પ્રકરણ 11

રચનાઓ

11.1 પ્રાસ્તાવિક

અગાઉનાં પ્રકરણોમાં આપણે દોરતાં હતાં તે આકૃતિઓ માત્ર પ્રમેય સાબિત કરવા કે સ્વાધ્યાયના ઉકેલ માટે સહાયક થવા માટે જરૂરી હતી, પરંતુ તે ચોકસાઈવાળી હોય તેવું જરૂરી ન હતું. તે માત્ર પરિસ્થિતિને સમજવા અને ઉચિત તર્કને રજૂ કરવા માટે દોરવામાં આવતી હતી. આમ છતાં કેટલીક વાર ચોકસાઈવાળી આકૃતિઓની જરૂર પડે છે, ઉદાહરણ તરીકે બાંધવામાં આવનાર મકાનનો નકશો, યંત્રોના ઓજાર કે સાધનના નકશાના જુદા જુદા ભાગનાં માનચિત્રો, માર્ગનો નકશો દોરવા વગેરે. આવી કેટલીક આકૃતિઓ દોરવા માટે કેટલાક પાયાનાં ભૌમિતિક ઉપકરણોની જરૂર પડે છે. આ માટે તમારી પાસે નીચેની સામગ્રીઓ સમાવતી કંપાસપેટી હોવી જરૂરી છેઃ

(i) **અંકિત માપપટ્ટી :** તેની એક તરફ સેન્ટિમીટર અને મિલિમીટર તથા બીજી તરફ ઈંચ અને તેના ભાગ અંકિત થયેલ હોય છે.

(ii) **કાટખૂણિયાની જોડ :** તે પૈકી એકમાં 90°, 60° અને 30° ના ખૂણા તથા બીજામાં 90°, 45° અને 45° ના ખૂણાનો સમાવેશ થાય છે.

(iii) **વિભાજકની જોડ :** જેના બે છેડા કાગળ પર ગોઠવી શકાય તેવી સગવડ સાથે.

(iv) **પરિકરની જોડ :** જેના એક છેડે પેન્સિલ ગોઠવી શકાય તેવી સગવડ સાથે.

(v) **કોણમાપક**

સામાન્ય રીતે આ દરેક ઉપકરણની જરૂરિયાત આપેલ માપ પ્રમાણે ત્રિકોણ, વર્તુળ, ચતુષ્કોણ, બહુકોણ વગેરે જેવી ભૌમિતિક આકૃતિઓ દોરવામાં પડે છે. પરંતુ *માત્ર અન-અંકિત માપપટ્ટી કે સીધી પટ્ટી અને પરિકર જેવાં બે ઉપકરણોની મદદથી*

ભૌમિતિક આકૃતિઓ દોરવાની પ્રક્રિયાને ભૌમિતિક રચના કહે છે. જે રચનામાં માપની પણ જરૂર પડે છે, તેમાં અંકિત માપપટ્ટી અને પરિકરનો ઉપયોગ પણ કરી શકાય છે. આ પ્રકરણમાં ચોક્કસ પ્રકારના ત્રિકોણોની રચના કરવામાં ઉપયોગી હોય તેવી કેટલીક પાયાની રચનાઓનો વિચાર કરીશું.

11.2 પાયાની રચનાઓ

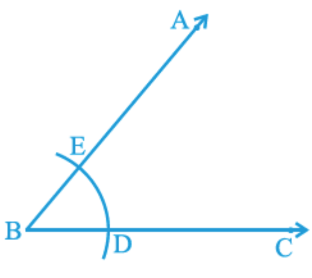
ધોરણ VI માં તમે વર્તુળ, રેખાખંડનો લંબદ્વિભાજક, 30°, 45°, 60°, 90° તથા 120° ના ખૂણાઓ અને આપેલ ખૂણાનો દ્વિભાજક જેવી રચનાઓનો કોઈ વ્યાજબી યથાર્થતા આપ્યા વગર અભ્યાસ કરી ગયાં છો. આ વિભાગમાં આ પૈકીની તેની પાછળના તર્ક સાથે કેટલીક રચનાઓ તથા આ રચનાઓ શા માટે પ્રમાણિત છે તેનો અભ્યાસ કરીશું.

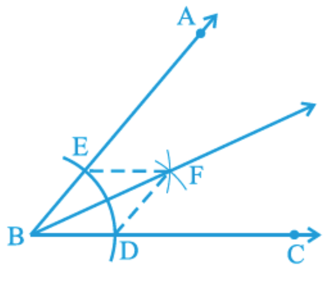
રચના 11.1 : *આપેલ ખૂણાનો દ્વિભાજક રચવો.*

ખૂણો ABC આપેલ છે. આપણે તેનો દ્વિભાજક રચવો છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. B ને કેન્દ્ર લઈ અનુકૂળ ત્રિજ્યા વડે બંને બાજુએ કિરણ BA અને BC ને છેદતું ચાપ દોરો. તે છેદબિંદુને અનુક્રમે E અને D કહો. [જુઓ આકૃતિ 11.1(i).]
2. $\frac{1}{2}$ DE કરતાં મોટી ત્રિજ્યા લઈ D અને E ને કેન્દ્ર તરીકે લઈ એકબીજાને છેદતાં ચાપ દોરો. છેદબિંદુને F કહો.
3. કિરણ BF દોરો. [જુઓ આકૃતિ 11.1(ii)]





આકૃતિ 11.1

આ કિરણ BF એ ખૂણા ABC નો માંગેલ દ્વિભાજક છે.

હવે આપણે માંગેલ ખૂણાનો દ્વિભાજક કેવી રીતે મળે છે તે જોઈએ.

DF અને EF રચો.

ત્રિકોણ BEF અને ત્રિકોણ BDF માં

BE = BD (એક જ ચાપની ત્રિજ્યાઓ)

EF = DF (સમાન ત્રિજ્યાવાળું ચાપ)

BF = BF (સામાન્ય રેખાખંડ)

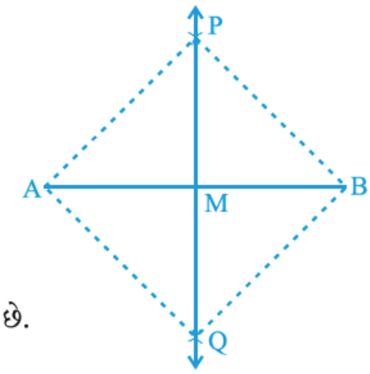
$\therefore \Delta BEF \cong \Delta BDF$ (બાબાબા શરત)

$\therefore \angle EBF = \angle DBF$ (એકરૂપ ત્રિકોણના અનુરૂપ ભાગો)

રચના 11.2 : *આપેલા રેખાખંડના લંબદ્વિભાજકની રચના કરવી.*

રેખાખંડ AB આપેલ છે. આપણે તેનો લંબદ્વિભાજક રચવો છે.

રચનાના મુદ્દા :



આકૃતિ 11.2

1. $\frac{1}{2}$ AB કરતાં વધારે મોટી ત્રિજ્યા લઈ ક્રમશઃ A અને B ને કેન્દ્ર તરીકે લઈ AB ની બંને બાજુએ ચાપ દોરો. (એકબીજાને છેદે તેમ)
2. આ બંને ચાપ એકબીજાને P અને Q માં છેદે છે. PQ દોરો. (જુઓ આકૃતિ.11.2.)
3. હવે PQ, AB ને બિંદુ M માં છેદે છે. આથી રેખા PMQ એ AB નો માંગેલ લંબદ્વિભાજક છે.

હવે આપણે AB નો લંબદ્વિભાજક કેવી રીતે મળે છે તે સમજીએ.

A અને B ને P તથા Q બંને સાથે જોડીએ જેથી રેખાખંડ AP, AQ, BP અને BQ મળે.

ત્રિકોણો PAQ અને PBQ માં,

$AP = BP$ (સમાન ત્રિજ્યાવાળાં ચાપ)

$AQ = BQ$ (સમાન ત્રિજ્યાવાળાં ચાપ)

$PQ = PQ$ (સામાન્ય)

$\therefore \Delta PAQ \cong \Delta PBQ$ (બાબાબા નિયમ)

$\therefore \angle APM = \angle BPM$ (એકરૂપ ત્રિકોણનાં અનુરૂપ અંગો)

હવે ત્રિકોણ PMA અને PMB માં,

$AP = BP$ (આગળ પ્રમાણે)

$PM = PM$ (સામાન્ય)

$\angle APM = \angle BPM$ (ઉપર સાબિત કર્યું)

$\therefore \Delta PMA \cong \Delta PMB$ (બાખૂબા નિયમ)

$\therefore AM = BM$ અને $\angle PMA = \angle PMB$ (એકરૂપ ત્રિકોણના અનુરૂપ ભાગો)

પરંતુ $\angle PMA + \angle PMB = 180°$ (રૈખિક જોડના ખૂણાની પૂર્વધારણા)

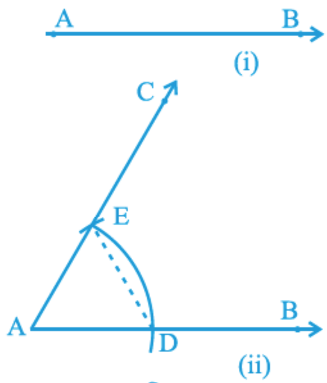
આથી $\angle PMA = \angle PMB = 90°$.

તેથી, PM એટલે કે PMQ એ AB નો લંબ દ્વિભાજક છે.

રચના 11.3 : *આપેલ કિરણના ઉદ્‌ભવબિંદુએ 60° માપના ખૂણાની રચના કરવી.*

ઉદ્‌ભવબિંદુ A વાળું કિરણ AB લઈએ. [જુઓ આકૃતિ 11.3(i).] આપણે $\angle CAB = 60°$ થાય એવું કિરણ AC રચવું છે. તેમ કરવાની એક રીત આગળ પ્રમાણે છે :

રચનાના મુદ્દા :



આકૃતિ. 11.3

1. A ને કેન્દ્ર લઈ કોઈક ત્રિજ્યા લઈ વર્તુળનું એક ચાપ દોરો. તે AB ને જ્યાં છેદે તે બિંદુને D નામ આપો.
2. D ને કેન્દ્ર લઈ તે જ માપની ત્રિજ્યા લઈ એક ચાપ દોરો. તે પ્રથમ ચાપને જે બિંદુમાં છેદે તેનું નામ E આપો.
3. E માંથી પસાર થાય તેવું કિરણ AC રચો [જુઓ આકૃતિ 11.3 (ii).]

$\angle$ CAB માંગેલ $60°$ નો ખૂણો છે.

હવે આપણે $60°$ નો ખૂણો કેવી રીતે મળે છે તે સમજીએ.

DE જોડો.

હવે AE = AD = DE (રચના પરથી)

તેથી Δ EAD એ સમબાજુ ત્રિકોણ છે અને $\angle$ EAD તથા $\angle$ CAB એક જ છે, તેનું માપ $60°$ જેટલું છે.

સ્વાધ્યાય 11.1

1. આપેલ કિરણના ઉદ્ભવબિંદુ પર $90°$ ના ખૂણાની રચના કરો અને પ્રમાણિત કરો.

2. આપેલ કિરણના ઉદ્ભવબિંદુ પર $45°$ ના ખૂણાની રચના કરો અને પ્રમાણિત કરો.

3. નીચે આપેલા માપના ખૂણાઓની રચના કરો :

(i) $30°$ (ii) $22\frac{1}{2}°$ (iii) $15°$

4. નીચે આપેલ ખૂણાઓ રચો અને કોણમાપક વડે માપીને ચકાસો :

(i) $75°$ (ii) $105°$ (iii) $135°$

5. આપેલ બાજુઓના માપવાળા સમબાજુ ત્રિકોણની રચના કરી તેની યથાર્થતા દર્શાવો.

11.3 ત્રિકોણની કેટલીક રચનાઓ

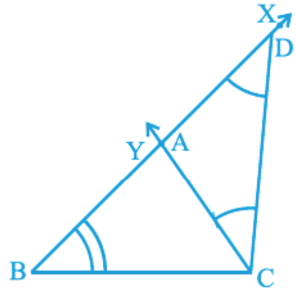
અત્યાર સુધી આપણે કેટલીક પાયાની રચનાઓનો વિચાર કર્યો. હવે પછી આપણે આગળના ધોરણની તથા ઉપર આપેલ રચનાઓનો ઉપયોગ કરીને ત્રિકોણની કેટલીક રચનાઓ કરી. પ્રકરણ 7 ની બે ત્રિકોણની એકરૂપતા માટેના બાખૂબા, બાબાબા, ખૂબાખૂ અને કાકબા નિયમને યાદ કરી લઈએ. (i) જો બે બાજુ અને અંતર્ગત ખૂણો આપેલ હોય. (ii) ત્રણ બાજુઓ આપેલ હોય. (iii) બે ખૂણા અને અંતર્ગત બાજુ આપેલ હોય. (iv) કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ તથા એક બાજુ આપેલ હોય તો અનન્ય ત્રિકોણ મળે. તમે ધોરણ VII માં આવા ત્રિકોણની રચના કેવી રીતે કરવી તે શીખી ગયાં છો. હવે ત્રિકોણની કેટલીક વધુ રચનાઓનો વિચાર કરીએ. તમે એ નોંધ્યું હશે કે ત્રિકોણની રચના કરવા માટે તેનાં ઓછામાં ઓછા ત્રણ અંગ (ભાગ) આપેલ હોવા જોઈએ. પરંતુ ત્રણ અંગોના બધા જ સંયોજન હેતુ સિદ્ધ કરવા માટે પર્યાપ્ત નથી. ઉદાહરણ તરીકે બે બાજુઓ અને એક ખૂણો (અંતર્ગત ન હોય તેવો) આપેલ હોય, તો આવા અનન્ય ત્રિકોણની રચના કરવી હંમેશાં શક્ય નથી.

રચના 11.4 : *ત્રિકોણનો પાયો, પાયા પરનો એક ખૂણો અને બીજી બે બાજુઓના માપનો સરવાળો આપ્યો હોય તેવો ત્રિકોણ રચવો.*

તમારે એવી રચના કરવાની છે કે જેમાં પાયો BC, પાયા પરનો ખૂણો ∠B અને ત્રિકોણ ABC ની બે બાજુઓનો સરવાળો AB + AC આપેલ છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. પાયો BC રચો અને આપેલ ખૂણા જેવડો ખૂણો બિંદુ B પર રચો. તેને ખૂણો XBC કહો.
2. કિરણ BX પર BD = AB + AC થાય તેવો રેખાખંડ BD કાપો.
3. DC રચો અને ∠BDC જેટલો ખૂણો DCY રચો.
4. ધારો કે CY એ BX ને A માં છેદે. (જુઓ આકૃતિ 11.4.)



આકૃતિ 11.4

આમ, ABC માગેલ ત્રિકોણ છે.

હવે આપણે માગેલ ત્રિકોણ કેવી રીતે મળે છે તે જોઈએ.

પાયો BC અને ∠B આપ્યા પ્રમાણે દોરેલ છે. ત્યાર બાદ ત્રિકોણ ACD માં

$\angle ACD = \angle ADC$ (રચના પરથી)

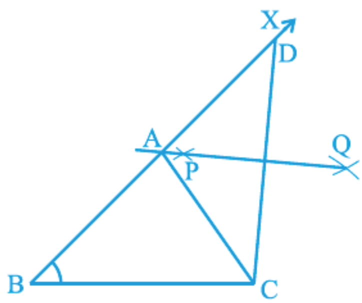
તેથી $AC = AD$

આથી, $AB = BD - AD = BD - AC$

$\therefore\ AB + AC = BD$

વૈકલ્પિક પદ્ધતિ :

ઉપરના વિકલ્પ પ્રમાણે પ્રથમ બે મુદ્દાને અનુસરો. ત્યાર બાદ CD નો લંબદ્વિભાજક PQ રચો. તે BD ને A માં છેદે. (જુઓ આકૃતિ 11.5.) AC રચો. આમ ABC માંગેલ ત્રિકોણ છે. એ નોંધીએ કે A, CD ના લંબદ્વિભાજક પર આવેલ છે. તેથી AD = AC.



આકૃતિ 11.5

નોંધ : જો $AB + AC \le BC$ હોય, તો તેવા ત્રિકોણની રચના શક્ય નથી.

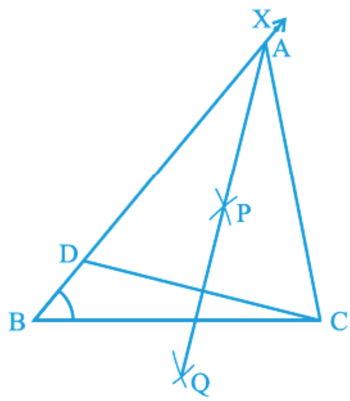
રચના 11.5 : *પાયો, પાયા પરનો એક ખૂણો અને બાકીની બે બાજુઓનો તફાવત આપ્યો હોય તેવો ત્રિકોણ રચવો.*

પાયો BC, પાયા પરનો ∠B અને બે બાજુઓનો તફાવત AB – AC અથવા AC – AB આપેલ છે. તમારે ત્રિકોણ ABC ની રચના કરવાની છે. અહીં નીચે આપેલ બે વિકલ્પો સ્પષ્ટ છે :

વિકલ્પ (i) : ધારો કે AB > AC. તેથી AB – AC આપેલ છે :

રચનાના મુદ્દા :

1. પાયો BC રચો. આપેલ ખૂણા જેટલો ખૂણો XBC બિંદુ B પર રચો.
2. કિરણ BX પર, BD = AB – AC થાય તેવો રેખાખંડ કાપો.
3. DC રચો અને DC નો લંબ દ્વિભાજક PQ રચો.



આકૃતિ 11.6

4. ધારો કે PQ એ BX ને બિંદુ A માં છેદે છે. AC રચો. (જુઓ આકૃતિ 11.6.)

આમ ABC માગેલ ત્રિકોણ છે.

હવે, આપણે માગેલ ત્રિકોણ ABC કેવી રીતે મળે છે તે જોઈએ.

પાયો BC અને $\angle B$ કહેવા પ્રમાણે દોરેલ છે.

બિંદુ A લંબદ્વિભાજક DC પર આપેલ છે.

$$\text{આથી,}\quad AD = AC$$

$$\therefore\ BD = AB - AD = AB - AC.$$

વિકલ્પ (ii) : ધારો કે $AB < AC$. તેથી $AC - AB$ આપેલ છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. વિકલ્પ (i) પ્રમાણે

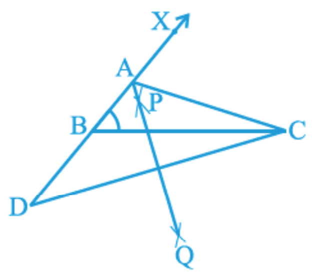
2. રેખાખંડ BC ના જે અર્ધતલમાં કિરણ BX છે તેના વિરૂધ્ધ અર્ધતલમાં લંબાવેલ રેખા BX પર $AC - AB$ ના માપનો એક રેખાખંડ BD કાપો.

3 DC રચો અને DC નો લંબદ્વિભાજક PQ રચો.

4. ધારો કે PQ એ BX ને A માં છેદે છે. AC રચો. (જુઓ આકૃતિ 11.7.)

આમ ABC માંગેલ ત્રિકોણ છે.

તમે રચનાને વિકલ્પ (i) પ્રમાણે પ્રમાણિત કરી શકો છો.



આકૃતિ 11.7

રચના 11.6 : *ત્રિકોણની પરિમિતિ અને પાયા પરના ખૂણા આપ્યા હોય તેવો ત્રિકોણ રચવો.*

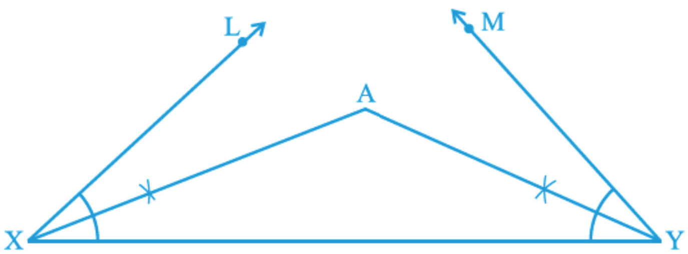
તમારે એવા ત્રિકોણ ABC ની રચના કરવાની છે કે જેના પાયા પરના $\angle B$, $\angle C$ અને $BC + CA + AB$ આપેલ છે.

રચનાના મુદ્દા :

1. $BC + CA + AB$ થાય તેવો રેખાખંડ રચો, તેને XY કહો.

2. $\angle B$ ને સમાન $\angle LXY$ અને $\angle C$ ને સમાન $\angle MYX$ રચો.

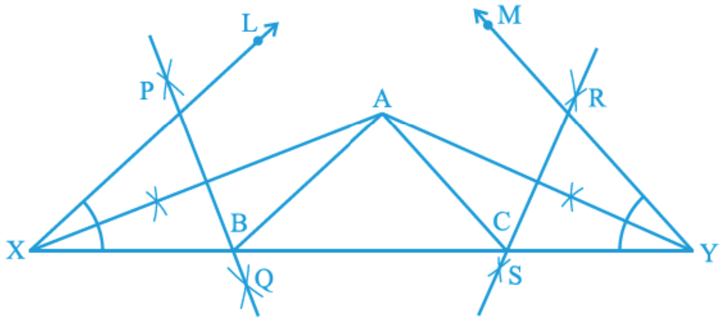
3. બિંદુ A માં છેદે તેવા $\angle LXY$ અને $\angle MYX$ ના દ્વિભાજક રચો. [જુઓ આકૃતિ 11.8(i).]



આકૃતિ 11.8 (i)

4. AX નો લંબદ્વિભાજક PQ તથા AY નો લંબદ્વિભાજક RS દોરો.

5. PQ એ XY ને B માં તથા RS એ XY ને C માં છેદે તેમ દોરો . AB અને AC રચો. [જુઓ આકૃતિ11.8(ii).]



આકૃતિ 11.8 (ii)

આમ ABC માંગેલ ત્રિકોણ છે.

આ રચનાને પ્રમાણિત કરવા માટે, તમે એ નોંધો કે AXના લંબદ્વિભાજક PQ પર B આવેલ છે.

તેથી XB = AB અને તે જ રીતે CY = AC.

આ પરથી $\quad BC + CA + AB = BC + XB + CY = XY.$

ફરીથી, $\quad \angle BAX = \angle AXB \qquad$ ($\angle AXB$ પરથી $AB = XB$)

અને $\angle ABC = \angle BAX + \angle AXB = 2\,\angle AXB = \angle LXY$

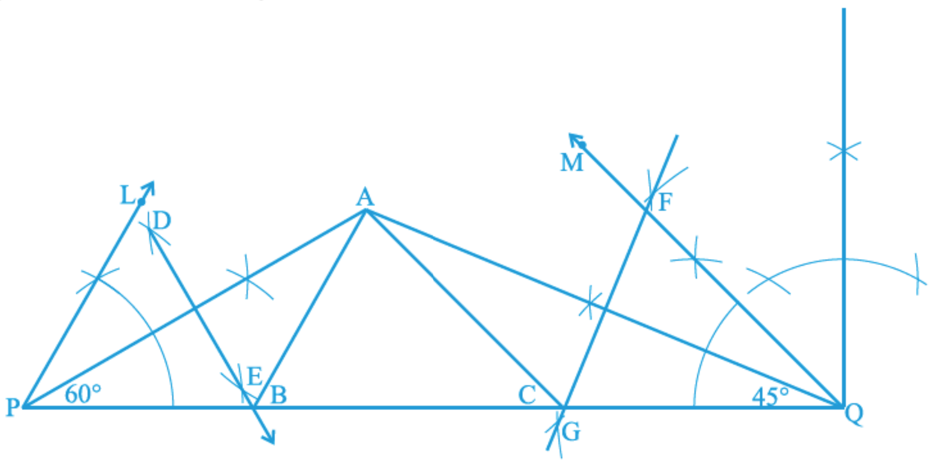
તે જ રીતે, માંગ્યા પ્રમાણે $\angle ACB = \angle MYX$

ઉદાહરણ 1 : જે ત્રિકોણમાં $\angle B = 60°$, $\angle C = 45°$ અને $AB + BC + CA = 11$ સેમી હોય તેવા ત્રિકોણ ABC ની રચના કરો.

રચનાના મુદ્દા :

1. 11 સેમીનો રેખાખંડ PQ રચો. (= AB + BC + CA)

2. P પર 60° નો ખૂણો અને Q પર 45° નો ખૂણો રચો.



આકૃતિ 11.9

3. આ ખૂણાઓનું દ્વિભાજન કરો. ધારો કે આ ખૂણાઓના દ્વિભાજક A બિંદુએ છેદે છે.

4. PQ ને B માં છેદે તેવો AP નો લંબદ્વિભાજક DE રચો તથા PQ ને C માં છેદે તેવો AQ નો લંબદ્વિભાજક FG રચો.

5. AB અને AC રચો. (જુઓ આકૃતિ 11.9.) આમ, ABC માગેલ ત્રિકોણ છે.

સ્વાધ્યાય 11.2

1. $BC = 7$ સેમી, $\angle B = 75°$ અને $AB + AC = 13$ સેમી હોય તેવા ત્રિકોણ ABC ની રચના કરો.

2. $BC = 8$ સેમી, $\angle B = 45°$ અને $AB - AC = 3.5$ સેમી હોય તેવા ત્રિકોણ ABC ની રચના કરો.

3. $QR = 6$ સેમી, $\angle Q = 60°$ અને $PR - PQ = 2$ સેમી હોય તેવા ત્રિકોણ PQR ની રચના કરો.

4. $\angle Y = 30°$, $\angle Z = 90°$ અને $XY + YZ + ZX = 11$ સેમી હોય તેવા ત્રિકોણ XYZ ની રચના કરો.

5. પાયો 12 સેમી અને કર્ણ તથા બીજી બાજુનો સરવાળો 18 સેમી હોય તેવા કાટકોણ ત્રિકોણની રચના કરો.

11.4 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં તમે પરિકર અને સીધીપટ્ટીની મદદથી નીચેની રચનાઓ દોરતા શીખ્યા :

1. આપેલ ખૂણાના દ્વિભાજકની રચના

2. આપેલ રેખાખંડના લંબદ્વિભાજકની રચના

3. 60° ખૂણાની રચના અને વગેરે

4. ત્રિકોણનો પાયો, પાયા પરનો એક ખૂણો અને બીજી બે બાજુઓનો સરવાળો આપ્યો હોય તેવા ત્રિકોણની રચના

5. ત્રિકોણનો પાયો, પાયા પરનો એક ખૂણો અને બીજી બે બાજુઓનો તફાવત આપ્યો હોય તેવા ત્રિકોણની રચના

6. ત્રિકોણના પાયાના બે ખૂણા અને ત્રિકોણની પરિમિતિ આપી હોય તેવા ત્રિકોણની રચના