પ્રકરણ 4

દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણો

The principal use of the Analytic Art is to bring Mathematical Problems to Equations and to exhibit those Equations in the most simple terms that can be.

—Edmund Halley

4.1 પ્રાસ્તાવિક

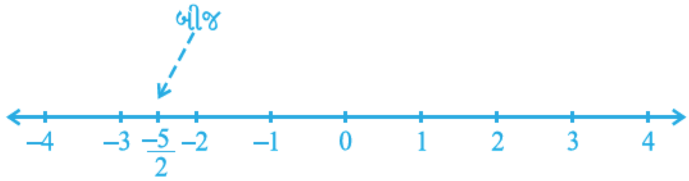
અગાઉના ધોરણોમાં તમે એક ચલ સુરેખ સમીકરણો વિશે જાણ્યું છે. તમે એક ચલ સુરેખ સમીકરણ લખી શકો ? તમે કહી શકો કે $x + 1 = 0$, $x + \sqrt{2} = 0$ અને $\sqrt{2}\,y + \sqrt{3} = 0$ એક ચલ સુરેખ સમીકરણોનાં ઉદાહરણો છે. તમે એ પણ જાણો છો કે આ પ્રકારનાં સમીકરણોને અનન્ય ઉકેલ હોય છે. તમને એ પણ યાદ હશે કે આવા ઉકેલ ને સંખ્યારેખા પર કેવી રીતે દર્શાવી શકાય. આ પ્રકરણમાં એક ચલ સુરેખ સમીકરણોના જ્ઞાનને ફરી યાદ કરીશું તથા તેને બે ચલ સુધી વિસ્તૃત કરીશું. તમે આવા પ્રશ્નોં વિચારી શકોઃ શું એક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને ઉકેલ હોય ? જો હા, તો તે અનન્ય હોય? કાર્તેઝિય યામ સમતલમાં આ ઉકેલ કેવી રીતે દર્શાવી શકાય ? આવા પ્રશ્નોના જવાબ માટે તમે પ્રકરણ-3 માં જે સંકલ્પનાઓનો અભ્યાસ કર્યો છે તેનો પણ ઉપયોગ કરી શકશો.

4.2 સુરેખ સમીકરણો

ચાલો, આપણે અગાઉ શું શીખી ગયા છીએ તે યાદ કરીએ. તો નીચે આપેલ સમીકરણ વિચારીએ.

$$2x + 5 = 0$$

તેનો ઉકેલ, એટલે કે આ સમીકરણનું બીજ $-\frac{5}{2}$ છે. આ બીજને સંખ્યારેખા પર આકૃતિ 4.1 પ્રમાણે દર્શાવી શકાયઃ



આકૃતિ 4.1

સમીકરણને ઉકેલતી વખતે તમારે હંમેશાં નીચે દર્શાવેલ મુદ્દાઓ ધ્યાન પર લેવા જોઈએ.

(i) સમીકરણની બંને બાજુમાં સમાન સંખ્યા ઉમેરો(અથવા તેમાંથી બાદ કરો)

(ii) સમીકરણની બંને બાજુએ સમાન શૂન્યેતર સંખ્યા વડે ગુણાકાર કે ભાગાકાર કરો ત્યારે સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ બદલાતો નથી.

હવે આપણે નીચેની પરિસ્થિતિ વિચારીએ:

નાગપુર ખાતે ભારત અને શ્રીલંકા વચ્ચે રમાયેલ એક દિવસીય આંતરરાષ્ટ્રીય ક્રિકેટ મેચમાં બે ભારતીય બેટ્સમેને સાથે મળી 176 રન બનાવ્યા. આ માહિતીને સમીકરણના સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

અહીં, તમે જોઈ શકો છો કે બેમાંથી એકેય ખેલાડીના રન તમે જાણતા નથી અર્થાત્ અહીં બે અજ્ઞાત સંખ્યાઓ છે. આપણે તેમને દર્શાવવા માટે સંજ્ઞા x અને y નો ઉપયોગ કરીશું. આથી, જો એક બેટ્સમેને કરેલ રન x અને બીજા બેટ્સમેને કરેલ રન y હોય તો,

$$x + y = 176.$$

માંગેલ સમીકરણ છે.

આ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનું એક ઉદાહરણ છે. સામાન્ય રીતે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણમાં ચલને x અને y વડે દર્શાવવાની પ્રથા છે, પરંતુ બીજા મૂળાક્ષરો પણ ઉપયોગમાં લઈ શકાય. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોનાં કેટલાંક ઉદાહરણો નીચે આપેલ છે.

$$1.2s + 3t = 5,\ p + 4q = 7,\ \pi u + 5v = 9 \text{ અને } 3 = \sqrt{2}\,x - 7y.$$

જુઓ કે, આ સમીકરણોને તમે અનુક્રમે $1.2s + 3t - 5 = 0$, $p + 4q - 7 = 0$, $\pi u + 5v - 9 = 0$ અને $\sqrt{2}\,x - 7y - 3 = 0$ સ્વરૂપે પણ દર્શાવી શકો.

આથી, જે સમીકરણને જ્યાં a, b અને c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે તથા a અને b બંને એક સાથે શૂન્ય નથી તેવા સ્વરૂપ $ax + by + c = 0$ માં દર્શાવી શકાય તેને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ કહે છે.

આનો અર્થ એ થાય કે તમે આવાં અનેક સમીકરણો લખી શકો.

ઉદાહરણ 1 : નીચે દર્શાવેલ દરેક સમીકરણને $ax + by + c = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવો અને દરેકમાં a, b અને c ની કિંમતો દર્શાવો :

(i) $2x + 3y = 4.37$ (ii) $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ (iii) $4 = 5x - 3y$ (iv) $2x = y$

ઉકેલ : (i) $2x + 3y = 4.37$ સમીકરણને $2x + 3y - 4.37 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં $a = 2$, $b = 3$ અને $c = -4.37$.

(ii) સમીકરણ $x - 4 = \sqrt{3}\,y$ ને $x - \sqrt{3}\,y - 4 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં $a = 1$, $b = -\sqrt{3}$ અને $c = -4$.

(iii) સમીકરણ $4 = 5x - 3y$ ને $5x - 3y - 4 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં $a = 5$, $b = -3$ અને $c = -4$.

તમે આ સમીકરણને $-5x + 3y + 4 = 0$ સ્વરૂપે પણ લખી શકાય તે બાબતમાં સંમત છો?આ કિસ્સામાં $a = -5$, $b = 3$ અને $c = 4$.

(iv) સમીકરણ $2x = y$ ને $2x - y + 0 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય. અહીં $a = 2$, $b = -1$ અને $c = 0$.

$ax + b = 0$ પ્રકારનાં સમીકરણો પણ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોનાં ઉદાહરણો છે, કારણ કે તેમને $ax + 0 \cdot y + b = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય.

ઉદાહરણ તરીકે, $4 - 3x = 0$ ને $-3x + 0 \cdot y + 4 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય.

ઉદાહરણ 2 : નીચે દર્શાવેલ દરેક સમીકરણને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ સ્વરૂપે દર્શાવો.

(i) $x = -5$ (ii) $y = 2$ (iii) $2x = 3$ (iv) $5y = 2$

ઉકેલ : (i) $x = -5$ ને $1 \cdot x + 0 \cdot y = -5$ અથવા $1 \cdot x + 0 \cdot y + 5 = 0$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

(ii) $y = 2$ ને $0 \cdot x + 1 \cdot y = 2$ અથવા $0 \cdot x + 1 \cdot y - 2 = 0$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

(iii) $2x = 3$ ને $2x + 0 \cdot y - 3 = 0$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

(iv) $5y = 2$ ને $0 \cdot x + 5y - 2 = 0$ તરીકે દર્શાવી શકાય.

સ્વાધ્યાય 4.1

1. ‘‘નોટબુકની કિંમત પેનની કિંમત કરતાં બમણી(બે ગણી) છે’’ આ વિધાનને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ સ્વરૂપે દર્શાવો.

   (નોટબુકની કિંમત ₹ x તથા પેનની કિંમત ₹ y લો).

2. નીચે દર્શાવેલા દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણોને $ax + by + c = 0$ તરીકે દર્શાવો અને દરેક કિસ્સામાં a, b અને c ની કિંમત શોધો :

   (i) $2x + 3y = 9.3\overline{5}$ (ii) $x - \frac{y}{5} - 10 = 0$ (iii) $-2x + 3y = 6$ (iv) $x = 3y$

   (v) $2x = -5y$ (vi) $3x + 2 = 0$ (vii) $y - 2 = 0$ (viii) $5 = 2x$

4.3 સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ

તમે જોયું કે દરેક એકચલ સુરેખ સમીકરણને અનન્ય ઉકેલ હોય છે. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના ઉકેલ અંગે તમે શું કહી શકો? સમીકરણમાં બે ચલ હોવાથી ઉકેલમાં કિંમતોની જોડ મળે અને તેમાં x માટે એક કિંમત અને y માટે એક કિંમત મળે. આ કિંમતો આપેલા સમીકરણનું સમાધાન કરે. આપણે એક સમીકરણ $2x + 3y = 12$ નો વિચાર કરીએ અહીં, $x = 3$ અને $y = 2$ તેનો એક ઉકેલ છે કારણ કે $x = 3$ અને $y = 2$ ની કિંમત ઉપરના સમીકરણમાં મૂકતાં તમને,

$$2x + 3y = (2 \times 3) + (3 \times 2) = 12 \text{ મળશે.}$$

આ ઉકેલને ક્રમયુક્ત જોડ (3, 2) સ્વરૂપે લખી શકાય. તેમાં પ્રથમ x ની કિંમત અને તે પછી y ની કિંમત લખાય છે.

આ જ પ્રમાણે (0, 4) પણ ઉપરોક્ત સમીકરણનો ઉકેલ છે.

બીજી રીતે જોતાં (1, 4) એ $2x + 3y = 12$ નો ઉકેલ નથી કારણ કે $x = 1$ અને $y = 4$ મૂકતાં આપણને $2x + 3y = 14$ મળે અને 12 ન મળે (જમણી બાજુની કિંમત ન મળે). નોંધો કે (0, 4) એક ઉકેલ છે, પરંતુ (4, 0) ઉકેલ નથી.

$2x + 3y = 12$ માટે તમે ઓછામાં ઓછા બે ઉકેલ $(3, 2)$ અને $(0, 4)$ જોયા. તમે બીજા કોઈ ઉકેલ મેળવી શકો? શું તમે સંમત છો કે $(6, 0)$ પણ એક અન્ય ઉકેલ છે? આ જ પ્રમાણે ચકાસો. હકીકતે આ પ્રમાણે આપણે ઘણા બધા ઉકેલો મેળવી શકીએ. $2x + 3y = 12$ માં તમારી પસંદગીની x ની કોઈ પણ કિંમત લો (જેમ કે $x = 2$) આથી સમીકરણ $4 + 3y = 12$ માં રૂપાંતરિત થશે. તે એક ચલ સુરેખ સમીકરણ છે. તેને ઉકેલતાં તમને $y = \frac{8}{3}$ મળશે. આથી $\left(2, \frac{8}{3}\right)$ એ $2x + 3y = 12$ નો અન્ય ઉકેલ છે. આ જ પ્રમાણે $x = -5$ પસંદ કરતાં સમીકરણ $-10 + 3y = 12$ મળશે. તે કિંમત $y = \frac{22}{3}$ આપશે. આથી $\left(-5, \frac{22}{3}\right)$ એ $2x + 3y = 12$ નો એક અન્ય ઉકેલ છે. આમ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના વિવિધ ઉકેલનો કોઈ અંત નથી. આમ, *એક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને અનંત ઉકેલ હોય છે.*

ઉદાહરણ 3 : સમીકરણ $x + 2y = 6$ ના ચાર ભિન્ન ઉકેલ મેળવો.

ઉકેલ : $x = 2, y = 2$ ચકાસતાં તે ઉકેલ છે, કારણ કે $x = 2, y = 2$ માટે

$$x + 2y = 2 + 4 = 6$$

હવે $x = 0$ પસંદ કરીએ. x ની આ કિંમત મૂકવાથી આપેલ સમીકરણનું રૂપાંતર $2y = 6$ માં થઈ જશે. તેને અનન્ય ઉકેલ $y = 3$ હોય. આથી $x = 0, y = 3$ પણ $x + 2y = 6$ નો ઉકેલ થાય. આ જ પ્રમાણે $y = 0$ લેવાથી, આપેલ સમીકરણ $x = 6$ માં રૂપાંતરીત થશે. આથી $x = 6, y = 0$ પણ સમીકરણ $x + 2y = 6$ નો ઉકેલ થાય. અંતે,આપણે $y = 1$ લઈએ તો આપેલ સમીકરણ $x + 2 = 6$ માં રૂપાંતરીત થશે. તેનો ઉકેલ $x = 4$. થાય. આથી $(4, 1)$ પણ આપેલ સમીકરણનો ઉકેલ થાય. આથી આપેલા સમીકરણના અનંત ઉકેલો પૈકીના ચાર ઉકેલ $(2, 2)$, $(0, 3)$, $(6, 0)$ અને $(4, 1)$ છે.

ટિપ્પણી : અહીં આપણે નોંધીએ કે $x = 0$ મૂકવાથી તેને સંગત y ની કિંમત મળશે. તેથી સમીકરણનો એક ઉકેલ મળશે. આ જ પ્રમાણે આપણે $y = 0$ મૂકીશું તો તેને અનુરૂપ x ની કિંમત મળશે.

ઉદાહરણ 4 : નીચે આપેલા પ્રત્યેક સમીકરણના બે ઉકેલ શોધો :

(i) $4x + 3y = 12$

(ii) $2x + 5y = 0$

(iii) $3y + 4 = 0$

ઉકેલ : (i) $x = 0$ લેતાં, આપણને $3y = 12$ મળે. તેથી $y = 4$ આમ, $(0, 4)$ આપેલ સમીકરણનો એક ઉકેલ થાય. આ જ પ્રમાણે $y = 0$ લેવાથી આપણને $x = 3$ મળે. તેથી $(3, 0)$ પણ ઉકેલ થાય.

(ii) $x = 0$ લેવાથી આપણને $5y = 0$ મળે જેથી $y = 0$ થાય. આમ $(0, 0)$ આપેલ સમીકરણનો એક ઉકેલ થાય. હવે જો તમે $y = 0$ લેશો તો ફરીથી તમને $(0, 0)$ ઉકેલ તરીકે મળશે. તે અગાઉનો ઉકેલ જ છે. બીજો ઉકેલ મેળવવા $x = 1$ લો. આથી તમે y ની અનુરૂપ કિંમત $-\frac{2}{5}$ ચકાસી શકશો. આથી $\left(1, -\frac{2}{5}\right)$ એ $2x + 5y = 0$ નો બીજો ઉકેલ છે.

(iii) સમીકરણ $3y+4=0$ ને $0\cdot x+3y+4=0$ સ્વરૂપે લખી શકાય. x ની કોઈપણ કિંમત માટે તમને $y=-\frac{4}{3}$ મળશે. આથી, બે ઉકેલો $\left(0, -\frac{4}{3}\right)$ અને $\left(1, -\frac{4}{3}\right)$ મળે.

સ્વાધ્યાય 4.2

1. નીચેના પૈકી કયો વિકલ્પ ખરો છે અને શા માટે ?

$y=3x+5$ ને

(i) અનન્ય ઉકેલ હોય. (ii) માત્ર બે ઉકેલ હોય. (iii) અનંત ઉકેલ હોય.

2. નીચેના પૈકી પ્રત્યેક સમીકરણના ચાર ઉકેલ લખો :

(i) $2x+y=7$ (ii) $\pi x+y=9$ (iii) $x=4y$

3. નીચેનામાંથી કયા બિંદુઓ સમીકરણ $x-2y=4$ ના ઉકેલ છે. અને કયાં બિંદુઓ ઉકેલ નથી તે ચકાસો :

(i) $(0,2)$ (ii) $(2,0)$ (iii) $(4,0)$

(iv) $\left(\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\right)$ (v) $(1,1)$

4. જો $x=2, y=1$ એ સમીકરણ $2x+3y=k$ નો એક ઉકેલ હોય તો k ની કિંમત શોધો.

4.4 દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ

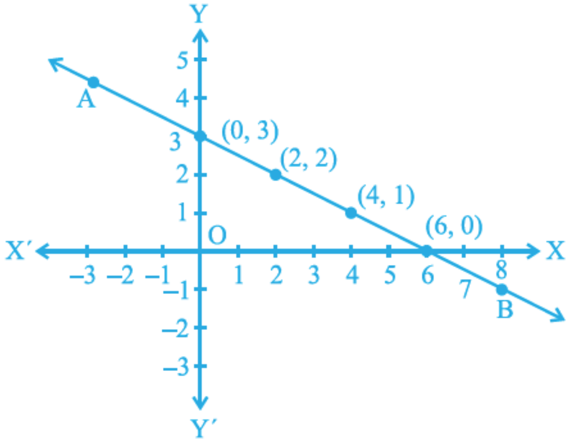
અત્યાર સુધી તમે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના ઉકેલ બીજગણિતની રીતે મેળવ્યા હવે આપણે તેનું ભૌમિતિક નિરૂપણ જોઈએ. તમે જાણો છો કે આવા પ્રત્યેક સમીકરણના અનંત ઉકેલ હોય છે. આપણે તેમને યામ સમતલમાં કેવી રીતે દર્શાવી શકીએ ? તમને એવો અંદાજ આવી ગયો હશે કે આપણે ઉકેલને ક્રમયુક્ત જોડ તરીકે દર્શાવી શકીએ છીએ.

ઉદાહરણ 3 ના સુરેખ સમીકરણ $x+2y=6$ ના ઉકેલોને x ની કિંમતોને અનુરૂપ નીચે y ની કિંમતો દર્શાવી નીચે દર્શાવેલ કોષ્ટક સ્વરૂપમાં રજુ કરી શકાય. (1)

કોષ્ટક 1

x	0	2	4	6	. . .
y	3	2	1	0	. . .

અગાઉના પ્રકરણમાં તમે બિંદુઓનું આલેખપત્ર પર કેવી રીતે નિરૂપણ કરી શકાય તે શીખ્યા છો. ચાલો આપણે બિંદુઓ (0, 3), (2, 2), (4, 1) અને (6, 0) નું આલેખપત્ર પર નિરૂપણ કરીએ. હવે આમાંના કોઇ પણ બે બિંદુઓને જોડી રેખા મેળવો. ચાલો આપણે તેને રેખા AB કહીએ (જુઓ આકૃતિ 4.2).



આકૃતિ. 4.2

તમે જોયું કે બીજાં બે બિંદુઓ પણ રેખા AB પર આવેલા છે ? હવે આ રેખા પરનું બીજુ બિંદુ લો જેમ કે (8, –1). શું તે એક ઉકેલ છે? હકીકતમાં $8+2(-1)=6$. આથી (8, –1) એક ઉકેલ છે. રેખા AB

પરનું અન્ય કોઇ બિંદુ મેળવો અને ચકાસો કે તેના યામ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે કે નહીં. હવે રેખા AB પર ન હોય તેવું બિંદુ લો જેમ કે (2, 0). શું તેના યામ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે? ચકાસો અને જુઓ કે તે બિંદુના યામ સમીકરણનું સમાધાન કરતા નથી.

ચાલો આપણા અવલોકનોની એક યાદી બનાવીએ :

1. જેના યામ સમીકરણ (1) નું સમાધાન કરે છે તેવું પ્રત્યેક બિંદુ રેખા AB પર આવેલ છે.

2. રેખા AB પર આવેલ દરેક બિંદુ (a, b) એ સમીકરણ(1)નો ઉકેલ $x = a, y = b$ આપે છે .

3. રેખા AB પર આવેલ ન હોય તેવું કોઇપણ બિંદુ સમીકરણ (1)નો ઉકેલ નથી.

આથી તમે એવા નિષ્કર્ષ પર આવી શકો કે રેખા પરનું દરેક બિંદુ સમીકરણનું સમાધાન કરે છે અને સમીકરણના દરેક ઉકેલનું બિંદુ રેખા પર આવેલ હોય. હકીકતમાં કોઈ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનું ભૌમિતિક રીતે નિરૂપણ કરતાં બનતી રેખા એ સમીકરણના ઉકેલોનો સમૂહ છે. તેને સુરેખ સમીકરણનો *આલેખ* કહે છે. આથી દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ મેળવવા માટે તેના બે ઉકેલોને અનુરૂપ બે બિંદુઓને આલેખ પર દર્શાવો અને તેને જોડી રેખા બનાવો તે પૂરતું છે. જો કે બે કરતાં વધુ બિંદુઓનું નિરૂપણ કરવું સલાહભર્યું છે જેથી તમે આલેખની ચોકસાઇ તાત્કાલિક ચકાસી શકો.

નોંધ : એક ઘાત બહુપદીય સમીકરણ $ax + by + c = 0$ એ સુરેખ સમીકરણ છે અને તેનું ભૌમિતિક નિરૂપણ રેખા છે.

ઉદાહરણ 5 : જે રેખા પર બિંદુ (1, 2) આવેલ હોય તે રેખાનું સમીકરણ મેળવો. આવાં કેટલાં સમીકરણ હોય ?

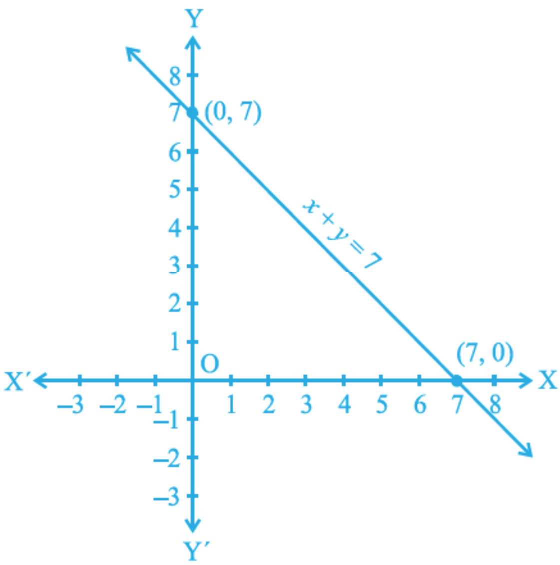
ઉકેલ : અહીં (1, 2) એ તમે જે સુરેખ સમીકરણ શોધવા માંગો છો તેનો ઉકેલ છે. આથી તમારે બિંદુ (1, 2) માંથી પસાર થતી રેખા શોધવી પડે. આવા સુરેખ સમીકરણનું એક ઉદાહરણ $x + y = 3$ થાય બીજાં ઉદાહરણો $y - x = 1$, $y = 2x$ થાય. કારણ કે આ બધા નું સમાધાન (1, 2)ના યામ દ્વારા થાય છે. હકીકતે તો એવાં જે બિંદુ (1, 2) ના યામોનું સમાધાન કરે તેવા અનંત સુરેખ સમીકરણો મળે. તમે આ સત્ય આકૃતિ દ્વારા જોઈ શકશો ?

ઉદાહરણ 6 : $x + y = 7$ નો આલેખ દોરો :

ઉકેલ : આલેખ દોરવા માટે આપણને આ સમીકરણના ઓછામાં ઓછા બે ઉકેલની જરૂર પડશે. તમે ચકાસી જુઓ કે $x = 0, y = 7$, અને $x = 7, y = 0$ એ આપેલ સમીકરણના ઉકેલ છે. આથી, આલેખ દોરવા માટે તમે નીચેના કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરી શકો.

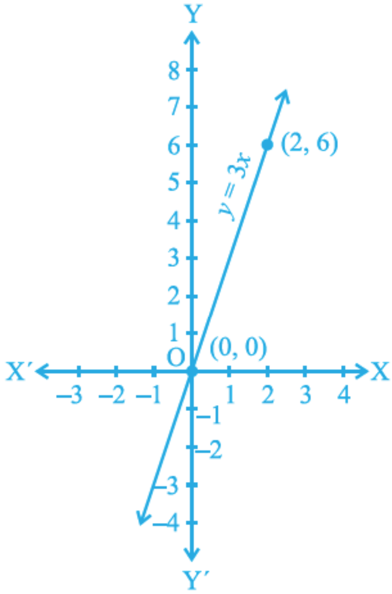
કોષ્ટક 2

x	0	7
y	7	0



આકૃતિ. 4.3

કોષ્ટક 2 માંથી બે બિંદુઓ લઇ આલેખ પર દર્શાવો અને ત્યારબાદ આ બિંદુઓમાંથી પસાર થતી રેખા બનાવો (જૂઓ આકૃતિ 4.3).



આકૃતિ. 4.4

ઉદાહરણ 7 : તમે જાણો છો કે વસ્તુ પર લાગતું બળ એ વસ્તુ પર ઉદ્ભવતા પ્રવેગના સમપ્રમાણમાં હોય છે. આ પરિસ્થિતિ દર્શાવતું સમીકરણ લખો અને આલેખ પર તે દર્શાવો.

ઉકેલ : અહીં સંકળાયેલા ચલ એ બળ અને પ્રવેગ છે, ધારો કે લાગુ પડતું બળ y એકમ અને ઉત્પન્ન થતો પ્રવેગ x એકમ છે. ગુણોત્તર પ્રમાણ અનુસાર તમે આ હકીકતને $y = kx$, સ્વરૂપે દર્શાવી શકો, જ્યાં k અચળ છે. (તમારા વિજ્ઞાનના અભ્યાસ પરથી તમે જાણો છો કે હકીકતમાં k એ વસ્તુનું દળ છે)

હવે, આપણે k ની કિંમત જાણતા નથી. આથી આપણે $y = kx$ નો ચોક્કસ આલેખ ન દોરી શકીએ. હકીકતે જો આપણને k ની ચોક્કસ કિંમત આપવામાં આવે તો આપણે તેનો આલેખ દોરી શકીએ. ધારો કે $k = 3$. આથી આપણે $y = 3x$ દર્શાવતી રેખા દોરી શકીએ. આ માટે આપણે તેના ઉકેલ પૈકી બે ઉકેલ શોધીએ જેમ કે (0, 0) અને (2, 6) (જુઓ આકૃતિ 4.4).

આલેખ પરથી આપણે જોઈ શકીએ કે જ્યારે 3 એકમ બળ લાગુ થાય ત્યારે 1 એકમ પ્રવેગ ઉત્પન્ન થાય. વળી એ પણ જુઓ કે (0, 0) આલેખ પર આવેલું છે એનો અર્થ એ થાય કે જ્યારે લાગુ પડતું બળ 0 એકમ હોય તો ઉત્પન્ન થતો પ્રવેગ પણ 0 એકમ થાય.

નોંધ : $y = kx$ સ્વરૂપના સમીકરણનો આલેખ રેખા હોય અને તે હંમેશાં ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

ઉદાહરણ 8 : આકૃતિ 4.5 માં દર્શાવેલા દરેક આલેખ માટે નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી કયા સમીકરણનો આલેખ છે તે પસંદ કરો :

(a) આકૃતિ 4.5 (i) માટે

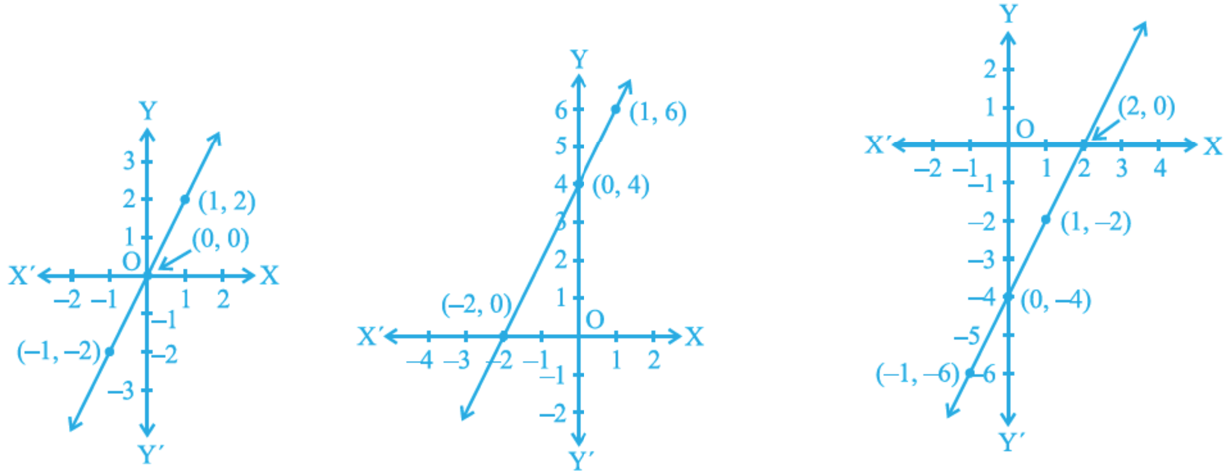
(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = x$ (iv) $y = 2x + 1$

(b) આકૃતિ 4.5 (ii) માટે

(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 4$ (iv) $y = x - 4$

(c) આકૃતિ 4.5 (iii) માટે

(i) $x + y = 0$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = 2x + 1$ (iv) $y = 2x - 4$



(i) (ii) (iii)

આકૃતિ 4.5

ઉકેલ : (a) આકૃતિ 4.5 (i) માં રેખા પર બિંદુઓ (–1, –2), (0, 0), (1, 2) આવેલા છે. ચકાસતાં જાણવા મળે કે $y = 2x$ સમીકરણ આ આલેખ સાથે સંગત છે. તમે જોઈ શકો છો કે દરેક કિસ્સામાં y-યામની કિંમત x-યામની કિંમત કરતાં બમણી થાય છે.

(b) આકૃતિ 4.5 (ii) માં રેખા પરના બિંદુઓ (–2, 0), (0, 4), (1, 6) છે. તમે જાણો છો કે આલેખ(રેખા) પરના બિંદુઓના યામ સમીકરણ $y = 2x + 4$ નું સમાધાન કરે છે. આથી $y = 2x + 4$ એ આકૃતિ 4.5 (ii) ના આલેખને અનુરૂપ સમીકરણ છે.

(c) આકૃતિ 4.5 (iii) માં રેખા પરના બિંદુઓ (–1, –6), (0, –4), (1, –2), (2, 0) છે. જે ચકાસતાં તમે જોઈ શકો છો કે સમીકરણ $y = 2x – 4$ આપેલા આલેખ(રેખા)ને અનુરૂપ છે.

સ્વાધ્યાય 4.3

1. નીચે દર્શાવેલા પ્રત્યેક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ માટે આલેખ દોરો :

(i) $x + y = 4$ (ii) $x – y = 2$ (iii) $y = 3x$ (iv) $3 = 2x + y$

2. બિંદુ (2, 14) માંથી પસાર થતી બે રેખાઓનાં સમીકરણો આપો. આવી બીજી કેટલી રેખાઓ મેળવી શકાય અને શા માટે?

3. જો બિંદુ (3, 4) સમીકરણ $3y = ax + 7$ ના આલેખ પરનું એક બિંદુ હોય તો a ની કિંમત શોધો.

4. એક શહેરમાં ટેક્સી ભાડુ આ પ્રમાણે છે : પ્રથમ કિલોમીટર માટે ભાડુ ₹ 8 અને ત્યારબાદના દરેક કિલોમીટર માટે ભાડુ ₹ 5 પ્રતિ કિલોમીટર છે. કાપેલ અંતર x કિલોમીટર અને કુલ ભાડુ ₹ y લઈ આ માહિતી માટે દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ લખો અને તેનો આલેખ દોરો.

5. આકૃતિ 4.6 અને આકૃતિ 4.7 માં આપેલા આલેખ માટે નીચે આપેલા વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય સમીકરણ પસંદ કરો.

આકૃતિ 4. 6 માટે

(i) $y = x$

(ii) $x + y = 0$

(iii) $y = 2x$

(iv) $2 + 3y = 7x$

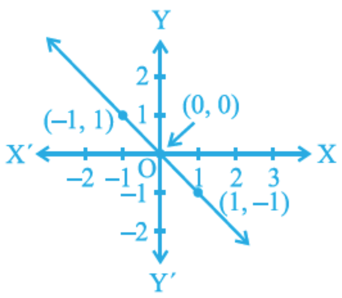
આકૃતિ 4.7 માટે

(i) $y = x + 2$

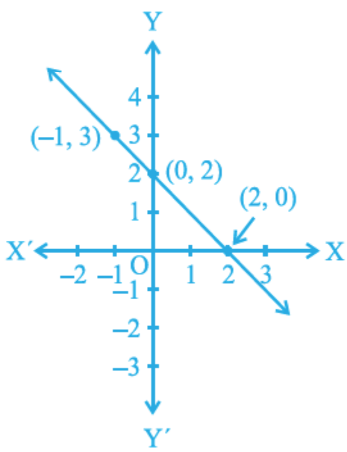
(ii) $y = x – 2$

(iii) $y = –x + 2$

(iv) $x + 2y = 6$



આકૃતિ 4.6



આકૃતિ 4.7

6. જો અચળ બળ લગાડવાથી એક પદાર્થ પર થતું કાર્ય તે પદાર્થ દ્વારા કપાયેલા અંતરના સમપ્રમાણમાં હોય તો, આ બાબત ને બે ચલ વાળા સમીકરણના સ્વરૂપમાં રજૂ કરો અને 5 એકમ અચળ બળ લઇ તેનો આલેખ દોરો અને આલેખ પરથી પદાર્થ દ્વારા કપાયેલ અંતર (i) 2 એકમ (ii) 0 એકમ હોય ત્યારે થતું કાર્ય શોધો.

7. ધોરણ-9 ની બે વિદ્યાર્થિનીઓ યામિની અને ફાતિમાએ ભૂકંપગ્રસ્ત લોકો માટે પ્રધાનમંત્રી રાહતફંડમાં સંયુક્ત રીતે ₹ 100 ફાળો આપ્યો. આ માહિતી આધારિત દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ લખો. (તમે તેમના ફાળાની રકમને ₹ x અને ₹ y લઇ શકો) આ સમીકરણ આધારિત આલેખ દોરો.

8. યુ. એસ. એ અને કેનેડા જેવા દેશમાં તાપમાન ફેરનહીટમાં મપાય છે. ભારત જેવા દેશમાં તાપમાન સેલ્સિયસમાં મપાય છે. અહીં ફેરનહીટનું સેલ્સિયસમાં રૂપાંતર કરતું સુરેખ સમીકરણ આપેલ છે.

$$F = \left(\frac{9}{5}\right)C + 32$$

(i) ઉપર દર્શાવેલ સુરેખ સમીકરણમાં x-અક્ષ પર સેલ્સિયસ અને y-અક્ષ પર ફેરનહીટ લઇ આલેખ દોરો.

(ii) જો તાપમાન 30°C હોય,તો ફેરનહીટ માં શું તાપમાન થાય?

(iii) જો તાપમાન 95°F હોય,તો સેલ્સિયસમાં તાપમાન કેટલું હોય ?

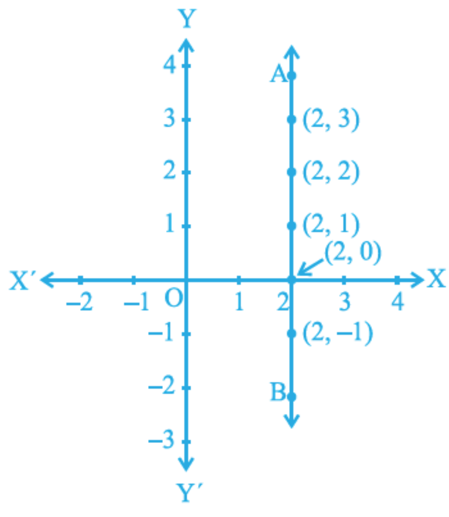
(iv) જો તાપમાન 0°C હોય, તો ફેરનહીટમાં તાપમાન કેટલું હોય અને જો તાપમાન 0°F હોય તો સેલ્સિયસમાં તાપમાન કેટલું હોય ?

(v) ફેરનહીટ અને સેલ્સિયસમાં સંખ્યાત્મક રીતે સમાન હોય તેવું તાપમાન હોય ? જો હા, તો તે શોધો.

4.5 x-અક્ષ અને y-અક્ષને સમાંતર રેખાઓનાં સમીકરણો

કાર્તેઝિય સમતલમાં આપેલાં બિંદુના યામો કેવી રીતે લખવા તે તમે શીખી ગયા છો. બિંદુઓ (2, 0), (–3, 0), (4, 0) અને કોઈપણ વાસ્તવિક સંખ્યા n માટે $(n, 0)$ કાર્તેઝિય સમતલમાં કયાં આવેલા હોય તે તમે જાણો છો? હા, બધા જ બિંદુઓ x-અક્ષ પર આવેલા છે. પરંતુ શા માટે તે તમે જાણો છો? કારણ કે x-અક્ષ પરના દરેક બિંદુનો y-યામ 0 હોય. હકીકતમાં x-અક્ષ પરનું દરેક બિંદુ $(x, 0)$ સ્વરૂપમાં હોય. હવે તમે x-અક્ષ ના સમીકરણનું અનુમાન કરી શકો? તે $y = 0$ દ્વારા અપાય છે. આપણે નોંધીએ કે $y = 0$ ને $0 \cdot x + 1 \cdot y = 0$ દ્વારા વ્યક્ત કરી શકાય. આ જ પ્રમાણે $x = 0$ દ્વારા y - અક્ષનું સમીકરણ દર્શાવી શકાય.

હવે સમીકરણ $x - 2 = 0$ નો વિચાર કરો. જો આ સમીકરણને એક ચલ સમીકરણ ગણવામાં આવે તો $x = 2$ તેનો અનન્ય ઉકેલ થાય. તે સંખ્યારેખા પરનું બિંદુ છે. જો કે જયારે તેને દ્વિચલ સમીકરણ ગણવામાં આવે ત્યારે તેને $x + 0 \cdot y - 2 = 0$ સ્વરૂપે દર્શાવી શકાય.તેને અનંત ઉકેલો હોય. હકીકતમાં આ બધા જ ઉકેલો $(2, r)$



આકૃતિ 4.8

સ્વરૂપે હોય જયાં r એ કોઈ પણ વાસ્તવિક સંખ્યા હોય. વળી તમે ચકાસી પણ શકો કે $(2, r)$ સ્વરૂપનું દરેક બિંદુ આ સમીકરણનો ઉકેલ હોય. આથી $x - 2 = 0$ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને રેખા AB તરીકે આકૃતિ 4.8. ના આલેખ દ્વારા દર્શાવી શકાય.

ઉદાહરણ 9 : સમીકરણ $2x + 1 = x - 3$ ને ઉકેલો અને તેના ઉકેલને (i) સંખ્યારેખા પર (ii) કાર્તેઝિય સમતલમાં દર્શાવો.

ઉકેલ: $2x + 1 = x - 3$ ઉકેલવા

$$2x - x = -3 - 1$$

આથી, $x = -4$

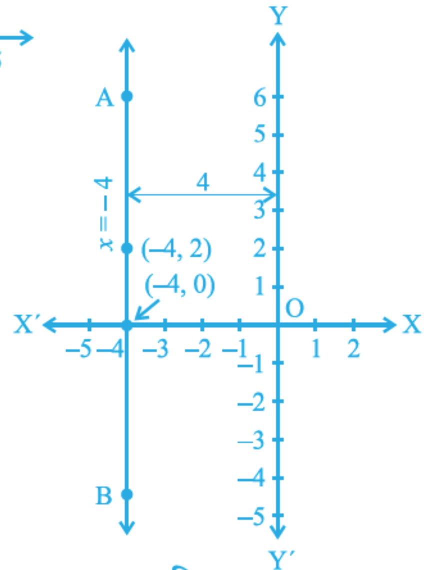
(i) આ ઉકેલને આકૃતિ 4.9 માં સંખ્યારેખા પર દર્શાવેલ છે. અત્રે $x = -4$ ને એક ચલ સમીકરણ તરીકે લીધેલ છે.

આકૃતિ 4.9

(ii) આપણે જાણીએ છીએ કે $x = -4$ ને $x + 0 \cdot y = -4$ તરીકે લખી શકાય. તે ચલ x અને y માટેનું એક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ થાય. હવે y ની બધી જ કિંમતો સ્વીકાર્ય છે. કારણ કે $0 \cdot y$ હંમેશા 0 થશે. $x = -4$ સમીકરણનો ઉકેલ થશે જ. આમ આપેલા સમીકરણના બે ઉકેલ $x = -4, y = 0$ અને $x = -4, y = 2$ થાય.

અહીં નોંધીએ કે રેખા AB નો આલેખ y-અક્ષને સમાંતર છે અને તેની ડાબી બાજુએ 4 એકમ અંતરે છે (જુઓ આકૃતિ 4.10).

આ જ પ્રમાણે $y = 3$ અથવા $0 \cdot x + 1 \cdot y = 3$ પ્રકારના સમીકરણ પરથી મેળવેલ રેખા x-અક્ષને સમાંતર હોય.



આકૃતિ 4.10

સ્વાધ્યાય 4.4

1. $y = 3$ સમીકરણનું (i) એક ચલમાં (ii) બે ચલમાં ભૌમિતિક નિરૂપણ દર્શાવો.

2. સમીકરણ $2x + 9 = 0$ નું (i) એક ચલમાં (ii) બે ચલમાં ભૌમિતિક નિરૂપણ દર્શાવો.

4.6 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓ વિશે અભ્યાસ કર્યો.

1. સમીકરણ $ax + by + c = 0$ (જયાં a, b અને c વાસ્તવિક સંખ્યાઓ છે તથા a અને b એક સાથે શૂન્ય નથી.) ને દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણ કહે છે.

2. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણને અનંત ઉકેલ હોય છે.

3. પ્રત્યેક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો આલેખ રેખા છે.

4. $x = 0$ એ y-અક્ષનું સમીકરણ છે અને $y = 0$ એ x-અક્ષનું સમીકરણ છે.

5. $x = a$ નો આલેખ y-અક્ષને સમાંતર રેખા છે. $(a \neq 0)$

6. $y = a$ નો આલેખ x-અક્ષને સમાંતર રેખા છે. $(a \neq 0)$

7. $y = mx$ દ્વારા મળતા સમીકરણની રેખા ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થાય છે.

8. દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના આલેખમાં રેખા પરનું પ્રત્યેક બિંદુ એ તે સમીકરણનો ઉકેલ છે. ઉપરાંત પ્રત્યેક દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણનો ઉકેલ દ્વિચલ સુરેખ સમીકરણના આલેખ પરનું બિંદુ છે.