. આકૃતિ 7.12 માં દર્શાવ્યા અનુસાર AD પર પ્રત્યેક 1 મીટરના અંતરે હોય તેવા 100 ફૂલના કુંડાં મૂક્યા છે.

   નિહારીકા બીજી હરોળમાં દોડે છે અને તેણે AD નું $\frac{1}{4}$ ભાગનું અંતર કાપ્યું છે અને ત્યાં લીલો ધ્વજ ફરકાવે છે. પ્રિત આઠમી હરોળમાં દોડે છે અને તેણે AD નું $\frac{1}{5}$ ભાગ અંતર કાપ્યું છે અને ત્યાં લાલ ધ્વજ ફરકાવે છે. આ બંને ધ્વજ વચ્ચેનું અંતર કેટલું થશે ? જો રશ્મિએ આ બંને ધ્વજને જોડતા રેખાખંડના મધ્યબિંદુ પર વાદળી ધ્વજ ફરકાવવાનો હોય તો તે ધ્વજને ક્યાં ફરકાવશે ?



આકૃતિ 7.12

4. બિંદુ (–1, 6) એ બિંદુઓ (–3, 10) અને (6, – 8) ને જોડતા રેખાખંડનું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરશે ?
5. x-અક્ષ બિંદુઓ A (1, –5) અને B (–4, 5) ને જોડતા રેખાખંડનું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે તે શોધો. વિભાજન બિંદુના યામ પણ શોધો.
6. જો (1, 2), (4, y), (x, 6) અને (3, 5) એ એક સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્રમિક શિરોબિંદુઓ હોય તો x અને y શોધો.
7. AB વર્તુળનો વ્યાસ છે. વર્તુળનું કેન્દ્ર (2, –3) છે અને B (1, 4) છે. તો બિંદુ A ના યામ શોધો.
8. જો A અને B અનુક્રમે (–2, –2) અને (2, – 4) હોય, જેથી AP = $\frac{3}{7}$ AB થાય અને બિંદુ P રેખાખંડ AB પર આવેલ હોય, તેવા બિંદુ P ના યામ શોધો.
9. A (–2, 2) અને B (2, 8) ને જોડતા રેખાખંડનું ચાર સમાન ભાગમાં વિભાજન કરતાં બિંદુઓના યામ શોધો.
10. સમબાજુ ચતુષ્કોણનાં ક્રમિક શિરોબિંદુઓ (3, 0), (4, 5), (–1, 4) અને (–2, –1) હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

    [**સૂચન :** સમબાજુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$ (તેના વિકર્ણોનો ગુણાકાર)]

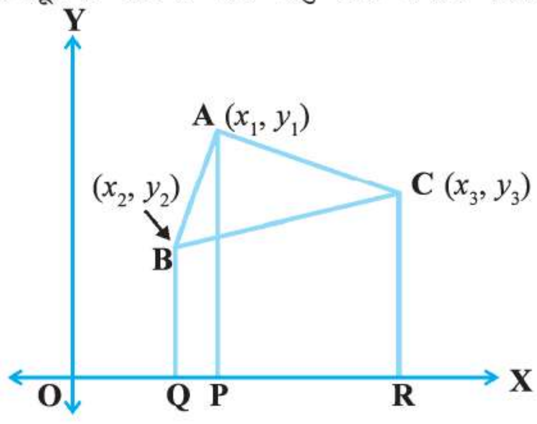
7.4 ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

K8D3D6

અગાઉના ધોરણમાં તમે ત્રિકોણનો પાયો અને તેના પરનો વેધ આપેલ હોય ત્યારે તેનું ક્ષેત્રફળ શોધતાં શીખ્યા છો. તમે આ માટે નીચેનું સૂત્ર વાપર્યું છે :

$$\text{ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2} \times \text{પાયો} \times \text{વેધ}$$

ધોરણ IX માં તમે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે હેરોનું સૂત્ર પણ શીખ્યાં છો. હવે ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુના યામ આપેલાં હોય તો તમે તેનું ક્ષેત્રફળ શોધી શકો ? સારું, તમે અંતરસૂત્રની મદદથી ત્રણ બાજુઓની લંબાઈ શોધી શકો અને ત્યાર બાદ હેરોના સૂત્રની મદદથી ક્ષેત્રફળ શોધી શકો. પરંતુ, ખાસ કરીને જો બાજુઓના માપ અસંમેય સંખ્યા મળે તો આ કંટાળાજનક છે. ચાલો, આપણે જોઈએ કે કોઈ સરળ માર્ગ છે ?



આકૃતિ 7.13

ધારો કે, જેનાં શિરોબિંદુઓ A (x_1, y_1) B (x_2, y_2) C (x_3, y_3) હોય તેવો કોઈ ત્રિકોણ ABC છે. A, B અને C માંથી x-અક્ષ પર લંબ અનુક્રમે AP, BQ અને CR દોરો. સ્પષ્ટપણે ABQP, APRC અને BQRC બધા સમલંબ ચતુષ્કોણ થશે. (જુઓ આકૃતિ 7.13.)

હવે, આકૃતિ 7.13 પરથી સ્પષ્ટ છે કે,

Δ ABC નું ક્ષેત્રફળ = સમલંબ ચતુષ્કોણ ABQPનું ક્ષેત્રફળ + સમલંબ ચતુષ્કોણ APRCનું ક્ષેત્રફળ – સમલંબ ચતુષ્કોણ BQRCનું ક્ષેત્રફળ

તમે આ પણ જાણો છો કે,

સમલંબ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$ (સમાંતર બાજુઓનો સરવાળો) (તેમની વચ્ચેનું અંતર)

આથી,

$$\Delta \text{ ABC નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2}(BQ + AP)\,QP + \frac{1}{2}(AP + CR)\,PR - \frac{1}{2}(BQ + CR)\,QR$$

$$= \frac{1}{2}(y_2 + y_1)(x_1 - x_2) + \frac{1}{2}(y_1 + y_3)(x_3 - x_1) - \frac{1}{2}(y_2 + y_3)(x_3 - x_2)$$

$$= \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

આમ, Δ ABC નું ક્ષેત્રફળ આ સૂત્રથી મળતાં મૂલ્યની સંખ્યાત્મક કિંમત થાય.

$$\Delta \text{ ABC નું ક્ષેત્રફળ} = \frac{1}{2}[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] \text{ નું સંખ્યાત્મક મૂલ્ય}$$

ચાલો, આપણે આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરી કેટલાંક ઉદાહરણો સમજીએ.

ઉદાહરણ 11 : જેનાં શિરોબિંદુઓ (1, – 1), (– 4, 6) અને (–3, – 5) હોય તેવા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : A (1, – 1), B (– 4, 6) અને C (–3, – 5) શિરોબિંદુઓ દ્વારા રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે ઉપરના સૂત્રનો ઉપયોગ કરતાં,

$$= \frac{1}{2}\ [1\ (6 + 5) + (-4)\ (-5 + 1) + (-3)\ (-1 - 6)]$$

$$= \frac{1}{2}\ (11 + 16 + 21) = 24$$

આથી, ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 24 ચોરસ એકમ થાય.

ઉદાહરણ 12 : બિંદુઓ A (5, 2), B (4, 7) અને C (7, – 4) દ્વારા રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : શિરોબિંદુઓ A (5, 2), B (4, 7) અને C (7, – 4) દ્વારા રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ,

$$= \frac{1}{2}\ [\ 5\ (7 + 4) + 4\ (-4 - 2) + 7\ (2 - 7)]$$

$$= \frac{1}{2}\ [55 - 24 - 35] = \frac{-4}{2} = -2$$

ક્ષેત્રફળ એ માપ હોવાથી તે ઋણ ન હોઈ શકે. આથી, આપણે –2 ની સંખ્યાત્મક કિંમત 2 લઈશું.

માટે ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = 2 ચોરસ એકમ.

ઉદાહરણ 13 : બિંદુઓ P (–1.5, 3), Q (6, –2) અને R (–3, 4) થી રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : આપેલ બિંદુઓથી રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{1}{2}\ [-1.5\ (-2 - 4) + 6\ (4 - 3) + (-3)\ (3 + 2)]$$

$$= \frac{1}{2}\ (9 + 6 - 15) = 0$$

શું આપણી પાસે 0 ચોરસ એકમ ક્ષેત્રફળવાળો ત્રિકોણ હોઈ શકે ? આનો અર્થ શું થાય ?

જો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 0 ચોરસ એકમ હોય, તો તેનાં શિરોબિંદુઓ સમરેખ હોય.

ઉદાહરણ 14 : બિંદુઓ A (2, 3), B (4, k) અને C (6, –3) સમરેખ હોય, તો k ની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : આપેલ બિંદુઓથી રચાતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ 0 જ થાય.

$$\therefore\ \frac{1}{2}\ [\ 2\ (k + 3) + 4\ (-3 - 3) + 6\ (3 - k)] = 0$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}\ [-4k] = 0$$

$$\therefore\ k = 0$$

ચાલો, માટે આપણે આપણો ઉત્તર ચકાસીએ.

Δ ABC નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\ [2\ (0 + 3) + 4\ (-3 - 3) + 6\ (3 - 0)] = 0$

ઉદાહરણ 15 : જો A (–5, 7), B (–4, –5), C (–1, – 6) અને D (4, 5) ક્રમમાં એ એક ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓ હોય, તો ચતુષ્કોણ ABCD નું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : B થી D ને જોડવાથી, તમને Δ ABD અને Δ BCD એમ બે ત્રિકોણો મળશે.

હવે, Δ ABD નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\,[-5\,(-5-5)+(-4)\,(5-7)+4\,(7+5)]$

$= \frac{1}{2}\,(50+8+48) = \frac{106}{2} = 53$ ચોરસ એકમ

તથા, Δ BCD નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\,[-4\,(-6-5)-1\,(5+5)+4\,(-5+6)]$

$= \frac{1}{2}\,[44-10+4] = 19$ ચોરસ એકમ

આથી, ચતુષ્કોણ ABCD નું ક્ષેત્રફળ = 53 + 19 = 72 ચોરસ એકમ

નોંધ : બહુકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે, આપણે જેમાં સામાન્ય ક્ષેત્રફળ ન હોય તેવા ત્રિકોણીય પ્રદેશોમાં વિભાજન કરીએ અને તેનું ક્ષેત્રફળ આ પ્રદેશોનાં ક્ષેત્રફળોનો સરવાળો કરવાથી મળે છે.

સ્વાધ્યાય 7.3

1. જેનાં શિરોબિંદુઓ નીચે પ્રમાણે છે તેવા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો :

(i) (2, 3), (–1, 0), (2, – 4) (ii) (–5, –1), (3, –5), (5, 2)

2. નીચે આપેલાં બિંદુઓ સમરેખ હોય તો પ્રત્યેકમાં 'k' ની કિંમત શોધો :

(i) (7, –2), (5, 1), (3, k) (ii) (8, 1), (k, – 4), (2, –5)

3. જેનાં શિરોબિંદુઓ (0, –1), (2, 1) અને (0, 3) હોય તેવા ત્રિકોણની બાજુઓનાં મધ્યબિંદુઓને જોડવાથી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો. આ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ અને આપેલ ત્રિકોણના ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો.

4. એક ચતુષ્કોણનાં ક્રમિક શિરોબિંદુઓ (– 4, – 2), (– 3, – 5), (3, – 2) અને (2, 3) હોય, તો તેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

5. તમે ધોરણ IX (પ્રકરણ 9, પ્રશ્ન નં.3)માં શીખ્યા છો કે ત્રિકોણની મધ્યગા ત્રિકોણનું બે સમાન ક્ષેત્રફળવાળા ત્રિકોણમાં વિભાજન કરે છે. જેનાં શિરોબિંદુઓ A (4, –6), B (3, –2) અને C (5, 2) હોય, તેવા Δ ABC માટે આ પરિણામ ચકાસો.

સ્વાધ્યાય 7.4 (વૈકલ્પિક)*

1. રેખા $2x + y - 4 = 0$ બિંદુઓ A (2, –2) અને B (3, 7) ને જોડતા રેખાખંડનું કયા ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરશે તે નક્કી કરો.

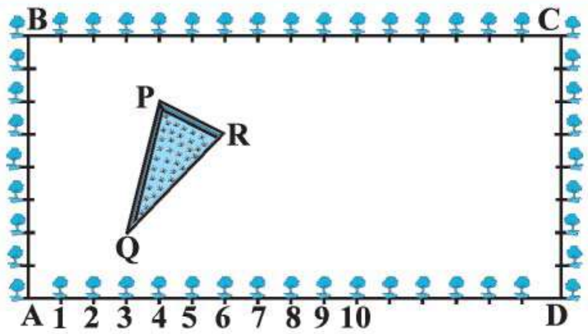
2. જો બિંદુઓ (x, y), (1, 2) અને (7, 0) સમરેખ હોય, તો x અને y વચ્ચેનો સંબંધ મેળવો.

3. બિંદુઓ (6, –6), (3, –7) અને (3, 3)માંથી પસાર થતા વર્તુળનું કેન્દ્ર શોધો.

4. ચોરસનાં બે સામસામેનાં શિરોબિંદુઓ (– 1, 2) અને (3, 2) છે, તો બાકીનાં બે શિરોબિંદુઓના યામ શોધો.

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાના હેતુથી બનાવેલ નથી.

5. કૃષિનગરની માધ્યમિક શાળાના ધોરણ Xના વિદ્યાર્થીઓને બાગાયત પ્રવૃત્તિ માટે એક લંબચોરસ મેદાન ફાળવવામાં આવ્યું છે. તેની ફરતી બાજુએ ગુલમહોરના રોપા એક-એક મીટરના અંતરે વાવેલા છે. આકૃતિ 7.14માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે આ મેદાનમાં ઘાસની એક ત્રિકોણીય લોન છે. વિદ્યાર્થીઓને બાકીના ભાગ પર ફૂલોના છોડનાં બીજ વાવવાનાં છે.



આકૃતિ 7.14

(i) A ને ઊગમબિંદુ લઈ ત્રિકોણનાં શિરોબિંદુઓના યામ શોધો.

(ii) જો C ઊગમબિંદુ હોય, તો Δ PQR નાં શિરોબિંદુઓના યામ શું થાય ? આ બંને કિસ્સાઓમાં ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શોધો. તમે શું અવલોકન કર્યું ?

6. Δ ABC નાં શિરોબિંદુઓ A (4, 6), B (1, 5) અને C (7, 2) છે. બાજુઓ AB અને AC ને અનુક્રમે એક રેખા D અને E માં એવી રીતે છેદે છે જેથી, $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{1}{4}$. તો Δ ADEનું ક્ષેત્રફળ મેળવો અને Δ ABC ના ક્ષેત્રફળ સાથે તેની તુલના કરો. (પ્રમેય 6.2 અને પ્રમેય 6.6 યાદ કરો.)

7. A (4, 2), B (6, 5) અને C (1, 4) એ Δ ABCનાં શિરોબિંદુઓ છે.

(i) A માંથી દોરેલ મધ્યગા BC ને D માં મળે છે. બિંદુ D ના યામ શોધો.

(ii) AP : PD = 2:1 થાય એવું બિંદુ P એ AD પર છે તો P ના યામ શોધો.

(iii) BQ : QE = 2 : 1 અને CR : RF = 2:1 હોય તેવાં બિંદુઓ Q અને R અનુક્રમે મધ્યગા BE અને CF પર છે, તો Q અને R ના યામ શોધો.

(iv) તમે શું અવલોકન કર્યું ?

(v) જો A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) અને C (x_3, y_3) એ Δ ABC નાં શિરોબિંદુઓ હોય તો આપેલ ત્રિકોણના મધ્યકેન્દ્રના યામ શોધો.

[**નોંધ :** ત્રણે ય મધ્યગાઓના છેદબિંદુને મધ્યકેન્દ્ર કહે છે અને તે દરેક મધ્યગાનું 2:1 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે છે.]

8. બિંદુઓ A (– 1, – 1), B (–1, 4), C (5, 4) અને D (5, –1) થી લંબચોરસ ABCD રચાય છે. P, Q, R અને S અનુક્રમે AB, BC, CD અને DA નાં મધ્યબિંદુઓ છે. ચતુષ્કોણ PQRS ચોરસ છે ? લંબચોરસ છે ? કે સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે ? તમારો જવાબ ચકાસો.

7.5 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં, તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો છે :

1. P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) વચ્ચેનું અંતર $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ છે.

2. બિંદુ P (x, y) નું ઊગમબિંદુથી અંતર $\sqrt{x^2 + y^2}$ છે.

3. A (x_1, y_1) અને B (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડનું m_1: m_2 ગુણોત્તરમાં અંતઃવિભાજન કરતા બિંદુ P (x, y) ના યામ $\left(\frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2}, \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}\right)$ થાય.

4. બિંદુઓ P (x_1, y_1) અને Q (x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ છે.

5. બિંદુઓ (x_1, y_1), (x_2, y_2) અને (x_3, y_3) થી બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$\frac{1}{2}$ $[x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)]$ની સંખ્યાત્મક કિંમત છે.

વાચકને નોંધ

વિભાગ 7.3 માં A(x_1, y_1) અને B(x_2, y_2) ને જોડતા રેખાખંડનું $m_1 : m_2$ ગુણોત્તરમાં અંતર્વિભાજન કરતા બિંદુ P ના યામ (x, y) કેવી રીતે મળે તેની ચર્ચા કરી છે.

$$x = \frac{m_1x_2+m_2x_1}{m_1+m_2},\ y = \frac{m_1y_2+m_2y_1}{m_1+m_2}$$

PA : PB = $m_1 : m_2$ છે તેની નોંધ કરો.

પરંતુ જો, P, A અને B ની વચ્ચે ન હોય પરંતુ રેખા AB પર રેખાખંડ AB ની બહાર હોય તો આપણે કહીએ છીએ કે P એ A અને B ને જોડતા રેખાખંડનું બહિર્વિભાજન કરે છે. આવા વિકલ્પમાં વિભાજન સૂત્રનો આપણે ઉચ્ચ વર્ગમાં અભ્યાસ કરીશું.

W2Q4B7