GTGV9S

વર્ગ અને વર્ગમૂળ

પ્રકરણ

6

6.1 પ્રાસ્તાવિક

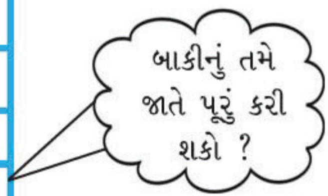
આપણે જાણીએ છીએ કે ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = બાજુ × બાજુ (જ્યાં 'બાજુ' એ ચોરસની લંબાઈનું માપ છે.) નીચેના કોષ્ટકનો અભ્યાસ કરો :

ચોરસની બાજુ (સેમીમાં)	ચોરસનું ક્ષેત્રફળ (સેમી^{2}માં)
1	$1 \times 1 = 1 = 1^2$
2	$2 \times 2 = 4 = 2^2$
3	$3 \times 3 = 9 = 3^2$
5	$5 \times 5 = 25 = 5^2$
8	$8 \times 8 = 64 = 8^2$
a	$a \times a = a^2$

4, 9, 25, 64 અને તેના જેવી અન્ય સંખ્યાઓમાં ખાસ બાબત શું છે ?
અહીં 4ને 2×2 વડે, 9 ને 3×3 વડે રજૂ કરી શકાય છે. આમ, આવી સંખ્યાઓને કોઈ એક સંખ્યા લઈ ફરી એ જ સંખ્યા સાથે ગુણાકારના સ્વરૂપે લખી શકાય છે.
આમ, આવી 1, 4, 9, 16, 25, ... વગેરે સંખ્યાઓને **વર્ગ સંખ્યા** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.
સામાન્ય રીતે, કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા m એ તો જ વર્ગ સંખ્યા તરીકે ઓળખવામાં આવે છે કે જો mને n^2 વડે દર્શાવી શકાય. જ્યાં n પણ એક પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે. શું 32 એ વર્ગ સંખ્યા છે ?
આપણે જાણીએ છીએ કે $5^2 = 25$ અને $6^2 = 36$. જો 32 એ વર્ગ સંખ્યા હોય, તો તે 5 અને 6ની વચ્ચે આવતી કોઈપણ પ્રાકૃતિક સંખ્યાનો વર્ગ હોય, પરંતુ 5 અને 6ની વચ્ચે કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા નથી. આમ, 32 એ વર્ગ સંખ્યા નથી.
નીચેની સંખ્યાઓ અને તેના વર્ગો વિશે વિચારો :

સંખ્યા	વર્ગ
1	$1 \times 1 = 1$
2	$2 \times 2 = 4$

3	3 × 3 = 9
4	4 × 4 = 16
5	5 × 5 = 25
6	-------------
7	-------------
8	-------------
9	-------------
10	-------------



ઉપરના કોષ્ટક પરથી આપણે 1 થી 100 વચ્ચે આવતી વર્ગ સંખ્યાઓની યાદી બનાવી શકીએ. આ 1 થી 100 વચ્ચે આવતી પ્રાકૃતિક વર્ગ સંખ્યામાં કોઈ સંખ્યા બાકી રહી જાય છે ?

આપણને એવું જાણવા મળશે કે ક્રમ 1 થી 100 વચ્ચે આ સિવાય કોઈ સંખ્યા બાકી રહેતી નથી કે જે વર્ગ સંખ્યા હોય.

તેથી 1, 4, 9, 16, ... વર્ગ સંખ્યાઓ છે. આવી સંખ્યાઓને **પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓ** પણ કહે છે.

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલ સંખ્યાઓ વચ્ચે આવતી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓ શોધો :

(i) 30 અને 40　　(ii) 50 અને 60

6.2 વર્ગ સંખ્યાઓના ગુણધર્મો

નીચે આપેલા કોષ્ટકમાં સંખ્યા 1 થી 20ની વર્ગસંખ્યાઓ દર્શાવેલ છે.

સંખ્યા	વર્ગ	સંખ્યા	વર્ગ
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

ઉપરના કોષ્ટકમાં આપેલી વર્ગ સંખ્યાઓનો અભ્યાસ કરો. દરેક વર્ગ સંખ્યાનો એકમનો અંક શું જોવા મળે છે ? એટલે કે દરેક વર્ગ સંખ્યાનો અંતિમ અંક શું મળે છે ? આ બધી જ વર્ગ સંખ્યાઓનો એકમનો અંક 0, 1, 4, 5, 6 અથવા 9 છે. એકપણ વર્ગ સંખ્યાનો એકમનો અંક 2, 3, 7 અથવા 8 પૈકી કોઈ નથી.

શું આપણે એમ કહી શકીએ કે જો આપેલી સંખ્યાનો એકમનો અંક 0, 1, 4, 5, 6 અથવા 9 હોય તો તે સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ જ હોય ? આ બાબતે થોડુંક વિચારશો.

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલી સંખ્યાઓ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓ છે ? તમને કેવી રીતે ખબર પડી તે પણ જણાવો :

1. (i) 1057　　(ii) 23453　　(iii) 7928　　(iv) 222222

(v) 1069　　(vi) 2061

એવી પાંચ સંખ્યાઓ જણાવો કે જેના એકમના અંક પરથી જ જાણી શકાય કે તે વર્ગ સંખ્યા નથી.

2. એવી પાંચ સંખ્યાઓ જણાવો કે જેના એકમના અંક પરથી અનુમાન ન કરી શકાય કે તે વર્ગ સંખ્યા હશે કે નહિ હોય.

- નીચે આપેલા કોષ્ટકનો અભ્યાસ કરો. તેમાં કેટલીક સંખ્યાઓ અને તેના વર્ગ આપેલાં છે. આવી સંખ્યાઓના એકમના અંકનું નિરીક્ષણ કરો :

કોષ્ટક : 1

સંખ્યા	વર્ગ	સંખ્યા	વર્ગ	સંખ્યા	વર્ગ
1	1	11	121	21	441
2	4	12	144	22	484
3	9	13	169	23	529
4	16	14	196	24	576
5	25	15	225	25	625
6	36	16	256	30	900
7	49	17	289	35	1225
8	64	18	324	40	1600
9	81	19	361	45	2025
10	100	20	400	50	2500

નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલી વર્ગ સંખ્યાનો એકમનો અંક 1 છે :

વર્ગ	સંખ્યા
1	1
81	9
121	11
361	19
441	21

પ્રયત્ન કરો

123^2, 77^2, 82^2, 161^2 અને 109^2 માં કઈ સંખ્યાનો એકમનો અંક 1 છે ?

હવે પછીની એવી બે વર્ગ સંખ્યાઓ લખો જેનો એકમનો અંક 1 હોય અને તેને સંલગ્ન સંખ્યાઓ લખો

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે જો કોઈ સંખ્યાનો એકમનો અંક 1 અથવા 9 હોય, તો તેનો વર્ગ કરતાં મળતી સંખ્યાનો એકમનો અંક 1 હોય.

- નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલી વર્ગ સંખ્યાનો એકમનો અંક 6 છે :

વર્ગ	સંખ્યા
16	4
36	6
196	14
256	16

પ્રયત્ન કરો

નીચેનામાંથી કઈ સંખ્યાનો એકમનો અંક 6 હશે ?

(i) 19^2 (ii) 24^2 (iii) 26^2
(iv) 36^2 (v) 34^2

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે જે સંખ્યાનો એકમનો અંક 4 અથવા 6 હોય, તેની વર્ગસંખ્યાનો એકમનો અંક 6 હશે.

શું તમને કોષ્ટક 1ની મદદથી બીજા કોઈ નિયમની જાણકારી મળે છે ?

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલી સંખ્યાનો વર્ગ કરવાથી મળતી સંખ્યાનો એકમનો અંક શું મળશે ?

(i) 1234 (ii) 26387 (iii) 52698 (iv) 99880
(v) 21222 (vi) 9106

● નીચે આપેલી સંખ્યા અને તેના વર્ગો વિશે વિચારો :

અહીં એક જ શૂન્ય છે.

$$\left.\begin{array}{l} 10^2 = 100 \\ 20^2 = 400 \\ 80^2 = 6400 \end{array}\right\}$$

અહીં બે શૂન્યો મળે છે.

અહીં બે શૂન્યો છે.

$$\left.\begin{array}{l} 100^2 = 10000 \\ 200^2 = 40000 \\ 700^2 = 490000 \\ 900^2 = 810000 \end{array}\right\}$$

અહીં 4 શૂન્યો મળે છે.

જો કોઈ સંખ્યાના છેલ્લા ત્રણ અંકો શૂન્ય હોય તો તેવી સંખ્યાનો વર્ગ કરતાં મળતી સંખ્યામાં છેલ્લે કેટલાં શૂન્યો હશે ?

કોઈ સંખ્યાના અંતે રહેલા શૂન્યની સંખ્યા અને તે સંખ્યાનો વર્ગ કરવાથી મળતી સંખ્યામાં રહેલ શૂન્યોની સંખ્યા વિશે તમે શું નિરીક્ષણ કર્યુ ?

શું આપણે કહી શકીએ કે કોઈ વર્ગ સંખ્યાનાં અંતિમ શૂન્યોની સંખ્યા હંમેશાં બેકી જ હોય ?

● સંખ્યા અને તેના વર્ગો દર્શાવતું કોષ્ટક 1 જુઓ.

તમે એકી સંખ્યા અને બેકી સંખ્યાના વર્ગો વિશે શું કહી શકો છો ?

પ્રયત્ન કરો

1. નીચે આપેલી કઈ સંખ્યાઓનો વર્ગ કરવાથી તે એકી સંખ્યા કે બેકી સંખ્યા આવશે ? કેમ ?
   (i) 727 (ii) 158 (iii) 269 (iv) 1980
2. નીચે આપેલી સંખ્યાઓનો વર્ગ કરવાથી મળતી સંખ્યાઓમાં કેટલાં શૂન્યો હશે ?
   (i) 60 (ii) 400

5CWMPI

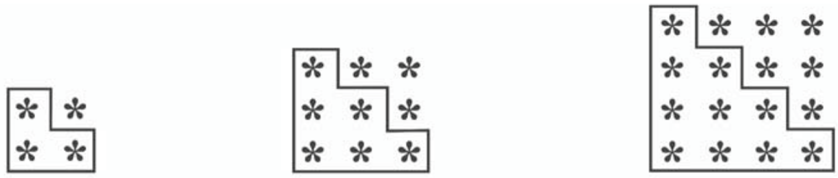
6.3 કેટલીક રસપ્રદ પેટર્ન

1. ત્રિકોણીય સંખ્યાઓનો સરવાળો.

તમને ત્રિકોણીય સંખ્યાઓ યાદ છે (એવી સંખ્યાઓ કે જેની બિંદુઓથી દર્શાવતી પેટર્નને ત્રિકોણ તરીકે ગોઠવી શકાય)

*	* **	* ** ***	* ** *** ****	* ** *** **** *****
1	3	6	10	15

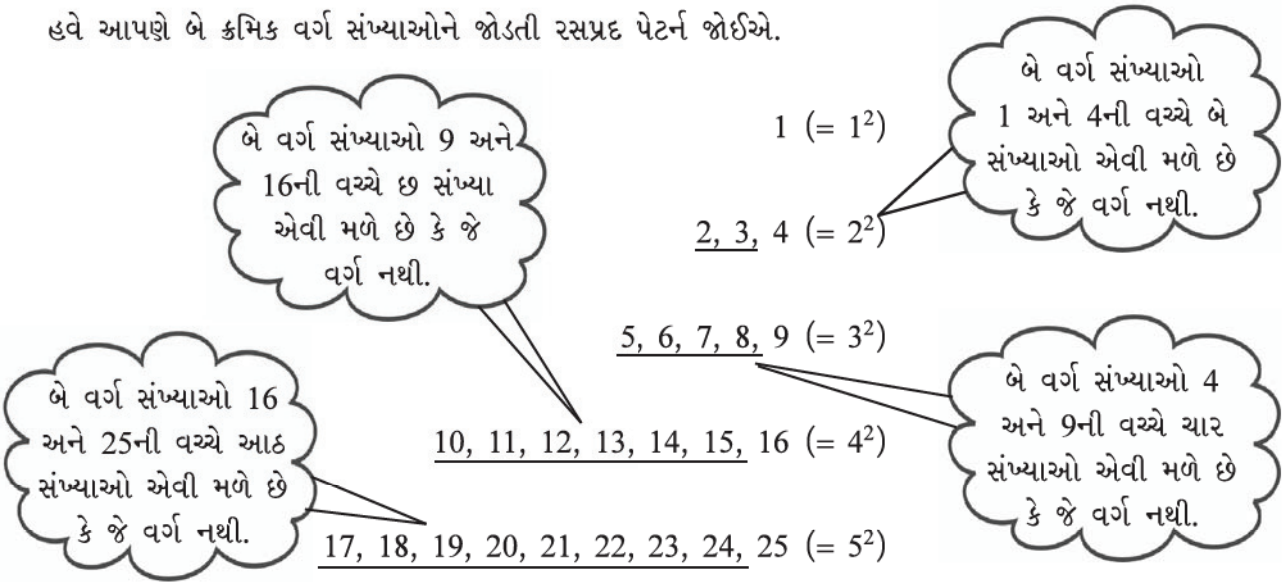
જો આપણે એક સાથે બે ક્રમિક ત્રિકોણીય સંખ્યા વિચારીએ, તો આપણને વર્ગ સંખ્યા મળે છે, જેમ કે-



$1 + 3 = 4 = 2^2$ $\qquad$ $3 + 6 = 9 = 3^2$ $\qquad$ $6 + 10 = 16 = 4^2$

2. બે વર્ગ સંખ્યાઓની વચ્ચેની સંખ્યાઓ

હવે આપણે બે ક્રમિક વર્ગ સંખ્યાઓને જોડતી રસપ્રદ પેટર્ન જોઈએ.



આમ, 1^2 (= 1) અને 2^2 (= 4) વચ્ચે બે (2×1) વર્ગ સંખ્યા ન હોય તેવી સંખ્યાઓ 2, 3 મળે.
2^2 (= 4) અને 3^2 (= 9) વચ્ચે ચાર (2×2) વર્ગ સંખ્યા ન હોય તેવી સંખ્યાઓ 5, 6, 7, 8 મળે.

હવે $3^2 = 9$ અને $4^2 = 16$

તેથી $4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$

પરંતુ 9(= 3^2) અને 16(= 4^2) વચ્ચે વર્ગ સંખ્યા ન હોય તેવી સંખ્યાઓ છે 10, 11, 12, 13, 14, 15. આમ, મળેલી છ સંખ્યાઓ એ બે વર્ગોના તફાવતથી એક ઓછી છે.

હવે, $4^2 = 16$ અને $5^2 = 25$

તેથી $5^2 - 4^2 = 9$

પરંતુ 16(= 4^2) અને 25 (= 5^2) વચ્ચે વર્ગ સંખ્યા (એટલે કે પૂર્ણવર્ગ) ન હોય તેવી સંખ્યાઓ આઠ હોય છે. જેમ કે, 17, 18, 19, ..., 24. આમ આવી મળતી સંખ્યાઓ એ બે વર્ગોના તફાવતથી એક ઓછી હોય છે.

7^2 અને 6^2 માટે વિચારો. તમે કહી શકો કે 6^2 અને 7^2 વચ્ચે આવી પૂર્ણવર્ગ ન હોય તેવી કેટલી સંખ્યાઓ હશે ?

જો આપણે કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા n અને $(n + 1)$ માટે વિચારીએ તો,

$$(n + 1)^2 - n^2 = (n^2 + 2n + 1) - n^2 = 2n + 1$$

આપણે શોધી શકીએ કે n^2 અને $(n + 1)^2$ વચ્ચે પૂર્ણવર્ગ ન હોય તેવી સંખ્યાઓ $2n$ હોય. જે બે પૂર્ણવર્ગના તફાવતથી એક ઓછી છે.

આમ, આપણે વ્યાપક રૂપે કહી શકીએ કે કોઈ પણ બે સંખ્યાઓ n અને $(n + 1)$ના વર્ગો વચ્ચે આવતી પૂર્ણવર્ગ ન હોય તેવી સંખ્યાઓ $2n$ હશે. તમે $n = 5$, $n = 6$ માટે ચકાસણી કરો.

પ્રયત્ન કરો

1. 9^2 અને 10^2 વચ્ચે કેટલી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓ આવે ? તેમજ 11^2 અને 12^2 વચ્ચે કેટલી ?

2. નીચે આપેલ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓની જોડીઓ વચ્ચે પૂર્ણવર્ગ ન હોય તેવી કેટલી સંખ્યાઓ આવે ?
(i) 100^2 અને 101^2 (ii) 90^2 અને 91^2 (iii) 1000^2 અને 1001^2

3. એકી સંખ્યાઓનો સરવાળો

નીચેના સરવાળાઓ જુઓ :

1 [એક એકી સંખ્યા છે] $= 1 = 1^2$

1 + 3 [પ્રથમ બે એકી સંખ્યાઓનો સરવાળો] $= 4 = 2^2$

1 + 3 + 5 [પ્રથમ ત્રણ એકી સંખ્યાઓનો સરવાળો] $= 9 = 3^2$

1 + 3 + 5 + 7 [...] $= 16 = 4^2$

1 + 3 + 5 + 7 + 9 [...] $= 25 = 5^2$

1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 [...] $= 36 = 6^2$

તેથી આપણે કહી શકીએ કે પ્રથમ n એકી સંખ્યાનો સરવાળો n^2 મળે.

આ બાબતને જો આપણે બીજી રીતે જોઈએ તો, 'જો કોઈ સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે, તો તેને 1 થી શરૂ કરી ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા તરીકે રજૂ કરી શકાય.'

અહીં, 2, 3, 5, 6, ... વગેરે પૂર્ણવર્ગ ન હોય તેવી સંખ્યાઓ છે. શું આપણે તેને 1 થી શરૂ કરી ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા તરીકે રજૂ કરી શકીએ ? વિચારો.

તમે કહી શકશો કે આ રીતે રજૂ કરી શકાય નહિ.

હવે સંખ્યા 25 વિચારો. 25માંથી ક્રમિક 1, 3, 5, 7, 9 ... ની બાદબાકી કરીએ તો...

(i) $25 - 1 = 24$ (ii) $24 - 3 = 21$ (iii) $21 - 5 = 16$
(iv) $16 - 7 = 9$ (v) $9 - 9 = 0$

અર્થાત્, $25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$ અને 25 પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા પણ છે.

હવે બીજી સંખ્યા 38 વિચારો. ઉપર મુજબ જ બાદબાકી કરતાં,

(i) $38 - 1 = 37$ (ii) $37 - 3 = 34$ (iii) $34 - 5 = 29$
(iv) $29 - 7 = 22$ (v) $22 - 9 = 13$ (vi) $13 - 11 = 2$
(vii) $2 - 13 = -11$

આ બતાવે છે કે આપણે 38 ને 1 થી શરૂ કરી ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા તરીકે રજૂ કરી શકતા નથી તેમજ 38 એ પૂર્ણવર્ગ પણ નથી.

તેથી આપણે કહી શકીએ કે, ''જો આપેલ પ્રાકૃતિક સંખ્યાને 1 થી શરૂ કરી ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા તરીકે રજૂ ન કરી શકાય, તો તે પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા નથી.''

આ પરિણામના ઉપયોગથી આપણે આપેલ સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ છે કે નહિ તે શોધી શકીએ છીએ.

પ્રયત્ન કરો

નીચેની સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે કે નહિ તે કહો :

(i) 121 (ii) 55 (iii) 81 (iv) 49 (v) 69

4. ક્રમિક પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો

નીચેની બાબત ધ્યાનથી જુઓ :

પ્રથમ સંખ્યા $\dfrac{3^2-1}{2}$

$3^2 = 9 = 4 + 5$

$5^2 = 25 = 12 + 13$

$7^2 = 49 = 24 + 25$

બીજી સંખ્યા $\dfrac{3^2+1}{2}$

$$9^2 = 81 = 40 + 41$$

$$11^2 = 121 = 60 + 61$$

$$15^2 = 225 = 112 + 113$$

પ્રયત્ન કરો

1. નીચેની સંખ્યાઓને બે ક્રમિક સંખ્યાના સરવાળા તરીકે રજૂ કરો :

(i) 21^2 (ii) 13^2 (iii) 11^2 (iv) 19^2

2. શું એ પણ સાચું છે કે, બે ક્રમિક સંખ્યાઓનો સરવાળો એ કોઈ સંખ્યાનો વર્ગ હશે ? તમારા જવાબના આધાર માટે ઉદાહરણ પણ આપો.

5. બે ક્રમિક એકી અથવા બેકી સંખ્યાઓનો ગુણાકાર

$$11 \times 13 = 143 = 12^2 - 1$$

પણ $11 \times 13 = (12 - 1) \times (12 + 1)$

તેથી $11 \times 13 = (12 - 1) \times (12 + 1) = 12^2 - 1$

તેવી જ રીતે $13 \times 15 = (14 - 1) \times (14 + 1) = 14^2 - 1$

$$29 \times 31 = (30 - 1)(30 + 1) = 30^2 - 1$$

$$44 \times 46 = (45 - 1)(45 + 1) = 45^2 - 1$$

તેથી આપણે એવું કહી શકીએ કે, $(a + 1) \times (a - 1) = a^2 - 1$

6. પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓની અન્ય બીજી તરાહો

$1^2 =$ 1

$11^2 =$ 1 2 1

$111^2 =$ 1 2 3 2 1

$1111^2 =$ 1 2 3 4 3 2 1

$11111^2 =$ 1 2 3 4 5 4 3 2 1

$11111111^2 =$ 1 2 3 4 5 6 7 8 7 6 5 4 3 2 1

બીજી રસપ્રદ તરાહ...

$$7^2 = 49$$

$$67^2 = 4489$$

$$667^2 = 444889$$

$$6667^2 = 44448889$$

$$66667^2 = 4444488889$$

$$666667^2 = 444444888889$$

આવું કેમ બને છે તે શોધી કાઢવા તમે જ્યારે સક્ષમ બનશો ત્યારે મજા પડશે. જ્યારે અમુક વર્ષો પછી તમને તેનો જવાબ મળશે ત્યારે તે તમારા માટે રસપ્રદ રહેશે અને આવા પ્રશ્નોથી વિચાર શક્તિ વિસ્તરશે.

પ્રયત્ન કરો

નીચેની સંખ્યા માટે ઉપર દર્શાવેલ તરાહ મુજબ વર્ગ કરો :

(i) 111111^2 (ii) 1111111^2

પ્રયત્ન કરો

શું તમે બાજુની તરાહની મદદથી આપેલી સંખ્યાઓનો વર્ગ શોધી શકો ?

(i) 6666667^2 (ii) 66666667^2

સ્વાધ્યાય 6.1

1. નીચે આપેલ સંખ્યાઓના વર્ગ કરવાથી એકમનો અંક શું મળશે ?

(i) 81 (ii) 272 (iii) 799 (iv) 3853
(v) 1234 (vi) 26387 (vii) 52698 (viii) 99880
(ix) 12796 (x) 55555

2. નીચેની સંખ્યાઓ માટે સ્પષ્ટ છે કે તે પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓ નથી. કારણ સહ જણાવો.

(i) 1057 (ii) 23453 (iii) 7928 (iv) 222222
(v) 64000 (vi) 89722 (vii) 222000 (viii) 505050

3. નીચે આપેલી સંખ્યાઓમાંથી કઈ સંખ્યાઓનો વર્ગ કરતાં મળતી સંખ્યા એકી સંખ્યા હશે ?

(i) 431 (ii) 2826 (iii) 7779 (iv) 82004

4. નીચેની પૅટર્નમાંથી ખૂટતી સંખ્યાઓ જણાવો :

$$11^2 = 121$$
$$101^2 = 10201$$
$$1001^2 = 1002001$$
$$100001^2 = 1.....2.....1$$
$$10000001^2 = ...$$

5. નીચે આપેલી પૅટર્નમાં ખૂટતી સંખ્યાઓ જણાવો :

$$11^2 = 121$$
$$101^2 = 10201$$
$$10101^2 = 102030201$$
$$1010101^2 = ...$$
$$..................^2 = 10203040504030201$$

6. નીચેની રીત મુજબ ખૂટતી સંખ્યાઓ શોધો :

$1^2 + 2^2 + 2^2 = 3^2$
$2^2 + 3^2 + 6^2 = 7^2$
$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$
$4^2 + 5^2 + ...^2 = 21^2$
$5^2 + ...^2 + 30^2 = 31^2$
$6^2 + 7^2 + ...^2 = ...^2$

રીત શોધવા માટે :
ત્રીજી સંખ્યા એ પ્રથમ અને બીજી સંખ્યા સાથે સંલગ્ન છે. કેવી રીતે ?
ચોથી સંખ્યા એ ત્રીજી સંખ્યા સાથે સંલગ્ન છે. કેવી રીતે ?

7. સરવાળાની ક્રિયા વિના સરવાળો મેળવો.

(i) $1 + 3 + 5 + 7 + 9$
(ii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$
(iii) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23$

8. (iv) 49ને 7 એકી સંખ્યાઓના સરવાળા તરીકે દર્શાવો.
(v) 121ને 11 એકી સંખ્યાઓના સરવાળા તરીકે દર્શાવો.

9. નીચે આપેલી સંખ્યાઓના વર્ગો વચ્ચે કેટલી સંખ્યાઓ આવશે તે જણાવો.

(i) 12 અને 13 (ii) 25 અને 26 (iii) 99 અને 100

6.4 સંખ્યાઓનો વર્ગ શોધવો

આપણા માટે 3, 4, 5, 6, 7, ... વગેરે નાની સંખ્યાઓના વર્ગો શોધવા સરળ છે, પરંતુ 23નો વર્ગ ઝડપથી શોધવો હોય તો ?

તેનો જવાબ આપવો સરળ નથી. વર્ગ શોધવા માટે આપણે 23×23 કરવું પડે.

પરંતુ 23×23 કર્યા વિના 23નો વર્ગ શોધવાનો એક બીજો રસ્તો પણ છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$23 = 20 + 3$$

તેથી

$$\begin{aligned} 23^2 &= (20 + 3)^2 \\ &= 20(20 + 3) + 3(20 + 3) \\ &= 20^2 + 20 \times 3 + 3 \times 20 + 3^2 \\ &= 400 + 60 + 60 + 9 \\ &= 529 \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 1 : ખરેખર ગુણાકારની ક્રિયા કર્યા વિના જ નીચેની સંખ્યાઓના વર્ગો શોધો :

(i) 39 (ii) 42

ઉકેલ :

(i)
$$\begin{aligned} 39^2 &= (30 + 9)^2 = 30(30 + 9) + 9\,(30 + 9) \\ &= 30^2 + 30 \times 9 + 9 \times 30 + 9^2 \\ &= 900 + 270 + 270 + 81 \\ &= 1521 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} 42^2 &= (40 + 2)^2 \\ &= 40(40 + 2) + 2(40 + 2) \\ &= 40^2 + 40 \times 2 + 2 \times 40 + 2^2 \\ &= 1600 + 80 + 80 + 4 \\ &= 1764 \end{aligned}$$

6.4.1 વર્ગ શોધવા માટેની અન્ય રીતો

નીચેની રીત પર વિચારો :

$$\begin{aligned} 25^2 &= 625 = (2 \times 3) \times \text{સો} + 25 \\ 35^2 &= 1225 = (3 \times 4) \times \text{સો} + 25 \\ 75^2 &= 5625 = (7 \times 8) \times \text{સો} + 25 \\ 125^2 &= 15625 = (12 \times 13) \times \text{સો} + 25 \end{aligned}$$

જે સંખ્યાનો એકમનો અંક 5 છે એટલે કે તે સંખ્યા $a5$ હોય તો

$$\begin{aligned} (a5)^2 &= (10a + 5)^2 \\ &= 10a(10a + 5) + 5\,(10a + 5) \\ &= 100a^2 + 50a + 50a + 25 \\ &= 100a\,(a + 1) + 25 \\ &= a(a + 1) \times \text{સો} + 25 \end{aligned}$$

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલી સંખ્યામાં એકમનો અંક 5 છે, તેમનો વર્ગ શોધો.

(i) 15 (ii) 95 (iii) 105 (iv) 205

6.4.2 પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટીઓ

નીચેના માટે વિચારો :

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$$

5D6IR6

સંખ્યાઓ 3, 4 અને 5નો સમૂહ એ ''પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી'' તરીકે ઓળખાય છે.

તેમજ 6, 8, 10 એ પણ પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી છે. કેમ કે,

$$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$$

ફરીથી નિરીક્ષણ કરો $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$

એટલે કે સંખ્યાઓ 5, 12 અને 13 પણ આવી ત્રિપુટી રચે છે.

શું તમે આવી અન્ય ત્રિપુટીઓ શોધી શકો ?

કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા $m > 1$, માટે જો $(2m)^2 + (m^2 - 1)^2 = (m^2 + 1)^2$ તો $2m$, $m^2 - 1$ અને $m^2 + 1$ એ પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી હોય છે. આ તેનું વ્યાપક સ્વરૂપ છે.

ઉપરના પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી માટેના વ્યાપક સ્વરૂપની મદદથી પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટીઓ મેળવો.

ઉદાહરણ 2 : જેનો નાનામાં નાનો અંક 8 હોય તેવી પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી શોધો.

ઉકેલ : આપણે પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી તેના વ્યાપક સ્વરૂપ $2m$, $m^2 - 1$ અને $m^2 + 1$ ની મદદથી શોધીશું.

સૌ પ્રથમ આપણે $m^2 - 1 = 8$ લઈશું.

તેથી $m^2 = 8 + 1 = 9$

તેથી $m = 3$

એટલે કે $2m = 6$ અને $m^2 + 1 = 10$

અહીં પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી 6, 8 અને 10 મળે છે, પરંતુ 8 એ આ પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટીનો નાનામાં નાનો અંક નથી.

તેથી આપણે $2m = 8$ લઈએ

$\therefore m = 4$

તેથી આપણને $m^2 - 1 = 16 - 1 = 15$ અને

$m^2 + 1 = 16 + 1 = 17$ મળશે.

આમ, 8, 15, 17 એ એવી પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી છે કે જેનો નાનામાં નાનો અંક 8 છે.

ઉદાહરણ 3 : જે પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટીમાં એક સંખ્યા 12 હોય તેવી પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી શોધો.

ઉકેલ : જો આપણે $m^2 - 1 = 12$ લઈએ તો

$m^2 = 12 + 1 = 13$

તેથી mની કિંમત પૂર્ણાંક નથી.

તેથી આપણે $m^2 + 1 = 12$ લઈએ, ફરી $m^2 = 11$ અહીં, આપણને mની પૂર્ણાંક કિંમત મળતી નથી.

તેથી આપણે $2m = 12$ લઈએ.

$\therefore m = 6$

તેથી $m^2 - 1 = 36 - 1 = 35$, $m^2 + 1 = 36 + 1 = 37$

આમ, પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી 12, 35 અને 37 મળે.

નોંધ : બધી જ પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી આ વ્યાપક સ્વરૂપથી નથી મળતી. ઉદાહરણ તરીકે 5, 12, 13 બીજી એક પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી છે, જેનો એક અંક 12 છે.

સ્વાધ્યાય 6.2

1. નીચે આપેલી સંખ્યાઓના વર્ગ શોધો :
   (i) 32 (ii) 35 (iii) 86
   (iv) 93 (v) 71 (vi) 46
2. નીચે આપેલી સંખ્યા ધરાવતી પાયથાગોરીઅન ત્રિપુટી લખો :
   (i) 6 (ii) 14 (iii) 16 (iv) 18

6.5 વર્ગમૂળ

નીચેની પરિસ્થિતિનો અભ્યાસ કરો :

(a) જો એક ચોરસનું ક્ષેત્રફળ 144 cm^2 હોય તો તે ચોરસની બાજુનું માપ કેટલું હોય ?

આપણે જાણીએ છીએ કે,
ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = (બાજુ)^2
જો આપણે ચોરસની બાજુની લંબાઈ 'a' ધારીએ તો, $144 = a^2$
આમ, a ની કિંમત શોધવા માટે આપણે એવી સંખ્યા શોધવી પડે કે જેનો વર્ગ 144 મળે.

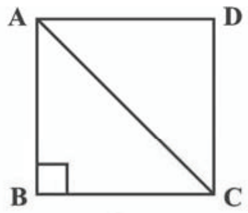
(b) આકૃતિ 6.1માં 8 સેમી બાજુવાળા ચોરસના વિકર્ણની લંબાઈ શું હશે ?
શું આપણે પાયથાગોરસના પ્રમેયનો ઉપયોગ કરી આનો ઉકેલ મેળવી શકીએ ?

$AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\therefore\ 8^2 + 8^2 = AC^2$

અથવા $64 + 64 = AC^2$

અથવા $128 = AC^2$



આકૃતિ 6.1

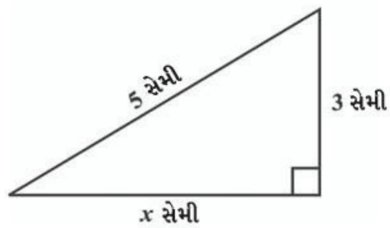
આપણને ACની કિંમત તો જ મળે જો આપણે શોધી કાઢીએ કે 128 એ કઈ સંખ્યાનો વર્ગ છે.

(c) કાટકોણ ત્રિકોણમાં કર્ણ અને કોઈ એક બાજુની લંબાઈ અનુક્રમે 5 સેમી અને 3 સેમી છે. (આકૃતિ 6.2) શું તમે ત્રીજી બાજુની લંબાઈ શોધી શકશો ?
ધારો કે ત્રીજી બાજુની લંબાઈ x સેમી છે.
પાયથાગોરસના પ્રમેયની મદદથી, $5^2 = x^2 + 3^2$

$\therefore\ 25 = x^2 + 9$

$\therefore\ 25 - 9 = x^2$

$\therefore\ 16 = x^2$



આકૃતિ 6.2

આપણને xની કિંમત માટે 16 કઈ સંખ્યાનો વર્ગ છે તેની જાણકારી જરૂરી છે.
આમ, ઉપરના બધા જ કિસ્સાઓમાં આપણે એક એવી સંખ્યા શોધવી પડે કે જેનો વર્ગ જાણીતી સંખ્યા મળે.
આમ, જાણીતી સંખ્યા કઈ સંખ્યાનો વર્ગ છે, તે શોધવાની પ્રક્રિયાને વર્ગમૂળ શોધવાની પ્રક્રિયા કહે છે.

6.5.1 વર્ગમૂળ શોધવું

જેવી રીતે સરવાળાની વિરુદ્ધ ક્રિયા બાદબાકી અને ગુણાકારની વિરુદ્ધ ક્રિયા ભાગાકાર છે, તેવી જ રીતે કોઈ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ શોધવું તે વર્ગ શોધવાની ક્રિયાની વિરુદ્ધ પ્રકારની ક્રિયા છે. આપણે જાણીએ છીએ કે,

$1^2 = 1$ તેથી 1નું વર્ગમૂળ 1 છે.

$2^2 = 4$ તેથી 4નું વર્ગમૂળ 2 છે.

$3^2 = 9$ તેથી 9નું વર્ગમૂળ 3 છે.

> જો કે $9^2 = 81$ અને $(-9)^2 = 81$ તેથી આપણે કહી શકીએ કે 81નું વર્ગમૂળ -9 અને 9 છે.

પ્રયત્ન કરો

(i) જો $11^2 = 121$, તો 121નું વર્ગમૂળ ?

(ii) $14^2 = 196$, તો 196નું વર્ગમૂળ ?

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

$(-1)^2 = 1$, શું -1 એ 1નું વર્ગમૂળ છે ? $(-2)^2 = 4$, શું -2 એ 4 નું વર્ગમૂળ છે ?
$(-9)^2 = 81$, શું -9 એ 81નું વર્ગમૂળ છે ?

ઉપરની ચર્ચા પરથી આપણે કહી શકીએ કે, કોઈ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ બે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓ હોય છે. આ પ્રકરણમાં આપણે ફક્ત પ્રાકૃતિક સંખ્યાનું ધન વર્ગમૂળ જ લઈશું.
ધન વર્ગમૂળ ને આપણે $\sqrt{\ }$ સંકેતથી દર્શાવીશું
દાખલા તરીકે, $\sqrt{4} = 2$ (-2 નહીં લઈએ) $\sqrt{9} = 3$ (-3 નહીં લઈએ) વગેરે.

વિધાન	અનુમાન	વિધાન	અનુમાન
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$	$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$	$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$	$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$	$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$	$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$

5DFEST

6.5.2 પુનરાવર્તીત બાદબાકીની મદદથી વર્ગમૂળ શોધવું

તમને યાદ છે ને કે પ્રથમ n એકી પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો સરવાળો n^2 મળે ? તેથી પ્રત્યેક પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાને 1 થી શરૂ કરી ક્રમિક એકી સંખ્યાના સરવાળા સ્વરૂપે રજૂ કરી શકાય.

$\sqrt{81}$ માટે વિચારીએ તો,

(i) $81 - 1 = 80$ (ii) $80 - 3 = 77$ (iii) $77 - 5 = 72$

(iv) $72 - 7 = 65$ (v) $65 - 9 = 56$ (vi) $56 - 11 = 45$

(vii) $45 - 13 = 32$ (viii) $32 - 15 = 17$ (ix) $17 - 17 = 0$

પ્રયત્ન કરો

1 થી શરૂ કરી ક્રમિક અયુગ્મ સંખ્યાની પુનરાવર્તિત બાદબાકી કરીને જણાવો કે નીચેની સંખ્યાઓ પૂર્ણવર્ગ છે કે નહીં ? જો પૂર્ણવર્ગ હોય તો તેમનું વર્ગમૂળ શોધો.

(i) 121
(ii) 55
(iii) 36
(iv) 49
(v) 90

અહીં આપણે 81માંથી 1 થી શરૂ કરી ક્રમિક એકી સંખ્યા બાદ કરતા ગયા અને 9મા પગલે આપણને બાદબાકી શૂન્ય મળે છે. તેથી $\sqrt{81} = 9$

શું તમે 729નું વર્ગમૂળ આ પદ્ધતિથી શોધી શકો ? હા. પરંતુ તે પ્રક્રિયા ઘણી જ લાંબી અને વધારે સમય લાગે તેવી છે. ચાલો, આપણે સરળ રીતે વર્ગમૂળ શોધવાની રીત જાણીએ.

6.5.3 અવિભાજ્ય અવયવીકરણની મદદથી વર્ગમૂળ શોધવું

નીચે સંખ્યા અને તેના વર્ગોને અવિભાજ્ય અવયવના ગુણાકાર તરીકે રજૂ કરેલ છે.

સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવો	વર્ગના અવિભાજ્ય અવયવ
$6 = 2 \times 3$	$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$8 = 2 \times 2 \times 2$	$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$
$12 = 2 \times 2 \times 3$	$144 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$
$15 = 3 \times 5$	$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5$

અહીં 6ના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં 2 કેટલી વાર આવે છે ? એકવાર. 36 ના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં 2 કેટલી વાર આવે છે ? બે વાર. તેવી જ રીતે નિરીક્ષણ કરો કે 6 અને 36 ના અવયવીકરણમાં 3 તેમજ 8 અવયવીકરણમાં 8 કેટલીવાર આવે છે ? 6 અને ના અવયવીકરણમાં 3 તેમજ 8 અને 64ના અવયવીકરણમાં 2 કેટલીવાર આવે ?

આપણને જાણવા મળશે કે દરેક પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાના અવિભાજ્ય અવયવીકરણમાં દરેક અવિભાજ્ય અવયવ બે વાર આવે છે. એટલે કે દરેક અવિભાજ્ય અવયવ બે-બેની જોડીમાં આવે છે. ચાલો, આપણે તેનો ઉપયોગ 324 નું વર્ગમૂળ શોધવા માટે કરીએ.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 324 \\ \hline 2 & 162 \\ \hline 3 & 81 \\ \hline 3 & 27 \\ \hline 3 & 9 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

આપણે જાણીએ છીએ કે,

$$324 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

અવિભાજ્ય અવયવોની જોડી બનાવતાં,

$$324 = \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{3 \times 3} = 2^2 \times 3^2 \times 3^2 = (2 \times 3 \times 3)^2$$

તેથી $\sqrt{324} = 2 \times 3 \times 3 = 18$

તેવી જ રીતે આપણે 256નું વર્ગમૂળ શોધીએ. 256ના અવિભાજ્ય અવયવો.

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$$

અવિભાજ્ય અવયવોની જોડી બનાવતાં

$$256 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2}$$
$$= (2 \times 2 \times 2 \times 2)^2$$

$\therefore \quad \sqrt{256} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$

શું 48 પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે ?

આપણે જાણીએ છીએ કે, $48 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3$

અહીં 48ના અવિભાજ્ય અવયવો જોડીમાં નથી. તેથી 48 એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા નથી.

ધારો કે આપણે 48 નો એવો નાનામાં નાનો ગુણક શોધવો છે કે જેથી 48 પૂર્ણવર્ગ બને. તો આપણે શું કરીશું ? 48ના અવયવોની જોડી બનાવતાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે અવયવ 3 જોડીમાં નથી. તેથી 48ને માત્ર 3 વડે ગુણવાથી જોડી બની જાય.

આમ, $48 \times 3 = 144$ એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.

શું આપણે કહી શકીએ કે કઈ નાનામાં નાની સંખ્યા વડે 48 ને ભાગવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ મળે ?

48ના અવિભાજ્ય અવયવમાં 3 એ જોડીમાં નથી, તેથી જો આપણે 48 ને 3 વડે ભાગીએ તો આપણને $48 \div 3 = 16$ મળે. તેમજ $16 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} = 16$ પણ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે. આમ, 48ને 3 વડે ભાગવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ છે.

ઉદાહરણ 4 : 6400નું વર્ગમૂળ શોધો.

ઉકેલ : આપણે 6400 ને નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ :

2	6400
2	3200
2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
5	5
	1

$$6400 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{5 \times 5}$$

$\therefore \quad \sqrt{6400} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 80$

ઉદાહરણ 5 : શું 90 એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે ?

2	90
3	45
3	15
	5

ઉકેલ : આપણે 90ને નીચે પ્રમાણે દર્શાવીએ $90 = 2 \times 3 \times 3 \times 5$

પરંતુ, અહીં અવિભાજ્ય સંખ્યા 2 અને 5 જોડીમાં નથી. તેથી 90 એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા નથી.

જો કે બીજી રીતે જોઈએ તો 90 માં માત્ર એક જ શૂન્ય છે. તેથી તે પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા ન હોય.

ઉદાહરણ 6 : શું 2352 એ પૂર્ણવર્ગ છે ? જો ના તો કઈ નાનામાં નાની સંખ્યાને 2352 સાથે ગુણવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ મળે ? આ મળતી નવી સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.

2	2352
2	1176
2	588
2	294
3	147
7	49
7	7
	1

ઉકેલ : અહીં, $2352 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$

અહીં, અવિભાજ્ય અવયવ 3 એ જોડીમાં નથી. તેથી 2352 એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા નથી. હવે જો 3 જોડીમાં હોય તો તે પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા બને. તેથી આપણે 2352 ને 3 વડે ગુણીએ તો મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ બને.

$\therefore \; 2352 \times 3 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{7 \times 7}$

હવે દરેક અવિભાજ્ય સંખ્યા જોડીમાં છે. તેથી $2352 \times 3 = 7056$ એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે. આમ, 2352ને નાનામાં નાની સંખ્યા 3 વડે ગુણવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ છે અને તે મળતી સંખ્યા 7056 છે.

અને, $\sqrt{7056} = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 84$

ઉદાહરણ 7 : 9408ને એવી કઈ નાનામાં નાની સંખ્યા વડે ભાગવાથી મળતું ભાગફળ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા મળે ? આ ભાગફળનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $9408 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times 3 \times \underline{7 \times 7}$

જો 9408ને અવયવ 3 વડે ભાગીએ તો

$9408 \div 3 = 3136 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{7 \times 7}$ જે પૂર્ણવર્ગ છે. (કેમ ?)

માટે, અપેક્ષિત નાનામાં નાની સંખ્યા 3 છે.

અને $\sqrt{3136} = 2 \times 2 \times 2 \times 7 = 56$

ઉદાહરણ 8 : સંખ્યાઓ 6, 9 અને 15 થી નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી નાનામાં નાની પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા શોધો.

2	6, 9, 15
3	3, 9, 15
3	1, 3, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

ઉકેલ : આ ઉદાહરણને આપણે બે સોપાનમાં ઉકેલીશું. સૌપ્રથમ આપણે નાનામાં નાનો સામાન્ય અવયવી શોધીશું અને ત્યારબાદ જરૂરી પૂર્ણવર્ગ શોધીશું. 6, 9, 15થી નિશેષ ભાગી શકાય તેવી નાનામાં નાની સંખ્યા તેમનો લ.સા.અ. છે. 6, 9 અને 15નો લ.સા.અ. $2 \times \underline{3 \times 3} \times 5 = 90$ છે.

90ના અવિભાજ્ય અવયવો $90 = 2 \times \underline{3 \times 3} \times 5$

અહીં અવિભાજ્ય અવયવો 2 અને 5 જોડીમાં નથી. તેથી 90 એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા નથી.

પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા મેળવવા માટે 90નો દરેક અવયવ જોડીમાં હોવો જરૂરી છે. તેથી આપણે 2 અને 5 ની જોડી બનાવવી પડશે. તેથી આપણે 90ને 2×5 એટલે કે 10 વડે ગુણીશું.

તેથી અપેક્ષિત પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા $90 \times 10 = 900$ છે.

સ્વાધ્યાય 6.3

1. નીચે આપેલ સંખ્યાઓના વર્ગમૂળમાં એકમનો અંક કયો હશે ?
   (i) 9801 (ii) 99856 (iii) 998001 (iv) 657666025
2. કોઈ પણ પ્રકારની ગણતરી કર્યા વિના જ જણાવો કે નીચેના પૈકી કઈ સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ નથી ?
   (i) 153 (ii) 257 (iii) 408 (iv) 441
3. પુનરાવર્તીત બાદબાકીની રીતે 100 અને 169નું વર્ગમૂળ શોધો.
4. નીચે આપેલી સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ અવિભાજ્ય અવયવીકરણની રીતે શોધો.
   (i) 729 (ii) 400 (iii) 1764 (iv) 4096
   (v) 7744 (vi) 9604 (vii) 5929 (viii) 9216
   (ix) 529 (x) 8100
5. નીચે આપેલી દરેક સંખ્યા માટે નાનામાં નાની એવી સંખ્યા શોધો કે જેના વડે ગુણવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય. ઉપરાંત મળતી આ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.
   (i) 252 (ii) 180 (iii) 1008 (iv) 2028
   (v) 1458 (vi) 768
6. નીચે આપેલી દરેક સંખ્યા માટે નાનામાં નાની એવી સંખ્યા શોધો કે જેના વડે ભાગવાથી મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય. ઉપરાંત મળેલી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.
   (i) 252 (ii) 2925 (iii) 396 (iv) 2645
   (v) 2800 (vi) 1620
7. એક નિશાળના ધોરણ 8ના તમામ વિદ્યાર્થીઓ મળીને ₹ 2401 પ્રધાનમંત્રી રાષ્ટ્રીય રાહત ફંડમાં ફાળો આપે છે. વર્ગમાં જેટલી સંખ્યા છે તેટલા રૂપિયા દરેક વિદ્યાર્થી દાનમાં આપે છે, તો વર્ગમાં વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા કેટલી હશે ?

8. એક બગીચામાં 2025 છોડ એવી રીતે રોપેલ છે કે પ્રત્યેક હારમાં રોપેલા છોડની સંખ્યા કુલ હારની સંખ્યા બરાબર થાય. તો પ્રત્યેક હારમાં રોપેલ છોડ અને કુલ હારની સંખ્યા શોધો.

9. 4, 9 અને 10 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી નાનામાં નાની પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા શોધો.

10. 8, 15 અને 20 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તેવી નાનામાં નાની પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા શોધો.

6.5.4 ભાગાકારની રીતે વર્ગમૂળ શોધવું

જ્યારે કોઈ સંખ્યા ઘણી મોટી હોય, ત્યારે અવિભાજ્ય અવયવીકરણની રીત ખૂબ જ લાંબી અને મુશ્કેલ બને છે. આ સમસ્યાના ઉકેલ માટે આપણે ભાગાકારની રીત અપનાવીશું.

આ માટે આપણે નીચે આપેલ સંખ્યાના વર્ગમૂળનાં કેટલા અંકો છે તે જોઈએ.

નીચેનું કોષ્ટક જુઓ :

સંખ્યા	વર્ગ	વિશેષતા
10	100	તે ત્રણ અંકોની નાનામાં નાની પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.
31	961	તે ત્રણ અંકોની મોટામાં મોટી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.
32	1024	તે ચાર અંકોની નાનામાં નાની પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.
99	9801	તે ચાર અંકોની મોટામાં મોટી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.

તેથી, આપણે સંખ્યાના વર્ગમૂળના અંકોની સંખ્યા વિશે શું કહી શકીએ જો આપેલ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 3 અથવા વર્ગ 4 અંકોથી બનતી સંખ્યા હોય ? આપણે કહી શકીએ કે પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 3 અથવા 4 અંકોથી બનેલી હોય તો તેના વર્ગમૂળની સંખ્યા 2 અંકોથી બનેલી હોય.

શું તમે 5 અંકો અથવા 6 અંકોવાળી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાના વર્ગમૂળની સંખ્યાના અંકો વિશે કહી શકો ?

નાનામાં નાની 3 અંકોવાળી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 100 છે અને તેનું વર્ગમૂળ 10 છે. જ્યારે મોટામાં મોટી 3 અંકોવાળી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 961 છે અને તેનું વર્ગમૂળ 31 છે. નાનામાં નાની 4 અંકોવાળી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 1024 છે અને તેનું વર્ગમૂળ 32 છે જ્યારે મોટામાં મોટી 4 અંકોવાળી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 9801 છે અને તેનું વર્ગમૂળ 99 છે.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

શું આપણે એમ કહી શકીએ કે, n અંકોવાળી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાના વર્ગમૂળની સંખ્યા જો n બેકી હોય, તો $\frac{n}{2}$ અંક મળે અને જો એકી હોય તો $\frac{(n+1)}{2}$ અંક મળે.

કોઈ સંખ્યાના વર્ગમૂળની સંખ્યાના કેટલા અંકો મળે તેનો ઉપયોગ નીચેની પદ્ધતિમાં કરી શકાય :

- 529નું વર્ગમૂળ શોધવા માટે નીચેનાં પગલાં વિચારીએ :

શું તમે 529નું વર્ગમૂળ શોધતાં મળતી સંખ્યાના અંકો વિશે અનુમાન કરી શકો ?

સોપાન 1 આપેલી સંખ્યાના એકમના અંકથી શરૂ કરી સંખ્યાની જોડી બનાવવા માટે તેની ઉપરની બાજુ લીટી દોરો. જો આપેલી સંખ્યાના અંકોની સંખ્યા એકી હોય તો સંખ્યાની ડાબી બાજુના છેલ્લા એક અંક પર પણ લીટી દોરો. તેથી આપણી પાસે $\overline{5}\,\overline{29}$ મળે.

સોપાન 2 હવે આપેલી સંખ્યાની સૌથી ડાબી બાજુ આવેલી જોડી માટે સૌથી મોટી એવી સંખ્યા શોધો કે જેનો વર્ગ આપેલ જોડી જેટલો હોય કે તેથી નાનો હોય ($2^2 < 5 < 3^2$). આ સંખ્યાને ભાજક તરીકે લો અને સૌથી ડાબી બાજુ આપેલી આ જોડીને ભાજ્ય (અહીં 5) તરીકે લઈ ભાગફળ મેળવો. ભાગાકાર કરો અને શેષ મેળવો (આ કિસ્સામાં શેષ 1 છે.)

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{5}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{5}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline & 129 \end{array}$$

સોપાન 3 ત્યાર પછી આવતી જોડીને મળેલ શેષની જમણી બાજુએ નીચે ઉતારો. તેથી નવો ભાજ્ય 129 મળે છે.

સોપાન 4 ભાજકને બમણો કરો અને તેની જમણી બાજુ ખાલી જગ્યામાં મૂકો.

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{5}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline 4- & 129 \end{array}$$

સોપાન 5 હવે ખાલીજગ્યામાં એવો મોટામાં મોટો અંક પસંદ કરો કે, જે ભાગફળનો નવો અંક બને અને તેના નવા ભાજક સાથેનો ગુણાકાર ભાજ્ય કરતાં નાનો અથવા ભાજ્ય જેટલો થાય. આ કિસ્સામાં $42 \times 2 = 84$
અને $43 \times 3 = 129$. તેથી આપણે નવી સંખ્યા 3 પસંદ કરીશું.

$$\begin{array}{r|l} & 23 \\ \hline 2 & \overline{5}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline 43 & 129 \\ & 129 \\ \hline & 0 \end{array}$$

સોપાન 6 અહીં શેષ શૂન્ય મળે છે અને આપેલ સંખ્યામાં કોઈ અંકો પણ બાકી રહેતા નથી.
તેથી, $\sqrt{529} = 23$

- હવે સંખ્યા $\sqrt{4096}$ના વર્ગમૂળ માટે વિચારો.

સોપાન 1 એકમના અંકથી શરૂ કરી જોડીઓ બનાવવા માટે લીટીઓ દોરો, (અહીં $\overline{40}\,\overline{96}$).

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ \hline 6 & \overline{40}\,\overline{96} \\ & -36 \\ \hline & 4 \end{array}$$

સોપાન 2 આપેલી સંખ્યામાં સૌથી ડાબી બાજુ આપેલ જોડી માટે એવી મોટામાં મોટી સંખ્યા શોધો કે જેનો વર્ગ આપેલ જોડી જેટલો અથવા નાનો હોય (અહીં $6^2 < 40 < 7^2$). આ નંબરને ભાજક તરીકે લો અને સૌથી ડાબી બાજુ આવેલ જોડીની સંખ્યાને ભાજ્ય તરીકે લો. ભાગાકાર કરો અને શેષ મેળવો. અહીં આ કિસ્સામાં શેષ 4 છે.

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ \hline 6 & \overline{40}\,\overline{96} \\ & -36 \\ \hline & 496 \end{array}$$

સોપાન 3 હવે બીજી જોડીને નીચે ઉતારો (અહીં બીજી જોડી 96 છે). જેને શેષની બાજુમાં જોડતાં ભાજ્ય સંખ્યા 496 બને.

$$\begin{array}{r|l} & 6 \\ \hline 6 & \overline{40}\,\overline{96} \\ & -36 \\ \hline 12- & 496 \end{array}$$

સોપાન 4 ભાજકને બમણા કરો અને તેની જમણી બાજુ ખાલી જગ્યા મૂકો.

સોપાન 5 હવે ખાલીજગ્યામાં એવો મોટામાં મોટો અંક પસંદ કરો, કે જે નવી ભાગફળનો નવો અંક બને અને તેનો નવા ભાજક સાથેનો ગુણાકાર ભાજ્ય કરતાં નાનો અથવા ભાજ્ય જેટલો થાય. આ કિસ્સામાં $124 \times 4 = 496$
તેથી આપણને ભાગફળમાં નવી સંખ્યા 4 મળે છે અને શેષ મેળવો.

$$\begin{array}{r|l} & 64 \\ \hline 6 & \overline{40}\,\overline{96} \\ & -36 \\ \hline 124 & 496 \\ & -496 \\ \hline & 0 \end{array}$$

સોપાન 6 અહીં શેષ શૂન્ય મળે છે અને કોઈ જોડી બાકી રહેતી નથી. $\therefore \sqrt{4096} = 64$

સંખ્યાનું અનુમાન કરવું

આપણે પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓમાં બનાવેલ જોડીઓની મદદથી તેના વર્ગમૂળની સંખ્યાનો અંક શોધીશું.

$$\sqrt{\overline{5}\,\overline{29}} = 23 \qquad \text{અને} \qquad \sqrt{\overline{40}\,\overline{96}} = 64$$

આ બંને સંખ્યાઓ 529 અને 4096માં બે-બે જોડીઓ છે તેમજ બંને સંખ્યાઓના વર્ગમૂળ તરીકે આવતી સંખ્યાના અંકો પણ બે છે. શું તમે 14400 સંખ્યાના વર્ગમૂળ તરીકે જે સંખ્યા આવશે તેના અંકોની સંખ્યા કહી શકો ?

સંખ્યા $\overline{1}\,\overline{44}\,\overline{00}$ માં જોડીઓ ત્રણ છે. જેથી તેના વર્ગમૂળ તરીકે જે સંખ્યા આવશે તેના અંકો પણ ત્રણ જ હશે.

પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલી સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ શોધ્યા વિના જણાવો કે, મળતા વર્ગમૂળના અંકોની સંખ્યા કેટલી હશે ?

(i) 25600 (ii) 100000000 (iii) 36864

ઉદાહરણ 9 : વર્ગમૂળ શોધો : (i) 729 (ii) 1296

ઉકેલ :

(i)
$$\begin{array}{r|l} & 27 \\ \hline 2 & \overline{7}\,\overline{29} \\ & -4 \\ \hline 47 & 329 \\ & 329 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \sqrt{729} = 27$$

(ii)
$$\begin{array}{r|l} & 36 \\ \hline 3 & \overline{12}\,\overline{96} \\ & -9 \\ \hline 66 & 396 \\ & 396 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \sqrt{1296} = 36$$

ઉદાહરણ 10 : એવી નાનામાં નાની સંખ્યા શોધો કે જેને 5607માંથી બાદ કરતાં મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય. ઉપરાંત મળતી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.

$$\begin{array}{r|l} & 74 \\ \hline 7 & \overline{56}\,\overline{07} \\ & -49 \\ \hline 144 & 707 \\ & -576 \\ \hline & 131 \end{array}$$

ઉકેલ : ચાલો, 5607નું ભાગાકારની રીતે વર્ગમૂળ શોધીએ. આપણને શેષ 131 મળે છે. જે દર્શાવે છે કે 74^2 એ 5607 થી 131 નાનો છે. અર્થાત્ જો આપણે 131ને 5607માંથી બાદ કરીએ તો મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય.

આમ, નવી મળતી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા 5607 – 131 = 5476 છે અને $\sqrt{5476} = 74$

ઉદાહરણ 11 : 4 અંકોવાળી મોટામાં મોટી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા શોધો.

$$\begin{array}{r|l} & 99 \\ \hline 9 & \overline{99}\,\overline{99} \\ & -81 \\ \hline 189 & 1899 \\ & -1701 \\ \hline & 198 \end{array}$$

ઉકેલ : 4 અંકોવાળી મોટામાં મોટી સંખ્યા 9999 છે. સૌ પ્રથમ આપણે $\sqrt{9999}$ ભાગાકારની રીતે શોધવા પ્રયત્ન કરીએ. અહીં શેષ 198 મળે છે. જે દર્શાવે છે કે 99^2 એ 9999 કરતાં 198 નાનો છે.

અર્થાત્ 9999માંથી શેષ 198 બાદ કરતાં આપણને પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા મળે. આમ, 9999 – 198 = 9801 એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.

ઉપરાંત $\sqrt{9801} = 99$

તેથી 4 અંકોવાળી મોટામાં મોટી સંખ્યા 9801 છે અને તેનું વર્ગમૂળ 99 છે.

ઉદાહરણ 12 : એવી નાનામાં નાની સંખ્યા શોધો કે જેને 1300માં ઉમેરતાં મળતી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય. ઉપરાંત આ નવી મળતી સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.

$$\begin{array}{r|l} & 36 \\ \hline 3 & \overline{13}\,\overline{00} \\ & -9 \\ \hline 66 & 400 \\ & -396 \\ \hline & 4 \end{array}$$

ઉકેલ : સૌ પ્રથમ આપણે 1300નું વર્ગમૂળ ભાગાકારની રીતે શોધવા પ્રયત્ન કરીએ. આમ, આ રીતે વર્ગમૂળ શોધતાં શેષ 4 મળે છે. આ બતાવે છે $36^2 < 1300$

તેથી 1300 પછીની પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા $37^2 = 1369$ છે.

તેથી આપણે કહી શકીએ કે $37^2 - 1300 = 1369 - 1300 = 69$.

6.6 દશાંશ સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ

વિચારો કે $\sqrt{17.64}$ શું મળે ?

સોપાન 1 દશાંશ સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ શોધવા માટે આપણે પૂર્ણાંક ભાગમાં ભાગાકારની રીતે વર્ગમૂળ શોધવા જેમ જોડીઓ બનાવવા લીટી કરીએ છીએ તેમ જ કરીશું. (અહીં, 17) અને દશાંશ ભાગમાં જોડીઓ બનાવવા માટે દશાંશ ચિહ્નની જમણી બાજુથી જ લીટીઓ કરી જોડીઓ બનાવીશું. (અહીં 64) અને આગળ જોડીઓ બનાવવા લીટી દોરીશું.

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 4 & \overline{17}.\overline{64} \\ & -16 \\ \hline & 1 \end{array}$$

સોપાન 2 હવે આપણે ભાગાકારની રીતે જ આગળ વધીશું. ડાબી બાજુની સૌ પ્રથમ સંખ્યા 17 અને $4^2 < 17 < 5^2$. આથી 4 ને ભાજક તરીકે અને ડાબી બાજુની સૌ પ્રથમ જોડી 17 ને ભાજ્ય તરીકે લેવામાં આવે છે. ભાગાકાર કરો અને શેષ મેળવો.

$$\begin{array}{r|l} & 4 \\ \hline 4 & \overline{17}.\overline{64} \\ & -16 \\ \hline 8- & 1\,64 \end{array}$$

સોપાન 3 શેષ 1 વધે છે. હવે પછીથી આવતી જોડીની સંખ્યાને શેષ 1ની બાજુમાં લખો. અહીં શેષ 1 અને પછીની જોડીની સંખ્યા 64 છે. તેથી આપણને સંખ્યા 164 મળે.

$$\begin{array}{r|l} & 4. \\ \hline 4 & 17.64 \\ & -16 \\ \hline 82 & 164 \end{array}$$

સોપાન 4 ભાજકને બમણું કરો. ઉપરાંત 64 એ દશાંશ વિભાગમાં આવેલ છે તેથી ભાગફળમાં દશાંશ ચિહ્ન મૂકો.

સોપાન 5 આપણે જાણીએ છીએ કે, $82 \times 2 = 164$ તેથી નવો અંક 2 છે. ભાગાકાર કરો અને શેષ મેળવો.

સોપાન 6 અહીં શેષ શૂન્ય મળે છે અને હવે કોઈ જોડીઓ બાકી રહેતી નથી. તેથી $\sqrt{17.64} = 4.2$

$$\begin{array}{r|l} & 4.2 \\ \hline 4 & 17.64 \\ & -16 \\ \hline 82 & 164 \\ & -164 \\ \hline & 0 \end{array}$$

ઉદાહરણ 13 : 12.25નું વર્ગમૂળ શોધો.

ઉકેલ :

$$\begin{array}{r|l} & 3.5 \\ \hline 3 & \overline{12}.\overline{25} \\ & -9 \\ \hline 65 & 325 \\ & -325 \\ \hline & 0 \end{array} \qquad \therefore \sqrt{12.25} = 3.5$$

આગળ કઈ રીતે વધીશું ?

સંખ્યા 176.341 માટે વિચારો. પૂર્ણાંક ભાગ અને દશાંશ ભાગમાં જોડીઓ બનાવવા લીટીઓ મૂકો. શું પૂર્ણાંક ભાગ અને દશાંશ ભાગમાં જોડીઓ બનાવવા લીટીઓ મૂકવાની રીત જુદી-જુદી છે ? વિચારો. અહીં તમે જોયું હશે કે પૂર્ણાંક ભાગ 176માં જોડીઓ બનાવવા માટે એકમના સ્થાનથી શરૂ કરી જોડીઓ માટે લીટીઓ દોરવામાં આવે છે અને ત્યાર બાદ ડાબી તરફ આગળ વધવામાં આવે છે. પ્રથમ લીટી 76 પર અને બીજી લીટી 1 પર કરવામાં આવે છે, પરંતુ .341 માટે એટલે કે દશાંશ ભાગમાં આપણે લીટીઓ દોરવાની શરૂઆત દશાંશ ચિહ્ન પછી તરત જ જમણી તરફથી કરીશું અને આગળ વધીશું. તેથી પ્રથમ લીટી 34 પર અને બીજી જોડી માટે આપણે 1 પછી 0 મૂકી અને લીટી દોરીશું. તેથી $.\overline{34}\,\overline{10}$ સંખ્યા મળે.

ઉદાહરણ 14 : એક ચોરસ પ્લોટનું ક્ષેત્રફળ 2304 મીટર^2 છે. તો આ ચોરસ પ્લોટની બાજુનું માપ શોધો.

$$\begin{array}{r|l} & 48 \\ \hline 4 & \overline{23}\,\overline{04} \\ & -16 \\ \hline 88 & 704 \\ & 704 \\ \hline & 0 \end{array}$$

ઉકેલ : ચોરસ પ્લોટનું ક્ષેત્રફળ = 2304 મીટર^2

તેથી ચોરસ પ્લોટની બાજુ = $\sqrt{2304}$ મીટર

પરંતુ $\sqrt{2304} = 48$

આમ, 2304 મીટર^2 ક્ષેત્રફળ ધરાવતાં ચોરસ પ્લોટની બાજુનું માપ 48 મીટર હોય.

ઉદાહરણ 15 : એક નિશાળમાં કુલ 2401 વિદ્યાર્થીઓ છે. આ નિશાળના વ્યાયામ શિક્ષક તમામ વિદ્યાર્થીઓને એવી રીતે હાર અને સ્તંભમાં ઊભા રાખવા માંગે છે કે, હાર અને સ્તંભોની સંખ્યા સમાન હોય. તો હારની સંખ્યા શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે હારની સંખ્યા x છે. તેથી સ્તંભની સંખ્યા પણ x મળે. તેથી
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા $= x \times x = x^2$ તેથી $x^2 = 2401$
હવે 2401નું વર્ગમૂળ શોધતાં 49 મળે છે.
આમ, $x = 49$
તેથી હારની સંખ્યા 49 મળે.

	49
4	$\overline{24}\,\overline{01}$
	−16
89	801
	801
	0

6.7 વર્ગમૂળનું અનુમાન કરવું

નીચેની પરિસ્થિતિઓનો વિચાર કરો :

1. દેવેશી પાસે 125 સેમી^{2} ક્ષેત્રફળ ધરાવતો એક કાપડનો ચોરસ ટુકડો છે. તેણી તેમાંથી 15 સેમી બાજુવાળા હાથ રૂમાલ બનાવવા માંગે છે. જો તે શક્ય ન હોય તો તે એ જાણવા માંગે છે કે વધુમાં વધુ કેટલી લંબાઈવાળો હાથરૂમાલ આ ટુકડામાંથી બનાવી શકાય ?
2. મીના અને શોભા રમત રમે છે. એક સંખ્યા બોલે છે અને બીજી તેમનું વર્ગમૂળ કહે છે. મીનાએ સંખ્યા 25 કહી તો શોભાએ ઝડપથી તેનું વર્ગમૂળ 5 એમ જવાબ આપ્યો. પછી શોભાએ 81 કહ્યા તો મીનાએ ઝડપથી 9 એમ જવાબ આપ્યો. આ પ્રમાણે રમત આગળ ચાલતી હતી. એકવાર મીનાએ 250 સંખ્યા કહી અને શોભા તેનો જવાબ આપી શકી નહિ. તો મીનાએ શોભાને કહ્યું કે તે એવી સંખ્યા બતાવે કે જેનો વર્ગ 250ની સૌથી નજીક હોય.

આવા કિસ્સાઓમાં આપણે વર્ગમૂળ સંખ્યાઓનાં અનુમાન કરવાના હોય છે.

આપણે જાણીએ છીએ કે, $100 < 250 < 400$ અને $\sqrt{100} = 10$, $\sqrt{400} = 20$

તેથી $10 < \sqrt{250} < 20$

છતાં હજુ આપણે 250 સંખ્યાની સૌથી વધુ નજીક હોય તેવી પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા પ્રાપ્ત કરી શક્યા નથી.
પરંતુ આપણે જાણીએ છીએ કે, $15^2 = 225$ અને $16^2 = 256$
આમ, $15 < \sqrt{250} < 16$ અને 256 એ 225 કરતાં 250ની વધુ નજીક છે.
તેથી $\sqrt{250}$ એ લગભગ 16 છે.

પ્રયત્ન કરો

નીચેની સંખ્યાઓના વર્ગમૂળની સૌથી નજીકની પૂર્ણ સંખ્યા તરીકે શું મળે તેની ગણતરી કરો :

(i) $\sqrt{80}$ (ii) $\sqrt{1000}$ (iii) $\sqrt{350}$ (iv) $\sqrt{500}$

સ્વાધ્યાય 6.4

1. નીચે આપેલી સંખ્યાઓનું ભાગાકારની રીતે વર્ગમૂળ શોધો :

(i) 2304 (ii) 4489 (iii) 3481 (iv) 529
(v) 3249 (vi) 1369 (vii) 5776 (viii) 7921
(ix) 576 (x) 1024 (xi) 3136 (xii) 900

2. નીચે આપેલી સંખ્યાના વર્ગમૂળ તરીકે આવતી સંખ્યામાં કેટલા અંકો હશે તે જણાવો (કોઈ ગણતરી કર્યા વગર જણાવો.)

(i) 64 (ii) 144 (iii) 4489 (iv) 27225
(v) 390625

3. નીચે આપેલ દશાંશ સંખ્યાઓનું વર્ગમૂળ શોધો :

(i) 2.56 (ii) 7.29 (iii) 51.84 (iv) 42.25

(v) 31.36

4. નીચે આપેલી સંખ્યાઓ માટે એવી નાનામાં નાની સંખ્યા શોધો કે જેની આપેલ સંખ્યામાંથી બાદબાકી કરતાં મળતી નવી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય. ઉપરાંત આ નવી સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો.

(i) 402 (ii) 1989 (iii) 3250

(iv) 825 (v) 4000

5. નીચે આપેલી સંખ્યાઓ માટે એવી નાનામાં નાની સંખ્યા શોધો કે જેનો સરવાળો આપેલ સંખ્યા સાથે કરવાથી મળતી નવી સંખ્યા પૂર્ણવર્ગ હોય. ઉપરાંત આ નવી સંખ્યાનું વર્ગમૂળ પણ શોધો :

(i) 525 (ii) 1750 (iii) 252 (iv) 1825

(v) 6412

6. 441 મીટર^2 ક્ષેત્રફળ વાળા ચોરસની બાજુનું માપ શોધો.

7. કાટકોણ ત્રિકોણ ABC માં, $\angle B = 90°$ છે.

(i) જો AB = 6 સેમી, BC = 8 સેમી, તો AC શોધો.

(ii) જો AC = 13 સેમી, BC = 5 સેમી, તો AB શોધો.

8. એક માળી પાસે 1000 છોડ છે. તે આ છોડને એવી રીતે રોપવા માગે છે કે બગીચામાં હાર અને સ્તંભોની સંખ્યા સમાન મળે, તો માળીને તેના માટે હજુ ઓછામાં ઓછા કેટલા છોડ વધુ જોઈએ ?

9. એક નિશાળમાં 500 વિદ્યાર્થીઓ છે. પી.ટી.ની કવાયત કરવા માટે તમામ વિદ્યાર્થીઓને એવી રીતે ઊભા રાખ્યા છે કે જેથી હાર અને સ્તંભોની સંખ્યા સમાન રહે. તો નિશાળના કેટલા વિદ્યાર્થીઓ આ ગોઠવણી કરવાથી બહાર રહેશે ?

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

1. જો કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યા mને n^2 વડે દર્શાવી શકાય અને n પણ એક પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે, તો સંખ્યા m એ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યા છે.

2. બધી જ પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓના એકમનો અંક 0, 1, 4, 5, 6 અથવા 9 હોય.

3. પૂર્ણવર્ગ સંખ્યામાં છેલ્લે આવેલાં શૂન્યો હંમેશાં બેકી સંખ્યામાં જ હોય.

4. વર્ગ અને વર્ગમૂળ પ્રક્રિયા એકબીજાની વ્યસ્ત છે.

5. પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાના વર્ગમૂળ બે હોય છે.

ધન વર્ગમૂળને "$\sqrt{\ }$" વડે દર્શાવાય છે.

જેમ કે $3^2 = 9$ એટલે $\sqrt{9} = 3$.