પ્રકરણ 10

વર્તુળ

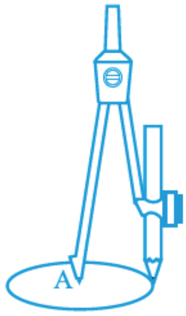
10.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે તમારા રોજિંદા જીવનમાં વાહનનાં પૈડાં, બંગડીઓ, કેટલીક ઘડિયાળના ચંદા, 50 પૈસા, 1 રૂપિયો અને 5 રૂપિયાના ચલણી સિક્કા, ચાવી ભરાવવાની ગોળ કડી, ખમીશનાં બટન (જુઓ આકૃતિ10.1.) જેવી ગોળ આકારની વસ્તુઓના પરિચયમાં આવ્યાં હશો. તમે નિરીક્ષણ કર્યું હશે કે ઘડિયાળમાં સેકન્ડ કાંટો ચંદા પર ખૂબ ઝડપથી ગોળ ફરે છે અને તેની અણી ગોળ માર્ગમાં ફરે છે. સેકન્ડ કાંટાની અણીથી જે માર્ગ નિર્દેશિત થાય છે તેને વર્તુળ કહે છે. આ પ્રકરણમાં, તમે વર્તુળ, વર્તુળને સંબંધિત પદો અને વર્તુળના કેટલાક ગુણધર્મોનો અભ્યાસ કરશો.

આકૃતિ 10.1

10.2 વર્તુળ અને તેને સંબંધિત પદો : એક સમીક્ષા

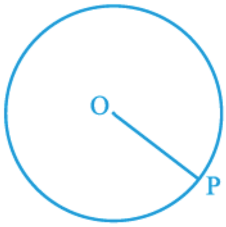
એક પરિકર લો અને તેમાં પેન્સિલ ભરાવો. કાગળ પરના એક બિંદુએ તેનો અણીવાળો ભાગ મૂકો. બીજા છેડાને થોડાક અંતર સુધી ખુલ્લો કરો. અણીવાળા છેડાને તે જ બિંદુએ રહેવા દઈ, બીજા છેડાને એક પૂર્ણ પરિભ્રમણ કરાવો. કાગળ ઉપર પેન્સિલથી કેવી બંધ આકૃતિ દોરાઈ? તમે જાણો છો કે તે વર્તુળ છે. (જુઓ આકૃતિ 10.2.) તમને વર્તુળ કેવી રીતે મળ્યું ? તમે એક બિંદુ નિશ્ચિત કર્યુ (આકૃતિ10.2 માં A) અને A થી એક નિશ્ચિત અંતરે આવેલાં બધાં બિંદુઓ મેળવ્યાં. માહિતી પરથી આપણને નીચેની વ્યાખ્યા મળે છે :



આકૃતિ 10.2

સમતલના એક નિશ્ચિત બિંદુથી નિશ્ચિત અંતરે આવેલાં તે સમતલનાં બિંદુઓના સમૂહને વર્તુળ કહે છે.

નિશ્ચિત બિંદુને વર્તુળનું ***કેન્દ્ર*** *(centre)* અને નિશ્ચિત અંતરને વર્તુળની ***ત્રિજ્યા*** *(radius)* કહે છે. આકૃતિ10.3 માં O કેન્દ્ર છે અને OP ની લંબાઈને તે વર્તુળની ત્રિજ્યા કહે છે.

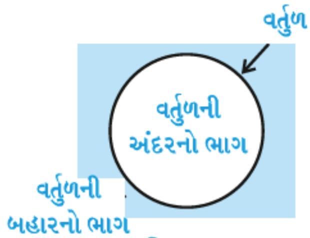


આકૃતિ 10.3

નોંધ : આપણે નોંધીશું કે, કેન્દ્ર અને વર્તુળના કોઈ પણ બિંદુને જોડતા રેખાખંડને પણ વર્તુળની ત્રિજ્યા કહેવાય. એટલે કે 'ત્રિજ્યા' શબ્દ નો બે અર્થમાં ઉપયોગ કરીશું : રેખાખંડ તરીકે અને તેની લંબાઈ તરીકે પણ.

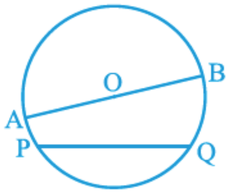
તમે ધોરણ VI માં નીચેની કેટલીક સંકલ્પનાઓ વિશે અગાઉથી પરિચિત થયાં છો. આપણે તેમને માત્ર યાદ કરીએ.

વર્તુળ જે સમતલમાં આવેલું છે તેને ત્રણ ભાગમાં વિભાજિત કરે છે. તે (i) ***વર્તુળની અંદરનો ભાગ*** *(interior)*(ii) વર્તુળ અને (iii) ***વર્તુળની બહારનો ભાગ*** *(exterior)* (જુઓ આકૃતિ10.4.) વર્તુળ અને તેનો અંદરનો ભાગ મળીને ***વર્તુળાકાર પ્રદેશ*** *(circular region)* બનાવે છે.



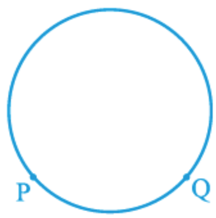
આકૃતિ 10.4

જો તમે વર્તુળ પર બે બિંદુઓ P અને Q લો, તો રેખાખંડ PQ ને વર્તુળની ***જીવા*** *(chord)* કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 10.5.) જે જીવા વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થાય છે, તે જીવાને વર્તુળનો ***વ્યાસ*** *(diameter)* કહે છે. ત્રિજ્યાની માફક, વ્યાસ શબ્દનો પણ બે અર્થમાં ઉપયોગ થાય છે, રેખાખંડ તરીકે અને તેની લંબાઈ માટે. શું તમે વર્તુળના વ્યાસ કરતાં મોટી બીજી કોઈ જીવા શોધી શકશો ? ના, તમે જોઈ શકશો કે વ્યાસ એ વર્તુળની મોટામાં મોટી જીવા છે અને બધા વ્યાસની લંબાઈ સરખી હોય છે. તે ત્રિજ્યા કરતા બમણી હોય છે. આકૃતિ10.5માં AOB એ વર્તુળનો વ્યાસ છે. વર્તુળને કેટલા વ્યાસ હોય છે? એક વર્તુળ દોરો અને જુઓ કે તમે કેટલા વ્યાસ શોધી શકો છો.



આકૃતિ 10.5

વર્તુળ પરનાં બે બિંદુઓ વચ્ચેના વર્તુળના ભાગને વર્તુળનું ***ચાપ*** *(arc)* કહે છે. આકૃતિ 10.6 માં બિંદુઓ P અને Q વચ્ચેના વર્તુળની ભાગની તરફ જુઓ. તમને ત્યાં બે ભાગ મળશે એક મોટો અને બીજો નાનો. (જુઓ આકૃતિ 10.7) વર્તુળના મોટા ભાગને ***ગુરુચાપ*** *(major arc)* PQ અને નાના ભાગને ***લઘુચાપ*** *(minor arc)* PQ કહે છે. લઘુચાપ PQ ને $\widehat{PQ}$ વડે અને જો R એ P તથા Q વચ્ચેનું ગુરુચાપનું કોઈ બિંદુ હોય તો ગુરુચાપ PQ ને $\widehat{PRQ}$ વડે દર્શાવાય છે. જો કાંઈ પણ દર્શાવવામાં ન આવ્યું હોય, તો ચાપ PQ અથવા $\widehat{PQ}$ ને લઘુચાપ



આકૃતિ 10.6

PQ સમજીશું. જ્યારે P અને Q એ વ્યાસનાં અંત્યબિંદુઓ હોય, ત્યારે બંને ચાપ સમાન છે અને તેમને ***અર્ધવર્તુળ*** *(semi circle)* કહે છે.

આકૃતિ 10.7

વર્તુળની પૂર્ણ લંબાઈને ***પરિઘ*** *(circumference)* કહે છે. જીવા અને તેનાં બંનેમાંથી કોઈ પણ ચાપ વચ્ચેના પ્રદેશને વર્તુળાકાર પ્રદેશનો ***વૃત્તખંડ*** *(segment)* અથવા સરળ રીતે વર્તુળનો વૃત્તખંડ કહે છે. તમે બે પ્રકારના વૃત્તખંડ પણ શોધી શકશો. તે ***ગુરુવૃત્તખંડ*** *(major segment)* અને ***લઘુવૃત્તખંડ*** *(minor segment)* છે. (જુઓ આકૃતિ 10.8.) ચાપ અને વર્તુળના કેન્દ્રથી ચાપના બંને અંત્યબિંદુઓને જોડતી બે ત્રિજ્યાઓ વચ્ચેના વર્તુળાકાર પ્રદેશના ભાગને ***વૃત્તાંશ*** *(sector)* કહે છે. વૃત્તખંડની માફક, તમે લઘુચાપને સંગત **લઘુવૃત્તાંશ** અને ગુરુચાપને સંગત **ગુરુવૃત્તાંશ** શોધી શકશો. આકૃતિ 10.9 માં પ્રદેશ OPQ એ લઘુવૃત્તાંશ અને વૃત્તીય પ્રદેશનો બાકીનો, ભાગ ગુરુવૃત્તાંશ છે. જ્યારે બંને ચાપ સમાન હોય એટલે કે પ્રત્યેક અર્ધવર્તુળ હોય ત્યારે બંને વૃત્તખંડ અને બંને વૃત્તાંશ સમાન હોય છે તથા પ્રત્યેકને ***અર્ધવૃત્તીય પ્રદેશ*** *(semicircular region)* કહે છે.

આકૃતિ 10.8

આકૃતિ 10.9

સ્વાધ્યાય 10.1

1. ખાલી જગ્યા પૂરો :

(i) વર્તુળનું કેન્દ્ર વર્તુળના .... ના ભાગમાં હોય છે. (બહાર/અંદર)

(ii) જે બિંદુનું વર્તુળના કેન્દ્રથી અંતર તેની ત્રિજ્યા કરતાં વધારે હોય, તે બિંદુ વર્તુળના .... ના ભાગમાં આવેલું છે. (બહાર/અંદર)

(iii) વર્તુળની મોટામાં મોટી જીવા એ વર્તુળનો .... છે.

(iv) જ્યારે ચાપનાં અંત્યબિંદુઓ એ વ્યાસનાં અંત્યબિંદુઓ હોય, તો તે ચાપ .... છે.

(v) વર્તુળનો વૃત્તખંડ એ વર્તુળના ચાપ અને .... વચ્ચેનો પ્રદેશ છે.

(vi) સમતલમાં આવેલું વર્તુળ, તે સમતલના .... ભાગ કરે છે.

2. નીચેનાં વિધાન સત્ય છે અથવા અસત્ય છે તે લખો. તમારા જવાબનાં કારણ આપો :

(i) કેન્દ્રને વર્તુળના કોઈ પણ બિંદુ સાથે જોડતો રેખાખંડ એ વર્તુળની ત્રિજ્યા છે.

(ii) વર્તુળની સમાન જીવાઓની સંખ્યા સાન્ત હોય છે.

(iii) જો વર્તુળને ત્રણ સમાન ચાપમાં વિભાજિત કરવામાં આવે, તો તે પ્રત્યેક ગુરુચાપ છે.

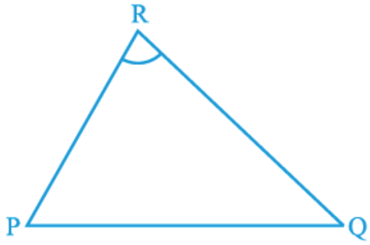
(iv) વર્તુળની જીવા કે જેની લંબાઈ ત્રિજ્યાથી બમણી છે, તેને વર્તુળનો વ્યાસ કહે છે.

(v) જીવા અને તેને સંગત ચાપની વચ્ચેના પ્રદેશને વૃત્તાંશ કહે છે.

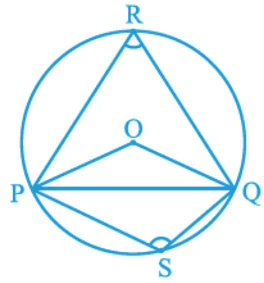
(vi) વર્તુળ એ સમતલીય આકૃતિ છે.

10.3 જીવાએ કોઈ બિંદુએ આંતરેલો ખૂણો

એક રેખાખંડ PQ લો અને PQ ને સમાવતી રેખા પર ન હોય તેવું બિંદુ R લો. PR અને QR જોડો. (જુઓ આકૃતિ 10.10.) ∠ PRQ ને રેખાખંડ PQ એ બિંદુ R આગળ ***આંતરેલો ખૂણો*** *(Angle subtended at R)* કહે છે. આકૃતિ 10.11 ના ખૂણાઓ POQ, PRQ અને PSQ ને શું કહેવાય ? ∠ POQ એ જીવા PQએ કેન્દ્ર O આગળ આંતરેલો ખૂણો છે. ∠ PRQ અને ∠ PSQ એ PQ એ અનુક્રમે ગુરુચાપ પર આવેલા બિંદુ R અને લઘુચાપ પર આવેલા બિંદુ S આગળ આંતરેલા ખૂણા છે.



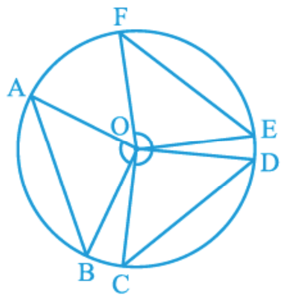
આકૃતિ 10.10



આકૃતિ 10.11

આપણે જીવાના માપ અને તેણે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણા વચ્ચેના સંબંધનું પરીક્ષણ કરીએ. વર્તુળની જુદી જુદી જીવાઓ અને તેમણે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણા દોરી તમે જોઈ શકશો કે જેટલી લાંબી જીવા હોય તેટલો મોટો ખૂણો કેન્દ્ર આગળ બને. તમે વર્તુળની બે સમાન જીવાઓ લો તો શું થશે ? કેન્દ્ર આગળ તેમણે આંતરેલા ખૂણા સમાન હશે કે નહિ ?

વર્તુળની બે કે તેથી વધુ સમાન જીવાઓ દોરી તેમણે વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાનાં માપ મેળવો. (જુઓ આકૃતિ10.12.) તમે જોઈ શકશો કે કેન્દ્ર આગળ તેમણે આંતરેલા ખૂણા સમાન છે. આપણે આ હકીકતની સાબિતી આપીએ.



આકૃતિ 10.12

પ્રમેય 10.1 : *વર્તુળની સમાન જીવાઓ, વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.*

સાબિતી : O કેન્દ્રવાળા વર્તુળમાં તમને બે સમાન જીવાઓ AB અને CD આપેલી છે. (જુઓ આકૃતિ 10.13.) તમારે ∠ AOB = ∠ COD સાબિત કરવાનું છે.

ત્રિકોણો AOB અને COD માં,

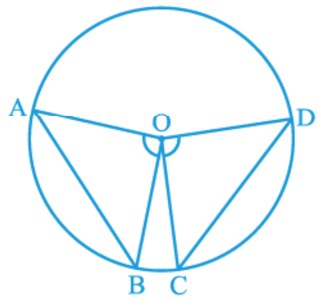
OA = OC (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

OB = OD (એક જ વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

AB = CD (આપેલું છે.)

માટે, Δ AOB ≅ Δ COD (એકરૂપતાની બાબાબા શરત)

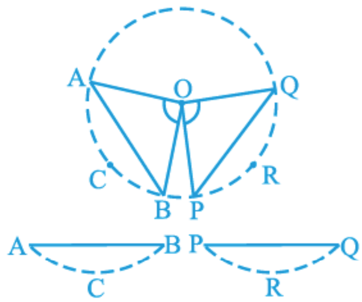
તે પરથી ∠ AOB = ∠ COD મળે. (એકરૂપ ત્રિકોણોનાં અનુરૂપ અંગો)



આકૃતિ 10.13

હવે, જો વર્તુળની બે જીવાઓ કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે તો જીવાઓ વિશે તમે શું કહેશો ? તેઓ સમાન છે કે નહિ ? આપણે આગળની પ્રવૃત્તિ દ્વારા તેનું પરીક્ષણ કરીએ :

એક કાગળ લઈ તેના પર વર્તુળ દોરો. વર્તુળ કાપો જેથી તકતી જેવો આકાર મળે. બિંદુઓ A અને B વર્તુળ પર હોય તેવી રીતે કેન્દ્ર O આગળ એક ખૂણો AOB દોરો. કેન્દ્ર આગળ બીજો ખૂણો POQ ∠AOB ના માપનો દોરો. તકતીને AB આગળ અને PQ આગળ કાપો. (જુઓ આકૃતિ 10.14.) તમને વર્તુળના બે વૃત્તખંડ ACB અને PRQ મળશે. એકને બીજા પર ગોઠવો. તમે શું નિરીક્ષણ કર્યું ? તેઓ એકબીજાને આચ્છાદિત કરે છે એટલે કે તેઓ એકરૂપ છે. આથી AB = PQ.



આકૃતિ 10.14

જે તમે આ એક વિશિષ્ટ વિકલ્પ માટે જોયું, તે બીજા સમાન ખૂણાઓ માટે પણ ચકાસો. બધી જ જીવાઓ સમાન મળશે તે નીચેના પ્રમેય દ્વારા જોઈએ :

પ્રમેય 10.2 : *જો જીવાઓ વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે જીવાઓ સમાન છે.*

ઉપરનું પ્રમેય એ પ્રમેય 10.1 નું પ્રતીપ છે.

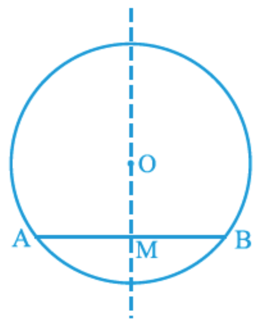
જો આકૃતિ 10.13 માં, તમે $\angle AOB = \angle COD$ લેશો, તો $\Delta AOB \cong \Delta COD$ થશે (શા માટે ?) તમે AB = CD જોઈ શકો છો ?

સ્વાધ્યાય 10.2

1. યાદ કરો કે જો બે વર્તુળોની ત્રિજ્યાઓ સમાન હોય, તો તે બે વર્તુળો સમાન છે. સાબિત કરો કે એકરૂપ વર્તુળોની સમાન જીવાઓ તેમનાં કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.
2. સાબિત કરો કે એકરૂપ વર્તુળોની જીવાઓ તેમનાં કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે જીવાઓ સમાન છે.

10.4 કેન્દ્રમાંથી જીવા પર દોરેલો લંબ

પ્રવૃત્તિ : એક કાગળ ઉપર વર્તુળ દોરો. તેનું કેન્દ્ર O લો. જીવા AB દોરો. હવે કાગળને O માંથી પસાર થતી રેખા આગળ એવી રીતે ગડીવાળો કે જેથી જીવાનો એક ભાગ એ બીજા ભાગ પર પડે. ધારો કે ગડી, AB ને M બિંદુમાં કાપે. આમ, $\angle OMA = \angle OMB = 90°$ અથવા OM એ AB પરનો લંબ છે. શું બિંદુ B એ A ની બરાબર ઉપર આવે છે. (જુઓ આકૃતિ10.15.) હા, તે આવે છે. આથી MA = MB.



આકૃતિ 10.15

OA અને OB ને જોડી અને કાટકોણ ત્રિકોણો OMA અને OMB ને એકરૂપ સાબિત કરી તમે તમારી જાતે તે સાબિત કરો. આ ઉદાહરણ એ નીચેના પરિણામનું વિશિષ્ટ દૃષ્ટાંત છે :

પ્રમેય 10.3 : *વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી જીવા પર દોરેલો લંબ, જીવાને દુભાગે છે.*

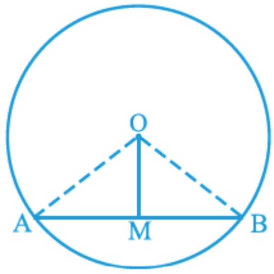
આ પ્રમેયનું પ્રતીપ શું થશે?

આ લખતાં પહેલાં, આપણે સ્પષ્ટ થઈએ કે પ્રમેય 10.3 માં શું આપ્યું છે અને શું સાબિત થાય છે. વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી જીવા પર લંબ દોરેલો છે તેમ આપ્યું છે અને તે જીવાને દુભાગે છે તેમ સાબિત કરવાનું છે. આ પ્રમાણે પ્રતીપમાં, સિદ્ધાંત છે. 'જો વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી દોરેલી રેખા જીવાને દુભાગે' અને સાબિત કરવું છે 'રેખા, જીવાને લંબ છે' આથી તેનું પ્રતીપ :

પ્રમેય 10.4 : *વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી પસાર થતી રેખા જીવાને દુભાગે, તો તે રેખા જીવાને લંબ છે.*

આ સત્ય છે? કેટલાંક વિકલ્પો માટે પ્રયત્ન કરો અને જુઓ. તમને જોવા મળશે કે આ વિકલ્પો માટે તે સત્ય છે. આગળ આપેલા પ્રશ્નો ઉકેલીને જુઓ કે વ્યાપક રીતે તે સત્ય છે. તેના જુદા જુદા તબક્કાઓ લખીશું અને તમે તેનાં કારણો આપશો.

ધારો કે AB એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની જીવા છે અને O ને AB ના મધ્યબિંદુ M સાથે જોડેલું છે. તમારે સાબિત કરવાનું છે કે $OM \perp AB$. OA અને OB જોડો. (જુઓ આકૃતિ 10.16.)



આકૃતિ 10.16

ત્રિકોણો OAM અને OBM માં,

$OA = OB$ (કેમ ?)

$AM = BM$ (કેમ ?)

$OM = OM$ (સામાન્ય)

માટે, $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ (શા માટે ?)

તે પરથી $\angle OMA = \angle OMB = 90°$ (કેમ ?)

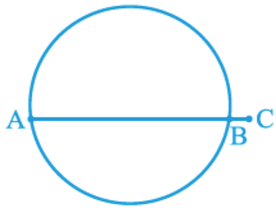
10.5 ત્રણ બિંદુઓમાંથી વર્તુળ

તમે પ્રકરણ 6 માં શીખી ગયાં છો કે રેખાના નિરૂપણ માટે બે બિંદુઓ પૂરતાં છે. એટલે કે બે ભિન્ન બિંદુઓમાંથી એક અને માત્ર એક રેખા પસાર થાય છે. સ્વાભાવિક રીતે એક પ્રશ્ન ઉદ્ભવે. વર્તુળના નિર્માણ માટે કેટલાં બિંદુઓ પૂરતાં છે?

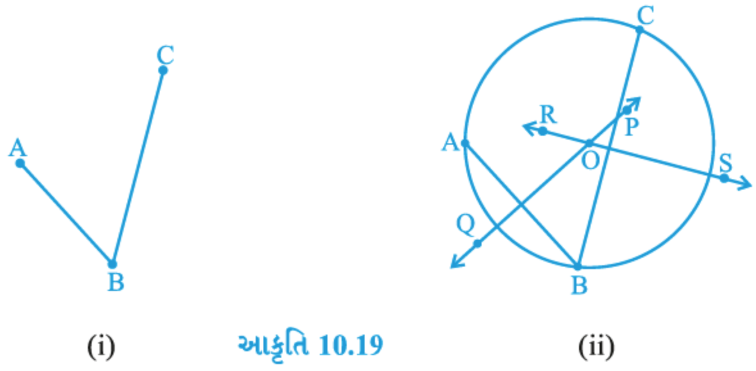
એક બિંદુ P લો. આ બિંદુમાંથી કેટલાં વર્તુળો દોરી શકાય? તમે જોઈ શકો છો કે, આ બિંદુમાંથી તમને યોગ્ય લાગે તેટલાં બધાં વર્તુળો શક્ય છે. [જુઓ આકૃતિ 10.17(i).] હવે બે બિંદુઓ P અને Q લો. ફરીથી તમે જોઈ શકો છો કે P અને Q માંથી અનંત સંખ્યામાં વર્તુળો પસાર થાય છે. [જુઓ આકૃતિ10.17(ii).] તમે ત્રણ બિંદુઓ A, B અને C લો ત્યારે શું થશે ? ત્રણ સમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતું વર્તુળ તમે દોરી શકો છો ? ના, જો બિંદુઓ એક જ રેખા પર આવેલાં હોય, તો ત્રીજું બિંદુ બે બિંદુમાંથી પસાર થતાં વર્તુળની અંદર અથવા બહાર હશે. [જુઓ આકૃતિ10.18.]

આકૃતિ 10.17

હવે, આપણે એક જ રેખા પર ન હોય તેવાં ત્રણ બિંદુઓ A, B અને C લઈએ અથવા બીજા શબ્દોમાં કહીએ તો, તે સમરેખ નથી. [જુઓ આકૃતિ10.19(i).] AB અને BC ના લંબદ્વિભાજક અનુક્રમે PQ અને RS દોરો. ધારો કે આ બે લંબદ્વિભાજકો એકબીજાને બિંદુ O માં છેદે છે. (નોંધીશું કે PQ અને RS એકબીજાને છેદે છે કારણ કે તેઓ સમાંતર નથી) [જુઓ આકૃતિ 10.19(ii).]



આકૃતિ 10.18



આકૃતિ 10.19

હવે AB ના લંબદ્વિભાજક PQ પર O આવેલું છે. હવે તમને OA = OB મળશે, કારણ કે રેખાખંડના લંબદ્વિભાજક પરનું પ્રત્યેક બિંદુ તેનાં અંત્યબિંદુઓથી સરખા અંતરે હોય છે. OA = OB પરિણામ પ્રકરણ 7 માં સાબિત કરેલું છે.

તે જ પ્રમાણે O એ BCના લંબદ્વિભાજક RS પર આવેલું છે, આથી

$$OB = OC \text{ થશે.}$$

આથી OA = OB = OC, આનો અર્થ થશે કે, બિંદુઓ A, B અને C એ O થી સમાન અંતરે છે. તેથી જો તમે O કેન્દ્ર લઈ OA ત્રિજ્યા લઈ એક વર્તુળ દોરો, તો તે B અને C માંથી પણ પસાર થશે. આ દર્શાવે છે કે ત્રણ બિંદુઓ A, B અને C માંથી પસાર થાય તેવું એક વર્તુળ છે. તમે જાણો છો કે બે રેખાઓના લંબદ્વિભાજકો એક જ બિંદુમાં છેદી શકે છે આથી તમે OA ત્રિજ્યાવાળું એક જ વર્તુળ દોરી શકો છો. બીજી રીતે કહીએ તો, A, B અને C માંથી પસાર થતું એક અનન્ય વર્તુળ છે. તમે હવે નીચેનું પ્રમેય સાબિત કર્યું :

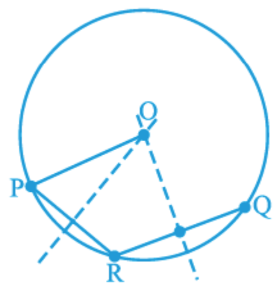
પ્રમેય 10.5 : *આપેલ ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓમાંથી એક અને માત્ર એક જ વર્તુળ પસાર થાય છે.*

નોંધ : જો ABC એક ત્રિકોણ હોય, તો પ્રમેય 10.5 પ્રમાણે, ત્રિકોણનાં ત્રણ શિરોબિંદુઓ A, B અને C માંથી એક અનન્ય વર્તુળ પસાર થાય છે. આ વર્તુળને Δ ABC નું ***પરિવૃત્ત*** *(circumcircle)* અથવા ***પરિવર્તુળ*** કહે છે. તેના કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યાને અનુક્રમે ***ત્રિકોણનું પરિકેન્દ્ર*** *(circumcentre)* અને ***પરિત્રિજ્યા*** *(circumradius)* કહેવાય છે.

ઉદાહરણ 1 : વર્તુળનું ચાપ આપ્યું છે. વર્તુળ પૂર્ણ કરો.

ઉકેલ : ધારો કે વર્તુળનું ચાપ PQ આપ્યું છે. આપણે વર્તુળ પૂર્ણ કરવું છે, એટલે કે આપણે તેનું કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધવી છે. ચાપ પર એક બિંદુ R લો. PR અને RQ જોડો. પ્રમેય 10.5 સાબિત કરવા માટે જે રચના કરી તેનો ઉપયોગ કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા શોધવા માટે કરો.

ઉપર પ્રમાણે મેળવેલા કેન્દ્ર અને ત્રિજ્યા લઈ, આપણે વર્તુળ પૂર્ણ કરી શકીશું. (જુઓ આકૃતિ. 10.20.)



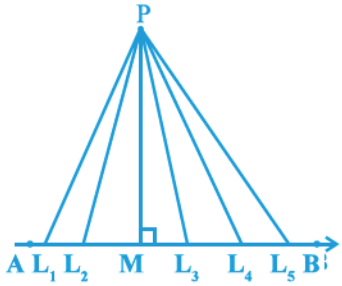
આકૃતિ 10.20

સ્વાધ્યાય 10.3

1. વર્તુળોની જુદી જુદી જોડીઓ દોરો. પ્રત્યેક જોડીમાં કેટલાં બિંદુઓ સામાન્ય છે? સામાન્ય બિંદુઓની મહત્તમ સંખ્યા કેટલી ?
2. ધારો કે તમને એક વર્તુળ આપવામાં આવ્યું છે. તેનું કેન્દ્ર શોધવાની રચના કરો.
3. જો બે વર્તુળો એકબીજાંને બે બિંદુમાં છેદે તો સાબિત કરો કે તેમનાં કેન્દ્ર, સામાન્ય જીવાના લંબદ્વિભાજક પર છે.

10.6 સમાન જીવાઓ અને તેમનું કેન્દ્રથી અંતર

ધારો કે AB એક રેખા છે અને P રેખાની બહારનું એક બિંદુ છે. રેખા પર અનંત સંખ્યામાં બિંદુઓ હોવાથી, આ બિંદુઓને જો તમે P સાથે જોડશો, તો તમને અનંત સંખ્યામાં રેખાખંડો PL_1, PL_2, PM, PL_3, PL_4 વગેરે મળશે. આ બધામાંથી P થી ABનું અંતર કયું થશે ? તમે થોડી વાર વિચાર કરશો તો તમને જવાબ મળશે. આ બધા રેખાખંડોમાંથી આકૃતિ 10.21 માં P થી AB પરનો લંબ, PM એ નાનામાં નાનો થશે. ગણિતમાં, આપણે આ ઓછામાં ઓછી લંબાઈ PM ને P થી AB ના અંતર તરીકે વ્યાખ્યાયિત કરીશું. આથી તમે કહી શકશો કે,

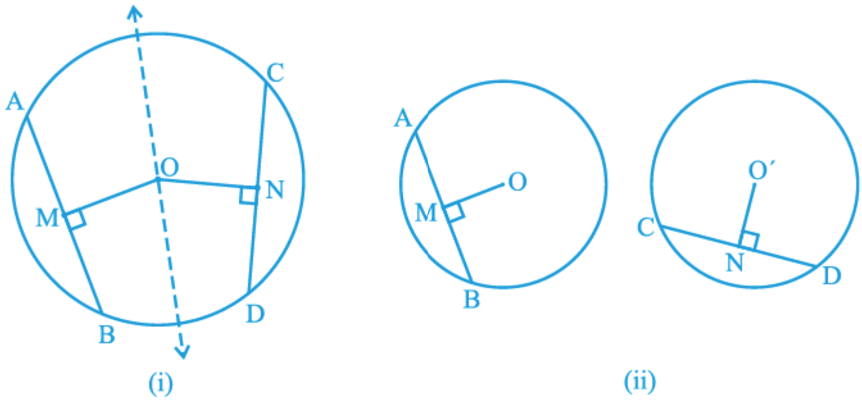


આકૃતિ 10.21

બિંદુથી રેખાના લંબઅંતરને બિંદુથી રેખાનું અંતર કહે છે.

નોંધીશું કે જો બિંદુ, રેખા પર આવેલું હોય, તો બિંદુથી રેખાનું અંતર શૂન્ય છે.

વર્તુળને અનંત જીવાઓ હોય છે. વર્તુળની જીવાઓ દોરતાં, તમે નિરીક્ષણ કરી શકશો કે ઓછી લંબાઈની જીવાઓ કરતાં વધારે લંબાઈની જીવાઓ કેન્દ્રની વધારે નજીક હોય છે. જુદી જુદી લંબાઈની વર્તુળની કેટલીક જીવાઓ દોરી તેમનું કેન્દ્રથી અંતર માપીને તમે આ હકીકતનું અવલોકન કરી શકશો. વર્તુળની લાંબામાં લાંબી જીવા કે જે વર્તુળનો વ્યાસ છે તેનું વર્તુળના કેન્દ્રથી અંતર કેટલું થશે? કેન્દ્ર તેના પર આવેલું હોવાથી, અંતર શૂન્ય થશે. જીવાની લંબાઈ અને તેનું કેન્દ્રથી અંતર આ બે વચ્ચેના કેટલાંક સંબંધો વિશે તમે કંઈક વિચારી શકો છો ? જો કોઈ સંબંધ હોય તો તે વિશે આપણે જોઈએ.

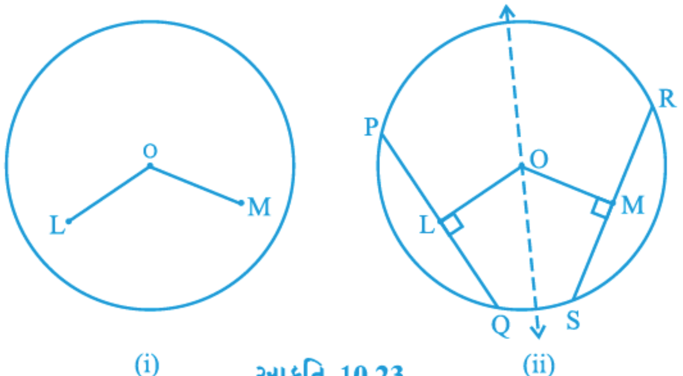


આકૃતિ 10.22

પ્રવૃત્તિ : કાગળ પર કોઈપણ ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ દોરો. તેની બે સમાન જીવાઓ AB અને CD દોરો અને કેન્દ્ર O માંથી તેમના પરના લંબ અનુક્રમે OM અને ON દોરો. આકૃતિની એવી રીતે ગડી કરો કે જેથી D એ B ઉપર પડે અને C એ A ઉપર પડે. [જુઓ આકૃતિ10.22 (i).] તમે નિરીક્ષણ કરશો કે O ગડી પર રહેશે અને N એ M ઉપર પડશે. આથી, OM = ON. કેન્દ્ર O અને O′ લઈ, એકરૂપ વર્તુળો દોરો. દરેકમાં એક-એક સમાન જીવા AB અને CD લઈ આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો. તેમના પર લંબ OM અને O′N દોરો. [જુઓ આકૃતિ 10.22(ii).] એક વર્તુળાકાર તક્તી કાપો અને તેને વર્તુળ પર એવી રીતે ગોઠવો કે જેથી AB એ CD ને બંધબેસતું થાય. તમે જોઈ શકશો કે O એ O′ ને પર આવે છે અને M એ N ની પર આવે છે. આ પ્રમાણે તમે નીચેના પ્રમેયની ચકાસણી કરી શકો:

પ્રમેય 10.6 : *વર્તુળ (અથવા એકરૂપ વર્તુળો)ની સમાન જીવાઓ વર્તુળના કેન્દ્ર (કેન્દ્રો)થી સમાન અંતરે આવેલી હોય છે.*

આ પ્રમેયનું પ્રતીપ સત્ય છે કે નહિ તે હવે પછી જોઈશું. આ માટે O કેન્દ્રવાળું એક વર્તુળ દોરો. વર્તુળમાં રહે તે રીતે સમાન લંબાઈના બે રેખાખંડ OL અને OM દોરો. [જુઓ આકૃતિ 10.23(i).] પછી OL અને OM ને લંબ થાય તેવી વર્તુળની બે જીવાઓ અનુક્રમે PQ અને RS દોરો. [જુઓ આકૃતિ 10.23(ii).] PQ અને RS ની લંબાઈ માપો. શું આ ભિન્ન છે? ના, બંને સમાન છે. સમાન લંબાઈના વધારે રેખાખંડ અને તેમને લંબ જીવાઓ દોરી આ પ્રવૃત્તિનું પુનરાવર્તન કરો.



આકૃતિ 10.23

આ પ્રમેય 10.6 નું પ્રતીપ છે તેની સત્યાર્થતાની ખાતરી થાય છે અને તે નીચે દર્શાવેલ છે.

પ્રમેય 10.7 : *વર્તુળના કેન્દ્રથી સમાન અંતરે આવેલી જીવાઓ સમાન હોય છે.*

ઉપરના પરિણામની વધુ સમજૂતી માટે આપણે હવે એક ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 2 : જો વર્તુળની પરસ્પર છેદતી બે જીવાઓ તેમના છેદબિંદુમાંથી પસાર થતા વ્યાસ સાથે સમાન ખૂણા બનાવે, તો સાબિત કરો કે તે જીવાઓ સમાન છે.

ઉકેલ : O કેન્દ્રવાળા વર્તુળની બે જીવાઓ AB અને CD એકબીજીને E બિંદુમાં છેદે છે. $\angle AEQ = \angle DEQ$ થાય તેવો E માંથી પસાર થતો વ્યાસ PQ છે (જુઓ આકૃતિ10.24.) તમારે AB = CD સાબિત કરવાનું છે.

જીવાઓ AB અને CD પર અનુક્રમે લંબ OL અને OM દોરો. હવે,

$\angle LOE = 180° - 90° - \angle LEO$ (ત્રિકોણના ખૂણાઓના સરવાળાનો નિયમ)

$= 90° - \angle LEO$

$= 90° - \angle AEQ$

$= 90° - \angle DEQ$

$= 90° - \angle MEO \quad = \angle MOE$

ત્રિકોણો OLE અને OME માં,

$\angle LEO = \angle MEO$ (શા માટે ?)

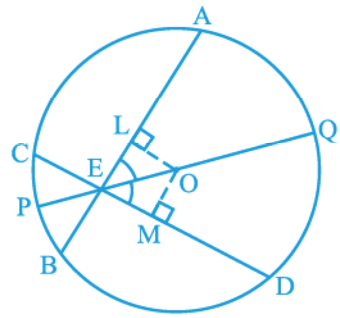
$\angle LOE = \angle MOE$ (ઉપર સાબિત કર્યું)

$EO = EO$ (સામાન્ય)

માટે, $\Delta OLE \cong \Delta OME$ (શા માટે ?)

તે પરથી $OL = OM$ (એકરૂપ ત્રિકોણના એકરૂપ અંગ)

આથી, $AB = CD$ (કેમ ?)



આકૃતિ 10.24

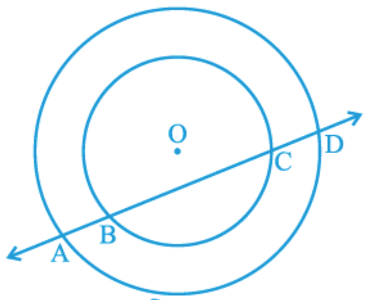
સ્વાધ્યાય 10.4

1. 5 સેમી અને 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં બે વર્તુળો બે બિંદુમાં છેદે છે અને તેમના કેન્દ્ર વચ્ચેનું અંતર 4 સેમી છે. સામાન્ય જીવાની લંબાઈ શોધો.

2. જો વર્તુળની બે સમાન જીવાઓ વર્તુળની અંદર છેદે, તો એક જીવાના કપાતા ભાગ અને બીજી જીવાના અનુરૂપ ભાગ સમાન છે. તેમ સાબિત કરો.

3. જો વર્તુળની બે સમાન જીવાઓ વર્તુળની અંદર છેદે, તો સાબિત કરો કે છેદબિંદુને કેન્દ્ર સાથે જોડતી રેખા જીવાઓ સાથે સમાન ખૂણા બનાવે છે.

4. જો O કેન્દ્રવાળા બે સમકેન્દ્રી (*concentric*) વર્તુળો (સમાન કેન્દ્રવાળાં વર્તુળો)ને એક રેખા અનુક્રમે A, B, C અને Dમાં છેદે, તો સાબિત કરો કે AB = CD. (જુઓ આકૃતિ 10.25.)



આકૃતિ 10.25

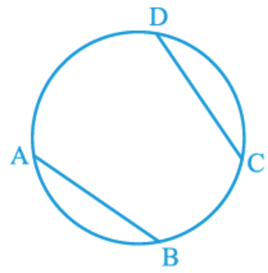
5. એક વિહારસ્થાનમાં 5 મી ત્રિજ્યાવાળા દોરેલા વર્તુળ પર રમત રમવા માટે ત્રણ છોકરીઓ રેશ્મા, સલમા અને મનદીપ ઊભાં છે. રેશ્મા દડાને સલમા તરફ ફેંકે છે. સલમા મનદીપ તરફ અને

મનદીપ રેશ્મા તરફ દડો ફેંકે છે. જો રેશ્મા અને સલમા વચ્ચેનું તથા સલમા અને મનદીપ વચ્ચેનું દરેક અંતર 6 મીટર હોય, તો રેશ્મા અને મનદીપ વચ્ચેનું અંતર કેટલું હશે?

6. એક વસાહતમાં 20મીટર ત્રિજ્યાવાળું એક વર્તુળાકાર વિહારસ્થાન આવેલું છે. ત્રણ છોકરાઓ અંકુર, સૈયદ અને ડૅવિડ દરેકે પોતાના હાથમાં રમકડાનો ટેલિફોન એકબીજા સાથે વાત કરવા માટે રાખીને વર્તુળની સીમા પર સરખા અંતરે બેઠા છે. દરેકના ટેલિફોનની દોરીની લંબાઈ શોધો.

10.7 વર્તુળના ચાપે આંતરેલો ખૂણો

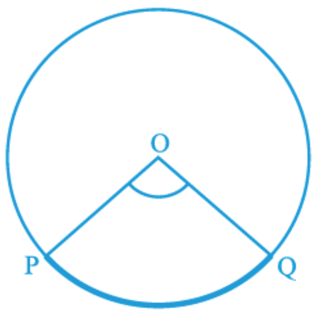
તમે જોયું કે વર્તુળના વ્યાસ સિવાયની જીવાનાં અંત્યબિંદુઓ વર્તુળનું બે ચાપમાં વિભાજન કરે છે—એક ગુરુચાપ અને બીજું લઘુચાપ. જો તમે બે સમાન જીવાઓ લો. તો તેમને સંગત ચાપનાં માપ વિશે શું કહેશો ? શું એક જીવાથી બનેલું ચાપ બીજી જીવાને અનુરૂપ બનેલા ચાપને સમાન હોય છે? હકીકતમાં, તેઓની લંબાઈ સમાન છે. જો એક ચાપને વાળ્યા અથવા વાંકું કર્યા વગર બીજા ચાપ પર મૂકવામાં આવે, તો તે બીજા પર સંપૂર્ણ રીતે આચ્છાદિત થાય છે.



આકૃતિ 10.26

વર્તુળમાંથી જીવા CD ને અનુરૂપ ચાપ કાપી અને તેને સમાન બીજી જીવા AB ને અનુરૂપ ચાપ પર ગોઠવીને આ હકીકતની ચકાસણી તમે કરી શકશો. તમે જોઈ શકશો કે ચાપ CD એ ચાપ AB પર સંપૂર્ણ આચ્છાદિત થાય છે. (જુઓ આકૃતિ 10.26.) આ દર્શાવે છે કે સમાન જીવાઓ સમાન ચાપ બનાવે છે અને તેનું પ્રતીપ, સમાન ચાપ વર્તુળની સમાન જીવાઓ બનાવે છે. તમે તેને નીચે પ્રમાણે રજૂ કરી શકશો :

જો વર્તુળની બે જીવા સમાન હોય, તો તેમને અનુરૂપ ચાપ એકરૂપ છે અને તેનું પ્રતીપ, જો વર્તુળનાં બે ચાપ એકરૂપ હોય, તો તેમને અનુરૂપ જીવા સમાન છે.



આકૃતિ 10.27

વર્તુળના ચાપે વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાની વ્યાખ્યા એ તે ચાપની અનુરૂપ જીવાએ કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણા તરીકે લઈશું. જો લઘુચાપ કેન્દ્ર આગળ કોઇ ખૂણો આંતરે, તો ગુરુચાપ વિપરીત કોણ આંતરશે એમ અર્થ કરીશું. આથી આકૃતિ 10.27 માં લઘુચાપ PQ એ કેન્દ્ર O આગળ $\angle$POQ આંતરે છે અને ગુરુચાપ PQ એ O આગળ આંતરેલો ખૂણો એ વિપરીતકોણ POQ છે.

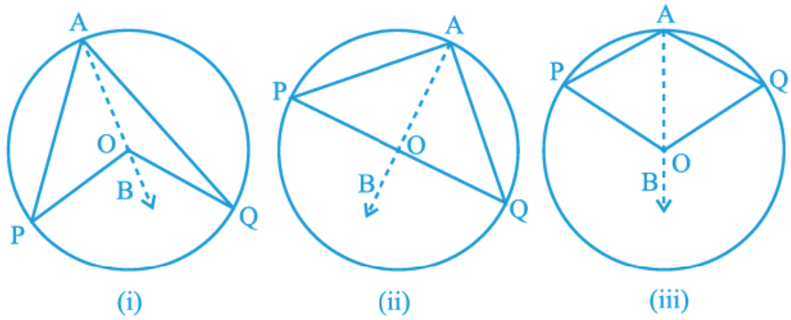
ઉપરના ગુણધર્મનું અવલોકન કરતાં અને પ્રમેય 10.1 ના આધારે નીચેનું પરિણામ સત્ય છે :

વર્તુળનાં એકરૂપ ચાપ અથવા સમાન લંબાઈનાં ચાપ કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.

આથી, વર્તુળની જીવાએ કેન્દ્ર આગળ આંતરેલો ખૂણો અને તેને અનુરૂપ લઘુચાપે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલો ખૂણો સમાન છે. નીચેનું પ્રમેય એ ચાપ દ્વારા વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણા અને વર્તુળના કોઈપણ બિંદુએ આંતરેલા ખૂણા વચ્ચેનો સંબંધ આપે છે.

પ્રમેય 10.8 : *વર્તુળના ચાપે કેન્દ્ર આગળ આંતરેલો ખૂણો તે ચાપે વર્તુળના બાકીના ભાગ પરના કોઈપણ બિંદુ આગળ આંતરેલા ખૂણા કરતાં બમણો હોય છે.*

સાબિતી : વર્તુળનું ચાપ PQ એ કેન્દ્ર O આગળ ખૂણો POQ આંતરે છે અને વર્તુળના બાકીના ભાગ પરના બિંદુ A આગળ ખૂણો PAQ આંતરે છે તેમ આપ્યું છે. આપણે સાબિત કરવું છે કે $\angle POQ = 2 \angle PAQ$.



આકૃતિ 10.28

આકૃતિ 10.28. માં દર્શાવ્યા પ્રમાણે ત્રણ વિકલ્પ લઈએ. (i) માં ચાપ PQ એ લઘુચાપ છે (ii) માં ચાપ PQ એ અર્ધવર્તુળ છે અને (iii) માં ચાપ PQ એ ગુરુચાપ છે.

આપણે AO ને B સુધી લંબાવીએ અને ત્યાંથી શરૂઆત કરીએ.

દરેક વિકલ્પમાં $\angle BOQ = \angle OAQ + \angle AQO$

કારણ કે ત્રિકોણનો બહિષ્કોણ એ ત્રિકોણના અંતઃસંમુખકોણના સરવાળા જેટલો હોય છે.

Δ OAQ માં,

$OA = OQ$ (વર્તુળની ત્રિજ્યાઓ)

માટે, $\angle OAQ = \angle OQA$ (પ્રમેય 7.5)

તે પરથી, $\angle BOQ = 2\angle OAQ$ (1)

તે જ પ્રમાણે, $\angle BOP = 2\angle OAP$ (2)

(1) અને (2) પરથી, $\angle BOP + \angle BOQ = 2(\angle OAP + \angle OAQ)$

$\therefore \angle POQ = 2\angle PAQ.$ (3)

વિકલ્પ (iii) માટે, PQ એ ગુરુચાપ છે, (3) ને નીચે પ્રમાણે બદલીએ :

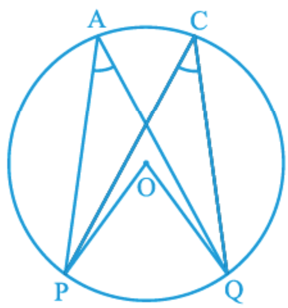
વિપરીતકોણ $POQ = 2\angle PAQ$ ■

નોંધ : ધારો કે આપણે ઉપરની આકૃતિમાં બિંદુઓ P અને Q ને જોડી જીવા PQ બનાવીએ, તો પછી $\angle PAQ$ ને વર્તુળના ભાગ PAQP માં બનેલો ખૂણો એમ કહીશું.

પ્રમેય 10.8 માં A એ વર્તુળના બાકી રહેતા ભાગ પરનું કોઈ પણ બિંદુ છે. આથી વર્તુળના બાકી રહેતા ભાગ પર બીજું કોઈ પણ બિંદુ C લેતાં (જુઓ આકૃતિ 10.29.) તમને

$\angle POQ = 2\angle PCQ = 2\angle PAQ$ મળશે.

આથી, $\angle PCQ = \angle PAQ.$



આકૃતિ 10.29

આ નીચેનું પ્રમેય સાબિત કરે છે :

પ્રમેય 10.9 : *એક જ વૃત્તખંડમાં આવેલા ખૂણાઓ સમાન હોય છે.*

પ્રમેય 10.8 ના વિકલ્પ (ii)ની ચર્ચા પુનઃ આપણે જુદી કરીએ. અહીં $\angle PAQ$ એ અર્ધવર્તુળ વૃત્તખંડમાં એક ખૂણો છે વળી,

$\angle PAQ = \frac{1}{2} \angle POQ = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$. જો તમે અર્ધવર્તુળ પર બીજું કોઈ બિંદુ C લેશો, તો તમને પુનઃ

$\angle PCQ = 90°$ મળશે.

આથી, તમને વર્તુળનો એક બીજો ગુણધર્મ આ પ્રમાણે મળશે :

અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો કાટકોણ હોય છે.

પ્રમેય10.9 નું પ્રતીપ પણ સત્ય છે. તે નીચે પ્રમાણે દર્શાવી શકાય :

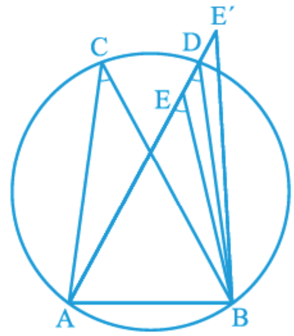
પ્રમેય 10.10 : જો બે બિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ, એ રેખાખંડને સમાવતી રેખાની એક જ બાજુએ આવેલાં બીજાં બે બિંદુઓ આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો ચારેય બિંદુઓ એક જ વર્તુળ પર આવેલાં છે. *(આ ચારેય બિંદુઓ **વૃત્તીય** (concyclic) બિંદુઓ કહેવાય.)*

આ પરિણામની સત્યાર્થતા તમે નીચે જોઈ શકશો :

આકૃતિ 10.30 માં, રેખાખંડ AB, બિંદુઓ C અને D આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે એટલે કે

$$\angle ACB = \angle ADB$$

બિંદુઓ A, B, C અને D એક જ વર્તુળ પર આવેલાં છે તે બતાવવા માટે આપણે A, C અને B માંથી પસાર થતું એક વર્તુળ દોરીએ. ધારો કે તે બિંદુ D માંથી પસાર થતું નથી. તો પછી તે AD ને અથવા (લંબાવેલી AD) ને કોઈક બિંદુ E (અથવા E′) માં છેદશે.



આકૃતિ 10.30

જો બિંદુઓ A, C, E અને B વર્તુળ પર આવેલાં હોય, તો

$\angle ACB = \angle AEB$ (શા માટે ?)

પરંતુ $\angle ACB = \angle ADB$ આપેલ છે.

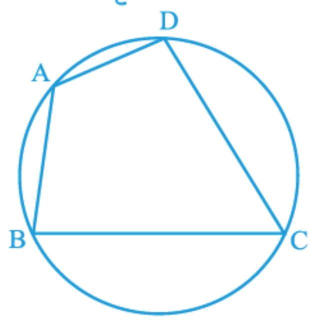
માટે, $\angle AEB = \angle ADB$

જો E એ D ઉપર હોય તો જ આ બને નહિ તો આ શક્ય નથી. (શા માટે ?)

તે જ પ્રમાણે E' પણ D ઉપર થશે.

10.8 ચક્રીય ચતુષ્કોણ

ચતુષ્કોણ ABCDનાં બધા શિરોબિંદુઓ જો એક જ વર્તુળ પર આવેલાં હોય તો ABCD ને ***ચક્રીય** (cyclic)* ચતુષ્કોણ કહે છે. (જુઓ આકૃતિ 10.31.) આવા ચતુષ્કોણમાં તમને એક વિશિષ્ટ ગુણધર્મ જોવા મળશે. જુદી જુદી બાજુઓવાળા કેટલાક ચક્રીય ચતુષ્કોણ દોરો અને દરેકને ABCD નામ આપો. (ભિન્ન ભિન્ન ત્રિજ્યાવાળાં કેટલાંક વર્તુળ દોરી અને તે દરેક પર ચાર બિંદુઓ લઈ આ પ્રક્રિયા કરવાથી તે શક્ય બનશે.) સામસામેના ખૂણાઓ માપો અને તમારાં અવલોકન નીચેના કોષ્ટકમાં લખો.



આકૃતિ 10.31

ચતુષ્કોણનો ક્રમાંક	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

આગળના કોષ્ટક પરથી તમે શું નિષ્કર્ષ કાઢશો ?

માપનની ક્ષતિને અવગણતાં, તમે મેળવી શકશો કે $\angle A + \angle C = 180°$ અને $\angle B + \angle D = 180°$. આ પરિણામથી નીચેની ચકાસણી થાય છે :

પ્રમેય 10.11 : *ચક્રીય ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓની પ્રત્યેક જોડના ખૂણાનો સરવાળો 180° થાય છે.*

હકીકતમાં, આ પ્રમેયનું નીચે રજૂ કરેલ પ્રતીપ પણ સત્ય છે.

પ્રમેય 10.12 : *જો ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણાઓની જોડના ખૂણાનો સરવાળો 180° હોય, તો તે ચતુષ્કોણ ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે.*

પ્રમેય 10.10 માં જે રીત બતાવી છે તે રીત અપનાવશો તો આ પ્રમેયની સાબિતી પણ તમને મળશે.

ઉદાહરણ 3 : આકૃતિ 10.32 માં, વર્તુળનો વ્યાસ AB છે. વર્તુળની ત્રિજ્યાના માપની બરાબર જીવા CD છે. AC અને BD ને લંબાવતાં તે બિંદુ E માં છેદે છે. સાબિત કરો કે $\angle AEB = 60°$

ઉકેલ : OC, OD અને BC જોડો.

ત્રિકોણ ODC સમબાજુ ત્રિકોણ છે. (શા માટે ?)

માટે, $\angle COD = 60°$

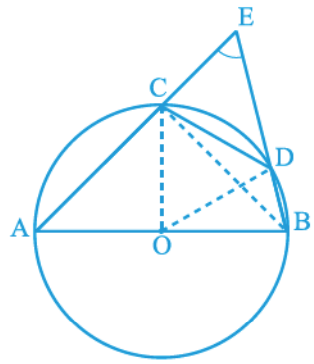
હવે, $\angle CBD = \frac{1}{2} \angle COD$ (પ્રમેય 10.8)

તે પરથી, $\angle CBD = 30°$ થાય.

ફરીથી, $\angle ACB = 90°$ (શા માટે?)

આથી, $\angle BCE = 180° - \angle ACB = 90°$

તે પરથી, $\angle CEB = 90° - 30° = 60°$, એટલે કે $\angle AEB = 60°$ થાય.



આકૃતિ 10.32

ઉદાહરણ 4 : આકૃતિ 10.33 માં, ABCD ચક્રીય ચતુષ્કોણ છે અને AC તથા BD તેના વિકર્ણો છે. જો $\angle DBC = 55°$ અને $\angle BAC = 45°$, તો $\angle BCD$ શોધો.

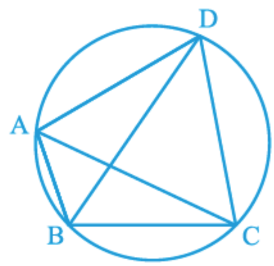
ઉકેલ : $\angle CAD = \angle DBC = 55°$ (એક જ વૃત્તખંડના ખૂણાઓ)

આથી, $\angle DAB = \angle CAD + \angle BAC$

$= 55° + 45° = 100°$

પરંતુ, $\angle DAB + \angle BCD = 180°$ (ચક્રીય ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા)

આથી, $\angle BCD = 180° - 100° = 80°$



આકૃતિ 10.33

ઉદાહરણ 5 : બે વર્તુળો બે બિંદુઓ A અને B માં છેદે છે. આ બે વર્તુળોના વ્યાસ AD અને AC છે. (જુઓ આકૃતિ10.34.) સાબિત કરો કે B એ રેખાખંડ DC પર આવેલું છે.

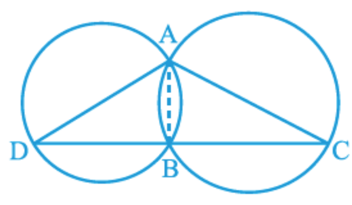
ઉકેલ : AB જોડો.

$\angle ABD = 90°$ (અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો)

$\angle ABC = 90°$ (અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો)

આથી, $\angle ABD + \angle ABC = 90° + 90° = 180°$

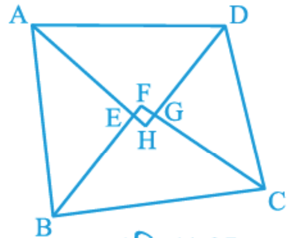
માટે, DBC એક રેખા છે એટલે કે રેખાખંડ DC પર B આવેલું છે.



આકૃતિ 10.34

ઉદાહરણ 6 : સાબિત કરો કે જો કોઈ પણ ચતુષ્કોણના અંદરના ખૂણાઓના દુભાજકો વડે ચતુષ્કોણ બને (શક્ય હોય,) તો તે ચક્રીય છે.

ઉકેલ : આકૃતિ 10.35 માં, ચતુષ્કોણ ABCD ના અંદરના ખૂણાઓ A, B, C અને D ના દુભાજકો અનુક્રમે AH, BF, CF અને DH છે. તે ચતુષ્કોણ EFGH રચે છે.



આકૃતિ 10.35

હવે, $\angle FEH = \angle AEB = 180° - \angle EAB - \angle EBA$ (કેમ ?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$$

અને $\angle FGH = \angle CGD = 180° - \angle GCD - \angle GDC$ (કેમ ?)

$$= 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$$

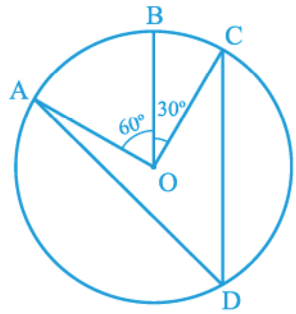
આથી, $\angle FEH + \angle FGH = 180° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B) + 180° - \frac{1}{2}(\angle C + \angle D)$

$$= 360° - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C + \angle D) = 360° - \frac{1}{2} \times 360°$$

$$= 360° - 180° = 180°$$

માટે, પ્રમેય 10.12 પરથી ચતુષ્કોણ EFGH ચક્રીય છે.

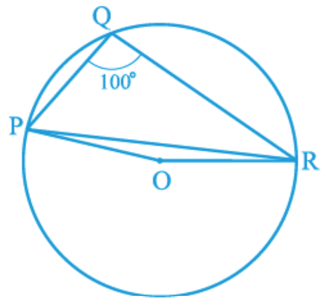
સ્વાધ્યાય 10.5



આકૃતિ 10.36

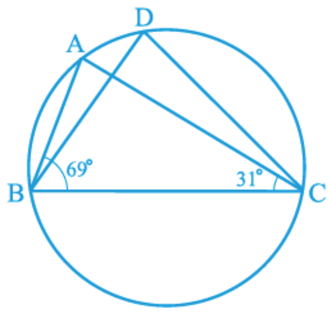
1. આકૃતિ 10.36 માં O કેન્દ્રવાળા વર્તુળ પર બિંદુઓ A, B અને C એવી રીતે આવેલાં છે કે જેથી $\angle BOC = 30°$ અને $\angle AOB = 60°$ થાય. જો ચાપ ABC સિવાયના વર્તુળ પર બિંદુ D હોય, તો $\angle ADC$ શોધો.

2. એક વર્તુળની જીવા અને તેની ત્રિજ્યા સમાન છે. આ જીવાએ લઘુચાપ પરના બિંદુ આગળ અને ગુરુચાપ પરના બિંદુ આગળ આંતરેલા ખૂણા શોધો.



આકૃતિ 10.37

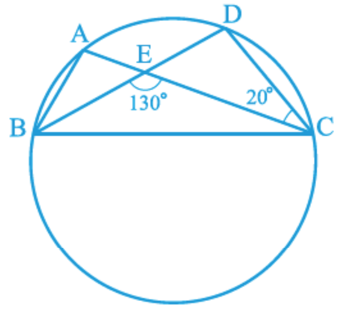
3. આકૃતિ 10.37 માં, $\angle PQR = 100°$, જ્યાં P, Q અને R એ O કેન્દ્રવાળા વર્તુળ પરનાં બિંદુઓ છે. $\angle OPR$ શોધો.



આકૃતિ10.38

4. આકૃતિ 10.38 માં, $\angle ABC = 69°$, $\angle ACB = 31°$, છે, $\angle BDC$ શોધો.

5. આકૃતિ 10.39 માં, વર્તુળ પર ચાર બિંદુઓ A, B, C અને D આવેલાં છે. AC અને BD એ E બિંદુએ એવી રીતે છેદે છે કે જેથી $\angle$ BEC = 130° અને $\angle$ ECD = 20°. $\angle$ BAC શોધો.



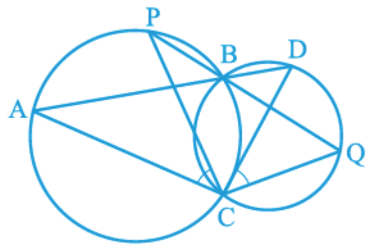
આકૃતિ 10.39

6. ચક્રીય ચતુષ્કોણ ABCD ના વિકર્ણો E બિંદુએ છેદે છે. જો $\angle$ DBC = 70°, $\angle$ BAC = 30°, તો $\angle$ BCD શોધો અને જો AB = BC, તો $\angle$ ECD શોધો.

7. જો ચક્રીય ચતુષ્કોણના વિકર્ણો એ ચતુષ્કોણનાં શિરોબિંદુઓમાંથી પસાર થતા વર્તુળના વ્યાસ હોય, તો સાબિત કરો કે તે લંબચોરસ છે.

8. જો સમલંબ ચતુષ્કોણની સમાંતર ન હોય તેવી બાજુઓ સમાન હોય, તો સાબિત કરો કે તે ચક્રીય છે.

9. બે વર્તુળો એકબીજાને બે બિંદુઓ B અને C માં છેદે છે. B માંથી પસાર થતા બે રેખાખંડ ABD અને PBQ વર્તુળોને અનુક્રમે A, D અને P, Q માં છેદે તે રીતે દોરેલા છે. (જુઓ આકૃતિ 10.40.) સાબિત કરો કે $\angle$ ACP = $\angle$ QCD.



આકૃતિ 10.40

10. જો ત્રિકોણની બે બાજુઓ વ્યાસ થાય તેવી રીતે વર્તુળો દોરેલાં હોય, તો સાબિત કરો કે આ વર્તુળોનું એક છેદબિંદુ, ત્રિકોણની ત્રીજી બાજુ પર આવેલું છે.

11. કર્ણ AC હોય તેવા બે કાટકોણ ત્રિકોણ ABC અને ADC છે. સાબિત કરો કે $\angle$ CAD = $\angle$ CBD.

12. સાબિત કરો કે ચક્રીય સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ એ લંબચોરસ છે.

સ્વાધ્યાય 10.6 (વૈકલ્પિક)*

1. સાબિત કરો કે બે છેદતાં વર્તુળોના કેન્દ્રને જોડતી રેખા વર્તુળોનાં બે છેદબિંદુ આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.

2. વર્તુળની 5 સેમી અને 11 સેમી લંબાઈની બે જીવાઓ અનુક્રમે AB અને CD એકબીજીને સમાંતર છે અને કેન્દ્રની વિરુદ્ધ બાજુએ આવેલી છે. AB અને CD વચ્ચેનું અંતર 6 સેમી હોય, તો વર્તુળની ત્રિજ્યા શોધો.

3. વર્તુળની બે સમાંતર જીવાઓની લંબાઈ 6 સેમી અને 8 સેમી છે. નાની જીવા કેન્દ્રથી 4 સેમી દૂર હોય, તો કેન્દ્રથી બીજી જીવાનું અંતર કેટલું હશે?

4. ધારો કે ખૂણા ABC નું શિરોબિંદુ વર્તુળની બહારના ભાગમાં આવેલું છે અને ખૂણાની બાજુઓ સમાન જીવાઓ AD અને CE બને તે રીતે વર્તુળને છેદે છે. સાબિત કરો કે જીવાઓ AC અને DE એ કેન્દ્ર આગળ આંતરેલા ખૂણાઓના તફાવતથી અડધો $\angle$ABC છે.

5. સાબિત કરો કે સમબાજુ ચતુષ્કોણની કોઈ પણ બાજુને વ્યાસ તરીકે લઈ દોરેલું વર્તુળ, ચતુષ્કોણના વિકર્ણોના છેદબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

6. ABCD સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણ છે. A, B અને C માંથી પસાર થતું વર્તુળ CD (અથવા લંબાવેલી CD) ને E માં છેદે છે. સાબિત કરો કે AE = AD.

* *આ સ્વાધ્યાયને પરીક્ષાનો મુદ્દો બનાવવો નહિ.*

7. એક વર્તુળની જીવાઓ AC અને BD એકબીજીને દુભાગે છે. સાબિત કરો કે (i) AC અને BD વ્યાસ છે. (ii) ABCD લંબચોરસ છે.

8. ત્રિકોણ ABC ના ખૂણાઓ A, B અને C ના દુભાજકો, ત્રિકોણના પરિવર્તુળને અનુક્રમે D, E અને F માં છેદે છે. સાબિત કરો કે ત્રિકોણ DEF ના ખૂણાઓ $90° - \frac{1}{2}A$, $90° - \frac{1}{2}B$ અને $90° - \frac{1}{2}C$ છે.

9. બે સમાન વર્તુળો એકબીજાને A અને B બિંદુએ છેદે છે. A માંથી એક રેખાખંડ PAQ એવી રીતે દોરેલો છે કે જેથી P અને Q વર્તુળો પર હોય. સાબિત કરો કે BP = BQ.

10. કોઈપણ ત્રિકોણ ABC માં, જો $\angle A$ નો દુભાજક અને BC નો લંબદ્વિભાજક છેદતાં હોય, તો સાબિત કરો કે તેઓ ત્રિકોણ ABCના પરિવર્તુળ પર છેદે છે.

10.9 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં, તમે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યાં :

1. વર્તુળ એ સમતલના નિશ્ચિત બિંદુથી સમાન અંતરે આવેલાં સમતલનાં તમામ બિંદુઓનો સમૂહ છે.
2. વર્તુળ (એકરૂપ વર્તુળો)ની સમાન જીવાઓ કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.
3. જો વર્તુળ(સમાન વર્તુળો)ની બે જીવાઓ કેન્દ્ર (અનુરૂપ કેન્દ્ર) આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે જીવાઓ સમાન છે.
4. વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી જીવા પરનો લંબ, જીવાને દુભાગે છે.
5. વર્તુળના કેન્દ્રમાંથી દોરેલી રેખા જીવાને દુભાગે, તો તે રેખા જીવાને લંબ છે.
6. ત્રણ અસમરેખ બિંદુઓમાંથી પસાર થતું એક અને માત્ર એક જ વર્તુળ હોય છે.
7. વર્તુળ (એકરૂપ વર્તુળો)ની સમાન જીવાઓ કેન્દ્ર (અનુરૂપ કેન્દ્ર)થી સમાન અંતરે હોય છે.
8. વર્તુળ (એકરૂપ વર્તુળો)ના કેન્દ્ર (અનુરૂપ કેન્દ્ર)થી સમાન અંતરે આવેલી જીવાઓ સમાન હોય છે.
9. જો વર્તુળનાં બે ચાપ એકરૂપ હોય, તો તેમને સંગત જીવાઓ સમાન છે અને તેનું પ્રતીપ, જો વર્તુળની બે જીવાઓ સમાન હોય, તો તેમને સંગત (લઘુ, ગુરુ) ચાપ એકરૂપ છે.
10. વર્તુળનાં એકરૂપ ચાપ તેના કેન્દ્ર આગળ સમાન ખૂણા આંતરે છે.
11. વર્તુળના કેન્દ્ર આગળ ચાપે આંતરેલો ખૂણો એ તે ચાપે વર્તુળના બાકી રહેલા ભાગ પરના કોઈ પણ બિંદુ આગળ આંતરેલા ખૂણાથી બમણો છે.
12. વર્તુળના સમાન વૃત્તખંડના ખૂણા સમાન છે.
13. અર્ધવર્તુળમાંનો ખૂણો કાટકોણ છે.
14. જો બે બિંદુઓને જોડતો રેખાખંડ, આ રેખાખંડને સમાવતી રેખાની એક જ બાજુએ આવેલાં બીજાં બે બિંદુઓ આગળ સમાન ખૂણા આંતરે, તો તે ચારેય બિંદુઓ એક જ વર્તુળ પર આવેલાં છે.
15. ચક્રીય ચતુષ્કોણની સામસામેના ખૂણાઓની એક જોડના ખૂણાઓનો સરવાળો 180° છે.
16. જો ચતુષ્કોણની સામસામેના ખૂણાઓની એક જોડના ખૂણાઓનો સરવાળો 180° હોય, તો તે ચતુષ્કોણ ચક્રીય છે.