GM3PR9

પ્રકરણ 16

સંખ્યા સાથે રમત

16.1 પ્રાસ્તાવિક

તમે પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ, પૂર્ણ સંખ્યાઓ, પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ અને સંમેય સંખ્યાઓ જેવી જુદા-જુદા પ્રકારની વિવિધ સંખ્યાઓનો અભ્યાસ કર્યો. તમે આવી સંખ્યાઓના રસપ્રદ ગુણધર્મો અને ખાસિયત પણ જોઈ. ધોરણ 6માં આપણે અવયવો અને અવયવીઓ અને તેઓની વચ્ચેના સંબંધો પણ જોયા હતા અને શોધી કાઢ્યા હતા.

આ પ્રકરણમાં આપણે સંખ્યાઓને વધુ વિગતથી જોઈશું. સંખ્યાઓમાં જોવા મળતી નવીન બાબતો શોધી કાઢીશું. આ બાબત આપણને સંખ્યાની ભાજકતા વિશે જાણકારી માટે ઉપયોગી બનશે.

16.2 સંખ્યાનું વ્યાપક સ્વરૂપ

ચાલો આપણે એક સંખ્યા 52 લઈએ,

52ને નીચે પ્રમાણે લખીએ.

$$52 = 50 + 2 = 10 \times 5 + 2$$

તેવી જ રીતે 37ને પણ નીચે પ્રમાણે લખી શકાય,

$$37 = 10 \times 3 + 7$$

સામાન્ય રીતે, અંક a અને bથી બનેલ કોઈપણ બે અંકોવાળી સંખ્યા abને નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$ab = 10 \times a + b = 10a + b$$

તો ba માટે શું કહી શકાય ?

$$ba = 10 \times b + a = 10b + a$$

ચાલો હવે આપણે એક સંખ્યા 351 લઈએ. આ એક ત્રણ અંકોથી બનતી સંખ્યા છે. તેને નીચે પ્રમાણે પણ લખી શકાય :

$$351 = 300 + 50 + 1 = 100 \times 3 + 10 \times 5 + 1 \times 1$$

તેવી જ રીતે $\quad 497 = 100 \times 4 + 10 \times 9 + 1 \times 7$

સામાન્ય સ્વરૂપે, અંક a, b અને cથી બનેલ કોઈપણ ત્રણ અંકવાળી સંખ્યા abcને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય :

$$abc = 100 \times a + 10 \times b + 1 \times c$$
$$= 100a + 10b + c$$

તેવી જ રીતે,

$$cab = 100c + 10a + b$$
$$bca = 100b + 10c + a \quad \text{તે જ રીતે આગળ....}$$

પ્રયત્ન કરો

1. નીચે આપેલી સંખ્યાઓને તેમનાં વ્યાપક સ્વરૂપમાં લખો.

   (i) 25 (ii) 73 (iii) 129 (iv) 302

2. નીચે આપેલી સંખ્યાઓના સ્વરૂપને સામાન્ય સ્વરૂપમાં લખો.

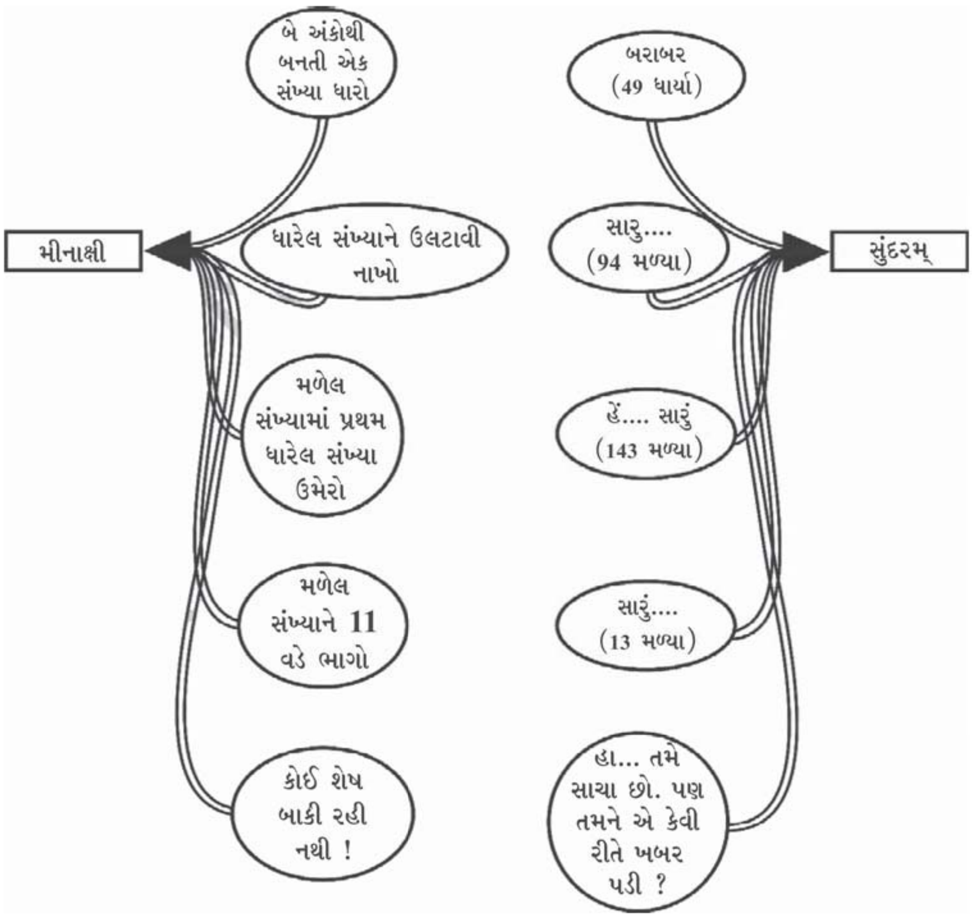
   (i) $10 \times 5 + 6$ (ii) $100 \times 7 + 10 \times 1 + 8$ (iii) $100 \times a + 10 \times c + b$

16.3 સંખ્યાઓ સાથે ગમ્મત

(i) દ્વિઅંકી સંખ્યાઓમાં અંકોની અદલાબદલી

મીનાક્ષીએ સુંદરમ્‌ને 2 અંકોથી બનતી સંખ્યા ધારવાનું કહ્યું અને ત્યાર બાદ તેણી કહે એમ સુંદરમે કરવું એમ નક્કી થયું. તેઓ વચ્ચેની વાતચીત નીચે આકૃતિમાં બતાવેલ છે. આ આકૃતિને ધ્યાનથી જુઓ અને ત્યારબાદ આગળ વાંચો :

મીનાક્ષી અને સુંદરમ્ વચ્ચેની વાતચીત : પ્રથમ તબક્કો...



એવું કેમ બન્યું ? એવું એટલા માટે બન્યું કે સુંદરમે પ્રથમ 49 સંખ્યા ધારેલ હતી. તેથી તેણે ધારેલી સંખ્યાને ઉલટાવતાં તેને 94 મળ્યા. હવે સુંદરમે બંને સંખ્યાઓનો સરવાળો કર્યો.

અર્થાત્ $49 + 94 = 143$. છેલ્લે તેણે મળેલ સંખ્યાને 11 વડે ભાગવા કહ્યું. તેથી તેમને $143 \div 11 = 13$ મળ્યા. જેમાં શેષ વધતી નથી. આવું મીનાક્ષીએ અનુમાન કર્યું હતું.

પ્રયત્ન કરો

જો નીચે આપેલી સંખ્યા સુંદરમે ધારેલી હોય તો પરિણામ શું મળશે તે ચકાસો :

1. 27 **2.** 39 **3.** 64 **4.** 17

ચાલો, આપણે મીનાક્ષીની યુક્તિને સમજીએ.

ધારો કે સુંદરમે ધારેલ રકમ ab છે. જે બે અંકોવાળી સંખ્યા $10a + b$નું સંક્ષિપ્ત રૂપ છે. આ સંખ્યાના અંકોને ઉલટાવતા તેને $ba = 10b + a$ પ્રાપ્ત થાય છે. હવે આ બંને સંખ્યાનો સરવાળો કરતાં,

$$(10a + b) + (10b + a) = 11a + 11b$$
$$= 11(a + b)$$

આમ, બંને સંખ્યાઓ, ધારેલ સંખ્યા અને તેને ઉલટાવવાથી મળતી સંખ્યાનો સરવાળો હંમેશા 11નો ગુણિત જ હોય !

અહીં આપણે એ પણ ખાસ નોંધ કરીએ કે જો આપણે મળેલ બંને સંખ્યાઓના સરવાળાને 11 વડે ભાગીએ તો તેનું ભાગફળ હંમેશા $(a + b)$ મળે. અને આ ભાગફળ $(a + b)$ એ ધારેલી સંખ્યા abના અંકો a અને bનો સરવાળો છે.

તમે અન્ય કોઈ બે અંકોની સંખ્યાઓ લઈ જાતે જ આ બાબતની ચકાસણી કરી શકો છો.

મીનાક્ષી અને સુંદરમ્ વચ્ચેની રમત હજુ ચાલુ છે !

મીનાક્ષી : સુંદરમ્, ફરીથી તું બે અંકોની એક સંખ્યા ધારી લે. પણ જોજે હો મને કહેવાની નથી.

સુંદરમ્ : સારું... બરાબર.

મીનાક્ષી : હવે ધારેલ રકમના અંકોનો ક્રમ ઉલટાવી નાખો. હવે ધારેલ રકમ અને ઉલટાવવાથી મળેલ રકમમાં જે મોટી રકમ હોય તેમાંથી નાની રકમની બાદબાકી કરો.

સુંદરમ્ : સારું... મેં બાદબાકી પણ કરી. આગળ શું કરું ?

મીનાક્ષી : સુંદરમ્, મળેલ બાદબાકીની સંખ્યાને 9 વડે ભાગો. હું જોયાં વિના કહી શકું છું કે તેની શેષ શૂન્ય હશે.

સુંદરમ્ : હા. મીનાક્ષી તમે સાચા છો હો ! ખરેખર આ ભાગાકાર નિ:શેષ છે. પણ આ વખતે મને પણ ખબર પડી ગઈ કે આ કેમ બને છે.

વાસ્તવમાં, સુંદરમે ધારેલી રકમ 29 હતી. તેણે કરેલી ગણતરી મુજબ : સૌપ્રથમ તેને સંખ્યા 92 મળી, ત્યારબાદ તેને $92 - 29 = 63$ મળ્યા; અને છેલ્લે 63ને 9 વડે ભાગતાં $(63 \div 9)$ તેને ભાગફળ 7 મળ્યું અને શેષ શૂન્ય મળી.

પ્રયત્ન કરો

જો સુંદરમે ધારેલ રકમ નીચે આપેલી સંખ્યામાંથી હોય તો તેનું પરિણામ શું મળે તે ચકાસો :

1. 17 **2.** 21 **3.** 96 **4.** 37

અહીં આપણે સુંદરમે મીનાક્ષીની બીજી યુક્તિ કેવી રીતે રજૂ કરી તે જોઈએ. હવે તે આવું આત્મવિશ્વાસ પૂર્ણ કરી શકે છે.

ધારો કે સુંદરમે 2 અંકોની ધારેલી રકમ ab હતી. તેને $ab = 10a + b$ સ્વરૂપે પણ લખી શકાય. આ રકમને ઉલટાવવાથી મળતી રકમ $ba = 10b + a$ છે. હવે જ્યારે મીનાક્ષીએ મોટી રકમ હોય તેમાંથી નાની રકમની બાદબાકી કરવાનું કહેતાં,

જો ધારેલી રકમનો દશકનો અંક એકમના અંકથી મોટો હોય, તો (અર્થાત્ $a > b$)

$$(10a + b) - (10b + a) = 10a + b - 10b - a$$
$$= 9a - 9b = 9(a - b)$$

જો ધારેલ રકમનો એકમનો અંક દશકના અંકથી મોટો હોય (અર્થાત્ $b > a$), તો

$(10b + a) - (10a + b) = 10b + a - 10a - b = 9b - 9a = 9(b - a)$

અને જો તે $a = b$ હોય તો તેને મળતી સંખ્યા 0 (શૂન્ય) હશે.

આમ, તમામ પ્રકારની શક્યતાઓમાં મળતું પરિણામ એ 9 વડે નિ:શેષ ભાગી શકાય છે. અર્થાત્ શેષ શૂન્ય છે. અહીં એ પણ નોંધીએ કે મળેલ પરિણામ (બાદબાકી કરતાં)ને ભાગીએ તો આપણને ભાગફળ તરીકે $a - b$ અથવા $b - a$ ($a > b$ અથવા $a < b$ મુજબ) મળે છે. તમે બીજી સંખ્યાઓ ધારીને આ બાબતની ચકાસણી કરી શકો છો.

(ii) **ત્રણ અંકોવાળી સંખ્યાના અંકોને ઉલટાવતાં :**

હવે અંકો સાથે રમત અને ગમ્મત કરવાનો વારો સુંદરમ્‌નો હતો.

સુંદરમ્ : મીનાક્ષી, તમે ત્રણ અંકોની કોઈ પણ રકમ ધારો. પણ મને કહેવાની નથી.

મીનાક્ષી : સારું...

સુંદરમ્ : હવે ધારેલ સંખ્યાના અંકોના ક્રમને ઉલટાવી નાખો. મળતી સંખ્યા અને ધારેલ સંખ્યામાંથી જે સંખ્યા નાની હોય તેને મોટી સંખ્યામાંથી બાદ કરો.

મીનાક્ષી : સારું... મેં તે પ્રમાણે બાદબાકી કરી નાખી. મારે હવે આગળ શું કરવાનું ?

સુંદરમ્ : મળેલ બાદબાકીની સંખ્યાને 99 વડે ભાગાકાર કરો. હું ચોક્કસપણે કહી શકું કે ત્યાં શેષ શૂન્ય મળે છે.

વાસ્તવમાં, મીનાક્ષીએ 3 અંકોની સંખ્યા 349 ધારેલ હતી.

- સંખ્યાના અંકોના ક્રમને ઉલટાવવાથી 943 મળે.
- મોટી સંખ્યામાંથી નાની સંખ્યા બાદ કરતાં (943 – 349) = 594 મળે.
- મળેલ પરિણામી સંખ્યાને 99 વડે ભાગવાથી 594 ÷ 99 = 6, મળે અને શેષ શૂન્ય રહે.

પ્રયત્ન કરો

જો મીનાક્ષીએ ધારેલી ત્રણ અંકોની સંખ્યાઓ નીચે મુજબની હોય તો મળતાં પરિણામો જુઓ :

1. 132 **2.** 469 **3.** 737 **4.** 901

ચાલો, આપણે જાણીએ કે આ કેમ બને છે ?

ધારો કે મીનાક્ષીએ ધારેલ ત્રણ અંકવાળી સંખ્યા $abc = 100a + 10b + c$ છે. અંકોના ક્રમને ઉલટાવતાં મળતી સંખ્યા $cba = 100c + 10b + a$ છે. હવે બાદબાકી કરતાં

જો $a > c$, તો બંને સંખ્યાઓનો તફાવત

$$(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c = 99\,(a - c)$$

જો $c > a$, તો બંને સંખ્યાઓનો તફાવત

$$(100c + 10b + a) - (100a + 10b + c) = 99c - 99a = 99\,(c - a)$$

જો $a = c$ તો સ્પષ્ટ છે કે તફાવત શૂન્ય જ મળે.

આમ, બધા જ પ્રકારના કિસ્સાઓમાં મળતું પરિણામ એ 99 વડે નિ:શેષ ભાગી શકાય તેવું જ મળે છે. તેમજ મળતું ભાગફળ $(a - c)$ અથવા $(c - a)$ મળે છે. આ બાબતને અન્ય કોઈ ત્રણ અંકોવાળી સંખ્યા માટે તપાસી જુઓ.

(iii) **ત્રણ અંકોની મદદથી ત્રણ અંકોની સંખ્યા બનાવવી.**

હવે ફરીથી મીનાક્ષીનો દાવ આવ્યો.

મીનાક્ષી : સુંદરમ્, તમે કોઈ પણ ત્રણ અંકવાળી સંખ્યા ધારો.

સુંદરમ્ : સારું... મીનાક્ષી મેં ત્રણ અંકવાળી સંખ્યા ધારી લીધી ?

મીનાક્ષી : હવે આ અંકોનો ઉપયોગ કરી બીજી બે ત્રણ અંકવાળી સંખ્યાઓ બનાવો. જેમ કે ધારેલી સંખ્યા *abc* હોય તો,

તેની પ્રથમ સંખ્યા *cab* છે. (અર્થાત્ એકમના અંકને શરૂઆતમાં (ડાબી બાજુ) મૂકવામાં આવે.)

બીજી સંખ્યા *bca* છે. (અર્થાત્ શતકના અંકને જમણી બાજુ છેડે મૂકવામાં આવે.)

હવે આ ધારેલ સંખ્યા અને બીજી બે સંખ્યાનો સરવાળો કરો. મળતાં સરવાળાની સંખ્યાનો 37 વડે ભાગાકાર કરો. હું કહી શકું કે શેષ શૂન્ય મળે છે.

સુંદરમ : હા. મીનાક્ષી તમે સાચા હોં !!

વાસ્તવમાં સુંદરમે 3 અંકોવાળી સંખ્યા 237 ધારેલ હતી. ત્યાર બાદ મીનાક્ષીના કહેવા મુજબ સુંદરમે બીજી બે રકમો બનાવેલ, તે 723 અને 372 હતી. આમ,

$$
\begin{array}{r}
237 \\
+\ 723 \\
+\ 372 \\
\hline
+\ 1332 \\
\hline
\end{array}
$$

ત્રણ અંકો 2, 3 અને 7 અંકોની મદદથી શક્ય તેટલી ત્રણ અંકોની સંખ્યાઓ બનાવી તેનો સરવાળો કરો. શું તે 37થી નિ:શેષ ભાગી શકાય ? શું તે સંખ્યા *abc*ના અંકો *a*, *b* અને *c*થી બનતી બધી જ સંખ્યાઓના સરવાળા માટે સાચું છે ?

હવે 1332ને 37 વડે ભાગતાં

$1332 \div 37 = 36$, શેષ શૂન્ય મળે છે.

પ્રયત્ન કરો

જો સુંદરમે ધારેલ ત્રણ અંકોથી બનતી સંખ્યા નીચે મુજબ હોય તો મળતાં પરિણામની ચકાસણી કરો :

1. 417 **2.** 632 **3.** 117 **4.** 937

શું આ બાબત હંમેશાં સાચી છે ?

ચાલો જોઈએ,

$$
\begin{aligned}
abc &= 100a + 10b + c \\
cab &= 100c + 10a + b \\
bca &= 100b + 10c + a
\end{aligned}
$$

હવે $abc + cab + bca = 111(a + b + c)$

$= 37 \times 3\ (a + b + c)$

જે 37 થી નિ:શેષ ભાગી શકાય.

16.4 સંખ્યાઓને બદલે મૂળાક્ષર

અહીં આપણી પાસે કોયડાઓ છે કે જેમાં ગાણિતિક સરવાળામાં અંકોના સ્થાને મૂળાક્ષર હોય છે. આપણે શોધી કાઢવાનું હોય છે કે કયો મૂળાક્ષર કયા અંકને બદલે મૂકી શકાય, તેથી આ એક ગુપ્ત સંકેતને ઉકેલવાની રમત જેવું છે. અહીં આપણે સરવાળા અને ગુણાકાર માટેના કોયડા જ જોઈશું.

9KKVSV

અહીં આપણે નીચે મુજબના બે નિયમોનું પાલન કરીને કોયડાઓ ઉકેલીશું.

1. પ્રત્યેક મૂળાક્ષર કોઈ એક અંકની જગ્યાએ જ વાપરી શકાશે. પ્રત્યેક અંક એ કોઈ એક મૂળાક્ષરનું પ્રતિનિધિત્વ કરશે.
2. સંખ્યાનો પ્રથમ અંક શૂન્ય હશે નહિ. આથી આપણે ''ત્રેસઠ''ને 63 લખીશું. પરંતુ 063 કે 0063 લખીશું નહિ.

આપણે એક એવો નિયમ પણ બનાવીએ કે કોયડાનો જવાબ એક અને માત્ર એક જ હોય.

ઉદાહરણ 1 : સરવાળામાં Qની કિંમત શોધો.

$$\begin{array}{r} 3\,1\,Q \\ +\,1\,Q\,3 \\ \hline 5\,0\,1 \\ \hline \end{array}$$

ઉકેલ :

અહીં એક મૂળાક્ષર Q છે. આપણે Qની કિંમત શોધવી છે.

સરવાળાની એકમની છેલ્લી ઊભી હાર જુઓ. તે Q + 3 છે. જવાબમાં 1 આવે છે. તેથી આપણે એવી સંખ્યા Qની જગ્યાએ મૂકીએ કે તેનો એકમનો અંક 1 મળે.

આ તો જ શક્ય બને કે જો Qની કિંમત 8 હોય. તેથી કોયડો નીચે મુજબ ઉકેલી શકાય :

$$\begin{array}{r} 3\,1\,8 \\ +\,1\,8\,3 \\ \hline 5\,0\,1 \end{array} \quad \text{તેથી } Q = 8$$

ઉદાહરણ 2 : નીચેના સરવાળામાં A અને Bની કિંમત મેળવો.

$$\begin{array}{r} A \\ +\quad A \\ +\quad A \\ \hline B\,A \\ \hline \end{array}$$

ઉકેલ : અહીં આ કોયડામાં A અને B બંનેની કિંમત શોધવાની છે.

અહીં આપેલા સરવાળા પર નજર નાખીએ તો જોવા મળે છે કે સરવાળાની ઊભી હારમાં Aનો સરવાળો ત્રણ વાર કરવામાં આવતાં મળતી સંખ્યાનો એકમનો અંક પણ A જ મળે. જો Aનો સરવાળો બે વાર કરતાં મળતી સંખ્યાનો એકમનો અંક શૂન્ય મળે તો આ શક્ય બને. તેથી આપણે

A = 0 અથવા A = 5 વિચારી શકીએ.

જો A = 0, તો 0 + 0 + 0 = 0, તેથી B = 0 મળે. આપણે આ કિંમત A = 0 સ્વીકારીશું નહિ. (કેમ કે A = 0 તો A = B, તેથી BA સંખ્યાનો દશકનો અંક પણ શૂન્ય મળે.) તેથી આપણે A = 0 કિંમતને સ્વીકારતા નથી તેથી બીજી શક્યતા A = 5 લઈએ તો,

કોયડાનો ઉકેલ આ પ્રમાણે મળે,

$$\begin{array}{r} 5 \\ +\quad 5 \\ +\quad 5 \\ \hline 1\,5 \\ \hline \end{array} \quad \text{તેથી } A = 5 \text{ અને } B = 1$$

ઉદાહરણ 3 : નીચેના ગુણાકારમાં A અને Bની કિંમત મેળવો.

$$\begin{array}{r} B\ A \\ \times \quad B\ 3 \\ \hline 5\ 7\ A \\ \hline \end{array}$$

ઉકેલ :

અહીં આપેલા કોયડામાં બે મૂળાક્ષરો A અને Bની કિંમત શોધવાની છે.

$3 \times A$માં એકમનો અંક A હોવાથી, $A = 0$ અથવા $A = 5$ હોય.

હવે B માટે વિચારો. જો $B = 1$ હોય તો $BA \times B3$ની કિંમત વધુમાં વધુ 19×19 ને બરાબર એટલે કે તે વધુમાં વધુ 361ને બરાબર હોઈ શકે. પરંતુ ગુણાકાર 57A આપેલ છે જે 500થી વધારે છે. તેથી $B = 1$ શક્ય નથી.

જો $B = 3$ લઈએ તો $BA \times B3$ની કિંમત 30×30થી વધુ મળે એટલે કે 900થી વધારે મળે. પરંતુ 57A એ 600થી નાના છે તેથી $B = 3$ શક્ય નથી.

આમ, ઉપરની વાસ્તવિકતાઓ જોતાં $B = 2$ મળે તેથી ગુણાકાર 20×23 અથવા 25×23 બેમાંથી એક હોઈ શકે.

પરંતુ પ્રથમ શક્યતા $20 \times 23 = 460$ સ્વીકારી શકાય નહિ પરંતુ જો બીજી શક્યતા $25 \times 23 = 575$ જે શક્ય છે. તેથી અહીં $A = 5$ અને $B = 2$ ઉકેલ છે.

$$\begin{array}{r} 2\ 5 \\ \times \quad 2\ 3 \\ \hline 5\ 7\ 5 \\ \hline \end{array}$$

આટલું કરો

બે અંકોથી બનતી એક સંખ્યા *ab* ધારો. હવે આ ધારેલ સંખ્યાને ઉલટાવવાથી મળતી સંખ્યા *ba* છે. બંનેનો સરવાળો કરો. તેનો સરવાળો 3 અંકોથી બનતી સંખ્યા મળશે. ધારો કે તે *dad* છે.

એટલે કે $\quad ab + ba = dad$

$$\therefore (10a + b) + (10b + a) = dad$$

$$\therefore 11(a + b) = dad$$

અહીં $a + b$નો સરવાળો 18થી વધારે ક્યારેય ન હોય (કેમ ?)

શું *dad* એ 11નો ગુણક છે ?

શું *dad* એ 198થી નાનો છે ?

1 થી 198 વચ્ચે આવતાં 11ના ગુણકો લખો કે જે ત્રણ અંકોવાળી સંખ્યા હોય.

તમને *a* અને *d*ની કિંમત મળી જશે.

સ્વાધ્યાય 16.1

નીચે આપેલ સરવાળા કે ગુણાકારની પ્રક્રિયા માટે મૂળાક્ષરોની કિંમત મેળવો. તમે જે પગલાં લીધાં તેનું કારણ જણાવો.

1. $\begin{array}{r} 3\ A \\ +\quad 2\ 5 \\ \hline B\ 2 \\ \hline \end{array}$ **2.** $\begin{array}{r} 4\ A \\ +\quad 9\ 8 \\ \hline C\ B\ 3 \\ \hline \end{array}$ **3.** $\begin{array}{r} 1\ A \\ \times\quad A \\ \hline 9\ A \\ \hline \end{array}$

4. $$\begin{array}{r} AB \\ +\ 37 \\ \hline 6A \\ \hline \end{array}$$

5. $$\begin{array}{r} AB \\ \times\ 3 \\ \hline CAB \\ \hline \end{array}$$

6. $$\begin{array}{r} AB \\ \times\ 5 \\ \hline CAB \\ \hline \end{array}$$

7. $$\begin{array}{r} AB \\ \times\ 6 \\ \hline BBB \\ \hline \end{array}$$

8. $$\begin{array}{r} A1 \\ +\ 1B \\ \hline B0 \\ \hline \end{array}$$

9. $$\begin{array}{r} 2AB \\ +\ AB1 \\ \hline B18 \\ \hline \end{array}$$

10. $$\begin{array}{r} 12A \\ +\ 6AB \\ \hline A09 \\ \hline \end{array}$$

9KURUI

16.5 વિભાજ્યતાની ચાવીઓ

નીચે આપેલી સંખ્યાઓ ભાજક તરીકે હોય તો તેની વિભાજ્યતાની ચાવીઓ વિશે તમે ધોરણ 6માં શીખી ગયા છો.

10, 5, 2, 3, 6, 4, 8, 9, 11

તમે ઉપરની સંખ્યાઓ માટે નિ:શેષ ભાગાકાર માટેની સરળ પદ્ધતિ જાણો છો. પરંતુ અહીં તમે એવું કેમ બને છે તે જાણીને નવાઈ પામશો. આ પ્રકરણમાં આપણે એવું કેમ ? તેના સંદર્ભે જોઈશું.

16.5.1 10 વડે વિભાજ્યતા

આ એક સાવ સરળ પદ્ધતિથી, સૌ પ્રથમ આપણે 10ના ગુણિત લખીએ.

10, 20, 30, 40, 50, 60 ...,

અને થોડા 10ની ગુણિત ન હોય તેવી સંખ્યા લખીએ જેમ કે,

13, 27, 32, 48, 55, 69

ઉપરની સંખ્યાઓનો અભ્યાસ કરતાં આપણને જોવા મળે છે કે જે સંખ્યાઓનો એકમનો અંક શૂન્ય છે, તે બધી જ સંખ્યાઓને 10 વડે નિ:શેષ ભાગી શકાય છે. જ્યારે જે સંખ્યાનો એકમનો અંક શૂન્ય નથી તેવી કોઈ પણ સંખ્યાને 10 વડે નિ:શેષ ભાગી શકાતી નથી. તેથી આપણને 10 વડે વિભાજ્યતાની ચાવી મળી.

અલબત્ત આપણે અહીં જ અટકી નહિ જઈએ. આપણે એ પણ બતાવીશું કે ''આવું કેમ ?'' તે બતાવવું કોઈ અઘરું કામ નથી. તેના માટે આપણને ફક્ત સ્થાન કિંમતના નિયમોની માહિતી હોવી જોઈએ.

જો આપણે કોઈ સંખ્યા ... cba લઈએ તો, તેને નીચે મુજબ દર્શાવી શકાય.

$$... cba = ... + 100c + 10b + a$$

અહીં, a એ એકમનો અંક, b એ દશકનો અંક અને c એ શતકનો અંક છે. તેવી જ રીતે આગળ, અહીં ... ટપકાંનો મતલબ એવો છે કે c ની ડાબી બાજુ પણ હજુ સંખ્યાઓ છે.

10, 100, 1000, ... એ 10થી વિભાજ્ય છે. તેવી જ રીતે $10b$, $100c$ ... અને જ્યાં સુધી સંખ્યા aનો પ્રશ્ન છે, તો ત્યાં $a = 0$ હોય તો જ આપેલી સંખ્યા 10 થી વિભાજ્ય હોય.

આપેલી સંખ્યાનો એકમ અંક શૂન્ય હોય, તો જ આપેલી સંખ્યા 10 વડે વિભાજ્ય હોય.

16.5.2 5 વડે વિભાજ્યતા

ચાલો, 5ના ગુણિત જોઈએ :

5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50

અહીં આપણે ઉપરની યાદી પરથી જોઈ શકીએ છીએ કે યાદીમાં આપેલ સંખ્યાઓનો એકમનો અંક 5 અથવા 0 છે, તે સિવાય બીજો કોઈ અંક એકમના સ્થાને આવતો જ નથી.

તેથી આપણને 5 વડે વિભાજ્યતાની ચાવી આ પ્રમાણે મળે છે :

જો આપેલી સંખ્યાનો એકમનો અંક 5 અથવા 0 હોય તો તે સંખ્યા 5 વડે વિભાજ્ય છે.

ચાલો આપણે આ નિયમને સમજીએ. કોઈ એક સંખ્યા ... *cba*ને નીચે પ્રમાણે લખી શકાય.

$... cba = ... + 100c + 10b + a$

આપણે જાણીએ છીએ કે 10, 100 વગેરે 10થી વિભાજ્ય છે. તેથી $10b$, $100c$, ... પણ 10થી વિભાજ્ય હોય. તે 5 થી પણ વિભાજ્ય હોય કેમ કે $10 = 5 \times 2$. જ્યાં સુધી એકમના અંક a નો પ્રશ્ન છે, ત્યાં સુધી જો a, 5 વડે વિભાજ્ય હોય, તો જ તે સંખ્યા 5 વડે વિભાજ્ય હોય તેથી એકમનો અંક 5 અથવા 0 હોય.

પ્રયત્ન કરો

(પ્રથમ ઉદાહરણ તમને ગણીને આપેલ છે.)

1. જો N ÷ 5માં શેષ 3 વધે છે, તો Nની એકમનો અંક શું હોય ? (જ્યારે કોઈ એક સંખ્યાને 5 વડે ભાગીએ અને શેષ 3 વધે તો તે સંખ્યાનો એકમ અંક 3 અથવા 8 હોય.)
2. જો N ÷ 5માં શેષ 1 વધે છે, તો Nની એકમનો અંક શું હોય ?
3. જો N ÷ 5માં શેષ 4 વધે છે, તો Nની એકમનો અંક શું હોય ?

16.5.3 2 વડે વિભાજ્યતા

અહીં બેકી સંખ્યાઓની યાદી આપેલ છે.

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22 ...,

અને એકી સંખ્યાઓની યાદી નીચે પ્રમાણે હોય

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21 ...,

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે બેકી સંખ્યાનો એકમનો અંક

2, 4, 6, 8 કે 0 (શૂન્ય) છે.

જ્યારે એકી સંખ્યાનો એકમનો અંક

1, 3, 5, 7 અથવા 9 છે.

આપણે ધોરણ 6માં 2ની વિભાજ્યતાની ચાવી શીખી ગયેલ તે યાદ કરીએ. તે આ પ્રમાણે હતી :

જો આપેલી સંખ્યાનો એકમ અંક 0, 2, 4, 6 કે 8 હોય તો તેવી સંખ્યાને 2 વડે નિ:શેષ ભાગી શકાય અર્થાત્ તે સંખ્યા 2 વડે વિભાજ્ય છે.

આ નિયમને આપણે સમજીએ.

આપણે જાણીએ છીએ કે કોઈ સંખ્યા *cba*ને આપણે $100c + 10b + a$ સ્વરૂપે લખી શકીએ.

અહીં સ્પષ્ટ છે કે પ્રથમ બે પદો $100c$ અને $10b$ એ 2 વડે વિભાજ્ય છે. કેમ કે 100 અને 10 સંખ્યાઓ 2 વડે વિભાજ્ય છે. હવે જ્યાં સુધી સંખ્યા aનો પ્રશ્ન છે, તો આપેલ સંખ્યા 2 થી તો જ વિભાજ્ય હોય, કે જો a, 2 વડે વિભાજ્ય હોય, આ તો જ શક્ય છે કે જો $a = 0, 2, 4, 6$ કે 8.

પ્રયત્ન કરો

(પ્રથમ ઉદાહરણ ગણતરી સાથે આપેલ છે.)

1. જો N ÷ 2માં શેષ 1 વધે તો છે, તો સંખ્યા Nનો એકમનો અંક શું હશે ?
   (N એ એકી સંખ્યા છે. તેથી તેનો એકમનો અંક 1, 3, 5, 7 કે 9 હશે.)

2. જો N ÷ 2 કરતાં શેષ શૂન્ય વધે છે, તો સંખ્યા Nનો એકમનો અંક શું હશે ?
3. ધારો કે સંખ્યા N, માટે N ÷ 5 કરતાં શેષ 4 મળે છે અને N ÷ 2 કરવાથી શેષ 1 મળે છે, તો સંખ્યા Nનો એકમનો અંક શું હશે ?

16.5.4 9 અને 3 વડે વિભાજ્યતા

આપણને ત્રણ સંખ્યાઓ વડે નિઃશેષ ભાગાકારની ચાવીઓ મળી. આ ત્રણ સંખ્યા 10, 5 અને 2 છે. આપણને આ ત્રણેય ચાવીઓમાં એક બાબત સામાન્ય જણાય છે કે તેમાં એકમના અંકનો જ ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. બાકીના અંકો ગમે તે હોય તેની તરફ ધ્યાન આપેલ નથી એટલે વિભાજ્યતા માત્ર એકમના અંકની મદદથી જ નક્કી થાય છે. 10, 5, 2 એ 10ના અવયવો છે. તે આપણી સ્થાન કિંમતો ચાવી રૂપ સંખ્યા છે.

પરંતુ ચાલો આપણે 9 વડે વિભાજ્યતાની ચકાસણી કરીએ, તેમાં આ બાબત મદદરૂપ બનતી નથી. ચાલો, આપણે એક સંખ્યા 3573 લઈએ. તેને વિસ્તૃત રીતે લખતાં,

$$\begin{aligned} 3573 &= 3 \times 1000 + 5 \times 100 + 7 \times 10 + 3 \\ &= 3 \times (999 + 1) + 5 \times (99 + 1) + 7 \times (9 + 1) + 3 \\ &= 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 3) \ldots \quad (1) \end{aligned}$$

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે જો (3 + 5 + 7 + 3)ને 9 કે 3 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તો જ 3573ને 9 કે 3 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય.

આપણે એ પણ જોઈ શકીએ છીએ કે 3 + 5 + 7 + 3 = 18 જે 9 અને 3 બંને વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય છે. આથી સંખ્યા 3573 એ 9 અને 3 વડે વિભાજ્ય છે.

હવે આપણે બીજી એક સંખ્યા 3576 લઈએ,

$$3576 = 3 \times 999 + 5 \times 99 + 7 \times 9 + (3 + 5 + 7 + 6) \ldots \quad (2)$$

ઉપરાંત (3 + 5 + 7 + 6 = 21). 21 એ 3 થી નિઃશેષ ભાગી શકાય. પરંતુ 9 વડે નિઃશેષ ન ભાગી શકાય.

આમ, 3576 એ 3 વડે વિભાજ્ય છે. પરંતુ 9 વડે વિભાજ્ય નથી.

આમ,

(i) કોઈ સંખ્યા N એ 9 વડે તો જ વિભાજ્ય છે કે તેના તમામ અંકોનો સરવાળો 9 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય. નહીં તો તે સંખ્યા N એ 9 વડે વિભાજ્ય નથી.

(ii) કોઈ સંખ્યા N એ 3 વડે તો જ વિભાજ્ય છે કે તેના તમામ અંકોનો સરવાળો 3 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય. નહીં તો તે સંખ્યા N એ 3 વડે વિભાજ્ય નથી.

જો સંખ્યા *cba* હોય તો, $cba = 100c + 10b + a = 99c + 9b + (a + b + c)$

$$= \underline{9(11c + b)} + (a + b + c)$$

જે 3 અને 9થી વિભાજ્ય છે.

આમ, 9 (અથવા 3) વડે વિભાજ્યતા તો જ શક્ય છે કે જો $(a + b + c)$ 9 (અથવા 3) વડે વિભાજ્ય હોય.

ઉદાહરણ 4 : 21436587 એ 9 વડે વિભાજ્ય છે ? ચકાસો.

ઉકેલ : આપેલ સંખ્યા 21436587ના અંકોનો સરવાળા કરતા 2 + 1 + 4 + 3 + 6 + 5 + 8 + 7 = 36 મળે છે. આમ, અંકોનો સરવાળો 36 એ 9 વડે વિભાજ્ય છે. તેથી આપણે એવું તારણ કાઢી શકીએ કે 21436587 એ 9 વડે વિભાજ્ય છે.

આપણે બીજી રીતે જોઈએ તો

$$\frac{21436587}{9} = 2381843 \qquad \text{(ભાગાકાર નિઃશેષ છે.)}$$

ઉદાહરણ 5 : 152875ની વિભાજ્યતા 9 વડે ચકાસો.

ઉકેલ : અહીં સંખ્યા 152875ના અંકોનો સરવાળો કરતાં,

સરવાળો = 1 + 5 + 2 + 8 + 7 + 5 = 28

તેથી સરવાળો 28 જે 9 વડે વિભાજ્ય નથી. એટલે આપણે કહી શકીએ કે 152875 એ 9 વડે વિભાજ્ય નથી.

પ્રયત્ન કરો

નીચેની સંખ્યાઓ 9 વડે વિભાજ્ય છે કે નહિ ? તે ચકાસો.

1. 108 **2.** 616 **3.** 294 **4.** 432 **5.** 927

ઉદાહરણ 6 : જો ત્રણ અંકોથી બનતી સંખ્યા $24x$ એ 9 વડે વિભાજ્ય હોય તો xની કિંમત શોધો.

ઉકેલ : જો $24x$ એ 9 વડે વિભાજ્ય હોય તો તેના અંકોનો સરવાળો $2 + 4 + x = 6 + x$ પણ 9 વડે વિભાજ્ય હોય.

આ તો જ શક્ય છે કે $6 + x = 9$ અથવા 18 ...

પરંતુ x એ એક અંક છે. તેથી $6 + x = 9$ એટલે કે $x = 3$ આમ, xની કિંમત 3 મળે.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

1. તમે જોયું કે 450 એ 10થી વિભાજ્ય છે. તે 2 અને 5થી પણ વિભાજ્ય છે. વળી, 2 અને 5 એ 10ના અવયવો પણ છે. તેવી જ રીતે 135 એ 9 થી વિભાજ્ય છે. તે 3થી પણ વિભાજ્ય છે. ઉપરાંત 3 એ 9નો અવયવ પણ છે.

શું તમે એમ કહી શકો કે કોઈ સંખ્યાએ m થી વિભાજ્ય છે, તો તે સંખ્યા mના અવયવોથી પણ વિભાજ્ય હોય ?

2. (i) 3 અંકોની સંખ્યા abc માટે

$$\begin{aligned} abc &= 100a + 10b + c \\ &= 99a + 11b + (a - b + c) \\ &= 11(9a + b) + (a - b + c) \end{aligned}$$

જો સંખ્યા abc એ 11 વડે વિભાજ્ય હોય તો, $(a - b + c)$ માટે શું કહી શકાય ?
શું તે અનિવાર્ય છે કે $(a + c - b)$ પણ 11 વડે નિઃશેષ ભાજ્ય હોય ?

(ii) 4 અંકોની સંખ્યા $abcd$ માટે

$$\begin{aligned} abcd &= 1000a + 100b + 10c + d \\ &= 1001a + 99b + 11c - (a - b + c - d) \\ &= 11(91a + 9b + c) + [(b + d) - (a + c)] \end{aligned}$$

જો સંખ્યા $abcd$ એ 11 વડે વિભાજ્ય હોય તો, $[(b + d) - (a + c)]$ માટે શું કહી શકાય ?

(iii) ઉપર દર્શાવેલ કિસ્સાઓ (i) અને (ii) પરથી આપણે કહી શકીએ કે, કોઈ પણ સંખ્યા 11 વડે તો જ નિઃશેષ ભાગી શકાય જો તે સંખ્યાના એકી સ્થાન પર આવેલ સંખ્યાનો સરવાળો અને બેકી સ્થાન પર આવેલ અંકોના સરવાળાના તફાવતને 11 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય.

ઉદાહરણ 7 : 2146587ની 3 વડે વિભાજ્યતા ચકાશો.

ઉકેલ : અહીં સંખ્યા 2146587ના અંકોનો સરવાળો 2 + 1 + 4 + 6 + 5 + 8 + 7 = 33 છે. આ સરવાળો એ 3 વડે વિભાજ્ય છે. આપણે એવું તારણ કાઢી શકીએ કે સંખ્યા 2146587 એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

ઉદાહરણ 8 : 15287ની 3 વડે વિભાજ્યતા ચકાસો.

ઉકેલ : અહીં સંખ્યા 15287ના અંકોનો સરવાળો 1 + 5 + 2 + 8 + 7 = 23 મળે છે.

આ સરવાળો 23 એ 3 વડે વિભાજ્ય નથી તેથી આપેલી સંખ્યા 15287 એ 3 વડે વિભાજ્ય નથી.

પ્રયત્ન કરો

નીચેની સંખ્યાઓ માટે 3ની વિભાજ્યતા ચકાસો.

1. 108 **2.** 616 **3.** 294 **4.** 432 **5.** 927

સ્વાધ્યાય 16.2

1. જો 21y5 એ 9નો ગુણિત છે, જ્યાં y એ એક અંક છે, તો yની કિંમત શોધો.
2. જો 31z5 એ 9નો ગુણિત છે, જ્યાં z એ એક અંક છે, તો zની કિંમત શોધો.
3. જો 24x એ 3નો ગુણિત છે. જ્યાં x એ એક અંક છે, તો xની કિંમત શોધો.

   તમને છેલ્લા પ્રશ્નોના બે ઉકેલ મળશે ? શા માટે ?

   (24x એ 3નો ગુણિત છે. તેથી અંકોનો સરવાળો $6 + x$ પણ 3નો ગુણિત હોય. એટલે $6 + x$ ની કિંમત 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ... પૈકીની કોઈ હોય. પરંતુ x એ એક અંક છે, તે તો જ શક્ય બને કે $6 + x = 9$ અથવા 12 અથવા 15. તેથી $x = 0$ અથવા $x = 3$ અથવા $x = 6$ અથવા $x = 9$. આમ, xની કિંમત ઉપરના ચાર પૈકી કોઈ પણ હોય.
4. જો 31z5 એ 3નો ગુણિત હોય, જ્યાં z એ એક અંક છે. તો zની કિંમત શું મળે ?

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. સંખ્યાને વ્યાપક સ્વરૂપે લખી શકાય, તેથી બે અંકોની સંખ્યા ab હોય તો $ab = 10a + b$
2. સંખ્યાનું સામાન્ય સ્વરૂપ આપણને કોયડાઓ ઉકેલવામાં મદદ કરે છે.
3. આપણે કોઈ સંખ્યાને વ્યાપક સ્વરૂપે લખીએ ત્યારે તે સંખ્યાની 10, 5, 2, 9 અથવા 3થી ભાજ્યતાનું કારણ આપી શકીએ છીએ.