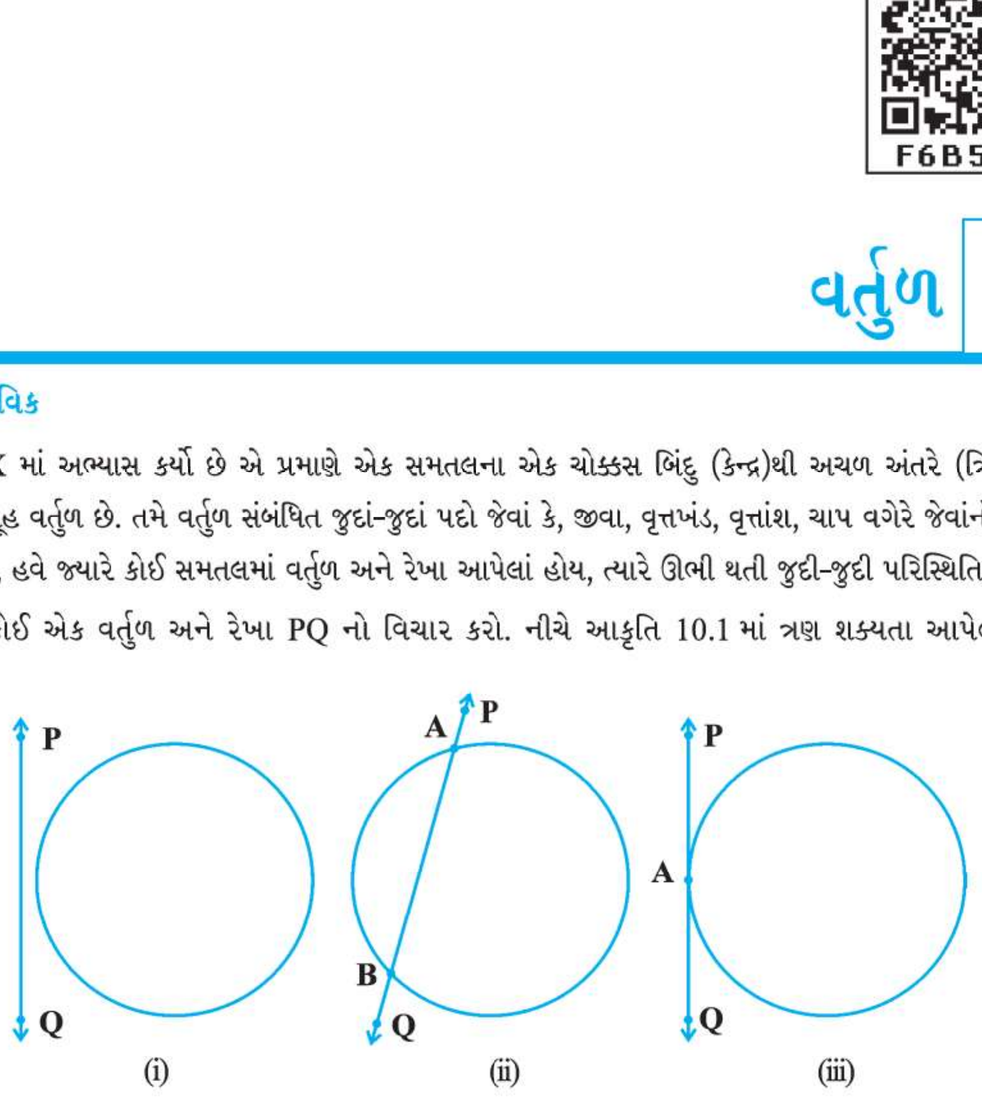
વર્તુળ 10

10.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે ધોરણ IX માં અભ્યાસ કર્યો છે એ પ્રમાણે એક સમતલના એક ચોક્કસ બિંદુ (કેન્દ્ર)થી અચળ અંતરે (ત્રિજ્યા) આવેલાં બિંદુઓનો સમૂહ વર્તુળ છે. તમે વર્તુળ સંબંધિત જુદાં-જુદાં પદો જેવાં કે, જીવા, વૃત્તખંડ, વૃત્તાંશ, ચાપ વગેરે જેવાંનો પણ અભ્યાસ કર્યો છે. ચાલો, હવે જ્યારે કોઈ સમતલમાં વર્તુળ અને રેખા આપેલાં હોય, ત્યારે ઊભી થતી જુદી-જુદી પરિસ્થિતિઓ જોઈએ.

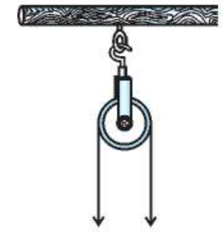
હવે, કોઈ એક વર્તુળ અને રેખા PQ નો વિચાર કરો. નીચે આકૃતિ 10.1 માં ત્રણ શક્યતા આપેલી છે :



આકૃતિ 10.1

આકૃતિ 10.1 (i) માં, રેખા PQ અને વર્તુળને કોઈ સામાન્ય બિંદુ નથી. આ કિસ્સામાં રેખા **PQ** વર્તુળને ***છેદતી નથી*** એમ કહીશું. આકૃતિ 10.1 (ii) માં રેખા PQ અને વર્તુળને બે સામાન્ય બિંદુઓ A અને B છે. આ વિકલ્પમાં રેખા PQ ને વર્તુળની ***છેદિકા*** કહે છે. આકૃતિ 10.1 (iii) માં ***રેખા અને વર્તુળમાં ફક્ત એક જ બિંદુ સામાન્ય છે. આ વિકલ્પમાં રેખાને વર્તુળનો સ્પર્શક કહે છે.***

કૂવામાંથી પાણી કાઢવા ઉપયોગમાં લેવામાં આવતી કૂવા પર લગાડેલી ગરગડી તમે કદાચ જોઈ હશે. આકૃતિ 10.2 જુઓ. અહીં, જો ગરગડીની બંને બાજુઓમાં રહેલી દોરીને કિરણ સમજવામાં આવે, તો તેમને ગરગડીને દર્શાવતાં વર્તુળના સ્પર્શક તરીકે ગણી શકાય.



આકૃતિ 10.2

ઉપર જે પ્રકારો આપ્યા છે તે સિવાય રેખાની કોઈ સ્થિતિ વર્તુળના સંદર્ભે હોય ? તમે જોશો કે, રેખાની અન્ય સ્થિતિ વર્તુળના સંદર્ભમાં ન હોય. આ પ્રકરણમાં આપણે, વર્તુળના સ્પર્શકના અસ્તિત્વ વિશે અભ્યાસ કરીશું અને તેના કેટલાક ગુણધર્મોનો પણ અભ્યાસ કરીશું.

10.2 વર્તુળનો સ્પર્શક

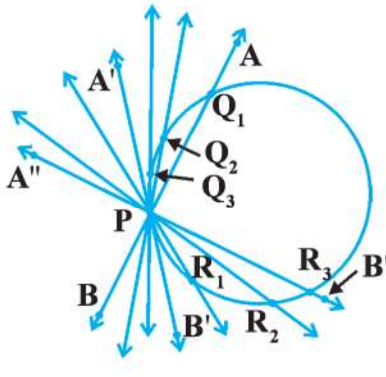
D3I2T4

અગાઉના વિભાગમાં, તમે જોયું કે, ***વર્તુળનો સ્પર્શક* (tangent) વર્તુળને ફક્ત એક જ બિંદુમાં છેદતી એક રેખા છે.***

વર્તુળના કોઈ બિંદુએ સ્પર્શકનું અસ્તિત્વ સમજવા માટે આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 1 : એક વર્તુળાકાર તાર લો. અને એક સીધો તાર AB વર્તુળાકાર તારના બિંદુ P પર એવી રીતે લગાડો કે, જેથી તેને સમતલમાં બિંદુ P ની આસપાસ ફેરવી શકાય. આ પ્રણાલીને ટેબલ પર મૂકો અને સીધા તારની અલગ- અલગ સ્થિતિ મેળવવા તાર AB ને બિંદુ P ની આસપાસ હળવેથી ફેરવો. (જુઓ આકૃતિ 10.3 (i).)

જુદી-જુદી પરિસ્થિતિમાં આ તાર વર્તુળાકાર તારને P અને બીજાં બિંદુઓ Q_1 કે Q_2 કે Q_3 વગેરે બિંદુઓમાં છેદશે. કોઈ એક સ્થિતિમાં, તમે જોશો કે, તે વર્તુળને ફક્ત એક બિંદુ P માં છેદશે. (AB ની A'B' સ્થિતિ જુઓ.) આ દર્શાવે છે કે, વર્તુળના બિંદુ P આગળ સ્પર્શક અસ્તિત્વ ધરાવે છે. AB ને વધુ ફેરવતાં તમે જોશો કે, AB ની બીજી બધી સ્થિતિમાં, તે વર્તુળને P અને બીજાં બિંદુઓ જેમ કે, R_1 કે R_2 કે R_3 વગેરેમાં છેદશે. તેથી તમે જોશો કે, ***વર્તુળના કોઈ એક બિંદુએ એક અને ફક્ત એક જ સ્પર્શક છે.***



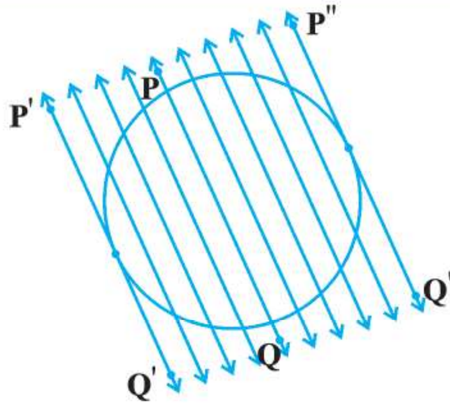
આકૃતિ 10.3 (i)

જ્યારે ઉપરની પ્રવૃત્તિ કરતા હોઈએ, ત્યારે તમે એ જોયું જ હશે કે જેમ સ્થિતિ AB એ સ્થિતિ A'B' તરફ પ્રસ્થાન કરે છે, તેમ રેખા AB અને વર્તુળનું સામાન્ય બિંદુ Q_1 ધીમે ધીમે સામાન્ય બિંદુ P ની નજીક અને નજીક આવે છે. છેવટે, તે AB ની સ્થિતિ A'B' થઈને બિંદુ P માં સંપાતિ થાય છે. ફરીથી નોંધો કે, જો A"B" ને P ની આસપાસ જમણી તરફ ફેરવીએ તો શું થશે ? સામાન્ય બિંદુ R_3 ધીમે-ધીમે P ની નજીક અને નજીક આવશે. અને છેવટે તે P માં સંપાતિ થશે. આમ, આપણે શું જોયું?

જેમાં બે અંત્યબિંદુઓ તેની અનુરૂપ જીવામાં સંપાતિ હોય છે એવી છેદિકાનો વિશિષ્ટ કિસ્સો એ વર્તુળનો સ્પર્શક છે.

* Tangent શબ્દ લેટિન શબ્દ Tangere પરથી આવ્યો છે. તેનો અર્થ સ્પર્શવું એવો થાય છે અને તે ડેનિશ ગણિતશાસ્ત્રી થોમસ ફિનેકે C.E. 1583માં દાખલ કર્યો હતો.

પ્રવૃત્તિ 2 : કાગળના સમતલ પર એક વર્તુળ અને વર્તુળની છેદિકા PQ દોરો. છેદિકાની બંને તરફ તેને સમાંતર રેખાઓ દોરો. તમે જોઈ શકશો કે, રેખાઓ દ્વારા કપાતી જીવાની લંબાઈ ધીમે-ધીમે ઘટતી જાય છે. એટલે કે, વર્તુળ અને રેખાનાં છેદબિંદુ વધુ ને વધુ નજીક આવતા જાય છે. (જુઓ આકૃતિ 10.3 (ii).) કોઈ એક વિકલ્પમાં, તે લંબાઈ છેદિકાની એક બાજુએ શૂન્ય બની જાય છે અને કોઈ બીજા વિકલ્પમાં તે છેદિકાની બીજી બાજુએ શૂન્ય બની જાય છે. આકૃતિ 10.3 (ii) માં છેદિકાની સ્થિતિ P'Q' અને P"Q" જુઓ. તે આપેલી વર્તુળના છેદિકા PQ ને સમાંતર સ્પર્શક છે. આ માહિતી તમને એ જોવામાં પણ ઉપયોગી છે કે, આપેલી છેદિકાને સમાંતર હોય તેવા બે થી વધારે સ્પર્શક ન હોય.

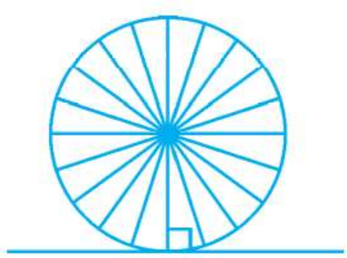


આકૃતિ 10.3 (ii)

તમે જોયું છે કે, જ્યારે તમે પ્રવૃત્તિ 1 કરતા હો ત્યારે આ પ્રવૃત્તિ એ પણ પ્રસ્થાપિત કરે છે કે, અનુરૂપ જીવાનાં બંને અંત્યબિંદુઓ સંપાતી હોય ત્યારે છેદિકા એ સ્પર્શક બને છે.

વર્તુળ અને સ્પર્શકના સામાન્ય બિંદુને સ્પર્શબિંદુ કહે છે. (આકૃતિ 10.1 (iii) માં બિંદુ A) અને સ્પર્શક વર્તુળને તે બિંદુમાં સ્પર્શે છે તેમ કહેવાય.

હવે તમારી આસપાસ જુઓ. તમે સાઇકલ કે લારી ફરતી જોઈ છે ? તેનાં પૈડાં જુઓ. પૈડાંના બધા સળિયા તેની ત્રિજ્યાના સ્થાને છે. હવે પૈડું જમીન પર ફરે છે તેની સ્થિતિ પર ધ્યાન આપો. તમે ક્યાંય કોઈ સ્પર્શક જોયો છે ? (જુઓ આકૃતિ 10.4.) ખરેખર તો પૈડું દર્શાવતા વર્તુળને સ્પર્શક હોય, તેવી રેખા પર પૈડું ફરે છે. અહીં એ પણ નોંધો કે, દરેક સ્થિતિમાં સ્પર્શબિંદુમાંથી પસાર થતી ત્રિજ્યા જમીન પરના સ્પર્શક સાથે કાટખૂણો બનાવે છે. (જુઓ આકૃતિ 10.4.) હવે, આપણે સ્પર્શકના આ ગુણધર્મને સાબિત કરીશું.


આકૃતિ 10.4

પ્રમેય 10.1 : ***વર્તુળના કોઈ બિંદુએ દોરેલ સ્પર્શક, સ્પર્શબિંદુમાંથી પસાર થતી ત્રિજ્યાને લંબ હોય છે.***

સાબિતી : O કેન્દ્રવાળું એક વર્તુળ અને વર્તુળના બિંદુ P આગળ સ્પર્શક XY આપેલાં છે.

અહીં એવું સાબિત કરવાનું છે કે, OP એ XY ને લંબ છે.

XY પર P સિવાયનું કોઈ બિંદુ Q લો અને O તથા Q ને જોડતી રેખા દોરો. (જુઓ આકૃતિ 10.5.)

બિંદુ Q વર્તુળની બહારનું બિંદુ જ હોઈ શકે. (કેમ ?)

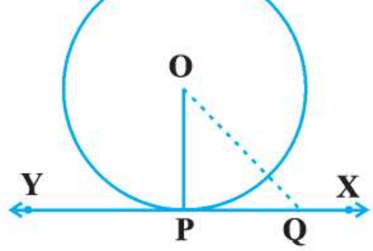
જો Q વર્તુળની અંદર હોય, તો XY છેદિકા બને અને વર્તુળનો સ્પર્શક ન બને.

તેથી, OQ એ વર્તુળની ત્રિજ્યા OP કરતાં મોટી છે.

એટલે કે, $OQ > OP$

બિંદુ P સિવાય, રેખા XY નાં બધાં બિંદુઓ માટે આ બને છે. OP એ O થી XY પરનાં બિંદુઓથી બધાં અંતરો પૈકી ટૂંકામાં ટૂંકું અંતર છે.

તેથી, OP એ XY ને લંબ છે. (પરિશિષ્ટ A1 ના પ્રમેય A 1.2 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે) ■



આકૃતિ 10.5

નોંધ :

1. ઉપરના પ્રમેય પરથી, આપણે એ તારણ પણ કાઢીએ કે, વર્તુળના કોઈ પણ બિંદુએ એક અને માત્ર એક જ સ્પર્શક છે.
2. સ્પર્શબિંદુમાંથી પસાર થતી અને ત્રિજ્યાને સમાવતી રેખાને તે સ્પર્શબિંદુ આગળનો વર્તુળનો અભિલંબ પણ કહે છે.

સ્વાધ્યાય 10.1

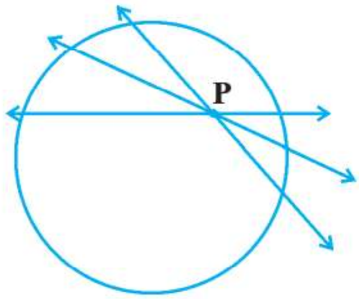
1. વર્તુળને કેટલા સ્પર્શક હોય ?
2. ખાલી જગ્યા પૂરો :
   (i) સ્પર્શક વર્તુળને .... બિંદુ/બિંદુઓમાં છેદે.
   (ii) વર્તુળને બે બિંદુમાં છેદતી રેખાને .... કહે છે.
   (iii) વર્તુળને વધુમાં વધુ .... સમાંતર સ્પર્શક હોય.
   (iv) વર્તુળ અને સ્પર્શકના સામાન્ય બિંદુને .... કહે છે.
3. 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળના કોઈ બિંદુ P આગળ દોરેલ એક સ્પર્શક PQ, કેન્દ્ર O માંથી પસાર થતી રેખાને Q બિંદુએ છેદે છે. OQ = 12 સેમી હોય, તો PQ ની લંબાઈ :
   (A) 12 સેમી (B) 13 સેમી (C) 8.5 સેમી (D) $\sqrt{119}$ સેમી
4. એક વર્તુળ અને આપેલ રેખાને સમાંતર હોય તેવી બે રેખાઓ દોરો, જે પૈકી એક વર્તુળનો સ્પર્શક અને બીજી વર્તુળની છેદિકા હોય.

10.3 સમતલના કોઈ બિંદુમાંથી વર્તુળના સ્પર્શકની સંખ્યા

G2N9Z3

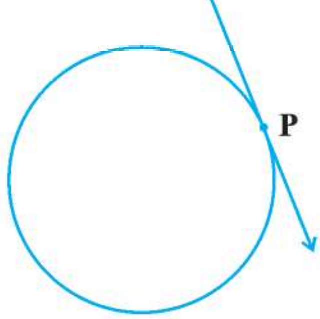
વર્તુળ પરના બિંદુમાંથી સ્પર્શકની સંખ્યાનો ખ્યાલ મેળવવા, આપણે નીચેની પ્રવૃત્તિ કરીએ :

પ્રવૃત્તિ 3 : કાગળ પર એક વર્તુળ દોરો. તેની અંદર બિંદુ P લો. આ બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શક દોરી શકો ? તમે જોશો કે આ બિંદુમાંથી પસાર થતી રેખા વર્તુળને બે બિંદુમાં છેદશે. તેથી વર્તુળની અંદરના બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શક દોરી શકાય તે શક્ય નથી (જુઓ આકૃતિ 10.6 (i)).



(i)

હવે વર્તુળ પર એક બિંદુ P લો. અને આ બિંદુમાંથી સ્પર્શક દોરો. તમે એ જોયું છે કે, આ બિંદુમાંથી વર્તુળને એક અને માત્ર એક જ સ્પર્શક મળે. (જુઓ આકૃતિ 10.6(ii).)



(ii)

છેલ્લે વર્તુળની બહાર બિંદુ P લો. અને આ બિંદુમાંથી વર્તુળને સ્પર્શક દોરવાનો પ્રયત્ન કરો. તમે શું જોયું ? તમે જોયું હશે કે, આ બિંદુમાંથી તમે વર્તુળને બે સ્પર્શકો દોરી શકો. (જુઓ આકૃતિ 10.6 (iii).)

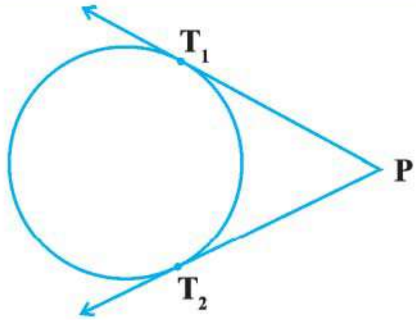
આ હકીકતનો સારાંશ નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

વિકલ્પ 1 : વર્તુળની અંદર આપેલા બિંદુમાંથી વર્તુળને કોઈ સ્પર્શક ન મળે.

વિકલ્પ 2 : વર્તુળ પરના બિંદુએ વર્તુળનો એક અને માત્ર એક જ સ્પર્શક મળે.

વિકલ્પ 3 : વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને બે સ્પર્શકો મળે.

આકૃતિ 10.6 (iii) માં, T_1 અને T_2 એ અનુક્રમે સ્પર્શકો PT_1 અને PT_2 નાં સ્પર્શબિંદુઓ છે.



(iii)

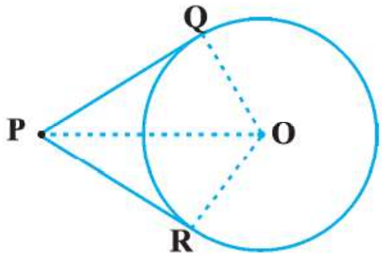
આકૃતિ 10.6

સ્પર્શકના બહારના બિંદુ P અને વર્તુળ સાથેના સ્પર્શબિંદુને જોડતા રેખાખંડની લંબાઈને P થી વર્તુળ પરના સ્પર્શકની લંબાઈ કહે છે.

જુઓ કે, આકૃતિ 10.6 (iii) માં PT_1 અને PT_2, P થી વર્તુળ સુધીના સ્પર્શકની લંબાઈ છે. લંબાઈ PT_1 અને PT_2 નો એક સામાન્ય ગુણધર્મ છે. તે તમે શોધી શકો ? PT_1 અને PT_2 માપો. શું તે સમાન છે ? હકીકતમાં તે હંમેશાં સમાન હોય છે. હવે આ હકીકતની સાબિતી નીચે દર્શાવેલા પ્રમેયમાં આપીએ :

પ્રમેય 10.2 : વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકોની લંબાઈ સમાન હોય છે.

સાબિતી : O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ, વર્તુળની બહારનું બિંદુ P અને બહારના બિંદુ P માંથી વર્તુળને સ્પર્શકો PQ, PR આપેલાં છે (જુઓ આકૃતિ 10.7.) સાબિત કરવું છે કે PQ = PR.



આકૃતિ 10.7

આ માટે, OP, OQ અને OR જોડો. $\angle OQP$ અને $\angle ORP$ કાટખૂણા છે, કારણ કે, તે સ્પર્શકો અને સંગત ત્રિજ્યા વચ્ચેના ખૂણા છે, અને પ્રમેય 10.1 ના આધારે તેઓ કાટખૂણા છે. હવે કાટકોણ ત્રિકોણો OQP અને ORP માં,

$OQ = OR$ (એક વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

$OP = OP$ (સામાન્ય)

તેથી, $\Delta OQP \cong \Delta ORP$ (કાકબા)

આથી, $PQ = PR$ (એકરૂપ ત્રિકોણોના અનુરૂપ ભાગ)

■

નોંધ :

1. આ પ્રમેયને પાયથાગોરસ પ્રમેયનો ઉપયોગ કરીને નીચે પ્રમાણે સાબિત કરી શકાશે :

   $PQ^2 = OP^2 - OQ^2 = OP^2 - OR^2 = PR^2$ (કેમ કે $OQ = OR$)

   તેથી, PQ = PR મળે.

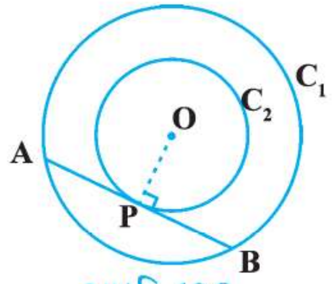
2. એ પણ ધ્યાન આપો કે, $\angle OPQ = \angle OPR$ તેથી, OP એ $\angle QPR$ નો કોણદ્વિભાજક છે.

   એટલે કે, કેન્દ્ર બે સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાના દ્વિભાજક પર છે.

   હવે, કેટલાંક ઉદાહરણો લઈએ.

ઉદાહરણ 1 : સાબિત કરો કે, બે સમકેન્દ્રી વર્તુળોમાં મોટા વર્તુળની જીવા નાના વર્તુળને સ્પર્શતી હોય, તો સ્પર્શબિંદુ તેને દુભાગે છે.

ઉકેલ : O કેન્દ્રવાળાં બે સમકેન્દ્રીય વર્તુળો C_1 અને C_2 આપ્યાં છે અને મોટા વર્તુળ C_1 ની જીવા AB નાના વર્તુળ C_2 ને બિંદુ P માં સ્પર્શે છે. (જુઓ આકૃતિ 10.8.)



આકૃતિ 10.8

અહીં, એ સાબિત કરવાનું છે કે, AP = BP.

અહીં, OP જોડો. AB એ P બિંદુએ C_2નો સ્પર્શક છે અને OP તેની ત્રિજ્યા છે.

તેથી, પ્રમેય 10.1 પરથી,

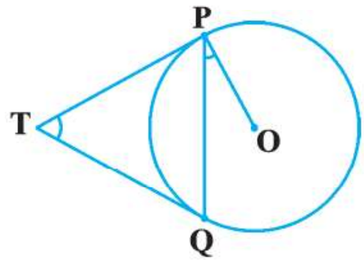
$$OP \perp AB$$

હવે, AB એ વર્તુળ C_1 ની જીવા છે અને $OP \perp AB$. તેથી, OP એ જીવા AB નો દ્વિભાજક છે, કારણ કે, કેન્દ્રમાંથી જીવાને દોરેલો લંબ જીવાને દુભાગે છે.

એટલે કે, $AP = BP$

ઉદાહરણ 2 : O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની બહારના બિંદુ T માંથી વર્તુળને બે સ્પર્શકો TP અને TQ દોરેલા છે. સાબિત કરો કે, $\angle PTQ = 2\ \angle OPQ$.

ઉકેલ : O કેન્દ્રવાળું વર્તુળ, તેની બહારનું બિંદુ T અને વર્તુળના બે સ્પર્શકો TP અને TQ આપેલા છે. P અને Q સ્પર્શબિંદુઓ છે. (જુઓ આકૃતિ 10.9.) અહીં, એ સાબિત કરવું છે કે,



આકૃતિ 10.9

$\angle PTQ = 2\ \angle OPQ$

ધારો કે, $\angle PTQ = \theta$

હવે, પ્રમેય 10.2 પરથી TP = TQ

તેથી, ત્રિકોણ TPQ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે.

તેથી, $\angle TPQ = \angle TQP = \frac{1}{2}(180° - \theta) = 90° - \frac{1}{2}\ \theta$

તેમજ, પ્રમેય 10.1 પરથી $\angle OPT = 90$

તેથી, $\angle OPQ = \angle OPT - \angle TPQ = 90° - \left(90° - \frac{1}{2}\theta\right)$

$$= \frac{1}{2}\theta$$

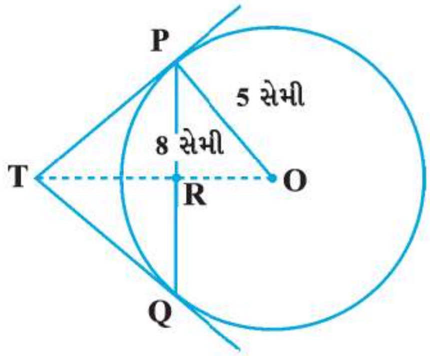
$$= \frac{1}{2}\angle PTQ$$

તેથી $\angle PTQ = 2\angle OPQ$

ઉદાહરણ 3 : PQ એ 5 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળની 8 સેમી લંબાઈની જીવા છે. P અને Q માંથી પસાર થતા સ્પર્શકો બિંદુ T માં છેદે છે. (જુઓ આકૃતિ 10.10.) TP ની લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : OT જોડો. ધારો કે તે PQ ને R માં છેદે છે.

Δ TPQ સમદ્વિબાજુ છે અને TO એ $\angle$PTQ નો દ્વિભાજક છે. તેથી, OT $\perp$ PQ અને OT એ PQ ને દુભાગે છે. તેથી PR = RQ = 4 સેમી.



આકૃતિ 10.10

તેમજ, $\quad OR = \sqrt{OP^2 - PR^2}$

$= \sqrt{5^2 - 4^2}$ સેમી

$= 3$ સેમી

હવે, $\quad \angle TPR + \angle RPO = 90° = \angle TPR + \angle PTR$ (કેમ ?)

તેથી, $\quad \angle RPO = \angle PTR$

તેથી, ખૂખૂ સમરૂપતા પરથી,

કાટકોણ ત્રિકોણ TRP એ કાટકોણ ત્રિકોણ PRO ને સમરૂપ છે.

જેથી, $\quad \dfrac{TP}{PO} = \dfrac{RP}{RO}$

એટલે કે, $\quad \dfrac{TP}{5} = \dfrac{4}{3}$

અથવા $\quad TP = \dfrac{20}{3}$ સેમી

નોંધ : પાયથાગોરસના પ્રમેયના ઉપયોગથી પણ TP નીચે પ્રમાણે મળી શકે :

ધારો કે, $\quad TP = x$ અને $TR = y$

તેથી, $\quad x^2 = y^2 + 16$ (કાટકોણ ΔPRT લેતાં) (1)

$x^2 + 5^2 = (y + 3)^2$ (કાટકોણ ΔOPT લેતાં) (2)

(2)માંથી (1) બાદ કરતાં

$25 = 6y - 7$

$\therefore y = \dfrac{32}{6} = \dfrac{16}{3}$

તેથી, $\quad x^2 = \left(\dfrac{16}{3}\right)^2 + 16$

$= \dfrac{16}{9}(16 + 9)$

$= \dfrac{16 \times 25}{9}$ ((1) પરથી)

$x = \dfrac{20}{3}$

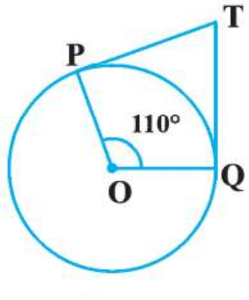
સ્વાધ્યાય 10.2

પ્રશ્ન 1 થી 3 માં સાચો વિકલ્પ પસંદ કરો અને તે માટે કારણ આપો :

1. બિંદુ Q માંથી દોરેલા વર્તુળના સ્પર્શકની લંબાઈ 24 સેમી અને વર્તુળના કેન્દ્રથી તેનું અંતર 25 સેમી હોય, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા .... છે.

   (A) 7 સેમી (B) 12 સેમી

   (C) 15 સેમી (D) 24.5 સેમી



આકૃતિ 10.11

2. આકૃતિ 10.11 માં, જો TP અને TQ એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળના $\angle POQ = 110°$ બને એવા સ્પર્શકો છે. $\angle PTQ$ .... છે.

   (A) 60° (B) 70°

   (C) 80° (D) 90°

3. જો O કેન્દ્રવાળા વર્તુળને બિંદુ P માંથી દોરેલા સ્પર્શકો PA અને PB વચ્ચે 80° નો ખૂણો રચાતો હોય, તો $\angle POA$ .... છે.

   (A) 50° (B) 60° (C) 70° (D) 80°

4. સાબિત કરો કે, વર્તુળના વ્યાસનાં અંત્યબિંદુઓએ દોરેલા સ્પર્શકો પરસ્પર સમાંતર હોય છે.

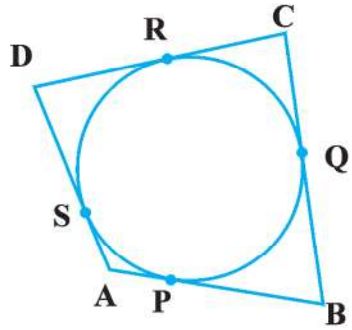
5. સાબિત કરો કે, વર્તુળના સ્પર્શકના સ્પર્શબિંદુમાંથી દોરેલો લંબ વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થાય છે.

6. વર્તુળના કેન્દ્રથી 5 સેમી અંતરે આવેલા બિંદુ A થી દોરેલા સ્પર્શકની લંબાઈ 4 સેમી છે. વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

7. બે સમકેન્દ્રી વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ 5 સેમી અને 3 સેમી છે. મોટા વર્તુળની જીવા નાના વર્તુળને સ્પર્શે છે, તો તેની લંબાઈ શોધો.

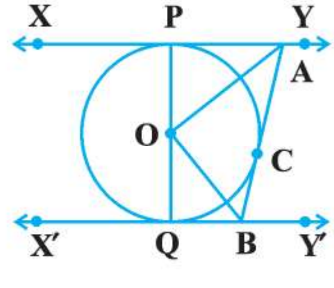
8. ચતુષ્કોણ ABCD એક વર્તુળને પરિગત છે (જુઓ આકૃતિ 10.12) સાબિત કરો કે,

   AB + CD = AD + BC



આકૃતિ 10.12

9. આકૃતિ 10.13માં, O કેન્દ્રવાળા વર્તુળના બે સ્પર્શકો XY અને X′Y′ સમાંતર છે અને વર્તુળ પરના સ્પર્શબિંદુ C આગળ દોરેલો ત્રીજો સ્પર્શક AB, XYને A બિંદુએ અને X′Y′ ને B બિંદુએ છેદે છે. સાબિત કરો કે $\angle AOB = 90$.

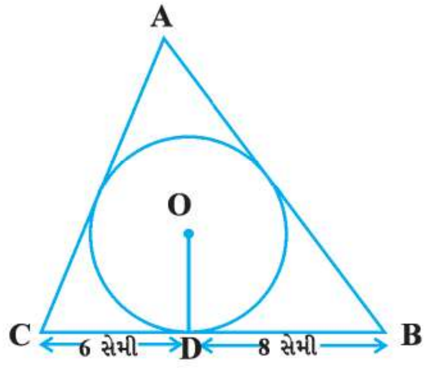


આકૃતિ 10.13

10. સાબિત કરો કે, વર્તુળની બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલા બે સ્પર્શકો વચ્ચેનો ખૂણો અને સ્પર્શબિંદુઓને કેન્દ્રને જોડતા રેખાખંડ વચ્ચેનો ખૂણો એકબીજાને પૂરક હોય છે.

11. સાબિત કરો કે, વર્તુળને પરિગત સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ સમબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

12. ત્રિકોણ ABC એ 4 સેમી ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળને પરિગત છે. સ્પર્શબિંદુ D એ BCનું 8 સેમી અને 6 સેમી લંબાઈના રેખાખંડો અનુક્રમે BD અને DC માં વિભાજન કરે છે.



આકૃતિ 10.14

13. સાબિત કરો કે વર્તુળને પરિગત ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓથી વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ રચાતા ખૂણાઓ પૂરક હોય છે.

10.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં, તમે નીચેના મુદ્દાઓનો અભ્યાસ કર્યો.

1. વર્તુળના સ્પર્શકનો અર્થ
2. સ્પર્શબિંદુમાંથી વર્તુળની ત્રિજ્યાને દોરેલો સ્પર્શક ત્રિજ્યાને લંબ હોય છે.
3. વર્તુળના બહારના બિંદુમાંથી વર્તુળને દોરેલા સ્પર્શકોની લંબાઈ સમાન હોય છે.

H6C5N3