"The nature of the infant is not just a new permutation - and - combination of elements contained in the natures of the parents. There is in the nature of the infant that which is utterly unknown in the natures of the parents."

– David Herbert Lawrence

6

ક્રમચય, સંચય અને દ્વિપદી વિસ્તરણ

(Permutations, Combinations and Binomial Expansion)

વિષયવસ્તુ :

6.1 ક્રમચય : અર્થ

6.2 સંચય : અર્થ

6.3 દ્વિપદી વિસ્તરણ : અર્થ અને લક્ષણો

આપણા રોજબરોજના જીવનમાં ઘણી સમસ્યાઓ એવી છે કે, જેના ઉકેલ માટે ક્રમચય અને સંચય ઉપયોગી નીવડે છે. દા.ત. કોઈ એક વર્ગમાં એક પાટલી પર 4 વિદ્યાર્થીઓ ગોઠવવાના હોય તો શિક્ષક આ 4 વિદ્યાર્થીઓને કેટલી રીતે ગોઠવી શકે ? એક વ્યક્તિને 6 મિત્ર છે અને જો તે વ્યક્તિ પોતાના ઘરના પ્રસંગમાં માત્ર 2 મિત્રોને જ આમંત્રણ આપવા ઇચ્છતો હોય તો તેની પાસે કેટલા વિકલ્પો છે ? સામાન્ય રીતે આવી સમસ્યાઓનો ઉકેલ આપણે આપસૂઝથી ઉકેલીએ છીએ. પરંતુ આવી વિવિધ સમસ્યાઓના ગાણિતિક ઉકેલ માટે આપણે આ પ્રકરણમાં ચોક્કસ સિદ્ધાંતો અને પદ્ધતિઓનો અભ્યાસ કરીશું.

સૌપ્રથમ આપણે ક્રમચય અને સંચયના સંદર્ભમાં સરવાળા અને ગુણાકારના એમ બે પ્રકારના ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંતોનો અભ્યાસ કરીશું.

ગણતરીનો સરવાળાનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત :

આ સિદ્ધાંતને સમજવા આપણે કેટલાંક ઉદાહરણોનો અભ્યાસ કરીએ. એક રેસ્ટોરન્ટમાં 4 પ્રકારના પિઝા (P_1, P_2, P_3, P_4 કહીએ) અને 3 પ્રકારનાં બર્ગર (B_1, B_2, B_3 કહીએ) મળે છે. જો કોઈ વ્યક્તિ તેમાંથી એક પિઝા **અથવા** બર્ગર ઑર્ડર કરવા માંગતો હોય, તો તેની પાસે કુલ 4 + 3 = 7 $\{P_1, P_2, P_3, P_4, B_1, B_2, B_3\}$ વિકલ્પો છે. તે જ પ્રમાણે કોઈ એક

વર્ગમાં અભ્યાસ કરતા 40 છોકરાઓ અને 20 છોકરીઓમાંથી આ વર્ગના વર્ગશિક્ષક કોઈ એક છોકરા **અથવા** છોકરીને વર્ગના પ્રતિનિધિ તરીકે નિયુક્ત કરવા ઇચ્છે તો તેમની પાસે કુલ $40 + 20 = 60$ વિકલ્પો છે. આમ, જો કોઈ એક સમૂહમાં m ભિન્ન વસ્તુઓ અને બીજા સમૂહમાં n ભિન્ન વસ્તુઓ હોય તો બંને સમૂહોની કુલ વસ્તુઓમાંથી કોઈ પણ એક વસ્તુની પસંદગી $m + n$ પ્રકારે થઈ શકે. આ નિયમને ગણતરીનો સરવાળાનો નિયમ કહે છે.

પ્રથમ સમૂહની m ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી કોઈ એક વસ્તુની પસંદગી	અથવા	બીજા સમૂહની n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી કોઈ એક વસ્તુની પસંદગી
↓	↓	↓
m વિકલ્પો	+	**n વિકલ્પો**

'અથવા' શબ્દનો સૂચિત અર્થ સરવાળો કરી શકાય.

નોંધ : ગણતરીના સરવાળાના મૂળભૂત સિદ્ધાંતને બેથી વધુ સમૂહો માટે પણ લાગુ પાડી શકાય.

ગણતરીનો ગુણાકારનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત :

જો પ્રથમ ક્રિયા m પ્રકારે થઈ શકતી હોય અને બીજી ક્રિયા n પ્રકારે થઈ શકતી હોય તેમજ બંને ક્રિયાઓ સંયુક્ત રીતે કરવાની હોય, તો તે કુલ $m \times n$ પ્રકારે થઈ શકે. આ નિયમને સંયુક્ત ક્રિયાનો ગુણાકારનો સિદ્ધાંત કહે છે. અગાઉનાં ઉદાહરણો દ્વારા જ આ સિદ્ધાંતને સમજીએ. જો તે વ્યક્તિ એક પિઝા **અને** એક બર્ગર ઑર્ડર કરવા માંગતો હોય તો તેની પાસે કુલ $4 \times 3 = 12$ $\{P_1B_1, P_1B_2, P_1B_3, P_2B_1, P_2B_2, P_2B_3, P_3B_1, P_3B_2, P_3B_3, P_4B_1, P_4B_2, P_4B_3\}$ વિકલ્પો છે. તે જ પ્રમાણે જો વર્ગશિક્ષક એક છોકરાને **અને** એક છોકરીને વર્ગના પ્રતિનિધિ તરીકે નિયુક્ત કરવા ઇચ્છે તો તેમની પાસે કુલ $40 \times 20 = 800$ વિકલ્પો થાય.

પ્રથમ સમૂહની m ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી કોઈ એક વસ્તુની પસંદગી	અને	બીજા સમૂહની n ભિન્ન વસ્તુઓમાંથી કોઈ એક વસ્તુની પસંદગી
↓	↓	↓
m વિકલ્પો	$\times$	**n વિકલ્પો**

'અને' શબ્દનો સૂચિત અર્થ ગુણાકાર કરી શકાય.

નોંધ : ગણતરીના ગુણાકારના મૂળભૂત સિદ્ધાંતને બેથી વધુ સમૂહો માટે પણ લાગુ પાડી શકાય.

6.1 ક્રમચયનો અર્થ (Meaning of Permutation)

ક્રમચયનો અર્થ સમજવા સૌપ્રથમ કેટલાંક ઉદાહરણોનો અભ્યાસ કરીએ.

- ધારો કે ત્રણ અંક 2, 5 અને 8 નો ઉપયોગ કરીને અંકોના પુનરાવર્તન વગર બે અંકની સંખ્યા બનાવવી હોય તો જુદી જુદી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

આપેલ અંકો 2, 5, 8 નો ઉપયોગ કરીને બે અંકની સંખ્યાઓ આપસૂઝથી બનાવીએ તો તે 25, 28, 52, 58, 82, 85 એમ કુલ છ સંખ્યાઓ બનાવી શકાય. અહીં એ નોંધવું જરૂરી છે કે કોઈ અંકનું પુનરાવર્તન કરવાની છૂટ ન હોવાથી 22, 55, 88 એવી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય નહિ.

હવે આ જ સમસ્યાને ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ ઉકેલીએ. બે અંકવાળી સંખ્યામાં એકમ અને દશક એમ બે સ્થાન હોય.

2, 5 અને 8 માંથી કોઈપણ એક અંકની ગોઠવણી કરો.	હવે દશકના સ્થાન પર જે અંક ગોઠવાઈ ગયો હોય તે સિવાયના બે અંકોમાંથી કોઈ એક અંકની ગોઠવણી અહીં કરો.
દશકનું સ્થાન	**એકમનું સ્થાન**

આમ, દશકના સ્થાનને ભરવા માટે 2, 5 અને 8 એમ ત્રણ વિકલ્પો છે. જ્યારે દશકનું સ્થાન કોઈ એક અંક દ્વારા ભરાય ગયા પછી એકમનું સ્થાન ભરવા માટે માત્ર બે જ વિકલ્પો છે. એટલે કે કુલ $3 \times 2 = 6$ સંખ્યાઓ બનાવી શકાય. અહીં પહેલા એકમના સ્થાન માટે અંકની પસંદગી કરી પછી દશકના સ્થાન માટે અંકની પસંદગી કરીએ તોપણ પરિણામ બદલાશે નહિ.

નોંધ : આપણા અભ્યાસક્રમમાં વસ્તુઓના પુનરાવર્તનના ક્રમચયોનો સમાવેશ નથી.

- ધારો કે ચાર વિદ્યાર્થીઓ A, B, C, D માંથી એક વિદ્યાર્થીને ક્રિકેટ ટીમનો કપ્તાન અને બીજા વિદ્યાર્થીને ઉપકપ્તાન બનાવવાનો છે. હવે આ સમસ્યાના ઉકેલના કેટલા વિકલ્પો થાય ?

આ સમસ્યાનો ઉકેલ આપસૂઝથી મેળવીએ તો નીચે મુજબ જુદાં જુદાં બાર વિકલ્પો મળે :

વિકલ્પ	કપ્તાન	ઉપકપ્તાન
1	A	B
2	A	C
3	A	D
4	B	A
5	B	C
6	B	D
7	C	A
8	C	B
9	C	D
10	D	A
11	D	B
12	D	C

હવે આ જ સમસ્યાનો ઉકેલ ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંતથી મેળવીએ.

વિદ્યાર્થીઓ A, B, C, D પૈકી કોઈપણ એક વિદ્યાર્થીને કપ્તાન બનાવી શકાય.	હવે જે વિદ્યાર્થીને કપ્તાન બનાવ્યો હોય તેના સિવાયના ત્રણ વિદ્યાર્થીઓમાંથી કોઈ એકને ઉપકપ્તાન બનાવી શકાય.
કપ્તાનનું સ્થાન	**ઉપકપ્તાનનું સ્થાન**

આમ, કપ્તાનની નિયુક્તિ કરવા માટે A, B, C અને D એમ ચાર વિકલ્પો છે. કપ્તાનની નિયુક્તિ થઈ ગયા પછી ઉપકપ્તાનની નિયુક્તિ કરવા માટે માત્ર ત્રણ જ વિકલ્પો છે. એટલે કે કુલ $4 \times 3 = 12$ વિકલ્પો મળી શકે.

- એક 100 મીટરની દોડની સ્પર્ધામાં A, B, C, D, E, F, G, H અને I એમ નવ સ્પર્ધકો ભાગ લે છે. સ્પર્ધામાં ટોચ પર રહેનાર ત્રણ વિજેતાઓને અનુક્રમે ગોલ્ડ, સિલ્વર અને બ્રોન્ઝ એમ ત્રણ મૅડલ ઇનામ તરીકે એનાયત કરવાનાં છે. હવે આપણે આ ત્રણ મૅડલ આ નવ સ્પર્ધકોને મળવાના કુલ વિકલ્પો મેળવવાના છે.

આમ, ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ પ્રથમ ક્રિયા (ગોલ્ડ મૅડલ) 9 પ્રકારે થઈ શકે, બીજી ક્રિયા (સિલ્વર મૅડલ) 8 પ્રકારે થઈ શકે અને ત્રીજી ક્રિયા (બ્રોન્ઝ મૅડલ) 7 પ્રકારે થઈ શકે. તેથી ત્રણેય ક્રિયાઓ સાથે બનવાના કુલ વિકલ્પો $9 \times 8 \times 7 = 504$ થાય. આ સમસ્યાના ઉકેલને નીચે મુજબ પણ દર્શાવી શકાય :

મૅડલ	**ગોલ્ડ**	**સિલ્વર**	**બ્રોન્ઝ**
મૅડલ મેળવનાર સ્પર્ધકોના વિકલ્પો	9	$9 - 1 = 8$	$9 - 2 = 7$

ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંત મુજબ કુલ વિકલ્પો $= 9 \times 8 \times 7 = 504$

(અહીં એ નોંધવું જરૂરી છે કે, સ્પર્ધકોમાં ટાઈ ઉદ્ભવતી નથી.)

n જુદી જુદી વસ્તુઓ આપેલી હોય તો તેમાંથી r ભિન્ન વસ્તુઓને r સ્થાનો $(1 \le r \le n)$ પર ગોઠવવાના દરેક વિકલ્પને ક્રમચય (Permutation) કહે છે. આવી ગોઠવણીની કુલ સંખ્યાને સંકેતમાં ${}^{n}P_{r}$, ${}_{n}P_{r}$, $P(n, r)$, P_{r}^{n} વડે દર્શાવાય છે. આપણે ${}^{n}P_{r}$ સંકેતનો ઉપયોગ કરીશું.

આમ, n જુદી જુદી વસ્તુઓને r સ્થાનો પર ગોઠવવાના કુલ ક્રમચયો ${}^{n}P_{r}$ થાય.

${}^{n}P_{r}$ ને વ્યાખ્યાયિત કરવા પાછળનું કોષ્ટક સમજો.

ધારો કે n જુદી જુદી વસ્તુઓમાંથી r સ્થાનો પર r વસ્તુઓની ગોઠવણી કરવી છે, એટલે કે ${}^{n}P_{r}$ મેળવવું છે. આ ગોઠવણી આ મુજબ થઈ શકે. (સરળ સમજૂતી માટે પાછળના કોષ્ટકને અગાઉના મૅડલવાળા ઉદાહરણ સાથે સરખાવો.)

r સ્થાનો	1	2	3	4	...	r
પ્રત્યેક સ્થાન માટેના શક્ય વિકલ્પો	n $= n - (1-1)$	$n - 1$ $= n - (2-1)$	$n - 2$ $= n - (3-1)$	$n - 3$ $= n - (4-1)$	...	$n - r + 1$ $= n - (r-1)$

ઉપરના કોષ્ટક પરથી સમજી શકાય છે કે પ્રથમ સ્થાનને ભરવા માટે n વિકલ્પો ઉપલબ્ધ છે. હવે કોઈ પણ એક વસ્તુ વડે પ્રથમ સ્થાન ભર્યા બાદ બાકીની $(n-1)$ વસ્તુઓમાંથી કોઈ એક વસ્તુથી બીજું સ્થાન ભરી શકાય. આમ પ્રથમ બે સ્થાનો ભરવાના કુલ વિકલ્પો $n \times (n-1)$ થાય. તે જ પ્રમાણે પ્રથમ ત્રણ સ્થાન ભરવાના કુલ વિકલ્પો $n \times (n-1) \times (n-2)$ થાય. આ મુજબ r સ્થાન ભરવાના કુલ વિકલ્પો $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times .... \times (n - r + 1)$ થાય. જેને n જુદી જુદી વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓને r સ્થાનો પર ગોઠવવાના કુલ ક્રમચયો કહે છે. તેથી,

$$\boxed{{}^{n}\mathbf{P}_{r} = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \times ... \times (n-r+1)}$$

દરેક સ્થાન ભરવાના વિકલ્પોની સંખ્યા તેના અગાઉના સ્થાનના વિકલ્પોની સંખ્યા કરતાં એક ઓછી છે.

ક્રમચયના અભ્યાસમાં ક્રમગુણિત (Factorial) એ ખૂબ જ મહત્ત્વનું સ્થાન ધરાવે છે. સૌ પ્રથમ આપણે ક્રમગુણિતનો અર્થ સમજીએ. આપણે અગાઉ જોયું કે ઘણી બધી સમસ્યાના ઉકેલમાં ક્રમિક સંખ્યાઓની હારમાળાનો ગુણાકાર સમાયેલો છે. આ ગુણાકારને ટૂંકમાં દર્શાવવા માટે ક્રમગુણિતનો ઉપયોગ થાય છે. ક્રમગુણિતને સંકેતમાં '!' કે '$\lfloor$' વડે દર્શાવાય છે. જેમકે $n!$ અથવા $\lfloor\underline{n}$ (વાંચો n ફેક્ટોરિયલ) વડે દર્શાવાય છે. હવે આપણે $n!$ નો અર્થ સમજીએ.

$n!$ એટલે 1 થી n સુધીની તમામ પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર, એટલે કે,

$n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times (n-1) \times n$

અથવા

$n! = n \times (n-1) \times ... \times 3 \times 2 \times 1$ (અનુકૂળતા ખાતર આપણે આ રીતે લખીશું.)

ઉદાહરણ તરીકે જોઈએ તો,

$$\begin{aligned} 7! &= 7 \times (7-1) \times ... \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 5040 \\ 10! &= 10 \times (10-1) \times ... \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 36{,}28{,}800 \end{aligned}$$

તે જ પ્રમાણે,

$$\begin{aligned} 5\,! &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \\ 3\,! &= 3 \times 2 \times 1 = 6 \\ 1\,! &= 1 \\ 6\,! &= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2! \\ &= 6 \times 5 \times 4 \times 3! \\ &= 6 \times 5 \times 4! \\ &= 6 \times 5! \end{aligned}$$

જુઓ ઉપયોગિતા...!

$\frac{6!}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4!}{4!} = 30$

વ્યાપક અર્થમાં,

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 3 \times 2! \\ &= n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 3! \\ &= n(n-1)(n-2)! \\ &= n(n-1)! \end{aligned}$$

$n! = (n)(n-1)!$

$n = 1$ મૂકતાં,

$\therefore \quad 1! = (1)(1-1)!$

$\therefore \quad 1 = 1 \times 0!$

$\therefore \quad 0! = 1$

હવે કેટલાંક અગત્યનાં પરિણામો જોઈએ.

આપણે અગાઉ જોયું તે મુજબ $^nP_r = n(n-1)(n-2) \ldots (n-r+1)$. આ પરિણામને નીચે પ્રમાણે પણ દર્શાવી શકાય :

$$^nP_r = n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1) \times \frac{(n-r)(n-r-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}{(n-r)(n-r-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)(n-r-1) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

$\therefore \quad ^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ જ્યાં, $n > 0$, $r \geq 0$, $n \geq r$, n ધનપૂર્ણાંક સંખ્યા અને r અઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને નીચેનાં પરિણામો તારવી શકાય.

કેટલાંક ઉપયોગી પરિણામો			
$^nP_0 = 1$	$^nP_n = n!$	$^nP_1 = n$	$^nP_{n-1} = n!$
$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ $\therefore\ ^nP_0 = \frac{n!}{(n-0)!}$ $= \frac{n!}{n!}$ $= 1$	$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ $\therefore\ ^nP_n = \frac{n!}{(n-n)!}$ $= \frac{n!}{0!}$ $= n!$	$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ $\therefore\ ^nP_1 = \frac{n!}{(n-1)!}$ $= \frac{n(n-1)!}{(n-1)!}$ $= n$	$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ $\therefore\ ^nP_{n-1} = \frac{n!}{[n-(n-1)]!}$ $= \frac{n!}{(n-n+1)!}$ $= n!$
દા.ત. $^5P_0 = 1$ $^{10}P_0 = 1$	દા.ત. $^5P_5 = 5!$ $^{10}P_{10} = 10!$	દા.ત. $^5P_1 = 5$ $^{10}P_1 = 10$	દા.ત. $^5P_4 = 5!$ $^{10}P_9 = 10!$

ઉદાહરણ 1 : નીચેનાની કિંમતો શોધો :

(1) $^8P_3$ (2) $^{60}P_2$ (3) $^7P_6$ (4) $^5P_5$

(1) $^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$

$$\therefore \quad ^8P_3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{5!} = 336$$

વૈકલ્પિક રીત

^nP_rની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$^nP_r = n(n-1)(n-2) \ldots\ldots (n-r+1)$

$n = 8$ અને $r = 3$ મૂકતાં,

$$\therefore \quad ^8P_3 = 8(8-1)(8-2) = 8 \times 7 \times 6 = 336$$

(2) ${}^{n}P_{r}$ની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$${}^{n}P_{2} = n\ (n - 1)$$

$\therefore$ ${}^{60}P_{2} = 60\ (60 - 1)$

$= 60 \times 59$

$= 3540$

(3) ${}^{n}P_{r}$ની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$${}^{n}P_{6} = n\ (n - 1)\ (n - 2)\ (n - 3)\ (n - 4)\ (n - 5)$$

$\therefore$ ${}^{7}P_{6} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2$

$= 5040$

(4) ${}^{n}P_{r}$ ની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$${}^{n}P_{5} = n\ (n - 1)\ (n - 2)\ (n - 3)\ (n - 4)$$

$\therefore$ ${}^{5}P_{5} = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

$= 120$

ઉદાહરણ 2 : ${}^{n}P_{3} = 720$ હોય તો nની કિંમત શોધો.

${}^{n}P_{r}$ની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$${}^{n}P_{3} = n\ (n - 1)\ (n - 2)$$

$\therefore$ $n\ (n - 1)\ (n - 2) = 720$

હવે વિસ્તરણ કરવાને બદલે આપણે એવું વિચારીશું કે એવી કઈ ત્રણ ક્રમિક કિંમતો છે કે જેમનો ગુણાકાર 720 થાય ? તો ઉકેલ મળશે $10 \times 9 \times 8$. પરંતુ તેને આપણે નીચે મુજબ લખીશું :

$\therefore$ $n\ (n - 1)\ (n - 2) = 10\ (10 - 1)\ (10 - 2)$

$\therefore$ $n = 10$

ઉદાહરણ 3 : ${}^{7}P_{r} = 42$ હોય તો r ની કિંમત શોધો.

$${}^{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$\therefore$ ${}^{7}P_{r} = \frac{7!}{(7-r)!}$

$\therefore$ $42 = \frac{7!}{(7-r)!}$

$\therefore$ $(7 - r)! = \frac{7!}{42}$

$\therefore$ $(7 - r)! = \frac{7 \times 6 \times 5!}{42}$

$\therefore$ $(7 - r)! = 5!$

$\therefore$ $7 - r = 5$

$\therefore$ $r = 2$

વૈકલ્પિક રીત :

${}^{7}P_{r} = 42$

$\therefore$ ${}^{7}P_{r} = 7 \times 6$

$\therefore$ ${}^{7}P_{r} = {}^{7}P_{2}$

$\therefore$ $r = 2$

ઉદાહરણ 4 : $56 \times n! = 8!$ હોય તો nની કિંમત શોધો.

$56 \times n! = 8 \times 7 \times 6!$

$\therefore \quad n! = 6!$

$\therefore \quad n = 6$

ઉદાહરણ 5 : $\frac{n!}{2} = 60$ હોય તો nની કિંમત શોધો.

$$\frac{n!}{2} = 60$$

$\therefore \quad n! = 120 \; (= 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5)$

$\therefore \quad n! = 5!$

$\therefore \quad n = 5$

ઉદાહરણ 6 : ${}^{(n+2)}P_3 : {}^{(n+1)}P_3 = 10 : 7$ હોય તો n શોધો.

$$\frac{{}^{(n+2)}P_3}{{}^{(n+1)}P_3} = \frac{10}{7}$$

$$\therefore \quad \frac{(n+2)\,(n+1)\,(n)}{(n+1)\,(n)\,(n-1)} = \frac{10}{7}$$

$$\therefore \quad \frac{n+2}{n-1} = \frac{10}{7}$$

$\therefore \quad 7(n+2) = 10(n-1)$

$\therefore \quad 7n + 14 = 10n - 10$

$\therefore \quad 3n = 24$

$\therefore \quad n = 8$

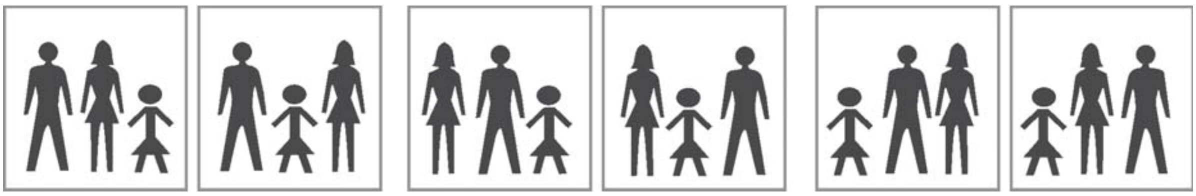
ઉદાહરણ 7 : એક કુટુંબના ત્રણ સભ્યો પતિ, પત્ની અને પુત્રીને એક ગ્રૂપફોટા માટે એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય ?

અહીં કુટુંબમાં ત્રણ સભ્યો છે. તેમને ગ્રૂપફોટા માટે એક હારમાં કુલ ${}^3P_3$ રીતે ગોઠવી શકાય.

$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= {}^3P_3$

$= 3!$

$= 6$



ઉદાહરણ 8 : 2, 5, 7, 8 એ બધા અંકનો ઉપયોગ કરીને ચાર અંકની,

(1) કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

(2) તેમાંથી કેટલી સંખ્યા યુગ્મ હશે ?

(3) કેટલી સંખ્યાઓ 5 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી હશે ?

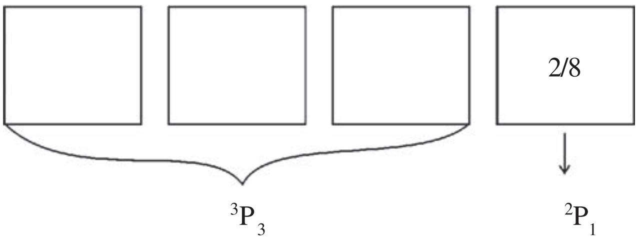
(4) કેટલી સંખ્યાઓ 5000 કરતાં મોટી હશે ?

(1) 2, 5, 7, 8 એ બધા એટલે કે ચાર અંકનો ઉપયોગ કરીને ચાર અંકની કુલ $^4P_4$ સંખ્યાઓ બનાવી શકાય.

$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= {}^4P_4$
$= 4!$
$= 24$

2578	5278	7258	8257
2587	5287	7285	8275
2758	5728	7528	8527
2785	5782	7582	8572
2857	5827	7825	8725
2875	5872	7852	8752
દરેક પ્રશ્નના ક્રમચયોની કુલ સંખ્યા આ કોષ્ટકમાંની ગોઠવણી સાથે ચકાસો.			

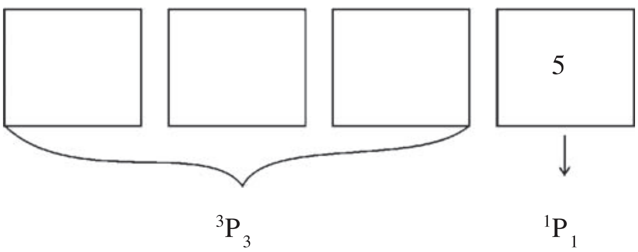
(2)



2, 5, 7, 8 એ બધા અંકનો ઉપયોગ કરીને યુગ્મ સંખ્યા બનાવવી હોય તો એકમના સ્થાન પર 2 અથવા 8 ગોઠવાવું જોઈએ. તેથી તેની ગોઠવણી $^2P_1$ રીતે થઈ શકે. હવે એકમના સ્થાન પર 2 કે 8 બેમાંથી એક અંક ગોઠવાઈ ગયા પછી બાકીના ત્રણ અંકને બાકીના ત્રણ સ્થાન પર $^3P_3$ રીતે ગોઠવી શકાય.

$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= {}^2P_1 \times {}^3P_3$
$= 2 \times 3!$
$= 2 \times 6$
$= 12$

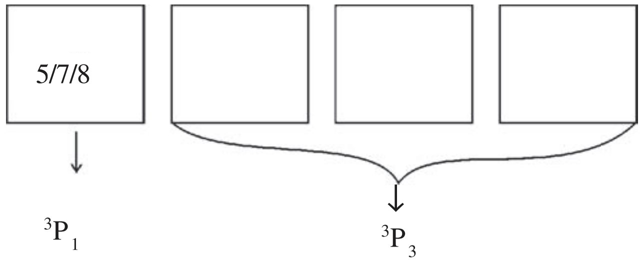
(3)



2, 5, 7, 8 એ બધા અંકનો ઉપયોગ કરીને 5 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી સંખ્યા બનાવવી હોય તો એકમના સ્થાન પર 5 આવવો જોઈએ. તેથી તેની ગોઠવણી $^1P_1$ રીતે થઈ શકે. હવે એકમના સ્થાન પર 5 ગોઠવાઈ ગયા પછી બાકીના ત્રણ અંકને બાકીનાં ત્રણ સ્થાન પર $^3P_3$ રીતે ગોઠવી શકાય.

$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= {}^1P_1 \times {}^3P_3$
$= 1! \times 3!$
$= 1 \times 6$
$= 6$

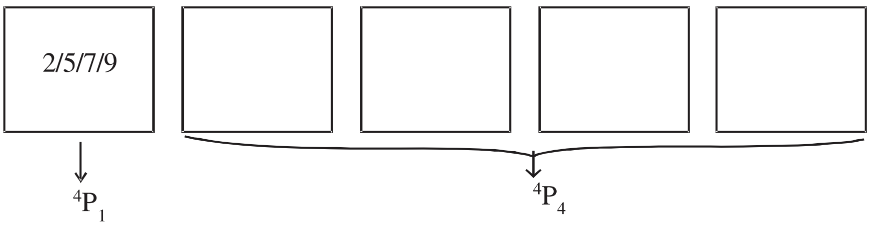
(4)



2, 5, 7, 8 એ બધા અંકનો ઉપયોગ કરીને 5000 કરતાં મોટી સંખ્યા બનાવવી હોય તો, હજારના સ્થાન (પ્રથમ સ્થાન) પર 5, 7 કે 8 આવવું જોઈએ. તેથી તેની ગોઠવણી $^3P_1$ રીતે થઈ શકે. હવે હજારના સ્થાન પર 5, 7 કે 8 એ ત્રણમાંથી એક અંકની ગોઠવણી થઈ ગયા પછી બાકીના ત્રણ અંકની ગોઠવણી બાકીના ત્રણ સ્થાન પર $^3P_3$ રીતે થઈ શકે.

$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= {}^3P_1 \times {}^3P_3$
$= 3 \times 3!$
$= 3 \times 6$
$= 18$

ઉદાહરણ 9 : 2, 5, 0, 7 અને 9 એ બધા જ અંકનો ઉપયોગ કરી પાંચ અંકની કુલ કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

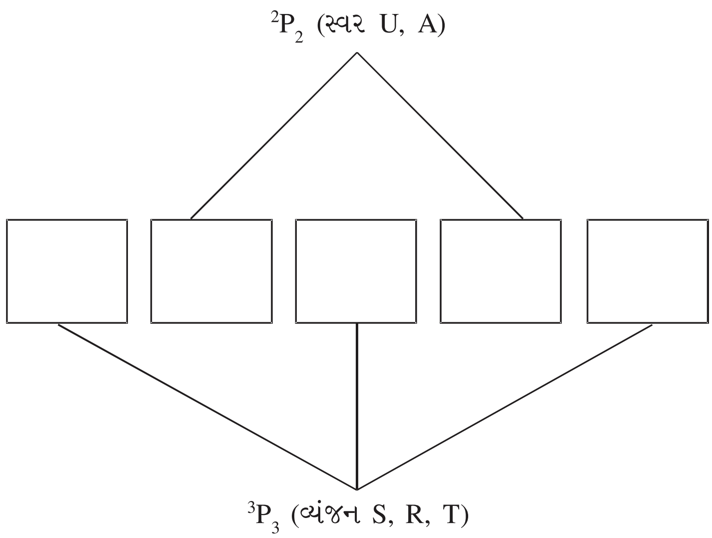


2, 5, 0, 7, 9 એ બધા જ અંકનો ઉપયોગ કરીને પાંચ અંકની સંખ્યા બનાવવી હોય તો સંખ્યાનો પ્રથમ અંક 0 હોવો જોઈએ નહિ. તેથી સંખ્યાના પ્રથમ સ્થાન પર 0 સિવાયના બાકીના ચાર અંકમાંથી કોઈ એક અંકની ગોઠવણી $^4P_1$ રીતે કરી શકાય. હવે પ્રથમ સ્થાન પર 2, 5, 7 કે 9 માંથી કોઈ એક અંકની ગોઠવણી થઈ ગયા બાદ બાકીના ચાર અંક (શૂન્ય સહિત)ની ગોઠવણી બાકીનાં ચાર સ્થાનો પર $^4P_4$ રીતે કરી શકાય.

> જો પ્રથમ સ્થાન પર 0 મૂકીએ તો તે સંખ્યા ચાર અંકની જ બને જેમકે,
> 02579 = 2579
> 09752 = 9752

$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= {}^4P_1 \times {}^4P_4$
$= 4 \times 4!$
$= 4 \times 24$
$= 96$

ઉદાહરણ 10 : SURAT શબ્દના બધા જ અક્ષરોની એવી કેટલી ગોઠવણીઓ કરી શકાય કે જેમાં સ્વર યુગ્મ સ્થાન પર જ આવે ?



SURAT શબ્દમાં U અને A એમ બે સ્વર છે. હવે તેમને બીજા અને ચોથા એમ બે યુગ્મ સ્થાનો પર $^2P_2$ રીતે ગોઠવી શકાય. બાકીના ત્રણ અક્ષરો (વ્યંજન)ને બાકીનાં ત્રણ (અયુગ્મ) સ્થાનો પર $^3P_3$ રીતે ગોઠવી શકાય.

$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= {}^2P_2 \times {}^3P_3$

$= 2! \times 3!$

$= 2 \times 6$

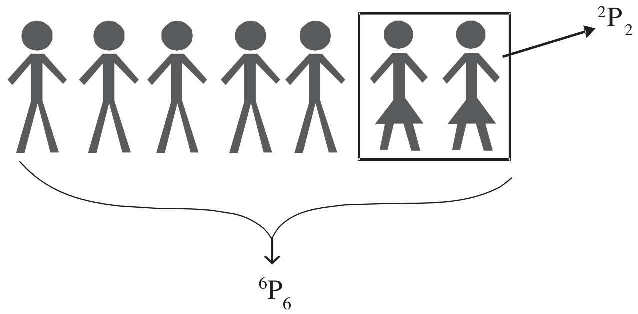
$= 12$

ઉદાહરણ 11 : 5 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી ગોઠવણીમાં,

(1) બંને છોકરીઓ એક સાથે જ ગોઠવાય ?

(2) બંને છોકરીઓ એક સાથે ન ગોઠવાય ?

(1)



બે છોકરીઓને એક સાથે જ ગોઠવવાની હોવાથી તેમને એક જ વ્યક્તિ ગણતાં કુલ 6 વ્યક્તિઓને $^6P_6$ રીતે ગોઠવી શકાય અને આ પ્રત્યેક ગોઠવણીમાં બે છોકરીઓને અંદરોઅંદર $^2P_2$ રીતે ગોઠવી શકાય.

$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= {}^6P_6 \times {}^2P_2$

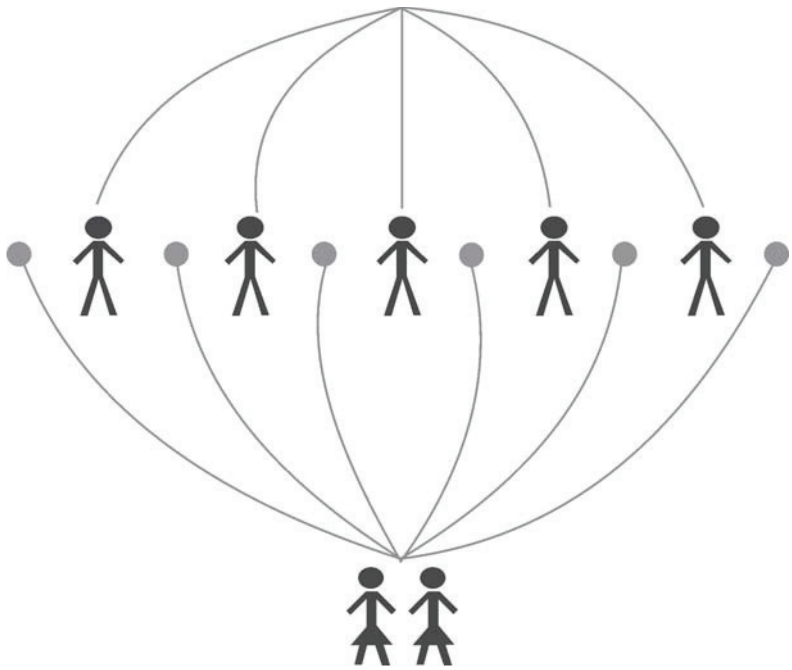
$= 6! \times 2!$

$= 720 \times 2$

$= 1440$

(2)

$^5P_5$ (છોકરાઓ)



$^6P_2$ (છોકરીઓ)

બે છોકરીઓને એક સાથે ગોઠવવાની ન હોવાથી તેમને પાંચ છોકરાઓની વચ્ચેની અને આજુબાજુની એમ કુલ છ જગ્યાઓ પર $^6P_2$ રીતે ગોઠવી શકાય. ઉપરાંત પાંચ છોકરાઓને $^5P_5$ રીતે ગોઠવી શકાય.

$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= {}^6P_2 \times {}^5P_5$

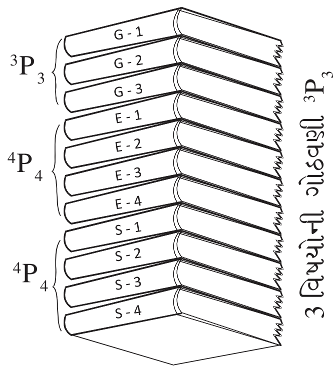
$= 6 \times 5 \times 5!$

$= 30 \times 120$

$= 3600$

ઉદાહરણ 12 : એક ટેબલ ઉપર ગુજરાતી ભાષાનાં જુદાં જુદાં 3, અંગ્રેજી ભાષાનાં જુદાં જુદાં 4 અને સંસ્કૃત ભાષાનાં જુદાં જુદાં 4 પુસ્તકો કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી દરેક વિષયનાં પુસ્તકો એક સાથે જ આવે ?

ગુજરાતી ભાષાનાં જુદાં જુદાં ત્રણ પુસ્તકો $^3P_3$ રીતે, અંગ્રેજી ભાષાનાં જુદાં જુદાં ચાર પુસ્તકો $^4P_4$ રીતે અને સંસ્કૃત ભાષાનાં જુદાં જુદાં ચાર પુસ્તકોને $^4P_4$ રીતે ગોઠવી શકાય. ઉપરાંત ત્રણેય વિષયોની ગોઠવણી $^3P_3$ રીતે થઈ શકે.



$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= {}^3P_3 \times {}^4P_4 \times {}^4P_4 \times {}^3P_3$

$= 3! \times 4! \times 4! \times 3!$

$= 6 \times 24 \times 24 \times 6$

$= 20{,}736$

પ્રવૃત્તિ

તમારી આંકડાશાસ્ત્ર, નામા અને અર્થશાસ્ત્રની નોટબુક અને તમારા એક મિત્રના નામ લખેલી આંકડાશાસ્ત્ર અને નામાની નોટબુક એકઠી કરો. હવે, આ તમામ નોટબુકને એક પર એક શક્ય તમામ રીતે આપસૂઝથી એવી રીતે ગોઠવો કે જેથી દરેક વિષયની નોટબુક એક સાથે જ રહે. આવી જુદી જુદી કેટલી ગોઠવણી કરી શકાય તે શોધો. હવે આ જ સમસ્યાનો ઉકેલ ગણતરીના મૂળભૂત સિદ્ધાંતના ઉપયોગથી મેળવી બંને જવાબ સરખાવો.

ઉદાહરણ 13 : ત્રણ છોકરાઓ અને ત્રણ છોકરીઓને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી છોકરાઓ અને છોકરીઓ વારાફરતી આવે ?

અહીં છોકરાઓ (B) અને છોકરીઓ (G)ને વારાફરતી ગોઠવવાના હોવાથી ગોઠવણી બાજુ મુજબ કરી શકાય :

B G B G B G

અથવા

G B G B G B

જો ગોઠવણીની શરૂઆત છોકરાથી કરીએ તો તે ગોઠવણી $({}^3P_3 \times {}^3P_3)$ રીતે ***અથવા*** જો ગોઠવણીની શરૂઆત છોકરીથી કરીએ તો તે ગોઠવણી $({}^3P_3 \times {}^3P_3)$ રીતે થઈ શકે.

$\therefore$ **કુલ ક્રમચય** $= ({}^3P_3 \times {}^3P_3) + ({}^3P_3 \times {}^3P_3)$
$= (3! \times 3!) + (3! \times 3!)$
$= (6 \times 6) + (6 \times 6)$
$= 36 + 36$
$= 72$

ઉદાહરણ 14 : YOUNG શબ્દના બધા જ અક્ષરોથી બનતી તમામ ગોઠવણીઓને ડિક્સનરી ક્રમ મુજબ ગોઠવતાં YOUNG શબ્દ કેટલામા ક્રમે આવે ?

YOUNG શબ્દમાં Y, O, U, N, G એમ પાંચ અક્ષરો છે, જેમને ${}^5P_5 = 5! = 120$ રીતે ગોઠવી શકાય. હવે બનતી કુલ 120 ગોઠવણીઓ ડિક્સનરી ક્રમ મુજબ ગોઠવતા YOUNG શબ્દ કેટલામા ક્રમે આવે તે મેળવવાનું છે.

YOUNG શબ્દના મૂળાક્ષર ક્રમ G, N, O, U, Y છે.

G પ્રથમ સ્થાન પર આવે તેવી કુલ ${}^1P_1 \times {}^4P_4 = 24$ ગોઠવણીઓ થાય.

N પ્રથમ સ્થાન પર આવે તેવી કુલ ${}^1P_1 \times {}^4P_4 = 24$ ગોઠવણીઓ થાય.

O પ્રથમ સ્થાન પર આવે તેવી કુલ ${}^1P_1 \times {}^4P_4 = 24$ ગોઠવણીઓ થાય.

U પ્રથમ સ્થાન પર આવે તેવી કુલ ${}^1P_1 \times {}^4P_4 = 24$ ગોઠવણીઓ થાય.

Y પ્રથમ સ્થાન પર અને G બીજા સ્થાન પર આવે તેવી કુલ ${}^1P_1 \times {}^1P_1 \times {}^3P_3 = 6$ ગોઠવણીઓ થાય.

Y પ્રથમ અને N બીજા સ્થાન પર આવે તેવી કુલ ${}^1P_1 \times {}^1P_1 \times {}^3P_3 = 6$ ગોઠવણીઓ થાય.

Y પ્રથમ, O બીજા અને G ત્રીજા સ્થાન પર આવે તેવી કુલ ${}^1P_1 \times {}^1P_1 \times {}^1P_1 \times {}^2P_2 = 2$ ગોઠવણીઓ થાય.

Y પ્રથમ, O બીજા અને N ત્રીજા સ્થાન પર આવે તેવી કુલ ${}^1P_1 \times {}^1P_1 \times {}^1P_1 \times {}^2P_2 = 2$ ગોઠવણીઓ થાય.

Y પ્રથમ, O બીજા, U ત્રીજા અને G ચોથા સ્થાન પર આવે તેવી કુલ ${}^1P_1 \times {}^1P_1 \times {}^1P_1 \times {}^1P_1 \times {}^1P_1 = 1$ ગોઠવણીઓ થાય.

ત્યાર પછીનો શબ્દ YOUNG આવે જે પોતે એક ક્રમ ધરાવે છે.

$\therefore$ YOUNG શબ્દનો ડિક્સનરી ક્રમ $= 24 + 24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 2 + 2 + 1 + 1 = 114$

ઉપર્યુક્ત ઉદાહરણને સમજવા નીચેના કોષ્ટકની માહિતીનો અભ્યાસ કરો :

TAB શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી ${}^3P_3 = 3! = 6$ ગોઠવણીઓ બને, જે આ મુજબ છે. TAB, TBA, ATB, ABT, BTA, BAT. હવે આ 6 ગોઠવણીઓને ડિક્સનરી ક્રમ મુજબ ગોઠવતા તેઓના ક્રમ આ મુજબ થાય. ABT, ATB, BAT, BTA, TAB, TBA. આમ, TAB શબ્દ પાંચમા ક્રમે આવે.

પ્રવૃત્તિ

ZERO શબ્દના બધા જ અક્ષરોથી બનતી તમામ ગોઠવણીઓ આપસૂઝથી બનાવો. આ તમામ ગોઠવણીઓને ડિક્સનરી ક્રમ મુજબ ગોઠવી ZERO શબ્દ કેટલામા ક્રમે આવે તે જુઓ. હવે આ સમસ્યાનો ઉકેલ ઉપરના ઉદાહરણની ગણતરી મુજબ મેળવી બંને જવાબો સરખાવો.

સમસ્વરૂપ વસ્તુઓના ક્રમચય (Permutation of identical things)

જ્યારે કુલ N વસ્તુઓમાંથી A વસ્તુઓ સમસ્વરૂપની અને બાકીની બધી જ વસ્તુઓ ભિન્ન હોય ત્યારે કુલ ક્રમચય $\frac{N!}{A!}$ થાય. જેમકે BEE શબ્દમાં કુલ ત્રણ અક્ષરો (N = 3) છે, જે પૈકી E એ બે (A = 2) વખત પુનરાવર્તિત થાય છે, તો BEE શબ્દના બધા જ અક્ષરોની ગોઠવણીના કુલ ક્રમચય $\frac{N!}{A!} = \frac{3!}{2!} = \frac{6}{2} = 3$ થાય. આપણે સમજી શકીએ છીએ કે, BEE, EBE, EEB એમ ત્રણ જ ગોઠવણી શક્ય બને. આમ વ્યાપક રીતે જોઈએ તો કુલ N વસ્તુઓમાંથી A વસ્તુઓ એક પ્રકારની સમસ્વરૂપની હોય, B વસ્તુઓ બીજા પ્રકારની સમસ્વરૂપની હોય, C વસ્તુઓ ત્રીજા પ્રકારની સમસ્વરૂપની અને બાકીની બધી જ વસ્તુઓ ભિન્ન હોય, તો કુલ N વસ્તુઓના કુલ ક્રમચય $\frac{N!}{A!\,B!\,C!}$ થાય.

ઉદાહરણ 15 : CINCINNATI શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરીને કુલ કેટલી ગોઠવણીઓ કરી શકાય ?

CINCINNATI શબ્દમાં કુલ 10 અક્ષરો છે, જે પૈકી C એ 2 વખત, I એ 3 વખત અને N એ 3 વખત પુનરાવર્તિત થાય છે.

$$\therefore \quad \text{કુલ ક્રમચય} = \frac{10!}{2!\,3!\,3!}$$

$$= \frac{3628800}{2\times6\times6}$$

$$= 50,400$$

સ્વાધ્યાય 6.1

1. નીચેનાની કિંમતો મેળવો :

(1) ${}^{10}P_3$ (2) ${}^{50}P_2$ (3) ${}^{8}P_7$ (4) ${}^{9}P_9$

2. ${}^{n}P_3 = 990$ હોય તો n ની કિંમત શોધો.

3. ${}^{9}P_r = 3024$ હોય તો r ની કિંમત શોધો.

4. $3\cdot{}^{(n+3)}P_4 = 5\cdot{}^{(n+2)}P_4$ હોય તો n ની કિંમત શોધો.

5. 4 વ્યક્તિઓને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય ?

6. 1, 2, 3, 0, 7, 9 એ બધા અંકનો ઉપયોગ કરી છ અંકવાળી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

7. 5 છોકરાઓ અને 3 છોકરીઓને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી ગોઠવણીમાં બધા જ છોકરાઓ એક સાથે ગોઠવાય ?

8. એક પ્રાણી-સંગ્રહાલયમાં 7 વાઘને પૂરવા માટે 7 પાંજરાં છે. 7 પાંજરાંમાંથી 3 પાંજરાં એટલાં નાનાં છે કે જેમાં 7 વાઘ પૈકીના 3 વાઘ જઈ શકતા નથી, તો આ 7 વાઘને 7 પાંજરાંઓમાં કેટલી રીતે પૂરી શકાય ?

9. 2, 3, 5, 8, 9 એ બધા અંકનો ઉપયોગ કરી 50,000 કરતાં મોટી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

10. એક વ્યક્તિ પાસે જુદાં જુદાં કદની 5 ચૉકલેટ છે. આ પાંચ ચૉકલેટ જુદી જુદી ઉંમરનાં પાંચ બાળકોમાં વહેંચવાની છે. જો સૌથી મોટી ચૉકલેટ સૌથી નાના બાળકને આપવાની હોય, તો આ પાંચ ચૉકલેટ પાંચ બાળકોમાં કેટલી રીતે વહેંચી શકાય ?

11. નીચેના શબ્દોના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી કુલ કેટલી ગોઠવણીઓ કરી શકાય ?

(1) STATISTICS (2) BOOKKEEPER (3) APPEARING

12. ASHOK શબ્દના બધા જ અક્ષરોથી બનતી ગોઠવણીઓ અને GEETA શબ્દના બધા જ અક્ષરોથી બનતી ગોઠવણીઓનો ગુણોત્તર કેટલો થશે ?

13. એક મોટરકારમાં ડ્રાઈવરની સીટ સહિત કુલ 5 જગ્યાઓ છે. એક કુટુંબના 10 સભ્યોમાંથી 3 સભ્યોને ડ્રાઈવિંગ આવડે છે, તો 10 સભ્યોમાંથી 5 વ્યક્તિઓને જુદી જુદી કેટલી રીતે મોટરકારમાં ગોઠવી શકાય ?

14. નીચે આપેલા શબ્દોના બધા જ અક્ષરોથી બનતી ગોઠવણીઓને ડિક્સનરી ક્રમ મુજબ ગોઠવતાં તે શબ્દ કેટલામા ક્રમે આવે ?

(1) PINTU (2) NURI (3) NIRAL (4) SUMAN (5) RUTVA

15. SHLOKA શબ્દના બધા જ અક્ષરોની એવી કેટલી ગોઠવણીઓ કરી શકાય કે જેમાં સ્વર એક સાથે જ આવે ?

16. એક કાર્યક્રમમાં 7 વક્તાઓ A, B, C, D, E, F, Gને ભાષણ આપવા આમંત્રિત કરેલ છે. દરેક વક્તાઓએ વારાફરતી ભાષણ આપવાનું છે. જો વક્તા A પછી તરત જ વક્તા Bને ભાષણ આપવાનું હોય, તો આ સાત વક્તાઓનાં ભાષણ કુલ કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય ?

*

6.2 સંચયનો અર્થ (Meaning of Combination)

અગાઉ આપણે જુદી જુદી વસ્તુઓની ગોઠવણી કેટલા પ્રકારે થઈ શકે તેનો એટલે કે ક્રમચયનો અભ્યાસ કર્યો. હવે, આપણે જુદી જુદી વસ્તુઓમાંથી અમુક વસ્તુઓની પસંદગી કેટલી રીતે થઈ શકે તેનો વિચાર કરીએ. દા.ત., તાનિયાને ત્રણ મિત્રો છે, જેમનાં નામ ઋત્વા, કથન અને કીર્તિ છે. હવે જો આ ત્રણ મિત્રોની બે સ્થાન પર ગોઠવણી કરવી હોય તો તે ${}^3P_2 = 3 \times 2 = 6$ રીતે થઈ શકે જે નીચે મુજબ છે :

ગોઠવણીના પ્રકારો	1	2	3	4	5	6
પ્રથમ સ્થાન	ઋત્વા	ઋત્વા	કથન	કથન	કીર્તિ	કીર્તિ
બીજું સ્થાન	કથન	કીર્તિ	ઋત્વા	કીર્તિ	ઋત્વા	કથન

પરંતુ હવે આપણે પસંદગીના પ્રકારોનો વિચાર કરવાનો છે. તાનિયા પોતાના ઘરે એક પ્રસંગમાં ઉપર્યુક્ત ત્રણ મિત્રોમાંથી બે જ મિત્રોને આમંત્રણ આપવા માંગે છે, તો તાનિયા પાસે ત્રણ મિત્રોમાંથી બે મિત્રો પસંદ કરવાના કુલ કેટલા વિકલ્પો છે ? તાનિયા ઋત્વા અને કથનને આમંત્રણ આપશે ? ઋત્વા અને કીર્તિને આમંત્રણ આપશે ? કે કથન અને કીર્તિને આમંત્રણ આપશે ? આમ આવા જુદાં જુદાં માત્ર ત્રણ જ વિકલ્પ ઉદ્ભવી શકે જે નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવ્યા છે :

પસંદગીના વિકલ્પો	**1**	**2**	**3**
પસંદ થયેલ મિત્રો	ઋત્વા અને કથન	ઋત્વા અને કીર્તિ	કથન અને કીર્તિ

અહીં એ નોંધવું જરૂરી છે કે, ક્રમચયમાં ક્રમનું મહત્વ હોય છે એટલે કે 'ઋત્વા અને કથન' તથા 'કથન અને ઋત્વા' એ બંને ક્રમચયની દૃષ્ટિએ અલગ છે. જ્યારે અહીં પસંદગીમાં ક્રમનું મહત્ત્વ હોતું નથી. એટલે કે તાનિયાના ઘરે 'ઋત્વા અને કથન' આવશે કે 'કથન અને ઋત્વા' આવશે એ બંનેનો અર્થ એક જ થાય છે. આમ, ત્રણ મિત્રોમાંથી બે મિત્રોની પસંદગી કુલ ત્રણ રીતે થઈ શકે. પસંદગીના આ વિકલ્પોને સંચય (Combination) કહે છે જેને આપણે $^3C_2$ વડે દર્શાવીશું. એટલે કે એમ કહી શકાય કે $^3C_2 = 3$ થાય. વ્યાપક સ્વરૂપે, જુદી જુદી n વસ્તુઓમાંથી r $(\le n)$ વસ્તુઓને પસંદ કરવાના કુલ સંચયો ^nC_r થાય છે એમ કહી શકાય. જેને $_nC_r$, $C(n, r)$, C_r^n વડે પણ દર્શાવાય છે. આપણે ^nC_r સંકેતનો ઉપયોગ કરીશું.

આમ, n જુદી જુદી વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓ પસંદ કરવાના કુલ સંચયો ^nC_r થાય.

હવે ^nC_rની કિંમત કેવી રીતે મળે તે જોઈએ. n જુદી જુદી વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓ પસંદ કરવાના કુલ સંચયો ^nC_r છે. પસંદગી કરવાના દરેક વિકલ્પમાં r વસ્તુઓ હોય છે. r વસ્તુઓની અંદરોઅંદર ગોઠવણી $^rP_r = r!$ રીતે થઈ શકે. આમ, દરેક સંચયને અનુરૂપ $r!$ ક્રમચયો મળે. તેથી ^nC_r સંચયોને અનુરૂપ $^nC_r \times r!$ ક્રમચયો થાય. પરંતુ આપણે અગાઉ જોયું છે કે, n જુદી જુદી વસ્તુઓમાંથી r વસ્તુઓના કુલ ક્રમચયો ^nP_r છે.

આમ, $^nP_r = {^nC_r} \times r!$

$$\therefore \quad {^nC_r} = \frac{^nP_r}{r!}$$

^nP_rની જગ્યાએ તેનું સૂત્ર મૂકતાં,

$$\therefore \quad {^nC_r} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$$= \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

$\therefore\ {^nC_r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ જ્યાં, $n > 0$, $r \ge 0$, $n \ge r$, n ધનપૂર્ણાંક સંખ્યા અને r અઋણ પૂર્ણાંક સંખ્યા છે.

આ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીને નીચેનાં પરિણામો તારવી શકાય :

કેટલાંક ઉપયોગી પરિણામો				
$^n\mathbf{C}_0 = \mathbf{1}$	$^n\mathbf{C}_n = \mathbf{1}$	$^n\mathbf{C}_1 = \boldsymbol{n}$	$^n\mathbf{C}_{n-1} = \boldsymbol{n}$	$^n\mathbf{C}_r = {}^n\mathbf{C}_{n-r}$
$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ $\therefore\ ^nC_0 = \frac{n!}{0!(n-0)!}$ $= \frac{n!}{n!}$ $= 1$	$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ $\therefore\ ^nC_n = \frac{n!}{n!(n-n)!}$ $= \frac{n!}{n!}$ $= 1$	$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ $\therefore\ ^nC_1 = \frac{n!}{1!(n-1)!}$ $= \frac{n(n-1)!}{1\times(n-1)!}$ $= n$	$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ $\therefore\ ^nC_{n-1} = \frac{n!}{(n-1)![n-(n-1)]!}$ $= \frac{n!}{(n-1)!}$ $= n$	$^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ $\therefore\ ^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)![n-(n-r)]!}$ $= \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$ $= {}^nC_r$
દા.ત. $^5C_0 = 1$ $^{10}C_0 = 1$	દા.ત. $^5C_5 = 1$ $^{10}C_{10} = 1$	દા.ત. $^5C_1 = 5$ $^{10}C_1 = 10$	દા.ત. $^5C_4 = 5$ $^{10}C_9 = 10$	દા.ત. $^5C_4 = {}^5C_1$ $^{10}C_7 = {}^{10}C_3$
જો $^nC_x = {}^nC_y$ હોય તો, $x + y = n$ અથવા $x = y$ થાય.				

ઉદાહરણ 16 : નીચેનાની કિંમતો મેળવો :

(1) $^8\mathbf{C}_3$ **(2)** $^{20}\mathbf{C}_3$ **(3)** $^5\mathbf{C}_4$ **(4)** $^6\mathbf{C}_6$

(1) $^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$

$\therefore \quad ^8C_3 = \frac{8!}{3!\,(8-3)!}$

$= \frac{8!}{3! \times 5!}$

$= \frac{8\times7\times6\times5!}{3\times2\times1\times5!}$

$= 56$

વૈકલ્પિક રીત :

^nC_rની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$^nC_r = \frac{^nP_r}{r!}$

$\therefore \quad ^8C_3 = \frac{^8P_3}{3!}$

$= \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}$

$= 56$

(2) ^nC_rની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$^nC_r = \frac{^nP_r}{r!}$

$\therefore \quad ^{20}C_3 = \frac{^{20}P_3}{3!}$

$= \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1}$

$= 1140$

(3) ${}^{n}C_r$ની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$${}^{n}C_r = \frac{{}^{n}P_r}{r!}$$

$$\therefore \quad {}^{5}C_4 = \frac{{}^{5}P_4}{4!}$$

$$= \frac{5\times4\times3\times2}{4\times3\times2\times1}$$

$$= 5$$

(4) ${}^{n}C_r$ની વ્યાખ્યા અનુસાર,

$${}^{n}C_r = \frac{{}^{n}P_r}{r!}$$

$$\therefore \quad {}^{6}C_6 = \frac{{}^{6}P_6}{6!}$$

$$= \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{6\times5\times4\times3\times2\times1}$$

$$= 1$$

ઉદાહરણ 17 : ${}^{n}C_2 = 45$ હોય તો nની કિંમત શોધો.

$${}^{n}C_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$\therefore \quad {}^{n}C_2 = \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\therefore \quad 45 = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)!}{2\times1\times(n-2)!}$$

$$\therefore \quad 90 = n\,(n-1)$$

$$\therefore \quad n\,(n-1) = 10\,(10-1)$$

$$\therefore \quad n = 10$$

વૈકલ્પિક રીત :

$${}^{n}C_2 = 45$$

$$\therefore \quad \frac{n\,(n-1)}{2\times1} = 45$$

$$\therefore \quad n\,(n-1) = 90$$

$$\therefore \quad n\,(n-1) = 10\,(10-1)$$

$$\therefore \quad n = 10$$

ઉદાહરણ 18 : $3\cdot{}^{2n}C_3 = 44\cdot{}^{n}C_2$ હોય તો nની કિંમત શોધો.

$$3\cdot{}^{2n}C_3 = 44\cdot{}^{n}C_2$$

$$\therefore \quad \frac{3\times2n\,(2n-1)\,(2n-2)}{3\times2\times1} = \frac{44\times n\,(n-1)}{2\times1}$$

$$\therefore \quad \frac{2n\,(2n-1)\,2\,(n-1)}{2} = \frac{44n\,(n-1)}{2}$$

$$\therefore \quad 4\,(2n-1) = 44$$

$$\therefore \quad 2n-1 = 11$$

$$\therefore \quad 2n = 12$$

$$\therefore \quad n = 6$$

ઉદાહરણ **19 :** $^nC_{n-3} = 56$ **હોય તો** n**ની કિંમત શોધો.**

$^nC_{n-3} = {}^nC_3$ $\quad [\because\ {}^nC_r = {}^nC_{n-r}]$

$\therefore \quad {}^nC_3 = 56$

$\therefore \quad \frac{n\,(n-1)\,(n-2)}{3 \times 2 \times 1} = 56$

$\therefore \quad n\,(n-1)\,(n-2) = 336$

$\therefore \quad n\,(n-1)\,(n-2) = 8\,(8-1)\,(8-2)$

$\therefore \quad n = 8$

ઉદાહરણ **20 : જો** $^nC_4 = {}^nC_6$ **હોય તો** n**ની કિંમત શોધો.**

આપણે જાણીએ છીએ કે $^nC_x = {}^nC_y$ હોય તો,

વિકલ્પ 1 :

$x + y = n$

$\therefore \quad 4 + 6 = n$

$\therefore \quad n = 10$

વિકલ્પ 2 :

$x = y$

$\therefore\ 4 = 6$

જે શક્ય નથી.

આમ, nની કિંમત 10 મળે.

ઉદાહરણ **21 : જો** $^{50}C_{r+2} = {}^{50}C_{2r-3}$ **હોય તો** r**ની કિંમત શોધો.**

આપણે જાણીએ છીએ કે $^nC_x = {}^nC_y$ હોય તો,

વિકલ્પ 1 :

$x + y = n$

$\therefore \quad (r + 2) + (2r - 3) = 50$

$\therefore \quad r + 2 + 2r - 3 = 50$

$\therefore \quad 3r = 51$

$\therefore \quad r = 17$

વિકલ્પ 2 :

$x = y$

$\therefore \quad r + 2 = 2r - 3$

$\therefore \quad r = 5$

ઉદાહરણ **22 : એક કંપનીમાં નોકરી કરતા 3 પુરુષ મૅનેજર અને 2 સ્ત્રી મૅનેજરમાંથી તાલીમ સંદર્ભે 2 પુરુષ મૅનેજર અને 1 સ્ત્રી મૅનેજરની પસંદગી કરવાની છે. આ પસંદગી કુલ કેટલી રીતે થઈ શકે ?**

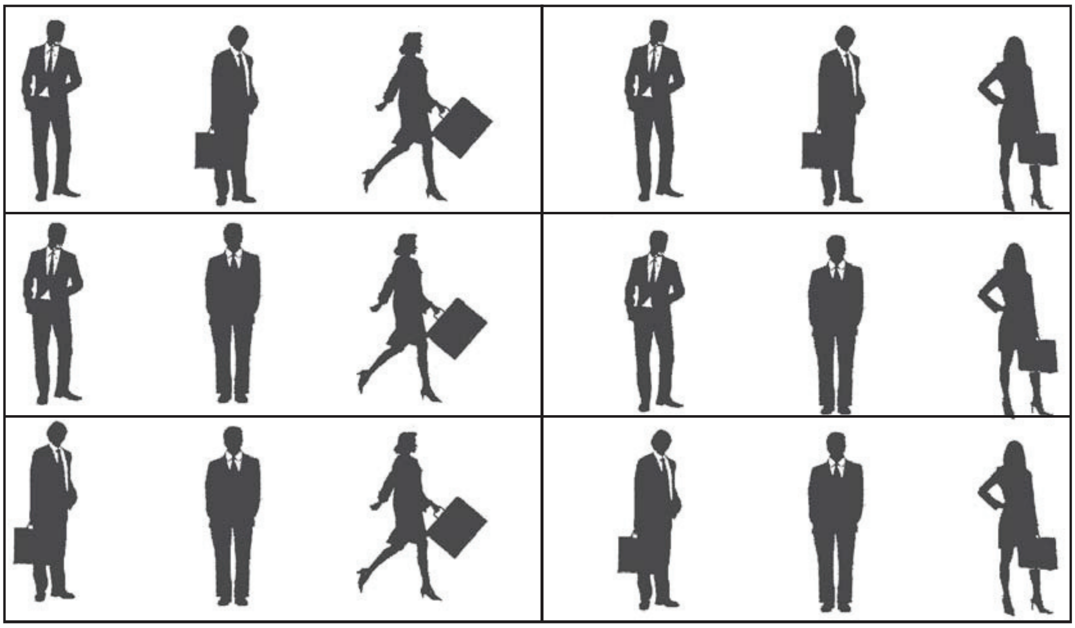
$^3C_2$ $\qquad\qquad$ $^2C_1$

અહીં 3 પુરુષોમાંથી 2 પુરુષોની પસંદગી $^3C_2$ પ્રકારે અને 2 સ્ત્રીઓમાંથી 1 સ્ત્રીની પસંદગી $^2C_1$ પ્રકારે થઈ શકે.

$\therefore$ **કુલ સંચય** $= {}^3C_2 \times {}^2C_1$

$= 3 \times 2$

$= 6$



ઉદાહરણ 23 : એક ટોપલીમાં 5 પીળાં, 4 સફેદ અને 3 ગુલાબી ફૂલ છે. તેમાંથી 3 પીળાં, 2 સફેદ અને 1 ગુલાબી ફૂલ કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

5 પીળાં ફૂલમાંથી 3ની પસંદગી $^5C_3$ પ્રકારે, 4 સફેદ ફૂલમાંથી 2ની પસંદગી $^4C_2$ પ્રકારે અને 3 ગુલાબી ફૂલમાંથી 1ની પસંદગી $^3C_1$ પ્રકારે થઈ શકે.

$\therefore$ **કુલ સંચય** $= {}^5C_3 \times {}^4C_2 \times {}^3C_1$

$= 10 \times 6 \times 3$

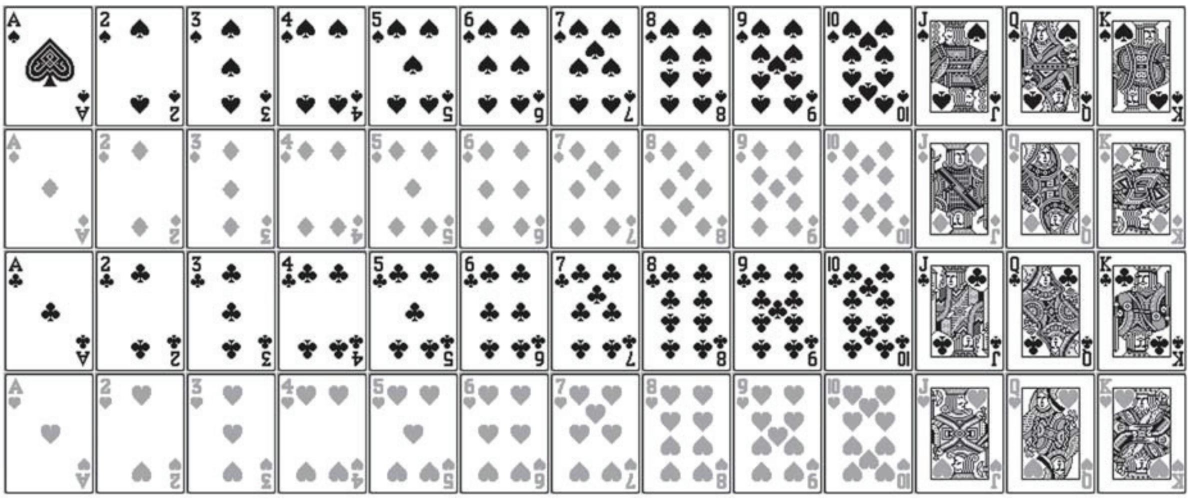
$= 180$

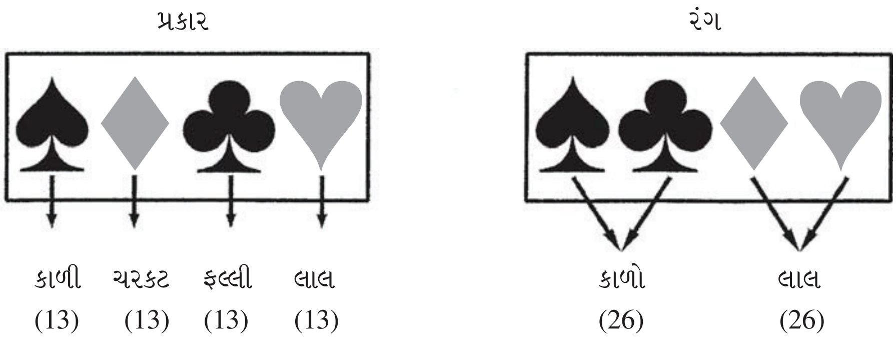
ઉદાહરણ 24 : 52 પત્તાંના ઢગમાંથી 2 પત્તાં પસંદ કરવામાં આવે છે. આ બંને પત્તાંમાં,

(1) એક પત્તું ચહેરાવાળું અને એક પત્તું ચહેરા વગરનું કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

(2) બંને પત્તાં જુદાં જુદાં રંગના કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

(3) બંને પત્તાં એક જ પ્રકારના કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?





(1) 52 પત્તાંમાં ચહેરાવાળાં (રાજા, રાણી, ગુલામ) કુલ 12 પત્તાં અને ચહેરા વગરનાં કુલ 40 પત્તાં હોય. તેથી એક પત્તું ચહેરાવાળું ${}^{12}C_1$ પ્રકારે અને એક પત્તું ચહેરા વગરનું ${}^{40}C_1$ પ્રકારે પસંદ કરી શકાય.

$\therefore$ **કુલ સંચય** $= {}^{12}C_1 \times {}^{40}C_1$

$= 12 \times 40$

$= 480$

(2) 52 પત્તાંમાં કાળા રંગનાં 26 પત્તાં અને લાલ રંગનાં 26 પત્તાં હોય, પસંદ કરેલાં બંને પત્તાં જુદાં જુદાં રંગનાં હોય, તો તેમાં એક પત્તું કાળા રંગનું અને એક પત્તું લાલ રંગનું હોય. તેથી તેમની પસંદગી અનુક્રમે ${}^{26}C_1$ અને ${}^{26}C_1$ પ્રકારે થઈ શકે.

$\therefore$ **કુલ સંચય** $= {}^{26}C_1 \times {}^{26}C_1$

$= 26 \times 26$

$= 676$

(3) 52 પત્તાંમાં કાળી, ચટ્ટાઈ, ફલ્લી અને લાલ એમ કુલ ચાર પ્રકારનાં પત્તાં હોય અને દરેક પ્રકારનાં 13 પત્તાં હોય. પસંદ કરેલાં બંને પત્તાં એક જ પ્રકારનાં હોય, તો તે બંને કાળી અથવા બંને ચટ્ટાઈ અથવા બંને ફલ્લી અથવા બંને લાલ હોઈ શકે.

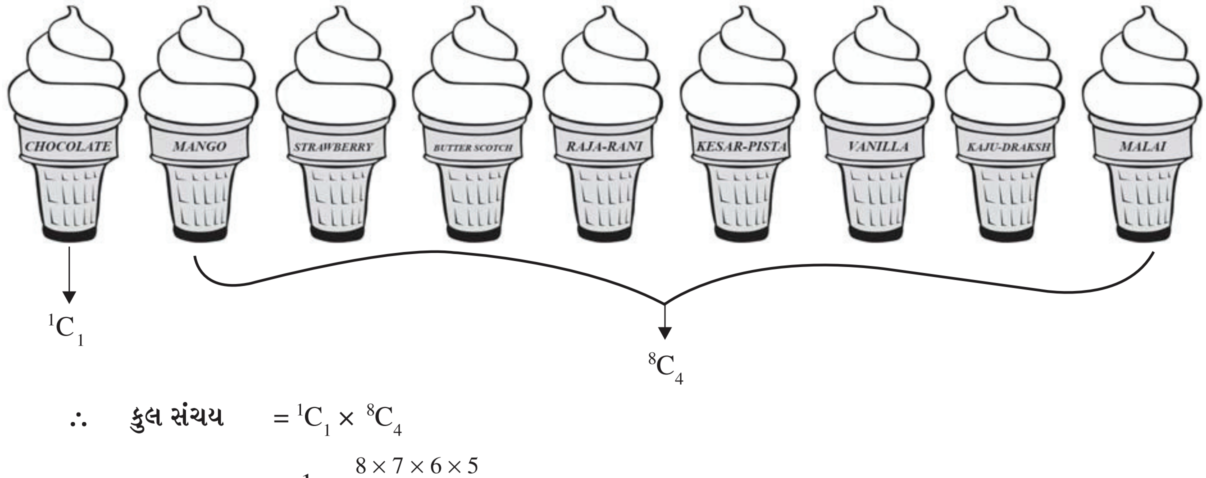
$\therefore$ **કુલ સંચય** $= {}^{13}C_2 + {}^{13}C_2 + {}^{13}C_2 + {}^{13}C_2$

$= 78 + 78 + 78 + 78$

$= 312$

ઉદાહરણ 25 : કથન નામનો બાળક આઈસક્રીમ કૉનની 9 જુદી જુદી ફ્લેવરમાંથી 5 જુદી જુદી ફ્લેવરના આઈસક્રીમ કૉન પસંદ કરવા માંગે છે. જો તે ચૉકલેટ ફ્લેવર પસંદ કરવા માંગતો જ હોય તો પસંદગીના કુલ પ્રકાર જણાવો.

અહીં આઈસક્રીમ કૉનની 9 જુદી જુદી ફ્લેવરમાંથી કથન 5 જુદી જુદી ફ્લેવરના આઈસક્રીમ કૉન પસંદ કરવા માગે છે. ચૉકલેટ ફ્લેવરનો આઈસક્રીમ કૉન પસંદ કરવાનો જ હોવાથી તે ${}^{1}C_1$ પ્રકારે પસંદ થઈ શકે. હવે કથન બાકીની જુદી જુદી 8 આઈસક્રીમ ફ્લેવરમાંથી બાકીની 4 જુદી જુદી ફ્લેવરના આઈસક્રીમ કૉન ${}^{8}C_4$ પ્રકારે પસંદ કરી શકે.



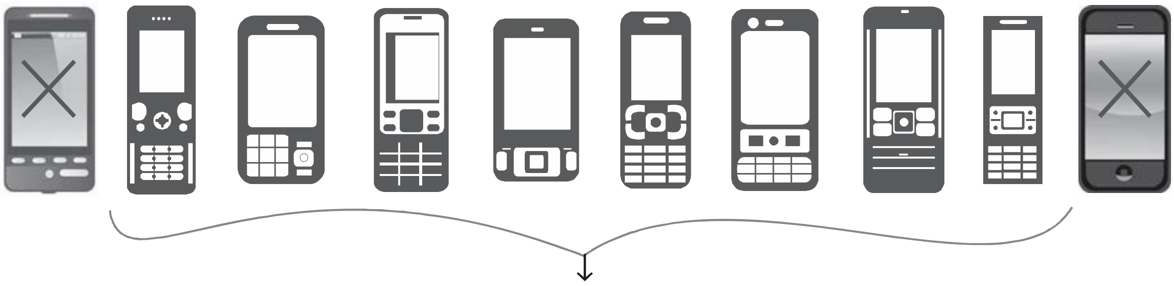
$\therefore$ **કુલ સંચય** $= {}^{1}C_1 \times {}^{8}C_4$

$= 1 \times \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

$= 70$

ઉદાહરણ 26 : એક વ્યક્તિ કોઈ એક કંપનીના જુદાં જુદાં 10 મોબાઈલ હૅન્ડસેટમાંથી 3 મોબાઈલ હૅન્ડસેટ ખરીદવા ઇચ્છે છે. પરંતુ 2 મોબાઈલ હૅન્ડસેટ તે વ્યક્તિના બજેટમાં સમાય તેવા નથી. તો તે વ્યક્તિ પાસે 3 જુદાં જુદાં હૅન્ડસેટ ખરીદવાના કુલ કેટલા વિકલ્પો રહેશે ?

અહીં જુદાં જુદાં 10 મોબાઈલ હૅન્ડસેટ છે. પરંતુ જે 2 મોબાઈલ હૅન્ડસેટ તે વ્યક્તિના બજેટમાં ન સમાતા હોય તેને ધ્યાનમાં ન લેતાં બાકીના 8 મોબાઈલ હૅન્ડસેટમાંથી 3 મોબાઈલ હૅન્ડસેટની પસંદગી $^8C_3$ પ્રકારે થઈ શકે.



$^8C_3$

$\therefore$ **કુલ સંચય** $= {}^8C_3$

$= \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1}$

$= 56$

ઉદાહરણ 27 : એક કંપનીમાં 6 ઍન્જિનિયર અને 4 મૅનેજર છે. તેમાંથી જો 5 સભ્યોની કમિટી બનાવવાની હોય તો તેમાં,

(1) ઓછામાં ઓછા 2 મૅનેજર હોય.

(2) વધુમાં વધુ 2 ઍન્જિનિયર હોય.

(3) ઍન્જિનિયરની સંખ્યા બહુમતીમાં રહે તેવી પસંદગી કેટલા પ્રકારે થઈ શકે ?

(1) 5 સભ્યોની કમિટીમાં ઓછામાં ઓછા 2 મૅનેજરની પસંદગીના પ્રકારો નીચે મુજબ થઈ શકે :

મૅનેજર (4)		**ઍન્જિનિયર (6)**
2	અને	3
	અથવા	
3	અને	2
	અથવા	
4	અને	1

$\therefore$ **કુલ સંચયો** $= ({}^4C_2 \times {}^6C_3) + ({}^4C_3 \times {}^6C_2) + ({}^4C_4 \times {}^6C_1)$

$= (6 \times 20) + (4 \times 15) + (1 \times 6)$

$= 120 + 60 + 6$

$= 186$

(2) 5 સભ્યોની કમિટીમાં વધુમાં વધુ 2 એન્જિનિયરની પસંદગીના પ્રકારો નીચે મુજબ થઈ શકે :

એન્જિનિયર (6)		મૅનેજર (4)
2	અને	3
	અથવા	
1	અને	4

$\therefore$ **કુલ સંચય** $= ({}^6C_2 \times {}^4C_3) + ({}^6C_1 \times {}^4C_4)$

$= (15 \times 4) + (6 \times 1)$

$= 60 + 6$

$= 66$

(3) 5 સભ્યોની કમિટીમાં એન્જિનિયરની સંખ્યા બહુમતીમાં રહે તેવી પસંદગીના પ્રકારો નીચે મુજબ થઈ શકે :

એન્જિનિયર (6)		મૅનેજર (4)
5	અને	0
	અથવા	
4	અને	1
	અથવા	
3	અને	2

$\therefore$ **કુલ સંચય** $= ({}^6C_5 \times {}^4C_0) + ({}^6C_4 \times {}^4C_1) + ({}^6C_3 \times {}^4C_2)$

$= (6 \times 1) + (15 \times 4) + (20 \times 6)$

$= 6 + 60 + 120$

$= 186$

ઉદાહરણ **28 : એક વ્યક્તિને ઈન્ટરવ્યૂમાં પૂછવામાં આવેલા 6 પ્રશ્નોમાંથી તે વ્યક્તિ (1) ઓછામાં ઓછા 4 પ્રશ્નોના જવાબો સાચા કેટલા પ્રકારે આપી શકે ? (2) વધુમાં વધુ 3 પ્રશ્નોના જવાબો સાચા કેટલા પ્રકારે આપી શકે ?**

(1) જો વ્યક્તિને તેને પૂછવામાં આવેલા 6 પ્રશ્નોમાંથી ઓછામાં ઓછા 4 પ્રશ્નોના જવાબો સાચા આપેલા હોય, તો તેનો અર્થ એમ થાય કે તેણે 4 અથવા 5 અથવા 6 પ્રશ્નોના જવાબો સાચા આપેલા હોય.

$\therefore$ **કુલ સંચય** $= {}^6C_4 + {}^6C_5 + {}^6C_6$

$= 15 + 6 + 1$

$= 22$

(2) જો વ્યક્તિએ તેને પૂછવામાં આવેલા 6 પ્રશ્નોમાંથી વધુમાં વધુ 3 પ્રશ્નોના જવાબો સાચા આપેલા હોય તો, તેનો અર્થ એમ થાય કે તેણે 3 અથવા 2 અથવા 1 અથવા 0 પ્રશ્નોના જવાબો સાચા આપેલા હોય.

$\therefore$ **કુલ સંચય** $= {}^6C_3 + {}^6C_2 + {}^6C_1 + {}^6C_0$

$= 20 + 15 + 6 + 1$

$= 42$

પ્રવૃત્તિ

વર્ગના 10 મિત્રો ભેગા થઈ દરેક મિત્ર બાકીના બધા જ મિત્રો સાથે હસ્તધૂનન (Handshake) કરો અને તમે તમામ મિત્રોએ કરેલા હસ્તધૂનનની કુલ સંખ્યા નોંધો. હવે આ જ સમસ્યાનો ઉકેલ સંચયના સૂત્રના ઉપયોગથી મેળવી બંને જવાબો સરખાવો.

સ્વાધ્યાય 6.2

1. નીચેનાની કિંમતો મેળવો :

(1) $^{11}C_4$ (2) $^{9}C_0$ (3) $^{25}C_{23}$ (4) $^{8}C_8$

2. અજ્ઞાત સંખ્યા શોધો :

(1) $^{n}C_2 = 28$ (2) $^{27}C_{r+4} = {}^{27}C_{2r-1}$ (3) $^{n}C_{n-2} = 15$ (4) $4 \cdot {}^{n}C_4 = 7 \cdot {}^{n}C_3$

3. એક શાળામાં પટાવાળાની 2 જગ્યાઓ માટે 8 ઉમેદવારો પોતાની ઉમેદવારી નોંધાવે છે. આ 8 ઉમેદવારોમાંથી 2 પટાવાળાની પસંદગી કેટલા પ્રકારે કરી શકાય ?

4. એક ક્રિકેટ ટુર્નામેન્ટમાં 5 દેશો ભાગ લે છે. જો પ્રથમ રાઉન્ડમાં દરેક દેશે દરેક દેશ જોડે એક-એક મૅચ રમવાની હોય, તો આ રાઉન્ડમાં કેટલી મૅચ રમાશે ?

5. એક પેટીમાં રહેલા 200 એકમોમાંથી 5 % એકમો ખામીવાળા છે. જો પેટીમાંથી 3 એકમો પસંદ કરવામાં આવે, તો તે બધા એકમો ખામીવાળા હોવાના કુલ કેટલા વિકલ્પો હોઈ શકે ?

6. એક બૅન્કમાં નોકરી કરતા 14 કારકુન અને 6 પટાવાળામાંથી 3 કારકુન અને 1 પટાવાળાની પસંદગી કેટલા પ્રકારે કરી શકાય ?

7. એક ટોપલીમાં 3 સફેદ અને 5 ગુલાબી ફૂલ છે. તેમાંથી,

(1) એક જ રંગનાં ત્રણ ફૂલો કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

(2) જુદાં જુદાં રંગનાં બે ફૂલો કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

8. 52 પત્તાંની જોડમાંથી બે પત્તાં યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે તો,

(1) બે પત્તાં લાલનાં કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

(2) એક પત્તું રાજાનું અને એક પત્તું રાણીનું કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

9. એક બૅન્કના 9 કર્મચારીઓ પૈકી 6 કારકુન, 2 પટાવાળા અને 1 મૅનેજર છે. તેમાંથી 4 સભ્યોની સમિતિ બનાવવાની છે.

(1) જો મૅનેજરને પસંદ કરવાના જ હોય તો સમિતિ કેટલા પ્રકારે રચી શકાય ?

(2) જો બંને પટાવાળાને પસંદ કરવાના ન હોય અને મૅનેજરને પસંદ કરવાના જ હોય, તો સમિતિ કેટલા પ્રકારે રચી શકાય ?

10. એક ઑફિસમાં નોકરી કરતા 8 કર્મચારીઓમાં 3 સ્ત્રીઓ અને બાકીના પુરુષો છે. તાલીમ હેતુથી 3 સભ્યોની પસંદગી કરવાની હોય, તો તેમાં ઓછામાં ઓછી એક વ્યક્તિ પુરુષ કેટલા પ્રકારે પસંદ કરી શકાય ?

11. એક વ્યક્તિને 6 મિત્રો છે. તે તેમાંથી ઓછામાં ઓછા એક મિત્રને પોતાના ઘરે કેટલા પ્રકારે આમંત્રણ આપી શકે ?

12. 8 જુદાં જુદાં પુસ્તકોમાંથી 5 પુસ્તકો કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય કે જેમાં,

(1) અમુક નિશ્ચિત પુસ્તક હંમેશાં પસંદ થાય ?

(2) અમુક નિશ્ચિત પુસ્તક કદાપિ પસંદ ન થાય ?

13. ધોરણ 12ની સામાન્ય પ્રવાહની બોર્ડની પરીક્ષામાં કોઈ વિદ્યાર્થીએ કુલ 7 વિષયોની પરીક્ષા આપવાની છે. પરીક્ષામાં પાસ થવા માટે બધા જ વિષયોમાં પાસ થવું જરૂરી છે. દરેક વિષયમાં પાસ થવા માટે ઓછામાં ઓછા અમુક ગુણ મેળવવાના હોય, તો આ પરીક્ષામાં બેસનાર વિદ્યાર્થી કેટલી રીતે નાપાસ થઈ શકે ?

14. એક હોટલનો માલિક તેના શહેરમાં ઉપલબ્ધ 8 જુદાં જુદાં સમાચારપત્રો અને 5 જુદાં જુદાં સામયિકોમાંથી 3 સમાચારપત્રો અને 2 સામયિકો નિયમિત ધોરણે મંગાવવા માંગે છે. આ પસંદગી કેટલા પ્રકારે કરી શકાય ? જો કોઈ ચોક્કસ સમાચારપત્રને પસંદ કરવાનું જ હોય અને જો કોઈ ચોક્કસ સામયિકને પસંદ કરવાનું જ ન હોય, તો આવી પસંદગી કેટલા પ્રકારે કરી શકાય ?

15. જો $^{n}P_2 + {}^{n}C_2 = 84$ હોય તો n ની કિંમત શોધો.

16. જો $^{n}P_r \div {}^{n}C_r = 24$ હોય તો r ની કિંમત શોધો.

*

6.3 દ્વિપદી વિસ્તરણનો અર્થ (Meaning of Binomial Expansion)

જે પદાવલિમાં બે પદો આવેલાં હોય અને બંને પદો વચ્ચે ધન અથવા ઋણ ચિહ્ન હોય તેવી પદાવલિને દ્વિપદી પદાવલિ કહે છે, જેમકે $a + b$, $x - y$, $4a + 3b$, $x + 2a$ વગેરે દ્વિપદી પદાવલિ કહેવાય. આપણે અગાઉના અભ્યાસકાળ દરમિયાન આવી દ્વિપદી પદાવલિના ત્રણ ઘાત સુધીના વિસ્તરણ શીખ્યાં છીએ, જે આ મુજબ છે :

- $(x + a)^1 = x + a$
- $(x + a)^2 = x^2 + 2xa + a^2$
- $(x - a)^2 = x^2 - 2xa + a^2$
- $(x + a)^3 = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$
- $(x - a)^3 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3$

હવે, એ વિચાર આવે કે દ્વિપદી પદાવલિની 3 થી વધુ મોટી ધન પૂર્ણાંક ઘાત હોય, તો તેનું વિસ્તરણ સરળતાથી કેવી રીતે મેળવી શકાય ? આ વિસ્તરણ દ્વિપદી પ્રમેયની મદદથી મેળવી શકાય. હવે આપણે તેના વિશે અભ્યાસ કરીએ.

આપણે અગાઉ દ્વિપદી પદાવલિના જે વિસ્તરણ લખ્યા તેનાં જુદાં જુદાં પદોના સહગુણકો સંચયના સ્વરૂપમાં દર્શાવીએ, તો તે નીચે મુજબ લખી શકાય :

- $(x + a)^1 = x + a$
  $= {}^1C_0\, x + {}^1C_1\, a$
- $(x + a)^2 = x^2 + 2x\,a + a^2$
  $= {}^2C_0\, x^2 + {}^2C_1\, xa + {}^2C_2\, a^2$
- $(x + a)^3 = x^3 + 3x^2\,a + 3xa^2 + a^3$
  $= {}^3C_0\, x^3 + {}^3C_1 x^2a + {}^3C_2\, xa^2 + {}^3C_3\, a^3$

આ જ પ્રમાણે $(x + a)^4$ અને $(x + a)^5$ના વિસ્તરણ નીચે મુજબ લખી શકીએ :

$$(x + a)^4 = {}^4C_0 x^4 + {}^4C_1\, x^3a + {}^4C_2\, x^2a^2 + {}^4C_3\, xa^3 + {}^4C_4\, a^4$$
$$= x^4 + 4x^3a + 6x^2\,a^2 + 4xa^3 + a^4$$
$$(x + a)^5 = {}^5C_0 x^5 + {}^5C_1\, x^4a + {}^5C_2\, x^3a^2 + {}^5C_3\, x^2a^3 + {}^5C_4\, xa^4 + {}^5C_5\, a^5$$
$$= x^5 + 5x^4a + 10x^3a^2 + 10x^2a^3 + 5xa^4 + a^5$$

ઉપર્યુક્ત વિસ્તરણનું બારીકાઈથી અવલોકન કરશો તો જણાશે કે x નો ઘાતાંક ક્રમશઃ એક-એક ઘટતો જાય છે જ્યારે a નો ઘાતાંક ક્રમશઃ એક-એક વધતો જાય છે. આ પરથી દ્વિપદી પદાવલિ $(x + a)$ની ધન પૂર્ણાંક ઘાત nનું વિસ્તરણ નીચે મુજબ લખી શકાય :

$$\boxed{(x + a)^n = {}^nC_o\, x^n a^0 + {}^nC_1 x^{n-1} a^1 + {}^nC_2 x^{n-2} a^2 + \dots + {}^nC_n\, x^0\, a^n}$$

$(x + a)^n$ ના વિસ્તરણને દ્વિપદી વિસ્તરણ (Binomial Expansion) કહે છે. આ વિસ્તરણનું વ્યાપક પદ ${}^nC_r\, x^{n-r}\, a^r$ છે. આ પદમાં $r = 0, 1, 2, \dots, n$ મૂકીએ, એટલે દ્વિપદી વિસ્તરણનાં બધાં પદ મળે.

r	**વિસ્તરણમાં પદ ક્રમ**	${}^n\mathbf{C}_r\, \boldsymbol{x^{n-r}\, a^r}$
0	પ્રથમ પદ	${}^nC_0\, x^{n-0}\, a^0 = x^n$
1	બીજું પદ	${}^nC_1\, x^{n-1}\, a^1$
2	ત્રીજું પદ	${}^nC_2\, x^{n-2}\, a^2$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
n	$(n + 1)$ મું પદ	${}^nC_n\, x^{n-n}\, a^n = a^n$

આમ, ${}^nC_r\ x^{n-r}\ a^r$ એ $(x + a)^n$ ના વિસ્તરણનું $r + 1$મું પદ થાય. જેને $(x+a)^n$ ના વિસ્તરણનું વ્યાપક પદ (સામાન્ય પદ) કહેવાય. એટલે કે,

$$T_{r+1} = {}^nC_r\ x^{n-r}\ a^r$$

હવે $(x + a)^n$ ના ઉપર્યુક્ત વિસ્તરણમાં નીચેનાં લક્ષણો જોઈ શકાય છે :

(1) $(x + a)^n$ ના વિસ્તરણમાં પદોની કુલ સંખ્યા $n + 1$ છે, એટલે કે દ્વિપદી પદાવલિ $(x + a)$ની ઘાત કરતાં એક પદ વધારે છે.

(2) વિસ્તરણનાં પદોના સહગુણકો અનુક્રમે ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, ..., {}^nC_n$ છે.

(3) વિસ્તરણનું પ્રથમ પદ x^n છે. ત્યાર પછીના દરેક પદમાં x નો ઘાતાંક ક્રમશઃ એક-એક ઘટતો જાય છે, જ્યારે a નો ઘાતાંક ક્રમશઃ એક-એક વધતો જાય છે. વિસ્તરણનું છેલ્લું પદ a^n છે.

(4) વિસ્તરણના પ્રત્યેક પદમાં x અને aના ઘાતાંકનો સરવાળો n થાય છે.

(5) વિસ્તરણના મધ્ય પદથી બંને બાજુએ સરખા અંતરે આવેલાં પદોના સહગુણકો સમાન હોય છે.

દ્વિપદી વિસ્તરણના સહગુણકો ત્રિકોણ સ્વરૂપે નીચે આપેલા છે. આ ત્રિકોણની રચના ફ્રેન્ચ ગણિતશાસ્ત્રી **બ્લેઝ પાસ્કલે** કરી હતી.

પાસ્કલનો ત્રિકોણ

ઘાત n	સહગુણકો	સહગુણકોનો સરવાળો $= 2^n$
1	1 1	$2^1 = 2$
2	1 2 1	$2^2 = 4$
3	1 3 3 1	$2^3 = 8$
4	1 4 6 4 1	$2^4 = 16$
5	1 5 10 10 5 1	$2^5 = 32$
6	1 6 15 20 15 6 1	$2^6 = 64$
7	1 7 21 35 35 21 7 1	$2^7 = 128$
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1	$2^8 = 156$
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1	$2^9 = 512$

ઉદાહરણ 29 : $(x + y)^6$ નું વિસ્તરણ કરો.

$(x + y)^6$

$= {}^6C_0\,(x)^6\,(y)^0 + {}^6C_1\,(x)^5\,(y)^1 + {}^6c_2\,(x)^4\,(y)^2 + {}^6C_3\,(x)^3\,(y)^3$
$\qquad + {}^6C_4\,(x)^2\,(y)^4 + {}^6C_5\,(x)^1\,(y)^5 + {}^6C_6\,(x)^0\,(y)^6$

$= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

ઉદાહરણ 30 : $(1 + x)^4$ નું વિસ્તરણ કરો.

$(1 + x)^4$

$= {}^4C_0\,(1)^4\,(x)^0 + {}^4C_1\,(1)^3\,(x)^1 + {}^4C_2\,(1)^2\,(x)^2 + {}^4C_3\,(1)^1\,(x)^3 + {}^4C_4\,(1)^0\,(x)^4$

$= 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4$

ઉદાહરણ 31 : **$(3a + 2y)^3$ નું વિસ્તરણ કરો.**

$(3a + 2y)^3$

$= {}^3C_0\ (3a)^3\ (2y)^0 + {}^3C_1\ (3a)^2\ (2y)^1 + {}^3C_2\ (3a)^1\ (2y)^2 + {}^3C_3\ (3a)^0\ (2y)^3$

$= 27a^3 + 3\ (9a^2)\ (2y) + 3\ (3a)\ (4y^2) + 8y^3$

$= 27a^3 + 54a^2y + 36ay^2 + 8y^3$

ઉદાહરણ 32 : **$(3x - y)^4$ નું વિસ્તરણ કરો.**

$(3x - y)^4 = [3x + (-y)]^4$

$= {}^4C_0\ (3x)^4\ (-y)^0 + {}^4C_1\ (3x)^3\ (-y)^1 + {}^4C_2\ (3x)^2\ (-y)^2 + {}^4C_3\ (3x)^1\ (-y)^3 + {}^4C_4\ (3x)^0\ (-y)^4$

$= 81x^4 + 4\ (27x^3)\ (-y) + 6\ (9x^2)\ (y^2) + 4\ (3x)\ (-y^3) + y^4$

$= 81x^4 - 108x^3y + 54x^2y^2 - 12xy^3 + y^4$

નોંધ : દ્વિપદી પદાવલિનાં બે પદો વચ્ચે ઋણ ચિહ્ન હોય તો વિસ્તરણમાં પ્રથમ પદનું ચિહ્ન +, બીજા પદનું ચિહ્ન –, ત્રીજા પદનું ચિહ્ન +, ચોથા પદનું ચિહ્ન – વગેરે આવશે.

ઉદાહરણ 33 : **$(2x - a)^5$ નું વિસ્તરણ કરો.**

$(2x - a)^5$

$= {}^5C_0\ (2x)^5\ (a)^0 - {}^5C_1\ (2x)^4\ (a)^1 + {}^5C_2\ (2x)^3\ (a)^2 - {}^5C_3\ (2x)^2\ (a)^3$
$\qquad + {}^5C_4\ (2x)^1\ (a)^4 - {}^5C_5\ (2x)^0\ (a)^5$

$= 32x^5 - 5(16x^4)\ (a) + 10\ (8x^3)\ (a^2) - 10\ (4x^2)\ (a^3) + 5(2x)\ (a^4) - a^5$

$= 32x^5 - 80x^4a + 80x^3a^2 - 40x^2a^3 + 10xa^4 - a^5$

ઉદાહરણ 34 : **$\left(x - \frac{2}{x}\right)^5$ નું વિસ્તરણ કરો.**

$\left(x - \frac{2}{x}\right)^5$

$= {}^5C_0\ (x)^5 \left(\frac{2}{x}\right)^0 - {}^5C_1\ (x)^4 \left(\frac{2}{x}\right)^1 + {}^5C_2\ (x)^3 \left(\frac{2}{x}\right)^2 - {}^5C_3\ (x)^2 \left(\frac{2}{x}\right)^3 + {}^5C_4\ (x)^1 \left(\frac{2}{x}\right)^4 - {}^5C_5\ (x)^0 \left(\frac{2}{x}\right)^5$

$= x^5 - 5\ (x)^4 \left(\frac{2}{x}\right) + 10\ (x)^3 \left(\frac{4}{x^2}\right) - 10\ (x^2) \left(\frac{8}{x^3}\right) + 5\ (x) \left(\frac{16}{x^4}\right) - \frac{32}{x^5}$

$= x^5 - 10x^3 + 40x - \frac{80}{x} + \frac{80}{x^3} - \frac{32}{x^5}$

પ્રવૃત્તિ

$(11)^4$ ની કિંમત દ્વિપદી વિસ્તરણથી મેળવવા સૌપ્રથમ 11ને $11 = 10 + 1$ એવી દ્વિપદી પદાવલિમાં ફેરવો. હવે $(11)^4 = (10 + 1)^4$ ની કિંમત દ્વિપદી વિસ્તરણની રીતે મેળવી ને કેલ્યુલેટરથી ચકાસી જુઓ કે મેળવેલી કિંમત સાચી છે કે કેમ ?

ઉદાહરણ 35 : $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^4$ નું વિસ્તરણ કરો.

$$\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^4$$

$$= {}^4C_0 \left(\frac{a}{b}\right)^4\left(\frac{b}{a}\right)^0 - {}^4C_1 \left(\frac{a}{b}\right)^3\left(\frac{b}{a}\right)^1 + {}^4C_2 \left(\frac{a}{b}\right)^2\left(\frac{b}{a}\right)^2 - {}^4C_3 \left(\frac{a}{b}\right)^1\left(\frac{b}{a}\right)^3 + {}^4C_4 \left(\frac{a}{b}\right)^0\left(\frac{b}{a}\right)^4$$

$$= \frac{a^4}{b^4} - 4\left(\frac{a^3}{b^3}\right)\left(\frac{b}{a}\right) + 6\left(\frac{a^2}{b^2}\right)\left(\frac{b^2}{a^2}\right) - 4\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b^3}{a^3}\right) + \frac{b^4}{a^4}$$

$$= \frac{a^4}{b^4} - \frac{4a^2}{b^2} + 6 - \frac{4b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4}$$

ઉદાહરણ 36 : $\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^4$ નું વિસ્તરણ કરો.

$$\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^4$$

$$= {}^4C_0 (\sqrt{a})^4 \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^0 + {}^4C_1 (\sqrt{a})^3 \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^1 + {}^4C_2 (\sqrt{a})^2 \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$$

$$+ {}^4C_3 (\sqrt{a})^1 \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^3 + {}^4C_4 (\sqrt{a})^0 \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^4$$

$$= a^2 + 4 (\sqrt{a})^2 + 6 + 4 \frac{1}{(\sqrt{a})^2} + \frac{1}{a^2}$$

$$= a^2 + 4a + 6 + \frac{4}{a} + \frac{1}{a^2}$$

ઉદાહરણ 37 : $(1 + x)^6$નું વિસ્તરણ કરો અને બંને બાજુએ $x = 1$ મૂકીને ચકાસી જુઓ.

$(1 + x)^6$

$= {}^6C_0 (1)^6 (x)^0 + {}^6C_1 (1)^5 (x)^1 + {}^6C_2 (1)^4 (x)^2 + {}^6C_3 (1)^3 (x)^3$

$+ {}^6C_4 (1)^2 (x)^4 + {}^6C_5 (1)^1 (x)^5 + {}^6C_6 (1)^0 (x)^6$

$= 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$

આમ,

$(1 + x)^6 = 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$

$x = 1$ મૂકતાં,

ડા.બા.= $(1 + x)^6 = (1 + 1)^6 = (2)^6 = 64$

જ.બા.= $1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 + x^6$

$= 1 + 6(1) + 15(1)^2 + 20(1)^3 + 15(1)^4 + 6(1)^5 + (1)^6$

$= 1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1$

$= 64$

આમ, ડા.બા. = જ.બા.

ઉદાહરણ 38 : $\left(\sqrt{3}+2\right)^5 - \left(\sqrt{3}-2\right)^5$ ની કિંમત દ્વિપદી વિસ્તરણની રીતે મેળવો.

$$\left(\sqrt{3}+2\right)^5 - \left(\sqrt{3}-2\right)^5$$

$$= \begin{bmatrix} {}^5C_0\left(\sqrt{3}\right)^5(2)^0 \\ + {}^5C_1\left(\sqrt{3}\right)^4(2)^1 \\ + {}^5C_2\left(\sqrt{3}\right)^3(2)^2 \\ + {}^5C_3\left(\sqrt{3}\right)^2(2)^3 \\ + {}^5C_4\left(\sqrt{3}\right)^1(2)^4 \\ + {}^5C_5\left(\sqrt{3}\right)^0(2)^5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {}^5C_0\left(\sqrt{3}\right)^5(2)^0 \\ - {}^5C_1\left(\sqrt{3}\right)^4(2)^1 \\ + {}^5C_2\left(\sqrt{3}\right)^3(2)^2 \\ - {}^5C_3\left(\sqrt{3}\right)^2(2)^3 \\ + {}^5C_4\left(\sqrt{3}\right)^1(2)^4 \\ - {}^5C_5\left(\sqrt{3}\right)^0(2)^5 \end{bmatrix}$$

(હવે બે દ્વિપદી પદાવલિ વચ્ચે ઋણ ચિહ્ન હોવાથી બીજી પદાવલિના વિસ્તરણનાં ચિહ્નો બદલાશે. પરિણામે બંને પદાવલિઓના વિસ્તરણના પહેલા, ત્રીજા અને પાંચમા પદનો લોપ થશે.)

$$= 2\ [{}^5C_1\ (\sqrt{3})^4\ (2)^1 + {}^5C_3\ (\sqrt{3})^2\ (2)^3 + {}^5C_5\ (\sqrt{3})^0\ (2)^5]$$

$$= 2\ [5\ (9)\ (2) + 10\ (3)\ (8) + 32]$$

$$= 2\ [90 + 240 + 32]$$

$$= 2\ [362]$$

$$= 724$$

ઉદાહરણ 39 : $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^4 + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^4$ ની કિંમત દ્વિપદી વિસ્તરણની રીતે મેળવો.

$$\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^4 + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^4$$

$$= \begin{bmatrix} {}^4C_0\left(\sqrt{3}\right)^4\left(\sqrt{2}\right)^0 \\ + {}^4C_1\left(\sqrt{3}\right)^3\left(\sqrt{2}\right)^1 \\ + {}^4C_2\left(\sqrt{3}\right)^2\left(\sqrt{2}\right)^2 \\ + {}^4C_3\left(\sqrt{3}\right)^1\left(\sqrt{2}\right)^3 \\ + {}^4C_4\left(\sqrt{3}\right)^0\left(\sqrt{2}\right)^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} {}^4C_0\left(\sqrt{3}\right)^4\left(\sqrt{2}\right)^0 \\ - {}^4C_1\left(\sqrt{3}\right)^3\left(\sqrt{2}\right)^1 \\ + {}^4C_2\left(\sqrt{3}\right)^2\left(\sqrt{2}\right)^2 \\ - {}^4C_3\left(\sqrt{3}\right)^1\left(\sqrt{2}\right)^3 \\ + {}^4C_4\left(\sqrt{3}\right)^0\left(\sqrt{2}\right)^4 \end{bmatrix}$$

(હવે બે દ્વિપદી પદાવલિ વચ્ચે ધન ચિહ્ન હોવાથી બીજી પદાવલિના વિસ્તરણનાં ચિહ્નો બદલાશે નહિ. પરિણામે બંને પદાવલિઓના વિસ્તરણના બીજા અને ચોથા પદનો લોપ થશે.)

$$= 2\ [4_{C_0}\ (\sqrt{3})^4\ (2)^0 + 4_{C_2}\ (\sqrt{3})^2\ (\sqrt{2})^2 + 4_{C_4}\ (\sqrt{3})^0\ (\sqrt{2})^4]$$

$$= 2\ [\ 9 + 6\ (3)\ (2) + 4]$$

$$= 2\ [9 + 36 + 4]$$

$$= 2\ [49]$$

$$= 98$$

સ્વાધ્યાય 6.3

1. નીચે આપેલી દ્વિપદી પદાવલિઓના વિસ્તરણ મેળવો :

(1) $(3a + 4b)^3$ (2) $(1 + x)^7$ (3) $\left(\frac{3}{x} - \frac{4x}{3}\right)^4$ (4) $\left(\frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^6$ (5) $\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\right)^5$

2. દ્વિપદી વિસ્તરણની મદદથી કિંમત મેળવો.

(1) $(\sqrt{5} + 1)^5 - (\sqrt{5} - 1)^5$

(2) $(\sqrt{2} + 1)^6 + (\sqrt{2} - 1)^6$

(3) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^4 + (\sqrt{5}-\sqrt{3})^4$

3. $(1 + x)^5$ નું વિસ્તરણ કરો અને બંને બાજુએ $x = 1$ મૂકીને ચકાસી જુઓ.

4. $(1 + a)^6$ નું વિસ્તરણ કરો અને બંને બાજુએ $a = 2$ મૂકીને ચકાસી જુઓ.

સારાંશ

- જો કોઈ એક સમૂહમાં m ભિન્ન વસ્તુઓ અને બીજા સમૂહમાં n ભિન્ન વસ્તુઓ હોય, તો બંને સમૂહોની કુલ વસ્તુઓમાંથી કોઈપણ એક વસ્તુની પસંદગી $m + n$ પ્રકારે થઈ શકે.
- જો પ્રથમ ક્રિયા m પ્રકારે થઈ શકતી હોય અને બીજી ક્રિયા n પ્રકારે થઈ શકતી હોય તેમજ બંને ક્રિયાઓ સંયુક્ત રીતે કરવાની હોય, તો તે કુલ $m \times n$ પ્રકારે થઈ શકે.
- $n! = n\ (n - 1)\ (n - 2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$
- n જુદી જુદી વસ્તુઓને r સ્થાનો પર ગોઠવવાના કુલ ક્રમચયો ${}^nP_r$ થાય.
- ક્રમચય અને સંચય વચ્ચેનો મૂળભૂત તફાવત એ છે કે, ક્રમચયમાં ક્રમનું મહત્વ હોય છે જ્યારે સંચયમાં ક્રમનું મહત્વ હોતું નથી. એટલે કે, ક્રમચયમાં ab અને ba નો અર્થ અલગ છે જ્યારે સંચયમાં ab અને ba નો અર્થ સમાન થાય છે.
- $(x + a)^n$ ના વિસ્તરણના કુલ $(n + 1)$ પદોના સહગુણકો અનુક્રમે ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2, \ldots, {}^nC_n$ છે.

સૂત્રોની યાદી

- ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$
- ${}^nP_0 = 1,\ {}^nP_n = n!,\ {}^np_1 = n,\ {}^np_{n-1} = n!$
- કુલ N વસ્તુઓમાંથી A વસ્તુઓ એક પ્રકારની સમસ્વરૂપની હોય, B વસ્તુઓ બીજા પ્રકારની સમસ્વરૂપની હોય, C વસ્તુઓ ત્રીજા પ્રકારની સમસ્વરૂપની અને બાકીની બધી જ વસ્તુઓ ભિન્ન હોય, તો કુલ N વસ્તુઓના કુલ ક્રમચયો $\frac{N!}{A!\,B!\,C!}$ થાય.
- ${}^nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$
- ક્રમચય અને સંચયના સંદર્ભમાં ${}^nP_r$ અને ${}^nC_r$ વચ્ચેનો ગાણિતિક સંબંધ : ${}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!}$
- $(x + a)^n$ પદાવલિનું વિસ્તરણ :
  ${}^nC_0\ (x)^n\ (a)^0 + {}^nC_1\ (x)^{n-1}\ (a)^1 + {}^nC_2\ (x)^{n-2}\ (a)^2 + \ldots + {}^nC_n\ (x)^0\ (a)^n$

સ્વાધ્યાય 6

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. જો કોઈ એક સમૂહમાં m ભિન્ન વસ્તુઓ અને બીજા સમૂહમાં n ભિન્ન વસ્તુઓ હોય, તો બંને સમૂહોમાંથી કોઈપણ એક વસ્તુની પસંદગી કેટલા પ્રકારે થઈ શકે ?

(a) mn (b) $\frac{m}{n}$ (c) $m - n$ (d) $m + n$

2. જો પ્રથમ ક્રિયા m પ્રકારે થઈ શકતી હોય અને બીજી ક્રિયા n પ્રકારે થઈ શકતી હોય તેમજ બંને ક્રિયાઓ સંયુક્ત રીતે કરવાની હોય, તો બંને ક્રિયાઓ સાથે થવાના કુલ પ્રકારો કેટલા થાય ?

(a) mn (b) $\frac{m}{n}$ (c) $m - n$ (d) $m + n$

3. $n!$ એટલે શું ?

(a) 1 થી n સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો (b) 1 થી n સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર

(c) 1 થી $n - r$ સુધીની પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગુણાકાર (d) 0 થી n સુધીની સંખ્યાઓનો ગુણાકાર

4. ક્રમચય અને સંચયના પ્રચલિત સંકેતો અનુસાર નીચેનામાંથી ક્યો સંબંધ સાચો છે ?

(a) ${}^nC_r = {}^nP_r \times r!$ (b) ${}^nP_r = {}^nC_r + r!$ (c) ${}^nP_r = \frac{{}^nC_r}{r!}$ (d) ${}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!}$

5. ${}^nC_r$ની કિંમત નીચેના પૈકી કોની બરાબર હોય છે ?

(a) $\frac{n!}{(n-r)!}$ (b) ${}^nC_{n-r}$ (c) ${}^nC_{r-1}$ (d) $\frac{{}^nC_{r+1}}{r}$

6. ${}^nC_0 + {}^nC_n$ ની કિંમત શોધો.

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) $2n$

7. $(n + 1)! = 120$ હોય, તો nની કિંમત જણાવો.

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6

8. $(x + a)^{n-1}$ ના વિસ્તરણમાં કુલ કેટલાં પદ હોય ?

(a) n (b) $n - 2$ (c) $n + 1$ (d) $n + 2$

9. $10 \times n\,! = 240$ હોય, તો nની કિંમત શોધો.

(a) 6 (b) 3 (c) 5 (d) 4

10. $(x + a)^n$ ના વિસ્તરણનું અંતિમ (છેલ્લું) પદ જણાવો.

(a) a^n (b) a^{n-1} (c) x^0 (d) x^{n-1}

11. એક ફન ફેરની રાઇડમાં 3 વ્યક્તિઓને બેસવા માટે 8 જગ્યાઓ છે. તેઓ આ જગ્યાઓ પર કેટલી રીતે બેસી શકે ?

(a) ${}^8C_3$ (b) ${}^3P_8$ (c) ${}^3C_8$ (d) ${}^8p_3$

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. ક્રમચય અને સંચય વચ્ચે મુખ્ય તફાવત શું છે ?

2. ગણતરીનો સરવાળાનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત લખો.

3. ગણતરીનો ગુણાકારનો મૂળભૂત સિદ્ધાંત લખો.

4. પ્રચલિત સંકેત અનુસાર ક્રમચય અને સંચય વચ્ચેનો ગાણિતિક સંબંધ લખો.

5. $(x + a)^n$ માં $n = 6$ મૂકતાં મળતા વિસ્તરણના સહગુણકો લખો.

6. $(x + a)^n$ ના વિસ્તરણનું વ્યાપક પદ લખો.

7. એક ટ્રેનના ડબામાં 3 વ્યક્તિઓને બેસવા માટે 5 જગ્યાઓ છે. તેઓ કેટલા પ્રકારે પોતાની જગ્યા મેળવી શકે ?

8. ${}^nC_2 = 15$ હોય તો nની કિંમત જણાવો.

9. ${}^nP_3 = 210$ હોય તો nની કિંમત જણાવો.

10. TUESDAY શબ્દના બધા જ અક્ષરોની મદદથી નવી કેટલી ગોઠવણીઓ થઈ શકે ?

11. VIAAN શબ્દના બધા જ અક્ષરોનો ઉપયોગ કરી કેટલી ગોઠવણીઓ બનાવી શકાય ?

12. 5 જુદા જુદા પત્રોને 5 કવરમાં કેટલી રીતે મૂકી શકાય ?

13. ${}^nP_r$ એટલે શું ?

14. $(x + a)^n$ ના વિસ્તરણના $n + 1$ પદોના સહગુણકો લખો.

15. જો ${}^nC_x = {}^nC_y$ હોય, તો x અને y ના સંબંધના શકય બે વિકલ્પો લખો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. દ્વિપદી વિસ્તરણનાં લક્ષણો લખો.

2. એક વિજ્ઞાનમેળામાં 10 શાળાઓ ભાગ લે છે. આ શાળાઓમાં પ્રથમ, દ્વિતીય અને તૃતીય ઇનામો કેટલી રીતે વહેંચી શકાય ?

3. 4 છોકરાઓ અને 3 છોકરીઓને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી કોઈ પણ બે છોકરાઓ કે બે છોકરીઓ એક સાથે ન ગોઠવાય ?

4. એક ટેબલ પર આંકડાશાસ્ત્રનાં 6, નામાનાં 5 અને અંગ્રેજી વિષયનાં 4 જુદાં જુદાં પુસ્તકોને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી દરેક વિષયનાં પુસ્તકો એક સાથે જ આવે ?

5. 3, 8, 0, 7, 6 એ બધા અંકોનો ઉપયોગ કરીને પાંચ અંકવાળી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

6. TANI શબ્દના બધા જ અક્ષરોની કેટલી ગોઠવણી એવી હશે કે જેમાં સ્વર ભેગા જ આવે ?

7. MANGO શબ્દના બધા જ અક્ષરોની કેટલી ગોઠવણી એવી હશે કે જેમાં સ્વર ભેગા ન આવે ?

8. અયુગ્મ અંક અયુગ્મ સ્થાન પર જ આવે તેવી રીતે 1234321ના બધા જ અંકનો ઉપયોગ કરીને કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

9. ROLLS શબ્દના બધા જ અક્ષરોથી બનતી ગોઠવણીઓ અને DOLLS શબ્દના બધા જ અક્ષરોથી બનતી ગોઠવણીઓનો ગુણોત્તર કેટલો થશે ?

10. એક બૉક્સમાં 6 સ્ક્રૂ છે, જેમાં 2 સ્ક્રૂ ખામીવાળા છે. આ બૉક્સમાંથી ખામીરહિત બે સ્ક્રૂ કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

11. બરાબર રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંમાંથી બે પત્તાં રાણીના અથવા રાજાના કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

12. બરાબર રીતે ચીપેલાં 52 પત્તાંમાંથી ત્રણ પત્તાં એક જ રંગના કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

13. $(2x + 3y)^3$ નું વિસ્તરણ કરો.

14. $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$ નું વિસ્તરણ કરો.

15. $(y + k)^5$ નું વિસ્તરણ કરો.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. પ્રથમ પાંચેય પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ઉપયોગ કરીને,

(1) કુલ કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

(2) 30,000 કરતાં મોટી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

(3) 5 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી કેટલી સંખ્યાઓ બનાવી શકાય ?

2. 4 છોકરાઓ અને 4 છોકરીઓને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી કોઈ પણ બે છોકરાઓ કે બે છોકરીઓ એક સાથે ન આવે ?

3. 3 છોકરાઓ અને 2 છોકરીઓને એક હારમાં કેટલી રીતે ગોઠવી શકાય કે જેથી,

(1) બંને છોકરીઓ એક સાથે જ આવે ?

(2) છોકરાઓ અને છોકરીઓ વારાફરતી આવે ?

(3) ત્રણેય છોકરાઓ એક સાથે જ આવે ?

4. WAKEFUL શબ્દના બધા જ અક્ષરોથી બનતી તમામ ગોઠવણીઓને ડિક્સનરી ક્રમ મુજબ ગોઠવતાં WAKEFUL શબ્દ કેટલામા ક્રમે આવે ?

5. એક પાર્ટીમાં 4 યુગલો (પતિ-પત્ની) ભાગ લે છે. તે 8 વ્યક્તિઓમાંથી 2 વ્યક્તિઓ પસંદ કરવામાં આવે છે.

(1) પસંદ કરેલી બે વ્યક્તિઓ પતિ-પત્ની હોય તેવી પસંદગીના પ્રકારો કેટલા થશે ?

(2) પસંદ કરેલી બે વ્યક્તિઓમાં એક પુરુષ અને એક સ્ત્રી હોય તેવી પસંદગી કેટલી રીતે કરી શકાય ?

(3) પસંદ કરેલી બે વ્યક્તિઓમાં એક પુરુષ અને એક સ્ત્રી હોય પરંતુ તેઓ પતિ-પત્ની ન હોય તેવી પસંદગી કેટલી રીતે કરી શકાય ?

6. એક ટેબલ પર આંકડાશાસ્ત્રનાં 4 અને અર્થશાસ્ત્રનાં 3 જુદાં જુદાં પુસ્તકો ગોઠવેલાં છે. આ પુસ્તકોમાંથી બે પુસ્તકો પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલ બે પુસ્તકમાં,

(1) બંને પુસ્તકો એક જ વિષયના કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

(2) બંને પુસ્તકો જુદા જુદા વિષયનાં કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

(3) અર્થશાસ્ત્ર વિષયનું એક પણ પુસ્તક ન આવે તેવી પસંદગી કેટલી રીતે થઈ શકે ?

7. એક રમકડાંની દુકાનમાં 3 ઢીંગલીઓ, 4 કીચન સેટ અને 3 કાર ડિસ્પ્લેમાં મૂકેલાં છે. એક બાળક તેમાંથી ત્રણ રમકડાં પસંદ કરે છે. તો તેમાં,

(1) ત્રણેય રમકડાં ઢીંગલીઓ કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

(2) ત્રણેય રમકડાં જુદાં જુદાં કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

(3) બે ઢીંગલીઓ અને એક કીચન સેટ કેટલી રીતે પસંદ કરી શકાય ?

8. એક સામાજિક સંસ્થા સાથે જોડાયેલા 4 સી.એ. અને 5 ડૉક્ટરમાંથી 3 સભ્યોની સમિતિ બનાવવાની છે. આ સમિતિમાં,

(1) સી.એ.ની સંખ્યા બહુમતીમાં રહે.

(2) ડૉક્ટરની સંખ્યા બહુમતીમાં રહે.

તેવી પસંદગી કેટલા પ્રકારે કરી શકાય ?

9. $(\sqrt{7}+1)^3-(\sqrt{7}-1)^3$ ની કિંમત દ્વિપદી વિસ્તરણની રીતે મેળવો.

10. $(\sqrt{3}+1)^6+(\sqrt{3}-1)^6$ ની કિંમત દ્વિપદી વિસ્તરણની રીતે મેળવો.

Blaise Pascal
(1623 - 1662)

French mathematician – Pascal's inventions and discoveries have been instrumental to development in the fields of geometry, physics and computer science. His exploration of binomial coefficients infulenced Sir Isaac Newton, leading him to uncover his "general binomial theorem for fractional and negative powers."

In the 1970s, the Pascal (Pa) unit was named after Blaise Pascal in the honour of his contributions. Pascal is also credited with building the foundation of probability theory.

●