પ્રકરણ 13

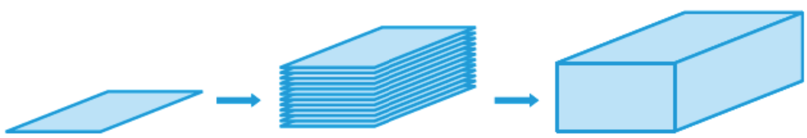
પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ

13.1 પ્રાસ્તાવિક

સામાન્ય રીતે, જ્યાં જોઈએ ત્યાં આપણે ઘન પદાર્થ જોઈએ છીએ. આપણે અત્યાર સુધી આપણી નોંધપોથી કે કાળાપાટિયા પર સહેલાઈથી દોરી શકાય તેવી આકૃતિનો અભ્યાસ કર્યો. એવી આકૃતિઓને સમતલીય આકૃતિઓ કહેવાય. આપણે લંબચોરસ, ચોરસ અને વર્તુળની પરિમિતિ અને ક્ષેત્રફળ કેવી રીતે શોધવાં તેની સમજ આગળના ધોરણમાં મેળવી ચૂકયાં છીએ. એ જોવું રસપ્રદ બનશે કે આવી ઘણી બધી સમાન આકાર અને કદની સમતલીય આકૃતિઓને કાગળના પૂંઠામાંથી કાપી અને તેની લંબરૂપે થપ્પી કરતાં શું મળશે તે જોવું રસપ્રદ થશે. આમ કરતાં, આપણને ***લંબઘન*** (*cuboid*), ***નળાકાર*** (*cylinder*) વગેરે જેવી ઘન આકૃતિઓ મળે છે. અગાઉના ધોરણમાં તમે લંબઘન, સમઘન અને નળાકારનાં પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ કેવી રીતે શોધવા તે વિશે શીખી ગયા છો. હવે આપણે લંબઘન અને નળાકારનાં પૃષ્ઠફળ અને ઘનફળ શોધવાની ચર્ચા ઊંડાણથી કરીશું અને તે પરથી ***શંકુ*** (*cone*) અને ***ગોલક*** (*sphere*) જેવી ઘનાકૃતિઓનો અભ્યાસ કરીશું.

13.2 લંબઘન અને સમઘનનાં પૃષ્ઠફળ

શું તમે ઘણાબધા કાગળનું બંડલ જોયું છે? તે કેવું દેખાય છે? શું તે આકૃતિ 13.1 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનું લાગે છે ?



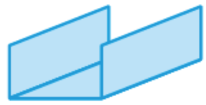
આકૃતિ 13.1

તે લંબઘન બનાવે છે. જો આપણે તેને ઢાંકવું હોય, તો તે માટે કેટલો ખાખી કાગળ જોઈએ ? ચાલો આપણે જોઈએ :

પ્રથમ બંડલનું તળિયું ઢાંકવા માટે લંબચોરસ કાગળનો ટુકડો જોઈશે. તે આકૃતિ 13.2 (a) માં દર્શાવેલ છે.

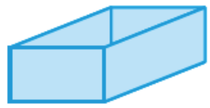
(a)

ત્યાર બાદ બે બાજુ ઢાંકવા બે મોટા લંબચોરસ ટુકડા જોઈશે. તે આકૃતિ 13.2 (b) જેવું દેખાશે.



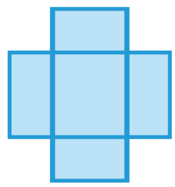
(b)

હવે તેના આગળ અને પાછળના ભાગ ઢાંકવા બીજાં વધુ બે જુદાં માપના લંબચોરસ ટુકડાની જરૂર પડશે. તેમના ઉપયોગથી આકૃતિ 13.2(c) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેની રચના થશે.



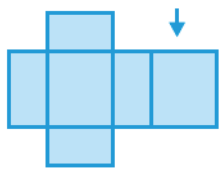
(c)

આ આકૃતિને ખોલી નાંખતાં 13.2 (d) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેની દેખાશે.



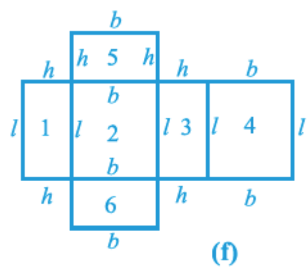
(d)

અંતે આ બંડલને ઉપરથી ઢાંકવા આપણે તળિયા જેટલા જ માપના બીજા લંબચોરસ ટુકડાની જરૂર પડશે. તેને જમણી બાજુ ચોંટાડતા આકૃતિ 13.2(e) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનું ચિત્ર દેખાશે.



(e)

આમ, આપણે લંબઘનની બહારની બધી જ સપાટી ઢાંકવા છ લંબચોરસ ટુકડાનો ઉપયોગ કરેલ છે.



(f)

આકૃતિ 13.2

તે દર્શાવે છે કે લંબઘનની બહારની સપાટી છ લંબચોરસથી બને છે. (અલબત, આ લંબચોરસ પ્રદેશને લંબઘનનાં પૃષ્ઠ કહેવાય). તે દરેકનાં ક્ષેત્રફળ શોધવા માટે તેમની લંબાઈ અને પહોળાઈના ગુણાકાર કરી અને આવાં છ ક્ષેત્રફળનો સરવાળો કરતાં કુલ ક્ષેત્રફળ મળે.

હવે, જો લંબઘનની લંબાઈ l, પહોળાઈ b અને ઊંચાઈ h લઈએ તો આ માપથી બનતા આકારની આકૃતિ 13.2(f) માં દર્શાવ્યા મુજબની હશે.

આથી, છ લંબચોરસના ક્ષેત્રફળનો સરવાળો :

લંબચોરસ 1 નું ક્ષેત્રફળ $(= l \times h)$

$+$

લંબચોરસ 2 નું ક્ષેત્રફળ $(= l \times b)$

$+$

લંબચોરસ 3 નું ક્ષેત્રફળ $(= l \times h)$

$+$

લંબચોરસ 4 નું ક્ષેત્રફળ $(= l \times b)$

$+$

લંબચોરસ 5 નું ક્ષેત્રફળ $(= b \times h)$

$+$

લંબચોરસ 6 નું ક્ષેત્રફળ $(= b \times h)$

$= 2(l \times b) + 2(b \times h) + 2(l \times h)$

$= 2(lb + bh + hl)$

આ પરથી :

લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ $=$ **$2(lb + bh + hl)$**

અહીં l, b અને h લંબઘનની *ત્રણ ધાર (edges)* છે.

નોંધ : આપણે ક્ષેત્રફળનો એકમ એ ચોરસ એકમ તરીકે લઈશું કારણ કે આ પ્રદેશનું પરિમાણ આપણે એકમ લંબાઈની બાજુના ચોરસથી ભરી અને માપીએ છીએ.

ઉદાહરણ તરીકે, જો લંબઘનની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 15 સેમી, 10 સેમી અને 20 સેમી હોય, તો તેનું પૃષ્ઠફળ :

$2[(15 \times 10) + (10 \times 20) + (20 \times 15)]$ સેમી^{2}

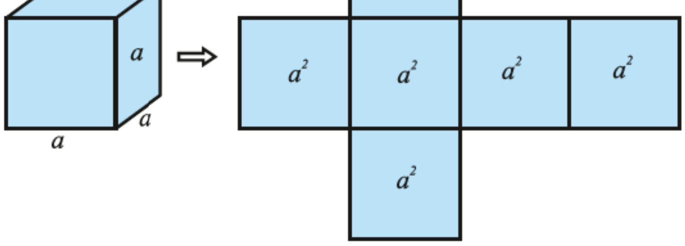
$= 2(150 + 200 + 300)$ સેમી^{2}

$= 2 \times 650$ સેમી^{2}

$= 1300$ સેમી^{2}

યાદ કરો કે જે લંબઘનમાં લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ સમાન હોય તે લંબઘનને ***સમઘન*** *(cube)* કહેવાય. જો સમઘનની દરેક ધાર a હોય, તો આ સમઘનનું પૃષ્ઠફળ $2(a \times a + a \times a + a \times a)$, અર્થાત્, $6a^2$ (જુઓ આકૃતિ 13.3), જેટલું થાય.

a ધારવાળા સમઘનનું પૃષ્ઠફળ $=$ **$6a^2$**

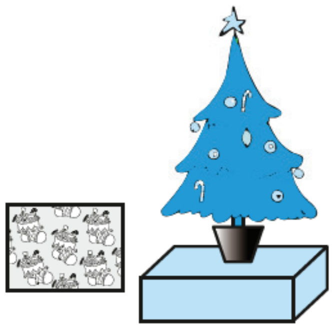


આકૃતિ 13.3

હવે, આપણે લંબઘનનાં છ પૃષ્ઠો પૈકી લંબઘનના પાયા અને તળિયા સિવાયનાં ચાર પૃષ્ઠોનાં જ ક્ષેત્રફળ શોધીએ. આવા કિસ્સામાં ચાર બાજુનાં ક્ષેત્રફળને લંબઘનનાં **પાર્શ્વપૃષ્ઠોનું ક્ષેત્રફળ**(*Lateral surface area*) કહેવાય. *આથી જો લંબઘનની લંબાઈ l, પહોળાઈ b અને ઊંચાઈ h હોય તો તેનાં પાર્શ્વપૃષ્ઠોનું ક્ષેત્રફળ $2lh + 2bh$ અથવા $2(l + b)h$ થાય. આ જ રીતે, સમઘનની બાજુની લંબાઈ a હોય, તો તેના પાર્શ્વપૃષ્ઠોનું ક્ષેત્રફળ $4a^2$ થાય.*

ઉપરની બાબતો ધ્યાનમાં રાખતાં સમઘન કે લંબઘનના પૃષ્ઠફળને કુલ પૃષ્ઠફળ કહીશું. ચાલો આપણે કેટલાંક ઉદાહરણ ગણીએ.

ઉદાહરણ 1 : મેરીને તેનું ક્રિસમસ-ટ્રી શણગારવું છે. તે સાન્તાક્લોઝના ચિત્રને રંગીન કાગળ વીંટાળેલા લંબઘન લાકડાના ખોખા પર આ ક્રિસમસ-ટ્રી મૂકવા માંગે છે. (જુઓ આકૃતિ. 13.4.) આ કામ માટે તેણે ચોક્કસ કેટલો કાગળ ખરીદવો જોઇએ તે જાણવું છે. જો ખોખાની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 80 સેમી, 40 સેમી અને 20 સેમી હોય, તો 40 સેમી લંબાઈવાળા કેટલા ચોરસ કાગળની જરૂર પડે?



આકૃતિ 13.4

ઉકેલ : મેરીને ખોખાની બહારની બાજુ કાગળ ચોંટાડવો છે. આથી જરૂરી કાગળ એ લંબઘન આકારના ખોખાના પૃષ્ઠફળ જેટલો થાય. ખોખાની બાજુનાં માપઃ

લંબાઈ = 80 સેમી, પહોળાઈ = 40 સેમી, ઊંચાઈ = 20 સેમી

ખોખાનું પૃષ્ઠફળ $= 2(lb + bh + hl)$

$= 2[(80 \times 40) + (40 \times 20) + (20 \times 80)]$ સેમી^{2}

$= 2[3200 + 800 + 1600]$ સેમી^{2}

$= 2 \times 5600$ સેમી^{2} $= 11200$ સેમી^{2}

દરેક કાગળનું ક્ષેત્રફળ $= 40 \times 40$ સેમી^{2}

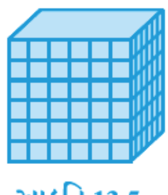
$= 1600$ સેમી^{2}

આથી, જરૂરી કાગળના ટુકડાની સંખ્યા $= \dfrac{\text{ખોખાનું પૃષ્ઠફળ}}{\text{એક કાગળનું ક્ષેત્રફળ}} = \dfrac{11200}{1600} = 7$

આથી, તેને 7 કાગળની જરૂર પડશે.

નોંધ : $2lb$, $2bh$, $2hl$ માટે અનુક્રમે 4, 1 અને 2 કાગળ જોઇએ. કાગળના માપ તથા ખોખાના માપ વચ્ચે યોગ્ય ગુણિતના સંબંધ ના હોય, તો કાગળના ટુકડા કરવા પડે તે યોગ્ય નથી.

ઉદાહરણ 2 : હમીદ તેના ઘર માટે સમઘન આકારની ઢાંકણ સાથેની પાણીની ટાંકી બનાવે છે. તેની બહારની ધાર 1.5 મી લાંબી છે. તે તળિયા સિવાયના ટાંકીના બહારના ભાગમાં 25 સેમી લંબાઈવાળી ચોરસ લાદી લગાવે છે. (જુઓ આકૃતિ 13.5.) તો લાદીના પ્રત્યેક ડઝનના ₹ 360 લેખે તેણે કરેલ ખર્ચ શોધો.



આકૃતિ 13.5

ઉકેલ : હમીદ પાંચ બાજુ પર લાદી લગાવવા માંગે છે. તેથી જરૂરી લાદીની સંખ્યા નક્કી કરવા, તેણે ટાંકીનું પૃષ્ઠફળ જાણવું પડે.

સમઘન ટાંકીની ધાર = 1.5 મી = 150 સેમી ($= a$)

આથી, ટાંકીના બહારના ભાગનું જરૂરી ક્ષેત્રફળ $= 5 \times 150 \times 150$ સેમી^{2}

દરેક ચોરસ લાદીનું ક્ષેત્રફળ $= (\text{બાજુ})^2 = 25 \times 25$ સેમી^{2}

$$\text{જરૂરી લાદીની સંખ્યા} = \frac{\text{ટાંકીના બહારના ભાગનું ક્ષેત્રફળ}}{\text{એક લાદીનું ક્ષેત્રફળ}}$$

$$= \frac{5 \times 150 \times 150}{25 \times 25} = 180$$

1 ડઝન અર્થાત્ 12 લાદી લગાડવાનો ખર્ચ = ₹ 360

$$\text{એક લાદી લગાડવાનો ખર્ચ} = ₹\ \frac{360}{12} = ₹\ 30$$

180 લાદી લગાડવાનો ખર્ચ = 180 × ₹ 30 = ₹ 5400

સ્વાધ્યાય 13.1

1. એક 1.5 મી લાંબો, 1.25 મી પહોળો અને 65 સેમી ઊંડો પ્લાસ્ટિકનો ડબો બનાવવો છે. તેનું મથાળું ખુલ્લું છે. પ્લાસ્ટિક શીટની જાડાઈ અવગણતાં

(i) ડબો બનાવવા જરૂરી શીટનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(ii) 1 મી^{2} શીટના ₹ 20 લેખે શીટ માટે થતો કુલ ખર્ચ શોધો.

2. એક રૂમની લંબાઈ, પહોળાઈ અને ઊંચાઈ અનુક્રમે 5 મી, 4 મી અને 3 મી છે. રૂમની દીવાલ અને છત ₹ 7.50 પ્રતિ મી^{2} પ્રમાણે રંગવાનો ખર્ચ શોધો.

3. લંબચોરસ હૉલના તળિયાની પરિમિતિ 250 મી છે. જો ₹ 10 પ્રતિ મી^{2} લેખે તેની ચાર દીવાલ રંગવાનો ખર્ચ ₹15000 થતો હોય, તો હૉલની ઊંચાઈ શોધો.

[**સૂચના :** ચાર દીવાલનું ક્ષેત્રફળ = પાર્શ્વપૃષ્ઠોનું ક્ષેત્રફળ]

4. એક ડબામાં 9.375 મી^{2} ક્ષેત્રફળ રંગી શકાય તેટલો રંગ છે. 22.5 સેમી× 10 સેમી × 7.5 સેમી માપની કેટલી ઇંટો આ ડબાના રંગથી રંગી શકાય?

5. એક સમઘન પેટીની બધી જ ધાર 10 સેમી અને બીજી લંબઘન પેટીની લંબાઈ 12.5 સેમી, પહોળાઈ 10 સેમી અને ઊંચાઈ 8 સેમી છે.

(i) કઈ પેટીનાં પાર્શ્વપૃષ્ઠોનું ક્ષેત્રફળ વધુ છે? કેટલું?

(ii) કઈ પેટીનું કુલ પૃષ્ઠફળ ઓછું છે? કેટલું?

6. ઘરમાં એક કાચનું ગ્રીન હાઉસ (તળિયા સાથે) બનાવેલ છે. તેને ટેપથી જોડેલ છે. જો તે 30 સેમી લાંબું, 25 સેમી પહોળું અને 25 સેમી ઊંચું હોય, તો

(i) વપરાયેલ કાચનું ક્ષેત્રફળ કેટલું થશે?

(ii) આ 12 ધાર માટે કેટલી ટેપની જરૂર પડે?

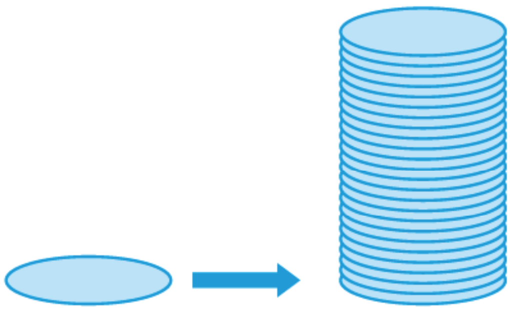
7. મીઠાઈની દુકાન, 'શાંતિ મીઠાઈ' કાગળના ખોખામાં મીઠાઈ પૅક કરવા ખોખા બનાવવાનો ઑર્ડર આપે છે. જુદાં જુદાં માપનાં

બે ખોખાની જરૂરિયાત છે. મોટા ખોખાનાં માપ 25 સેમી × 20 સેમી × 5 સેમી અને નાના ખોખાનાં માપ 15 સેમી × 12 સેમી × 5 સેમી છે. બધાને ઢાંકવા કુલ પૃષ્ઠફળના 5 % જેટલો વધુ કાગળ જોઈશે. જો પૂંઠાનો ભાવ 1000 સેમી^{2} ના ₹ 4 હોય, તો બંને પ્રકારના 250 ખોખાં બનાવવાનો ખર્ચ શોધો.

8. પરવીન તેની ગાડી ઢાંકવા જેની ચાર બાજુઓ અને મથાળું તાડપત્રીથી બનાવેલ હોય તેવા માળખાવાળી કામચલાઉ પેટી (તેનો આગળનો ભાગ વીંટાળી શકાય તેવા ઢાંકણ જેવો હોય) આકારનું માળખું રચવા ઇચ્છે છે. માની લઈએ કે સિલાઇ કામમાં ખૂબ ઓછી જગા વપરાય છે. તેને અવગણી શકાય તો 2.5 મી ઊંચી અને 4 મી × 3 મી આધારવાળી પેટી માટે કેટલી તાડપત્રી જોઈશે?

13.3 લંબવૃત્તીય નળાકારનું પૃષ્ઠફળ

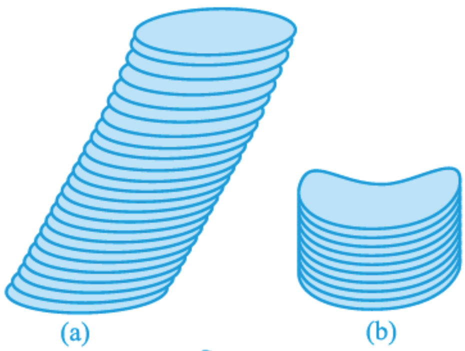
જો આપણે વર્તુળાકાર કાગળને એકબીજા પર ગોઠવીએ તો, આગળ લંબચોરસ ટુકડાની થપ્પી કરી હતી તે મુજબ અહીં આપણને શું મળે? (જુઓ આકૃતિ 13.6.)



આકૃતિ 13.6

અહીં, જો થપ્પી શિરોલંબ હોય, તો આપણને **લંબવૃત્તીય નળાકાર** (*Right circular cylinder*) મળશે, કેમકે તે વર્તુળાકાર તળિયા સાથે કાટખૂણો બનાવે છે. આપણે હવે જોઈએ કે કયા નળાકારને લંબવૃત્તીય નળાકાર ન કહેવાય.

આકૃતિ 13.7 (a) માં તમે જેનો પાયો વર્તુળાકાર છે તેવો નળાકાર જોઈ શકો છો તે પાયા સાથે કાટકોણ રચતો નથી. આથી આપણે તેને લંબવૃત્તીય નળાકાર કહી શકીએ નહિ.

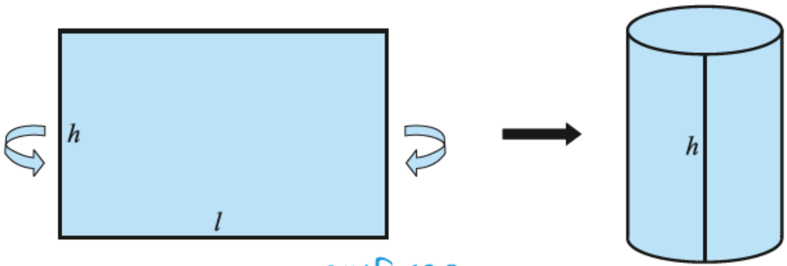


આકૃતિ 13.7

વળી, જો આકૃતિ 13.7 (b) માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો પાયો વર્તુળાકાર ના હોય, તોપણ આપણે તેને લંબવૃત્તીય નળાકાર કહીશું નહિ.

નોંધ : અહીં આપણે લંબવૃત્તીય નળાકારનો જ ઉપયોગ કરીશું. આથી, જો ઉલ્લેખ ના કરેલ હોય, તો નળાકાર શબ્દનો અર્થ લંબવૃત્તીય નળાકાર કરીશું.

હવે, જો નળાકારને રંગીન કાગળ વડે ઢાંકવો હોય તો ઓછામાં ઓછો કેટલો કાગળ જોઈએ? પ્રથમ જેની લંબાઈ નળાકારને ગોળ વીંટાળવા માટે પૂરતી હોય તેવો એક લંબચોરસ કાગળનો ટુકડો લો અને પહોળાઈ નળાકારની ઊંચાઈ જેટલી હોય. (જુઓ આકૃતિ 13.8.)



આકૃતિ 13.8

કાગળનું ક્ષેત્રફળ એ નળાકારની વક્રસપાટીના ક્ષેત્રફળ જેટલું હશે. નોંધો કે કાગળની લંબાઈ એ વર્તુળાકાર પાયાના પરિઘ જેટલી અર્થાત્ $2\pi r$ છે.

આથી, નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = લંબચોરસ કાગળનું ક્ષેત્રફળ

= લંબાઈ × પહોળાઈ

= નળાકારના પાયાની પરિમિતિ × h

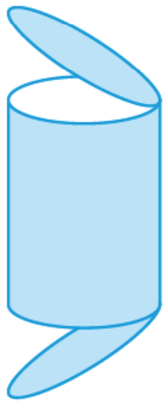
$= 2\pi r \times h$

આમ, નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = $\boldsymbol{2\pi rh}$

અહીં, નળાકારના પાયાની ત્રિજ્યા r અને નળાકારની ઊંચાઈ h છે.

નોંધ : નળાકારના કિસ્સામાં, જો બીજો ઉલ્લેખ ના કરેલ હોય, તો 'નળાકારની ત્રિજ્યા' અર્થાત્ 'નળાકારના પાયાની ત્રિજ્યા' સમજીશું.

જો નળાકારના તળિયા અને મથાળાને પણ ઢાંકીએ તો, આપણે r ત્રિજ્યાવાળાં બે વર્તુળો (અલબત વર્તુળાકાર પ્રદેશ)ની જરૂર પડે અને દરેકનું ક્ષેત્રફળ πr^2 હોવાથી (જુઓ આકૃતિ 13.9), નળાકારનું કુલ પૃષ્ઠફળ $2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(r + h)$ થશે.



આકૃતિ 13.9

આથી, નળાકારનું કુલ પૃષ્ઠફળ = $\boldsymbol{2\pi r(r + h)}$

અહીં, નળાકારની ઊંચાઈ h અને ત્રિજ્યા r છે.

નોંધ : તમે પ્રકરણ 1 પરથી યાદ કરી શકશો કે π એ અસંમેય સંખ્યા છે. આથી, π ની દશાંશ અભિવ્યક્તિ અનંત અને અનાવૃત્ત હોય છે. પરંતુ, આપણે ગણતરીમાં તેની લગભગ કિંમત $\frac{22}{7}$ અથવા 3.14 લઈશું.

ઉદાહરણ 3 : સાવિત્રી તેના વિજ્ઞાનના પ્રૉજેક્ટ માટે નળાકાર કેલિડોસ્કૉપનું મોડેલ બનાવવા માંગે છે. કેલિડોસ્કૉપની વક્રસપાટી માટે તે ચાર્ટ પેપરનો ઉપયોગ કરે છે. (જુઓ આકૃતિ 13.10.) જો કેલિડોસ્કૉપની લંબાઈ 25 સેમી અને ત્રિજ્યા 3.5 સેમી રાખે, તો તેને કેટલા પેપરની જરૂર પડે? તમે $\pi = \frac{22}{7}$ લઈ શકો.

આકૃતિ 13.10

ઉકેલ : નળાકાર કેલિડોસ્કૉપના પાયાની ત્રિજ્યા (r) = 3.5 સેમી

કેલિડોસ્કૉપની ઊંચાઈ (લંબાઈ) (h) = 25 સેમી

આવશ્યક ચાર્ટ પેપરનું ક્ષેત્રફળ = કેલિડોસ્કૉપની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= 2\pi rh$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 25$ સેમી^{2}

$= 550$ સેમી^{2}

સ્વાધ્યાય 13.2

જ્યાં અન્ય ઉલ્લેખ ન હોય ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. લંબવૃત્તીય નળાકારની ઊંચાઈ 14 સેમી અને વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 88 સેમી^{2} છે, તો નળાકારના પાયાનો વ્યાસ શોધો.

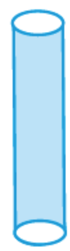
2. ધાતુના પતરામાંથી 1 મીટર ઊંચાઈ અને 140 સેમી પાયાના વ્યાસવાળી બંધ નળાકાર ટાંકી બનાવવી છે. તે બનાવવા માટે કેટલા ચોરસ મીટર પતરાની જરૂર પડશે?

3. ધાતુની એક પાઇપ 77 સેમી લાંબી છે. તેના *આડ છેદ* (*cross section*)નો અંદરનો વ્યાસ 4 સેમી અને બહારનો વ્યાસ 4.4 સેમી છે. (જુઓ આકૃતિ 13.11.) તો,

   (i) તેની અંદરની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

   (ii) તેની બહારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

   (iii) તેનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો



આકૃતિ 13.11

4. 120 સેમી લંબાઈવાળા રોલરનો વ્યાસ 84 સેમી છે. જો રમતના મેદાનને સમતલ બનાવવા માટે રોલરને 500 આંટા મારવા પડે, તો રમતના મેદાનનું ક્ષેત્રફળ કેટલા ચોરસ મીટર હશે?

5. એક નળાકાર આકારના થાંભલાની ઊંચાઈ 3.5 મીટર અને વ્યાસ 50 સેમી છે. થાંભલાની વક્રસપાટીને રંગવાનો ખર્ચ પ્રતિ મી^{2} ના ₹ 12.50 હોય, તો રંગકામ માટે કુલ ખર્ચ શોધો.

6. એક નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 4.4 મી^{2} છે. જો તેના પાયાની ત્રિજ્યા 0.7 મી હોય, તો તેની ઊંચાઈ શોધો.

7. એક કૂવાની અંદરની સપાટીનો વ્યાસ 3.5 મી છે. તે 10 મી ઊંડો છે, તો

   (i) અંદરની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

   (ii) એક મી^{2} ના ₹ 40 લેખે અંદરની વક્રસપાટીને પ્લાસ્ટર કરવાનો ખર્ચ કેટલો આવે?

8. પાણીને ગરમ કરવાના સાધનમાં એક 28 મી લાંબો અને 5 સેમી વ્યાસવાળો નળાકાર પાઇપ છે. સાધનની ગરમ થતી સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ શોધો.

9. (i) 4.5 મી ઊંચી અને 4.2 મી વ્યાસ ધરાવતી બંધ નળાકારીય પેટ્રોલની ટાંકીની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

(ii) ટાંકી બનાવતી વખતે $\frac{1}{12}$ ભાગનું સ્ટીલ નકામું ગયું હોય, તો ખરેખર કેટલું સ્ટીલ ઉપયોગમાં લેવાયું હશે?

10. આકૃતિ 13.12 માં લૅમ્પશેડની ફ્રેમ જુઓ. તેને સુશોભિત કપડાંથી ઢાંકેલ છે. ફ્રેમના પાયાનો વ્યાસ 20 સેમી અને ઊંચાઈ 30 સેમી છે. મથાળા અને તળિયા માટે 2.5 સેમીની જગા તેને વાળવા માટે રાખેલી છે. લૅમ્પશેડને ઢાંકવા માટે કેટલું કાપડ જોઈશે તે શોધો.

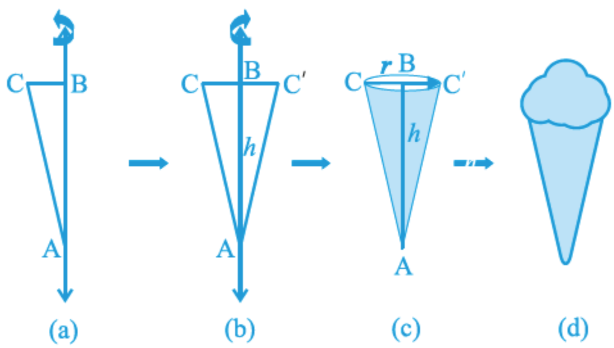
આકૃતિ 13.12

11. વિદ્યાલયના વિદ્યાર્થીઓ કાર્ડબૉર્ડમાંથી કે જેનો પાયો નળાકાર છે તેવું પેન-હૉલ્ડર બનાવવાની અને સજાવવાની હરીફાઈમાં ભાગ લે છે. દરેક પેન-હૉલ્ડરની ત્રિજ્યા 3 સેમી અને ઊંચાઈ 10.5 સેમી રાખવાની છે. વિદ્યાલયે હરીફાઈ માટે કાર્ડબૉર્ડ આપવાના છે. જો 35 હરીફો હોય, તો આ હરીફાઈ માટે કેટલું કાર્ડબૉર્ડ જોઈશે?

13.4 લંબવૃત્તીય શંકુનું પૃષ્ઠફળ

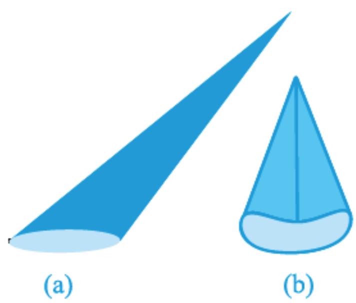
આપણે અત્યાર સુધી એકરૂપ આકૃતિઓની થપ્પી બનાવીને નક્કર પદાર્થ બનાવ્યા. આવી આકૃતિઓને *પ્રિઝમ (ત્રિપાર્શ્વ) (prism)* કહેવાય છે. હવે પ્રિઝમ ના હોય તેવા બીજા પ્રકારના નક્કર પદાર્થનો વિચાર કરીએ. (આ પ્રકારના નક્કર પદાર્થોને *પિરામિડ* કહેવાય.) ચાલો આપણે જોઈએ કે તે કેવી રીતે બનાવવા.

પ્રવૃત્તિ : B પાસે કાટખૂણો હોય તેવો ત્રિકોણ ABC કાપો. ત્રિકોણની કોઈ એક લંબ બાજુ (ધારો કે) AB પર લાંબી ઘટ્ટ દોરી ચોંટાડો. [જુઓ આકૃતિ 13.13(a).] દોરીને ત્રિકોણની બાજુ પર બંને બાજુથી પકડી અને ત્રિકોણને દોરીની આસપાસ ઘણી વખત ઘુમાવો. શું બને છે? તમે ત્રિકોણને દોરીની આસપાસ ફેરવતાં બનતાં આકારને ઓળખી શકશો?[આકૃતિ 13.13(b).] તે તમને તમે જેમાં આઈસક્રીમ ખાધો હોય તેવા આકારની યાદ અપાવે છે? [જુઓ આકૃતિ 13.13 (c) અને (d).]



આકૃતિ 13.13

આને ***લંબવૃત્તીય શંકુ*** (*Right circular cone*) કહેવાય. આકૃતિ 13.13(c) એ A શિરોબિંદુવાળો લંબવૃત્તીય શંકુ છે. AB ને ઊંચાઈ, BC ને ત્રિજ્યા અને AC ને શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ (તિર્યક ઊંચાઈ) કહેવાય. અહીં આપણે B ને શંકુના વર્તુળાકાર પાયાનું કેન્દ્ર કહીશું. આપણે શંકુની ઊંચાઈ, ત્રિજ્યા અને ત્રાંસી ઊંચાઈને અનુક્રમે h, r અને l વડે દર્શાવીશું. ફરી એક વખત કયા શંકુને લંબવૃત્તીય શંકુ ન કહેવાય તે જોઈએ. હવે મુદ્દા પર આવ્યા. (જુઓ આકૃતિ 13.14.)

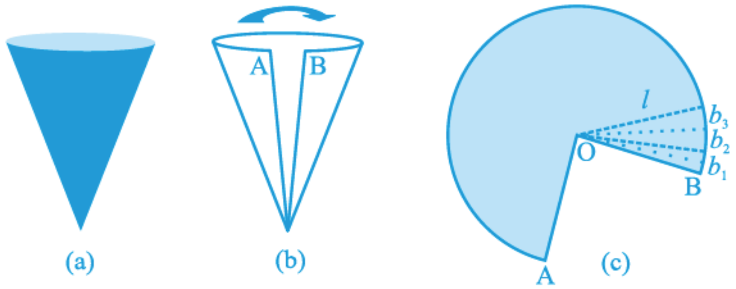


આકૃતિ 13.14

આ આકૃતિઓ લંબવૃત્તીય શંકુ નથી, કારણ કે (a)માં શિરોબિંદુને પાયાના કેન્દ્ર સાથે જોડતી રેખા, પાયા સાથે કાટખૂણો બનાવતી નથી અને (b)માં પાયો વર્તુળાકાર નથી. આપણે નળાકારની જેમ માત્ર લંબવૃત્તીય શંકુનો જ અભ્યાસ કરવાના હોવાથી 'શંકુ'નો અર્થ 'લંબવૃત્તીય શંકુ' ગણીશું.

પ્રવૃત્તિ : (i) કાગળમાંથી વ્યવસ્થિત રીતે જેમાં સીધી બાજુ પર ઉપરાઉપરી કાગળ લગાવેલ ન હોય તેવો શંકુ ધારથી કાપો અને તેને શંકુની વક્રસપાટીનો કાગળ પર બનતો આકાર જોઈ શકાય તેવી રીતે ખોલી કાઢો. (તમે જ્યાંથી શંકુને કાપો છો તે શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ છે. તેને l વડે દર્શાવાય છે.) તે વર્તુળાકાર કેકના ભાગ જેવો દેખાય છે.

(ii) A અને B ચિહ્નવાળા અણીવાળા ભાગને જો તમે એકબીજા પાસે લાવો તો, આકૃતિ 13.15 (c)માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેનો વર્તુળાકાર પાયો ધરાવતા શંકુનો વક્રભાગ તમે જોઈ શકશો.



આકૃતિ 13.15

(iii) જો આકૃતિ 13.15 (c)માં દર્શાવેલ કાગળને બિંદુ O માંથી પસાર થતી રેખાઓ દ્વારા બનતાં સેંકડો નાના ટુકડામાં કાપવામાં આવે તો દરેક કપાતો ટુકડો, એ લગભગ નાનો ત્રિકોણ હશે અને તેની ઊંચાઈ શંકુની ત્રાંસી(*slant*) ઊંચાઈ l જેટલી હશે.

(iv) હવે, દરેક ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{1}{2}$ × દરેક ત્રિકોણના પાયાની લંબાઈ × l

આથી, પૂરા કાગળનું ક્ષેત્રફળ = બધા જ ત્રિકોણનાં ક્ષેત્રફળનો સરવાળો

$$= \frac{1}{2}b_1 l + \frac{1}{2}b_2 l + \frac{1}{2}b_3 l + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}l\left(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots\right)$$

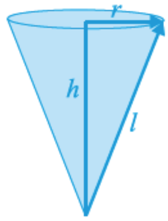
$= \frac{1}{2} \times l \times$ આકૃતિ 13.15(c) ની વક્રસપાટીની પૂર્ણ લંબાઈ

(કેમ કે $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots$ આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે વક્રસપાટીનો ભાગ બનાવે છે.)

પરંતુ, આકૃતિનો વક્રભાગ શંકુના પાયાની પરિમિતિ બનાવે છે અને તે શંકુના પાયાના પરિઘ = $2\pi r$ જેટલો છે. અહીં r શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા છે.

આથી, **શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times l \times 2\pi r = \pi r l$**

અહીં, પાયાની ત્રિજ્યા r અને ત્રાંસી ઊંચાઈ l છે.



આકૃતિ 13.16

નોંધો કે, પાયથાગોરસનું પ્રમેય લગાડતાં $l^2 = r^2 + h^2$ (આકૃતિ 13.16 માં જોઈ શકાય.)

અહીં, h શંકુની ઊંચાઈ છે.

આથી, $l = \sqrt{r^2 + h^2}$

હવે, જો શંકુનો પાયો બંધ હોય, તો r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળાકાર કાગળની પણ જરૂર પડે, તેનું ક્ષેત્રફળ πr^2 થાય.

આથી, **શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ = $\pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r)$**

ઉદાહરણ 4 : જેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 10 સેમી અને પાયાની ત્રિજ્યા 7 સેમી હોય તેવા લંબવૃત્તીય શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = πrl

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 10 \text{ સેમી}^2 = 220 \text{ સેમી}^2$$

ઉદાહરણ 5 : શંકુની ઊંચાઈ 16 સેમી અને પાયાની ત્રિજ્યા 12 સેમી છે. તેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

ઉકેલ : અહીં, $h = 16$ સેમી અને $r = 12$ સેમી

આથી, $l^2 = h^2 + r^2$, પરથી

$$l = \sqrt{16^2 + 12^2} \text{ સેમી} = 20 \text{ સેમી}$$

આથી, વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = πrl

$$= 3.14 \times 12 \times 20 \text{ સેમી}^2$$

$$= 753.6 \text{ સેમી}^2$$

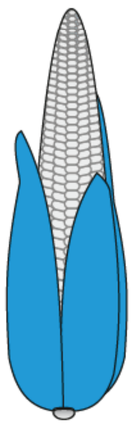
વળી, કુલ પૃષ્ઠફળ = $\pi rl + \pi r^2$

$$= (753.6 + 3.14 \times 12 \times 12) \text{ સેમી}^2$$

$$= (753.6 + 452.16) \text{ સેમી}^2$$

$$= 1205.76 \text{ સેમી}^2$$

ઉદાહરણ 6 : મકાઈના ડોડાનો આકાર લગભગ શંકુ જેવો હોય છે. (જુઓ આકૃતિ 13.17.) તેના સૌથી પહોળા ભાગની ત્રિજ્યા 2.1 સેમી અને લંબાઈ (ઊંચાઈ) 20 સેમી છે. જો ડોડાની પ્રત્યેક 1 સેમી^{2} સપાટી પર આશરે 4 મકાઈના દાણા હોય, તો આખા ડોડા પર કુલ કેટલા દાણા હશે, તે શોધો.


આકૃતિ 13.17

ઉકેલ : મકાઈના દાણા માત્ર ડોડાની વક્રસપાટી પર જ હોવાથી, કુલ મકાઈના દાણા શોધવા આપણે તેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધીશું. આ પ્રશ્નમાં, આપણને મકાઈના ડોડાની ઊંચાઈ આપેલ હોવાથી તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ શોધીશું.

અહીં, $l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2.1)^2 + 20^2}$ સેમી $= \sqrt{404.41}$ સેમી $= 20.11$ સેમી

આથી, મકાઈના ડોડાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$= \pi rl = \frac{22}{7} \times 2.1 \times 20.11$ સેમી^{2} = 132.726 સેમી^{2} = 132.73 સેમી^{2} (લગભગ)

1 સેમી^{2} ડોડાની વક્રસપાટી પર દાણાની સંખ્યા = 4

આથી, આખા ડોડા પર દાણાની સંખ્યા = 132.73 × 4 = 530.92 = 531 (લગભગ)

આથી, મકાઈના ડોડા પર આશરે 531 મકાઈના દાણા હશે.

સ્વાધ્યાય 13.3

જ્યાં અન્ય ઉલ્લેખ ન કરેલ હોય ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. શંકુના પાયાનો વ્યાસ 10.5 સેમી અને તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 10 સેમી છે. તેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
2. જેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 21 મી અને પાયાનો વ્યાસ 24 મી હોય તેવા શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો.
3. શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 308 સેમી^{2} અને તેની ત્રાંસી ઊંચાઈ 14 સેમી છે. આ શંકુની (i) પાયાની ત્રિજ્યા અને (ii) કુલ સપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
4. શંકુ આકારનો તંબુ 10 મી ઊંચો છે અને તેના પાયાની ત્રિજ્યા 24 મી છે. તો,

   (i) તંબુની ત્રાંસી ઊંચાઈ શોધો.

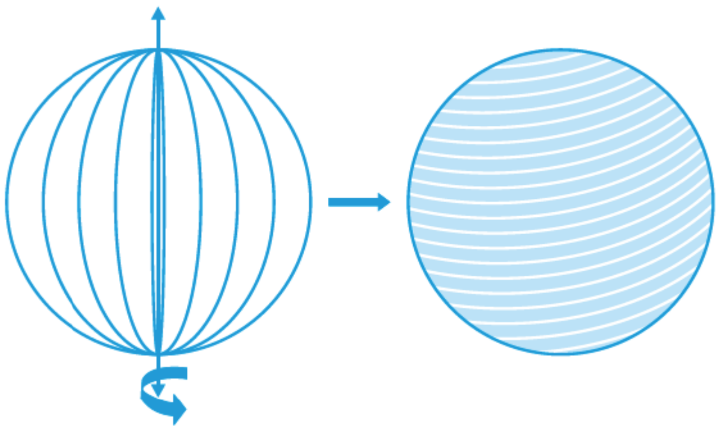
   (ii) 1 મી^{2} ના ₹ 70 લેખે તંબુ બનાવવા માટે વપરાતા કાપડનો કુલ ખર્ચ શોધો.
5. જેની ઊંચાઈ 8મી અને પાયાની ત્રિજ્યા 6 મી હોય તેવા શંકુ આકારના તંબુ બનાવવા માટે 3 મી પહોળી કેટલી તાડપત્રીની જરૂર પડે? માની લો કે સિલાઈના માપ અને કાપકૂપમાં થતા બગાડમાં લગભગ 20 સેમી જેટલી વધારાની તાડપત્રી વપરાય છે. (π = 3.14 લો.)
6. શંકુ આકારના મકબરાની ત્રાંસી ઊંચાઈ અને પાયાનો વ્યાસ અનુક્રમે 25 મી અને 14 મી છે. તેની વક્રસપાટી પર 100 મી^{2} ના ₹ 210 લેખે ચૂનો કરવાનો ખર્ચ શોધો.
7. એક જોકર (વિદૂષક)ની ટોપી લંબવૃત્તીય શંકુ આકારની છે, તેના પાયાની ત્રિજ્યા 7 સેમી અને ઊંચાઈ 24 સેમી છે. આવી 10 ટોપી બનાવવા વપરાતા કાગળનું ક્ષેત્રફળ શોધો.
8. એક બસ સ્ટૉપને રોડના બાકીના ભાગથી જુદો પાડવા ફરી ઉપયોગમાં લઈ શકાય તેવા કાર્ડબૉર્ડથી 50 પોલા શંકુ બનાવ્યા છે. પ્રત્યેક શંકુનો પાયાનો વ્યાસ 40 સેમી અને ઊંચાઈ 1 મી છે. જો પ્રત્યેક શંકુના બહારના ભાગને રંગવાનો ખર્ચ 1 મી^{2} ના ₹ 12 લેખે આવે તો બધા જ શંકુ રંગવાનો કુલ ખર્ચ શોધો.

   (π = 3.14 અને $\sqrt{1.04}$ = 1.02 લો.)

13.5 ગોલકનું પૃષ્ઠફળ

ગોલક *(sphere)* શું છે? શું તે વર્તુળ જેવું જ છે? શું તમે વર્તુળને કાગળ પર દોરી શકો છો? હા, તમે કરી શકો. જેના પરનું પ્રત્યેક બિંદુ નિશ્ચિત બિંદુથી (કે જેને વર્તુળનું કેન્દ્ર કહેવાય.) સમાન અંતરે (કે જેને ત્રિજ્યા કહેવાય.) આવેલ એવી સમતલ પરની બંધ આકૃતિ વર્તુળ કહેવાય છે. હવે વર્તુળાકાર તક્તીના વ્યાસ આસપાસ દોરી વીંટાળી અને જે રીતે આગળના વિભાગમાં ત્રિકોણને ઘુમાવેલ, તેમ ઘુમાવવામાં આવે તો એક નવો નક્કર પદાર્થ બને તે તમે જોઈ શકશો. (આકૃતિ 13.18) તે શું દર્શાવે છે? એક દડો? હા, તેને ગોલક કહેવાય.

જ્યારે વર્તુળને ગોળ ઘુમાવીએ ત્યારે બનતા વર્તુળના કેન્દ્રનું શું થાય તેની તમે કલ્પના કરી શકો? અલબત, તે ગોલકનું કેન્દ્ર બને. આમ, અવકાશમાં નિશ્ચિત બિંદુથી નિશ્ચિત અંતરે આવેલ બિંદુઓથી બનતી ત્રિપરિમાણીય ઘન આકૃતિને *ગોલક* કહે છે. નિશ્ચિત બિંદુને ગોલકનું કેન્દ્ર અને નિશ્ચિત અંતરને તેની *ત્રિજ્યા* કહે છે.



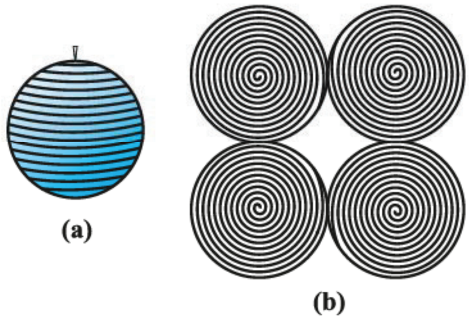
આકૃતિ 13.18

નોંધ : ગોલક એ દડાની વક્રસપાટી જેવું છે. જેની વક્રસપાટી ગોલક હોય એવા ઘન પદાર્થ માટે ઘન ગોલક શબ્દનો ઉપયોગ થાય.

પ્રવૃત્તિ : શું તમે ભમરડાથી રમ્યા છો કે કોઈને તેનાથી રમતા જોયા છે? તમે જાણતા જ હશો કે તેની આસપાસ દોરી કેમ વીંટાળાય છે. હવે, એક રબરનો દડો લઈ તેમાં ખીલી ખોસીએ. ખીલીનો આધાર લઈ દડાની આસપાસ દોરી વીંટાળીએ. જ્યારે ‘સંપૂર્ણ’ દડો ભરાઈ જાય ત્યારે દોરીને તેની જગાએ રાખવા માટે ટાંકણીનો ઉપયોગ કરીએ. જ્યાં સુધી આખો જ દડો દોરીથી ઢંકાઈ ત્યાં સુધી દોરી બાંધવાનું ચાલુ રાખો. [જુઓ આકૃતિ 13.19(a).] દોરીના શરૂઆત અને અંત્યબિંદુ પર નિશાની કરી, દડાની વક્રસપાટી પરની દોરીને હળવેથી કાઢી નાખો.

હવે, તમારા શિક્ષકને આસાનીથી તે ત્રિજ્યા શોધી શકાય તે માટે દડાના વ્યાસના માપન માટે મદદ કરવા કહો. એક કાગળ પર દડાની ત્રિજ્યા જેટલી ત્રિજ્યાવાળાં ચાર વર્તુળ દોરો. હવે દડાને વીંટાળેલ દોરીથી એક પછી એક વર્તુળ ભરવાનું શરૂ કરો.

[જુઓ આકૃતિ 13.19(b).]



આકૃતિ 13.19

આ બધું કરતાં તમને શું મળ્યું ?

ગોલકની વક્રસપાટી ઢાંકવા વપરાયેલ દોરી ગોલક જેટલી જ ત્રિજ્યાવાળાં ચાર વર્તુળોનો પ્રદેશ ઢાંકવા માટે વપરાય છે. આથી આનો અર્થ શું કરીશું? આ દર્શાવે છે કે r ત્રિજ્યાવાળા ગોલકનું પૃષ્ઠફળ

= ચાર વખત r ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ $= 4 \times (\pi r^2)$

આમ, $\boxed{\text{ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ} = \mathbf{4\,\pi\,r^2}}$

r ગોલકની ત્રિજ્યા છે.

તમે ગોલકનાં કેટલાં પૃષ્ઠ જોઈ શકો છો ? માત્ર એક જ, તે વક્રાકાર છે.

હવે, એક નક્કર ગોલક લઈ તેને બરાબર વચ્ચેથી કાપીએ. ગોલકનું શું થાય છે?

હા, તે બે સમાન ભાગમાં વહેંચાય છે. (જુઓ આકૃતિ 13.20.) પ્રત્યેક અડધા ભાગને શું કહેવાય? તેને ***અર્ધગોલક*** (*hemisphere*) કહેવાય. (કેમ કે *hemi* શબ્દનો અર્થ અર્ધ થાય છે.)

આકૃતિ 13.20

અને તેની વક્રસપાટીનું શું ? તેને કેટલાં પૃષ્ઠ હશે? બે! એક વક્ર અને બીજો સપાટ (પાયો).

અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ ગોલકના ક્ષેત્રફળ કરતાં અડધું થશે તે $4\pi r^2$ના $\frac{1}{2}$ ભાગનું હશે.

આથી, $\boxed{\text{અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ} = \mathbf{2\pi r^2}}$

અહીં, અર્ધગોલક જેનો એક ભાગ હોય તેવા ગોલકની ત્રિજ્યા r છે.

આથી, અર્ધગોલકનાં બંને પૃષ્ઠો લેતાં, તેનું કુલ પૃષ્ઠફળ $2\pi r^2 + \pi r^2$ થાય.

આમ, $\boxed{\text{અર્ધગોલકની કુલ સપાટીનું પૃષ્ઠફળ} = \mathbf{3\pi r^2}}$

ઉદાહરણ 7 : 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : 7 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$ સેમી^{2} = 616 સેમી^{2}

ઉદાહરણ 8 : 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં અર્ધગોલકની (i) વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ (ii) કુલ સપાટીનું પૃષ્ઠફળ શોધો.

ઉકેલ : 21 સેમી ત્રિજ્યાવાળાં અર્ધગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi r^2 = 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ સેમી^{2} = 2772 સેમી^{2}

(ii) અર્ધગોલકનું કુલ પૃષ્ઠફળ $3\pi r^2 = 3 \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$ સેમી^{2} = 4158 સેમી^{2}

ઉદાહરણ 9 : સરકસમાં કામ કરતો મોટરસાઇકલ-સવાર 7 મી વ્યાસવાળા પોલા ગોલકમાં પ્રદર્શન કરે છે. મોટરસાઇકલ-સવારને ચલાવવા મળતી જગ્યાનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : ગોલકનો વ્યાસ = 7 મી. આથી, તેની ત્રિજ્યા 3.5 મી થાય. આથી, મોટરસાઇકલ-સવારને ચલાવવા મળતી જગ્યા

= ગોલકની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

$$= 4\pi r^2 = 4 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \text{ મી}^2$$
$$= 154 \text{ મી}^2$$

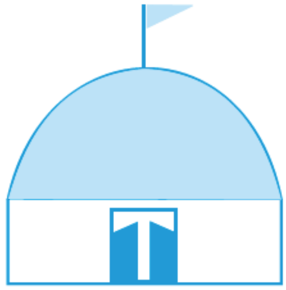
ઉદાહરણ 10 : એક મકાનના અર્ધગોળાકાર ઘુમ્મટને રંગ કરવાનો છે. (જુઓ આકૃતિ 13.21.) જો અર્ધગોળાકાર ઘુમ્મટનો પરિઘ 17.6 મી હોય, તો તેને 100સેમી^{2} ના ₹ 5 લેખે રંગવાનો ખર્ચ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, આપણે માત્ર ઘુમ્મટની વક્રસપાટી પર રંગ કરવો છે. તેથી આપણે અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધીશું.

હવે, ઘુમ્મટનો પરિઘ = 17.6 મી

તેથી, $17.6 = 2\pi r$

તેથી, ઘુમ્મટની ત્રિજ્યા = $17.6 \times \frac{7}{2 \times 22}$ મી = 2.8 મી



આકૃતિ 13.21

ઘુમ્મટની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi r^2$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 2.8 \times 2.8$ મી^{2}

$= 49.28$ મી^{2}

હવે, 100 સેમી^{2} રંગવાનો ખર્ચ ₹ 5.

તો, 1 મી^{2} રંગવાનો ખર્ચ ₹ 500.

આખા અર્ધગોળાકાર ઘુમ્મટને રંગવાનો ખર્ચ = ₹ 500 × 49.28

= ₹ 24,640

સ્વાધ્યાય 13.4

જ્યાં ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય, ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. આપેલ ત્રિજ્યા પરથી ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો :

(i) 10.5 સેમી (ii) 5.6 સેમી (iii) 14 સેમી

2. આપેલ વ્યાસ પરથી ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો :

(i) 14 સેમી (ii) 21 સેમી (iii) 3.5 મી

3. 10 સેમી ત્રિજ્યાવાળા અર્ધગોળાનું કુલ પૃષ્ઠફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

4. એક ગોળાકાર ફુગ્ગામાં હવા ભરવાથી તેની ત્રિજ્યા 7 સેમીથી વધીને 14 સેમી થાય છે. આ બંને પરિસ્થિતિમાં ગોળાકાર ફુગ્ગાની વક્રસપાટીનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો.

5. તાંબાના અર્ધગોળાકાર વાટકાની અંદરનો વ્યાસ 10.5 સેમી છે. તેની અંદર સપાટીને 100સેમી^{2} ના ₹ 16 લેખે કલાઈ કરવાનો ખર્ચ કેટલો થાય?

6. જો ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 154 સેમી^{2} હોય, તો તેની ત્રિજ્યા શોધો.

7. જો ચંદ્રનો વ્યાસ પૃથ્વીના વ્યાસના આશરે ચોથા ભાગ જેટલો હોય, તો તેમની વક્રસપાટીઓનાં ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર શોધો.

8. સ્ટીલના અર્ધગોળાકાર વાટકાની જાડાઈ 0.25 સેમી છે. જો વાટકાની અંદરની સપાટીની ત્રિજ્યા 5 સેમી હોય, તો વાટકાની બહારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

9. એક લંબવૃત્તીય નળાકારમાં બંધબેસે તે રીતે r ત્રિજ્યાવાળો એક ગોળો મૂકેલ છે. (જુઓ આકૃતિ 13.22.) તો,

(i) ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

(ii) નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

(iii) (i) અને (ii) માં મળતાં ક્ષેત્રફળોનો ગુણોત્તર શોધો.


આકૃતિ 13.22

13.6 લંબઘનનું ઘનફળ

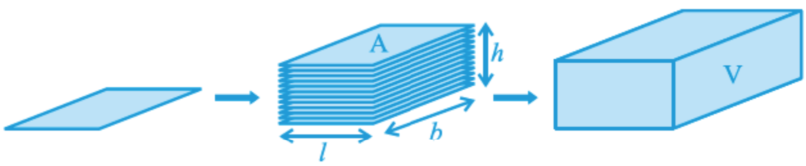
આપણે અગાઉનાં ધોરણોમાં અમુક ઘન પદાર્થોનું ઘનફળ શોધતાં શીખી ગયાં છીએ. આપણે જાણીએ છીએ કે, ઘન પદાર્થ અવકાશમાં જગ્યા રોકે છે. આ રોકેલી જગ્યાના માપને તે ઘન પદાર્થનું ***ઘનફળ*** કહેવાય.

નોંધ : જો ઘન પદાર્થ નક્કર હોય તો તે ઘન પદાર્થ દ્વારા અવકાશમાં રોકાયેલ જગ્યા માપી શકાય છે અને તે રોકેલી જગ્યાના માપને તેનું ઘનફળ કહેવાય.

હવે, જો ઘન પદાર્થ પોલો હોય તો તે અંદરથી ખાલી હોય છે અને તે ખાલી જગ્યા વાયુ કે પ્રવાહીથી ભરવામાં આવે, તો તે વાસણ જેવો આકાર ધારણ કરે છે. વાસણમાં ભરવામાં આવેલ પદાર્થના ઘનફળને *વાસણની ક્ષમતા* (*capacity of the container*) કહે છે. *ટૂંકમાં પદાર્થે રોકેલી જગ્યાના માપને તે પદાર્થનું ઘનફળ કહેવાય અને પદાર્થની ક્ષમતા તે પદાર્થની અંદરની જગ્યામાં સમાવી શકાતા પદાર્થનું ઘનફળ.*

હવે, જો આપણે લંબઘનના ઘનફળની વાત કરીએ તો, આપણે લંબઘન દ્વારા અવકાશમાં રોકાયેલી જગ્યાના માપની વાત કરીએ છીએ.

વધુમાં આપણે ક્ષેત્રફળ અને ઘનફળ કોઈક વિસ્તારનું માપ દર્શાવવા માટે જોઈએ છે. પરંતુ વાસ્તવમાં આપણે વર્તુળાકારનું ક્ષેત્રફળ, લંબઘનાકારનું ઘનફળ અથવા ગોળાકારનું ઘનફળ વગેરે શોધીએ છીએ, પરંતુ સરળતા ખાતર આપણે વર્તુળનું ક્ષેત્રફળ, લંબઘનનું ઘનફળ અથવા ગોળાનું ઘનફળ તેવો ઉલ્લેખ કરીએ છીએ. જોકે ઉલ્લેખ કરેલ આકાર માત્ર તેની સીમા દર્શાવે છે.



આકૃતિ 13.23

આકૃતિ 13.23 જુઓ. ધારો કે આકૃતિમાં દર્શાવેલ લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ A છે. આવી લંબચોરસ તક્તીઓને વ્યવસ્થિત થપ્પીમાં ગોઠવો. તેની ઊંચાઈ h અને લંબઘનના ઘનફળને V લઈએ. શું તમે કહી શકશો કે V, A અને H વચ્ચે કેવો સંબંધ છે?

પ્રત્યેક સમતલીય લંબચોરસ સપાટી દ્વારા રોકાયેલ જગ્યાનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ = લંબઘન દ્વારા અવકાશમાં રોકાયેલ જગ્યાનું માપ.

તેથી, આપણે $A \times h = V$ મળે.

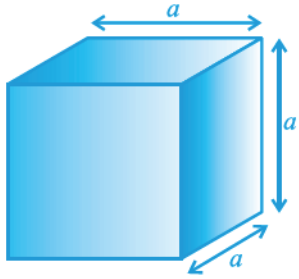
લંબઘનનું ઘનફળ = પાયાનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ = લંબાઈ × પહોળાઈ × ઊંચાઈ

અથવા $l \times b \times h$, જ્યાં l, b અને h અનુક્રમે લંબઘનની લંબાઈ, પહોળાઈ, ઊંચાઈ છે.

નોંધ : જ્યારે આપણે અવકાશમાં આવેલ પ્રદેશનું માપ કાઢીએ, એટલે કે ઘન પદાર્થે રોકેલી જગા ત્યારે તે વિસ્તારમાં એક એકમ લંબાઈ ધરાવતા સમઘનની મહત્તમ કેટલી સંખ્યા સમાવિષ્ટ કરી શકાય તે ગણીએ છીએ. તેથી ઘનફળના માપન માટેનો એકમ ઘન એકમ છે.

ફરીથી, જો સમઘનની બાજુની લંબાઈ a હોય તો (જુઓ આકૃતિ 13.24.)

સમઘનનું ઘનફળ = ધારની લંબાઈ × ધારની લંબાઈ × ધારની લંબાઈ = $a \times a \times a = a^3$



આકૃતિ 13.24

જો સમઘનની બાજુની લંબાઈ 12 સેમી હોય,

તો સમઘનનું ઘનફળ = 12 × 12 × 12 સેમી = 1728 (સેમી)^3

તમે યાદ કરો કે તમે આ સૂત્ર અગાઉના ધોરણમાં શીખી ગયાં છો. ચલો હવે આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો દ્વારા આ સૂત્રનો ઉપયોગ સમજીએ.

ઉદાહરણ 11 : એક ખુલ્લા મેદાનની એક બાજુથી બીજી બાજુ સુધી 10 મી લંબાઈની એક દીવાલ બનાવવી છે. આ દીવાલની ઊંચાઈ 4 મી અને દીવાલની જાડાઈ 24 સેમી છે. હવે, જો આ દીવાલ બનાવવા 24 સેમી × 12 સેમી × 8 સેમી માપની ઇંટો વાપરવાની હોય, તો આવી કેટલી ઇંટોની જરૂર પડશે?

ઉકેલ : અહીં, આપણે દીવાલ દ્વારા અવકાશમાં રોકેલી જગ્યાના માપને ઇંટો દ્વારા ભરવું છે. તેથી આપણે દીવાલનું ઘનફળ શોધવું પડશે. દીવાલનું ઘનફળ એ બીજું કશું નહિ પણ લંબઘનનું ઘનફળ થશે.

લંબાઈ = 10 મી = 1000 સેમી

જાડાઈ = 24 સેમી

ઊંચાઈ = 4 મી = 400 સેમી

તેથી, દીવાલનું ઘનફળ = લંબાઈ × જાડાઈ × ઊંચાઈ

= 1000 × 24 × 400 સેમી^{3}

હવે, પ્રત્યેક ઇંટ એ લંબઘન છે. તેની લંબાઈ = 24 સેમી, પહોળાઈ = 12 સેમી અને ઊંચાઈ = 8 સેમી

તેથી, એક ઈંટનું ઘનફળ = લંબાઈ × પહોળાઈ × ઊંચાઈ = 24 × 12 × 8 સેમી^{3}

$$\text{તેથી, જરૂરી ઇંટોની સંખ્યા} = \frac{\text{દીવાલનું ઘનફળ}}{\text{એક ઇંટનું ઘનફળ}}$$

$$= \frac{1000 \times 24 \times 400}{24 \times 12 \times 8}$$

$$= 4166.6$$

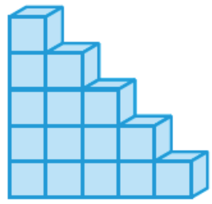
આમ, દીવાલ બનાવવા માટે 4167 ઇંટોની જરૂર પડશે.

ઉદાહરણ 12 : એક બાળક ઘન આકારના બ્લૉકથી રમે છે. તે આકૃતિ 13.25 માં દર્શાવ્યા મુજબનું માળખું ઘન આકારના બ્લૉકથી બનાવે છે. જો દરેક બ્લૉકની બાજુની લંબાઈ 3 સેમી હોય, તો બાળકે બનાવેલ માળખાનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : દરેક ઘનનું ઘનફળ = લંબાઈ × લંબાઈ × લંબાઈ = 3 × 3 × 3 સેમી^{3} = 27 સેમી^{3}

અહીં, માળખામાં ઘનની સંખ્યા = 15

તેથી માળખાનું ઘનફળ = 27 × 15 સેમી^{3} = 405 સેમી^{3}



આકૃતિ 13.25

સ્વાધ્યાય 13.5

1. દીવાસળીની એક પેટીનું માપ 4 સેમી × 2.5 સેમી × 1.5 સેમી છે, તો આવી 12 પેટી સમાય તેવી પેટીનું ઘનફળ કેટલું થાય ?
2. એક લંબઘન પાણીની ટાંકી 6 મી લાંબી, 5 મી પહોળી અને 4.5 મી ઊંડી છે. આ ટાંકીમાં કેટલા લિટર પાણી સમાઈ શકે ? (1 મી^{3} = 1000 લીટર)
3. એક લંબઘન વાસણ 10 મી લાંબું અને 8 મી પહોળું છે. તેમાં 380 મી^{3} પ્રવાહી સમાઈ શકે, તો તેની ઊંચાઈ કેટલી?
4. 8 મી લંબાઈ, 6 મી પહોળાઈ અને 3 મી ઊંડાઇનો એક લંબઘન ખાડો ખોદવો છે. 1 મી^{3} ના ₹ 30 લેખે ખાડો ખોદવાનો ખર્ચ કેટલો થાય?
5. એક લંબઘન પાણીની ટાંકીની ક્ષમતા 50000 લિટર છે. જો તેની લંબાઈ અને ઊંડાઈ અનુક્રમે 2.5 મી અને 10મી હોય, તો તેની પહોળાઈ શોધો.
6. એક ગામમાં 4000 લોકો રહે છે. દરેક વ્યક્તિની એક દિવસની જરૂરિયાત 150 લિટર પાણીની છે. આ ગામમાં 20 મી × 15 મી × 6 મી માપની ટાંકી છે. આ ટાંકીનું પાણી ગામના લોકોને કેટલા દિવસ ચાલે ?
7. એક ગોદામનું માપ 40 મી × 25 મી × 15 મી છે. આ ગોદામમાં 1.5 મી × 1.25 મી × 0.5 મી માપનાં કેટલાં લાકડાંનાં ખોખાં સમાય?
8. 12 સેમી લંબાઈવાળા નક્કર ઘન પદાર્થને સરખા ઘનફળવાળા 8 ઘનમાં કાપવામાં આવે છે, તો નવા બનેલ ઘનની લંબાઈ કેટલી હશે? તેમના પૃષ્ઠફળનો ગુણોત્તર શોધો.
9. 3 મી ઊંડાઈવાળી અને 40 મી પહોળાઈવાળી એક નદી 2 કિમી/કલાકની ઝડપથી વહે છે તો તે 1 મિનિટમાં કેટલું પાણી સમુદ્રમાં ઠાલવશે ?

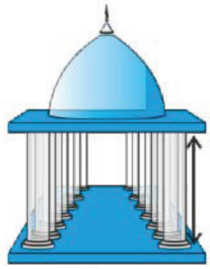
13.7 નળાકારનું ઘનફળ

જેવી રીતે સમાન લંબચોરસને ગોઠવીને લંબઘન બનાવાય, તેવી રીતે સમાન માપનાં વર્તુળોને ગોઠવીને થપ્પી કરી લંબવૃત્તીય નળાકાર બનાવી શકાય. હવે જે દલીલની મદદથી આપણે લંબઘનનું ઘનફળ મેળવ્યું તે જ દલીલ મુજબ નળાકારનું ઘનફળ = પાયાનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ = વર્તુળાકાર પાયાનું ક્ષેત્રફળ × ઊંચાઈ = $\pi r^2 h$

આમ, $\boxed{\text{નળાકારનું ઘનફળ} = \pi r^2 h}$

આ સૂત્રમાં પાયાની ત્રિજ્યા r છે તથા નળાકારની ઊંચાઈ h છે.

ઉદાહરણ 13 : એક મંદિરના થાંભલાઓ નળાકાર છે. (જુઓ આકૃતિ 13.26) જો પ્રત્યેક થાંભલાનો પાયો 20 સેમી ત્રિજ્યાવાળું વર્તુળ અને ઊંચાઈ 10 મીટર હોય, તો આવા 14 થાંભલાઓમાં કોંક્રીટનું કેટલું મિશ્રણ જોઈએ?



આકૃતિ 13.26

ઉકેલ : થાંભલાઓ બનાવવા કૉંક્રીટના મિશ્રણનો ઉપયોગ કરવાનો હોવાથી, થાંભલાઓ જેટલી જગ્યા રોકે, તેટલું સિમેન્ટ કૉંક્રીટનું મિશ્રણ જોઈએ. માટે અહીં, આપણે નળાકારનું ઘનફળ શોધીશું.

નળાકાર થાંભલાની ત્રિજ્યા = 20 સેમી

નળાકાર થાંભલાની ઊંચાઈ = 10 મી = 1000 સેમી

તેથી, દરેક નળાકારનું ઘનફળ $= \pi r^2 h$

$= \frac{22}{7} \times 20 \times 20 \times 1000$ સેમી^{3}

$= \frac{8800000}{7}$ સેમી^{3}

$= \frac{8.8}{7}$ મી^{3} (કારણ કે 1000000 સેમી^{3} = 1 મી^{3})

14 થાંભલાનું ઘનફળ = દરેક નળાકારનું ઘનફળ × 14

$= \frac{8.8}{7} \times 14$ મી^{3}

$= 17.6$ મી^{3}

આમ, 14 થાંભલાઓ માટે 17.6 મી^{3} સિમેન્ટ-કૉંક્રીટનું મિશ્રણ જોઈએ.

ઉદાહરણ 14 : રમજાનના મેળામાં એક દુકાનદારે ખાણીપીણીની દુકાનમાં 15 સેમી ત્રિજ્યાવાળા એક નળાકાર વાસણમાં 32 સેમી ઊંચાઈ સુધી નારંગીનો રસ ભરેલો છે. આ રસ તે 3 સેમી ત્રિજ્યાવાળા નળાકાર પ્યાલાઓમાં 8 સેમી ઊંચાઈ સુધી ભરે છે. (જુઓ આકૃતિ 13.27.) તે ₹ 15 પ્રતિ પ્યાલાના ભાવે તેનું વેચાણ કરે છે. જો દુકાનદાર બધો રસ વેચી દે તો તેને કેટલા રૂપિયા મળે?

આકૃતિ 13.27

ઉકેલ : રસ ભરેલા વાસણનું ઘનફળ = નળાકાર વાસણનું ઘનફળ

$= \pi R^2 H$ (R અને H એ અનુક્રમે નળાકાર વાસણની ત્રિજ્યા અને ઊંચાઈ છે.)

$= \pi \times 15 \times 15 \times 32$ સેમી^{3}

એ જ રીતે, દરેક પ્યાલામાં રહેલા રસનું ઘનફળ $= \pi r^2 h$ (r અને h એ અનુક્રમે દરેક પ્યાલાની ત્રિજ્યા અને ઊંચાઈ છે.)

$= \pi \times 3 \times 3 \times 8$ સેમી^{3}

આમ, વેચાતા રસના પ્યાલાની કુલ સંખ્યા $= \dfrac{\text{વાસણનું ઘનફળ}}{\text{દરેક પ્યાલાનું ઘનફળ}}$

$$= \frac{\pi \times 15 \times 15 \times 32}{\pi \times 3 \times 3 \times 8}$$

$$= 100$$

તેથી, દુકાનદારને મળતી કુલ રકમ $=$ ₹ 15×100

$=$ ₹ 1500

સ્વાધ્યાય 13.6

જ્યાં ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય, ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. નળાકાર વાસણના પાયાનો પરિઘ 132 સેમી અને ઊંચાઈ 25 સેમી છે. તેમાં કેટલાં લિટર પાણી સમાય? (1000 સેમી^{3} = 1 લિટર)

2. એક નળાકાર લાકડાના પાઇપનો અંદરનો વ્યાસ 24 સેમી અને તેનો બહારનો વ્યાસ 28 સેમી છે. પાઇપની લંબાઇ 35 સેમી છે. જો 1 સેમી^{3} લાકડાનું દળ 0.6 ગ્રામ હોય તે પાઇપનું દળ શોધો.

3. એક ઠંડું પીણું બે પ્રકારનાં પાત્રોમાં મળે છે : (i) જેની લંબાઈ 5 સેમી, પહોળાઈ 4 સેમી અને ઊંચાઈ 15 સેમી છે એવું એક લંબચોરસ પાયાવાળું પતરાનું પાત્ર. (ii) જેના વર્તુળાકાર પાયાનો વ્યાસ 7 સેમી અને ઊંચાઈ 10 સેમી એવું પ્લાસ્ટિકનું નળાકાર પાત્ર. કયા પાત્રની ક્ષમતા વધુ છે ? કેટલી ?

4. એક નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 94.2 સેમી^{2} અને તેની ઊંચાઈ 5 સેમી હોય તો (i) તેની પાયાની ત્રિજ્યા અને (ii) તેનું ઘનફળ શોધો. ($\pi = 3.14$ લો.)

5. 10 મીટર ઊંડા એક નળાકાર વાસણની અંદરની સપાટીને રંગવાનો ખર્ચ ₹ 2200 થાય છે. જો રંગવાનો ખર્ચ 1 મી^{2} ના ₹ 20 હોય, તો

   (i) વાસણની અંદરની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ

   (ii) પાયાની ત્રિજ્યા

   (iii) વાસણની ક્ષમતા શોધો.

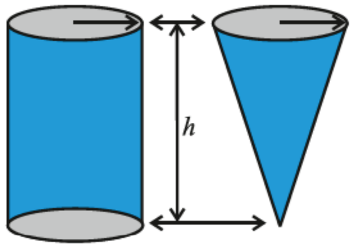
6. 1 મી ઊંચાઈવાળા બંધ નળાકાર વાસણની ક્ષમતા 15.4 લિટર છે, તો તે બનાવવા કેટલા ચોરસ મીટર ધાતુના પતરાની જરૂર પડશે ?

7. લાકડાના નળાકારમાં નક્કર ગ્રેફાઈટનો નળાકાર ચુસ્ત રીતે બેસે તે રીતે એક પેન્સિલ બનાવી છે. પેન્સિલનો વ્યાસ 7 મીમી એને ગ્રેફાઈટનો વ્યાસ 1 મિમી છે. જો પેન્સિલની લંબાઈ 14 સેમી હોય, તો લાકડાનું અને ગ્રેફાઈટનું ઘનફળ શોધો.

8. એક હોસ્પીટલમાં દર્દીઓને 7 સેમી વ્યાસવાળા નળાકાર પાત્રમાં સુપ આપવામાં આવે છે. જો સુપ 4 સેમી ઊંચાઈ સુધી ભરવામાં આવતું હોય, તો દવાખાનામાં રોજ 250 દર્દીઓને આપવા માટે કેટલું સુપ બનાવવું પડે ?

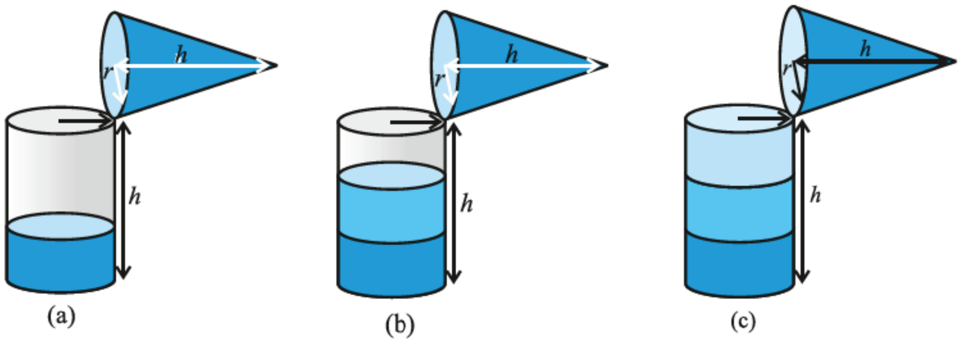
13.8 લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ

તમે આકૃતિ 13.28 માં જોઈ શકો છો કે લંબવૃત્તીય નળાકાર અને લંબવૃત્તીય શંકુના પાયાની ત્રિજ્યા સમાન છે અને તેમની ઊંચાઈ પણ સમાન છે.



આકૃતિ 13.28

પ્રવૃત્તિ : સમાન પાયાની ત્રિજ્યા અને સમાન ઊંચાઈ ધરાવતા પોલા નળાકાર અને પોલા શંકુ બનાવવાનો પ્રયત્ન કરો. (જુઓ આકૃતિ 13.28.) આપણે આના ઉપયોગથી એક પ્રયોગ કરીશું. તેના દ્વારા આપણે લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ શું થાય તે પ્રાયોગિક રીતે જોઈ શકીશું.



આકૃતિ 13.29

ચાલો આપણે શરૂઆત કરીએ.

આપણે પહેલા શંકુને રેતીથી છલોછલ ભરી દઈશું. ત્યાર બાદ તેને નળાકાર પાત્રમાં પૂરેપૂરો ખાલી કરીશું. આપણે જોઈશું કે તે રેતીથી નળાકાર પાત્ર થોડાક ભાગ સુધી જ ભરાશે. [જુઓ આકૃતિ 13.29(a).]

હવે, ફરી શંકુને રેતીથી છલોછલ ભરી અને નળાકારમાં ખાલી કરો. આપણે જોઈ શકીશું કે નળાકાર હજી પણ પૂરો ભરાયો નથી. [જુઓ આકૃતિ 13.29(b).]

હવે, જયારે શંકુને ત્રીજી વખત રેતીથી ભરી નળાકારમાં ખાલી કરતાં જોઈશું કે નળાકાર રેતીથી છલોછલ ભરાઈ જશે. [જુઓ આકૃતિ 13.29(c).]

આ પરથી આપણે તારવી શકીએ કે, પાયાની ત્રિજ્યા સમાન હોય અને ઊંચાઈ સમાન હોય તેવા નળાકાર અને શંકુ માટે, ત્રણ વખત શંકુનું ઘનફળ એ નળાકારના ઘનફળ જેટલું થાય. તેનો અર્થ એવો થાય કે, શંકુનું ઘનફળ એ નળાકારના ઘનફળના ત્રીજા ભાગ જેટલું થાય.

આમ, પાયાની ત્રિજ્યા r અને શંકુની ઊંચાઈ h વાળા

$$\boxed{\text{શંકુનું ઘનફળ} = \frac{1}{3}\pi r^2 h}$$

ઉદાહરણ 15 : એક શંકુની ઊંચાઈ અને ત્રાંસી ઊંચાઈ અનુક્રમે 21 સેમી અને 28 સેમી હોય, તો તેનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : $l^2 = r^2 + h^2$ પરથી,

$$r = \sqrt{l^2 - h^2} = \sqrt{28^2 - 21^2} \text{ સેમી} = 7\sqrt{7} \text{ સેમી}$$

શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7\sqrt{7} \times 7\sqrt{7} \times 21$ સેમી^{3} = 7546 સેમી^{3}

ઉદાહરણ 16 : મોનીકા પાસે 551 મી^{2} ક્ષેત્રફળવાળો કૅનવાસનો ટુકડો છે. તે ટુકડાનો ઉપયોગ 7 મી પાયાની ત્રિજ્યાવાળો શંકુ આકારનો તંબુ બનાવવા માટે કરે છે. ટાંકા લેવામાં અને કાપવામાં 1 મી^{2} જેટલું કૅનવાસ બગડે છે. તે તંબુનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, કૅનવાસ વપરાય તેનું ક્ષેત્રફળ = 551 મી^{2} અને બગાડમાં જતા કૅનવાસનું, ક્ષેત્રફળ 1 મી^{2} છે. તેથી તંબુ બનાવવા માટે મળતા કૅનવાસનું ક્ષેત્રફળ (551 – 1) મી^{2} = 550 મી^{2}.

તેથી, તંબુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = 550 મી^{2} અને જરૂરી તંબુના પાયાની ત્રિજ્યા = 7 મી

અહીં, નોંધીશું કે તંબુને ફક્ત વક્રસપાટી છે, (તંબુના પાયાના ભાગમાં કૅનવાસ નથી !)

તંબુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ = 550 મી^{2}

$$\therefore \quad \pi r l = 550$$

$$\therefore \quad \frac{22}{7} \times 7 \times l = 550$$

$$\therefore \quad l = \frac{550}{22} \text{ મી} = 25 \text{ મી}$$

હવે, $l^2 = r^2 + h^2$

$$h = \sqrt{l^2 - r^2} = \sqrt{25^2 - 7^2} \text{ મી} = \sqrt{625 - 49} \text{ મી} = \sqrt{576} \text{ મી} = 24 \text{ મી}$$

આથી, શંકુ આકારના તંબુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24$ મી^{3} = 1232 મી^{3}

સ્વાધ્યાય 13.7

જ્યાં ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય, ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. નીચેના લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ શોધો :

(i) ત્રિજ્યા 6 સેમી, ઊંચાઈ 7 સેમી (ii) ત્રિજ્યા 3.5 સેમી, ઊંચાઈ 12 સેમી

2. નીચેના શંકુ આકારના વાસણની ક્ષમતા લિટરમાં શોધો :

(i) ત્રિજ્યા 7 સેમી, ત્રાંસી ઊંચાઈ 25 સેમી (ii) ઊંચાઈ 12 સેમી, ત્રાંસી ઊંચાઈ 13 સેમી

3. એક શંકુની ઊંચાઈ 15 સેમી છે. જો તેનું ઘનફળ 1570 સેમી^{3} હોય, તો તેના પાયાની ત્રિજ્યા શોધો. (π = 3.14 લો.)

4. એક લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ 48 π સેમી^{3} છે. તેની ઊંચાઈ 9 સેમી હોય, તો તેના પાયાનો વ્યાસ શોધો.

5. એક શંકુ આકારના ખાડાના ઉપરના ભાગનો વ્યાસ 3.5 મી અને ઊંડાઈ 12 મી છે. તેની ક્ષમતા (કિલોલિટરમાં) કેટલી થાય ?

6. લંબવૃત્તીય શંકુનું ઘનફળ 9856 સેમી^{3} છે. તેના પાયાનો વ્યાસ 28 સેમી છે. તો,

   (i) શંકુની ઊંચાઈ (ii) શંકુની ત્રાંસી ઊંચાઈ અને (iii) શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

7. કાટકોણ ત્રિકોણ ABC ની બાજુનાં માપ 5 સેમી, 12 સેમી અને 13 સેમી છે. જો તેને 12 સેમી લંબાઈવાળી બાજુની આસપાસ પરિભ્રમણ કરવામાં આવે, તો તેથી બનતા શંકુનું ઘનફળ શોધો.

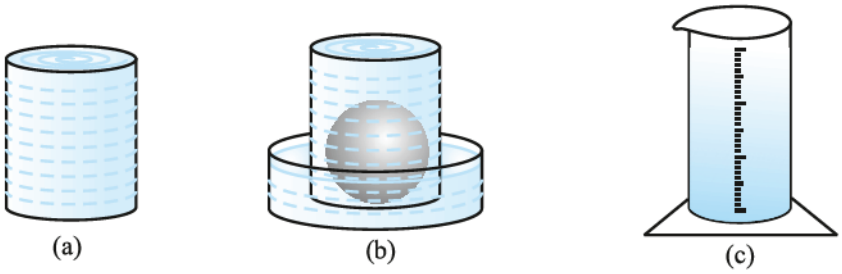
8. ઉપરનાં પ્રશ્ન 7 માં આપેલ ત્રિકોણ ABC નું 5 સેમી લંબાઈવાળી બાજુની આસપાસ પરિભ્રમણ કરવામાં આવે છે, તો આ રીતે બનતા ઘનનું ઘનફળ શોધો તથા પ્રશ્ન 7 અને 8 માં બનતા શંકુના ઘનફળનો ગુણોત્તર શોધો.

9. એક શંકુ આકારના ઘઉંના ઢગલાના પાયાનો વ્યાસ 10.5 મી અને ઊંચાઈ 3 મી છે. તેનું ઘનફળ શોધો. આ ઢગલાને વરસાદથી બચાવવા કૅનવાસથી ઢાંકવામાં આવે છે, તો આ માટે જરૂરી કૅનવાસનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

13.9 ગોળાનું ઘનફળ

હવે, આપણે ગોળાનું ઘનફળ કેવી રીતે માપવું તે જોઈએ. પહેલા બે કે ત્રણ જુદી જુદી ત્રિજ્યાવાળા ગોળા લો અને એક એવું મોટું પાત્ર લો કે જેમાં આ દરેક ગોળાઓ એકીસાથે સમાઈ જાય. હવે એક એવું મોટું જળપાત્ર લો કે જેમાં તમે ઉપરોક્ત પાત્રને મૂકી શકો. પછી, પાત્રને પૂરેપુરું પાણીથી ભરી દો. [આકૃતિ. 13.30(a).]

હવે કાળજીપૂર્વક એક ગોળાને પાણી ભરેલ પાત્રમાં મૂકો. આથી થોડું પાણી જળપાત્રમાં ઊભરાઈને આવશે. [આકૃતિ 13.30(b).] આ જળપાત્રમાં આવેલા પાણીને એક અંકિત નળાકારમાં કાળજીપૂર્વક લો અને તે પાણીનું કદ માપો, [આકૃતિ 13.30(c)]. ધારો કે પાણી ભરેલા પાત્રમાં મૂકેલ ગોળાની ત્રિજ્યા r છે. (તમે ગોળની ત્રિજ્યા તેનો વ્યાસ માપીને શોધી શકો.) ત્યાર બાદ $\frac{4}{3}\pi r^3$નું મૂલ્ય મેળવો. શું આ મૂલ્ય અંકિત નળાકારમાં રહેલા પાણીનાં કદ જેટલું છે?



આકૃતિ 13.30

ઉપર્યુક્ત પ્રક્રિયા બીજા કદના ગોળા માટે ફરીથી કરો. ગોળાની ત્રિજ્યા R માપો અને $\frac{4}{3}\pi R^3$ ની કિંમત શોધો. ફરી એક વખત આ કિંમત ગોળા દ્વારા વિસ્થાપિત કરેલા લગભગ પાણીના કદ (ઉભરાયેલા પાણીના કદ) જેટલી લગભગ થશે. આ શું દર્શાવે છે? આપણને ખબર છે કે ગોળાનું કદ, ગોળા દ્વારા વિસ્થાપિત પાણીના કદ જેટલું છે. આ પ્રયોગનું પુનરાવર્તન જુદી જુદી ત્રિજ્યાના ગોળા વાપરી કરતાં આ જ પરિણામ મળે છે. એટલે કે ગોળાનું કદ $\frac{4}{3}\pi$ × ત્રિજ્યાના ઘન જેટલું થાય છે. આ પરથી,

$$\boxed{\text{ગોળાનું ઘનફળ} = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

r ગોળાની ત્રિજ્યા છે. ભવિષ્યમાં તમે ઉપરના વર્ગોમાં આ સૂત્ર સાબિત પણ કરી શકશો. પણ આ તબક્કે આપણે તેને સ્વીકારીને ચાલીશું.

હવે અર્ધગોળો ગોળાનો અડધો ભાગ છે. તો વિચારો કે અર્ધગોળાનું ઘનફળ કેટલું થાય?

હા, તે $\frac{4}{3}\pi r^3$ નો $\frac{1}{2}$ એટલે કે $\frac{2}{3}\pi r^3$ છે.

તેથી, અર્ધગોળાનું ઘનફળ $= \mathbf{\frac{2}{3}\pi r^3}$

અહીં, r અર્ધગોળાની ત્રિજ્યા છે. હવે આપણે આ સૂત્રનો ઉપયોગ દર્શાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણો લઈશું.

ઉદાહરણ 17 : 11.2 સેમી ત્રિજ્યાવાળા ગોળાનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 11.2 \times 11.2 \times 11.2$ સેમી^{3}

$= 5887.32$ સેમી^{3}

ઉદાહરણ 18 : ગોળાફેંકમાં વપરાતા ધાતુના ગોળાની ત્રિજ્યા 4.9 સેમી છે. જો વપરાયેલ ધાતુની ઘનતા 7.8 ગ્રામ/સેમી^{3}, હોય તો તેનું દળ શોધો.

ઉકેલ : ગોળાફેંકમાં વપરાતો ગોળો ધાતુનો નક્કર ગોળો હોવાથી, તેનું દળ એ તેના ઘનફળ અને ઘનતાનો ગુણાકાર થશે. તેથી આપણે ગોળાનું ઘનફળ શોધવું પડશે.

હવે, ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 4.9 \times 4.9 \times 4.9$ સેમી^{3}

$= 493$ સેમી^{3} (આશરે)

વળી, 1 સેમી^{3} ધાતુની ઘનતા 7.8 ગ્રામ હોવાથી,

ગોળાનું દળ $= 7.8 \times 493$ ગ્રામ $= 3845.44$ ગ્રામ $= 3.85$ કિગ્રા (આશરે)

ઉદાહરણ 19 : એક અર્ધગોળાકાર વાસણની ત્રિજ્યા 3.5 સેમી છે, તો તેમાં સમાઈ શકતા પાણીનું ઘનફળ શોધો.

ઉકેલ : અર્ધગોળાકાર વાસણમાં સમાઈ શકતા પાણીનું ઘનફળ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5$ સેમી^{3} $= 89.8$ સેમી^{3}

સ્વાધ્યાય 13.8

જ્યાં ઉલ્લેખ ન કર્યો હોય, ત્યાં $\pi = \frac{22}{7}$ લો.

1. આપેલ ત્રિજ્યા પરથી ગોળાનું ઘનફળ શોધો :

(i) 7 સેમી (ii) 0.63 મી

2. આપેલ વ્યાસવાળા નક્કર ગોળા દ્વારા વિસ્થાપિત થતા પાણીનું કદ શોધો.

(i) 28 સેમી (ii) 0.21 મી

3. એક ધાતુના ગોળાનો વ્યાસ 4.2 સેમી છે. જો તેના દ્રવ્યની ઘનતા 8.9 ગ્રામ/સેમી^{3} હોય, તો તેનું દળ શોધો.

4. જો ચંદ્રનો વ્યાસ આશરે પૃથ્વીના વ્યાસના ચોથા ભાગ જેટલો હોય, તો પૃથ્વીના ઘનફળ અને ચંદ્રના ઘનફળનો ગુણોત્તર શોધો.

5. 10.5 સેમી વ્યાસવાળા અર્ધગોળાકાર પાત્રમાં કેટલા લિટર દૂધ સમાવી શકાય?

6. એક અર્ધગોળાકાર ટાંકી 1 સેમી જાડા લોખંડના પતરામાંથી બનાવેલી છે. જો તેની અંદરની ત્રિજ્યા 1 મી હોય, તો આ ટાંકી બનાવવા વપરાયેલા લોખંડનું ઘનફળ શોધો.

7. એક ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ 154 સેમી^{2} હોય, તો તેનું ઘનફળ શોધો.

8. એક મકાનનો ઘુમ્મટ અર્ધગોળાકાર છે. તેની અંદરની બાજુએ ચૂનો લગાવવાનો ખર્ચ ₹ 4989.60 થાય છે. જો ચૂનો લગાવવાનો ખર્ચ 1 મી^{2} ના ₹ 20 હોય, તો

(i) ઘુમ્મટની અંદરની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ અને

(ii) ઘુમ્મટની અંદર રહેલી હવાનું ઘનફળ શોધો.

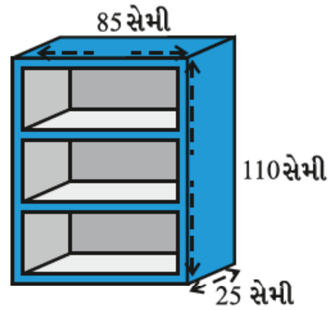
9. જેની ત્રિજ્યા r અને વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ S હોય, તેવા 27 લોખંડના ગોળાને ઓગાળી તેમાંથી જેની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ S' હોય તેવો એક લોખંડનો ગોળો બનાવવામાં આવે છે. તો

(i) નવા ગોળાની ત્રિજ્યા r' અને (ii) S અને S' ગુણોત્તર શોધો.

10. એક ગોળાકાર દવાની કેપ્સુલનો વ્યાસ 3.5 મિમી છે. તો આ કેપ્સુલને સંપૂર્ણ રીતે ભરવા કેટલી દવાની (મિમી^{3}) જરૂર પડશે ?

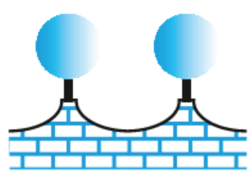
સ્વાધ્યાય 13.9 (પ્રકીર્ણ સ્વાધ્યાય)*

1. પુસ્તક મૂકવાના લાકડાના એક કબાટના બહિર્પરિમાણો નીચે મુજબ છે: ઊંચાઈ 110 સેમી, ઊંડાઈ 25 સેમી અને પહોળાઈ 85 સેમી છે. (જુઓ આકૃતિ 13.31) આ કબાટ બનાવવા 5 સેમી જાડા પાટિયાનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. તેની બહારની સપાટી પૉલીશ કરવાની છે અને અંદરની સપાટીને રંગવાની છે. જો પૉલીશ કરવાનો ખર્ચ પ્રતિ સેમી^{2} 20 પૈસા અને રંગવાનો ખર્ચ પ્રતિ સેમી^{2} 10 પૈસા હોય, તો રંગકામ અને પૉલીશ કરવાનો ખર્ચ શોધો.



આકૃતિ 13.31

2. એક ઘરની બહાર આવેલ કોટ પર 21 સેમી વ્યાસવાળા લાકડાના ગોળાને નાના આધાર પર મૂકીને આકૃતિ 13.32. માં દર્શાવ્યા મુજબ શણગારવામાં આવે છે. એ હેતુ માટે આવા 8 ગોળાનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. ગોળાની નીચેનો નળાકાર આધાર 1.5 સેમી ત્રિજ્યા અને 7 સેમી ઊંચાઈવાળો છે. આ આધાર પર કાળો રંગ કરવાનો છે અને ગોળાને સિલ્વર રંગ કરવાનો છે. જો સિલ્વર



આકૃતિ 13.32

* આ સ્વાધ્યાય પરીક્ષાલક્ષી નથી.

રંગ કરવાનો ખર્ચ પ્રતિ સેમી^{2} 25 પૈસા અને કાળો રંગ કરવાનો ખર્ચ 5 પૈસા પ્રતિસેમી^{2} તો રંગ કરવાનો કુલ ખર્ચ શોધો.

3. એક ગોળાના વ્યાસમાં 25 %. ઘટાડો કરતાં તેની વક્રસપાટીમાં કેટલા ટકા ઘટાડો થશે?

13.10 સારાંશ

તમે આ પ્રકરણમાં નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. લંબઘનનું પૃષ્ઠફળ $= 2\,(lb + bh + hl)$

2. સમઘનનું પૃષ્ઠફળ $= 6a^2$

3. નળાકારની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi rh$

4. નળાકારની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ $= 2\pi r(r + h)$

5. લંબવૃત્તીય શંકુની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= \pi rl$

6. લંબવૃત્તીય શંકુનું કુલ પૃષ્ઠફળ $= \pi rl + \pi r^2$, i.e., $\pi r\,(l + r)$

7. r ત્રિજ્યાવાળા ગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 4\,\pi\, r^2$

8. અર્ધગોળાની વક્રસપાટીનું ક્ષેત્રફળ $= 2\pi r^2$

9. અર્ધગોળાની સપાટીનું કુલ ક્ષેત્રફળ $= 3\pi r^2$

10. લંબઘનનું ઘનફળ $= l \times b \times h$

11. સમઘનનું ઘનફળ $= a^3$

12. નળાકારનું ઘનફળ $= \pi r^2 h$

13. શંકુનું ઘનફળ $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

14. ગોળાનું ઘનફળ $= \frac{4}{3}\pi r^3$

15. અર્ધગોળાનું ઘનફળ $= \frac{2}{3}\pi r^3$

[અહીં, મૂળાક્ષરો l, b, h, a, r તેમના પ્રચલિત અર્થમાં વાપરવામાં આવ્યા છે. તેનું અર્થઘટન સંદર્ભ પ્રમાણે કરવું.]