5

વિકલન

(Differentiation)

વિષયવસ્તુ :

5.1 પ્રાસ્તાવિક

ધોરણ 11 માં આપણે વિધેય વિશે જોયું. જો $f(x)$ એ x નું વિધેય હોય તો x ની કિંમતમાં ફેરફાર થાય ત્યારે $f(x)$ ની કિંમતમાં કેવી રીતનો અને કેટલો ફેરફાર થાય છે તેના પૃથક્કરણ માટે વિકલનની પદ્ધતિનો ઉપયોગ થાય છે. એટલે કે, કોઈ એક કિંમત આગળ વિધેયમાં કેટલી ઝડપથી ફેરફાર થાય તે વિકલનની મદદથી જાણી શકાય. વાસ્તવિક જીવનમાં આ વિધેય જેવા કે ઉત્પાદન- ખર્ચ, આમદાની, નફો વગેરે હોય છે અને ઘણી વખત એ જાણવું ખૂબ અગત્યનું બને છે કે, આવી વસ્તુઓમાં ઉત્પાદિત એકમો કે વેચાણ થયેલ એકમો x ની કિંમતમાં થતા ફેરફારની સરખામણીમાં વિધેયની કિંમતમાં કેટલા ઝડપથી ફેરફાર થાય છે.

ધારો કે x નું કોઈ એક વિધેય $y = f(x) = 2x^2 + 3$ છે. જ્યારે સ્વતંત્ર ચલ (x)માં ફેરફાર કરવામાં આવે ત્યારે આધારિત ચલ (y)માં ફેરફાર થાય છે. જો x ની કિંમત 2 હોય, તો આધારિત ચલ y ની કિંમત 11 થાય. હવે x ની આ કિંમતમાં અલ્પ વધારો કરવામાં આવે, તો y ની કિંમતમાં કેટલો વધારો થાય છે તે શોધીએ. x ની કિંમતમાં અલ્પ વધારો કરવામાં આવે એટલે કે x ની કિંમતો 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, ... વગેરે લઈએ તો અનુરૂપ y ની કિંમત 11.82, 11.082, 11.008, 11.0008, ... વગેરે મળે છે. x ની કિંમતમાં કરવામાં આવેલા વધારાને δ_x અને y ની કિંમતમાં થયેલા ફેરફારને δ_y વડે દર્શાવીએ. ગુણોત્તર $\frac{\delta_y}{\delta_x}$ ને વૃદ્ધિ ગુણોત્તર કહીશું. હવે ઉપર્યુક્ત x અને તેને અનુરૂપ y ની કિંમતો માટે વૃદ્ધિ ગુણોત્તર જોઈએ.

x	δ_x	$y = f(x)$	δ_y	$\frac{\delta_y}{\delta_x}$
2.1	0.1	11.82	0.82	8.2
2.01	0.01	11.0802	0.0802	8.02
2.001	0.001	11.0080	0.0080	8.002
2.0001	0.0001	11.0008	0.0008	8.0002
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

ઉપરના કોષ્ટક પરથી આપણે નીચેનાં અવલોકન કરી શકીશું :

(i) δ_x માં ફેરફાર થાય ત્યારે δ_y માં ફેરફાર થાય

(ii) જ્યારે $\delta_x \to 0$ ત્યારે $\delta_y \to 0$

(iii) ગુણોત્તર $\frac{\delta_y}{\delta_x}$, **8** ને અનુલક્ષે છે.

આમ, આ ઉદાહરણ દર્શાવે છે કે જ્યારે $\delta_x \to 0$, $\delta_y \to 0$ તો પણ ગુણોત્તર $\frac{\delta_y}{\delta_x}$ કોઈ પરિમિત (finite) કિંમતને અનુલક્ષે તેમ બની શકે. જે શૂન્ય હોય તે જરૂરી નથી. ગુણોત્તર $\frac{\delta_y}{\delta_x}$ ના લક્ષને $\frac{d_y}{d_x}$ તરીકે રજૂ થાય છે અને તેને y નું x ની સાપેક્ષમાં વિકલિત કહેવાય છે.

ઉપરના ઉદાહરણમાં $\frac{d_y}{d_x} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{\delta_y}{\delta_x} = \mathbf{8}$

ઘણી ધંધાકીય સમસ્યાઓમાં આપણે વિધેયની કિંમતમા થતાં ફેરફારનો દર, ખાસ કરીને નિરપેક્ષ ચલની કઈ કિંમતો માટે વિધેયની કિંમતોમાં થતો ફેરફારનો દર ધન કે ઋણ છે તે જાણવા ઇચ્છીએ છીએ.

વિકલનનો ઉપયોગ ઉત્પાદન, ફેરબદલી, ભાવ નિર્ધારણ અને સંચાલકીય નિર્ણય ઘડતરના અન્ય પ્રશ્નોમાં થાય છે.

ટૂંકમાં નિરપેક્ષ ચલની કિંમતમાં અલ્પ ફેરફાર કરવાથી સાપેક્ષ ચલ (નિરપેક્ષ ચલનો વિધેય) ની કિંમતમાં થતા ફેરફારના દરનો અભ્યાસ વિકલન દ્વારા જાણી શકાય છે.

5.2 વ્યાખ્યા : વિકલન અને વિકલિત

ધારો કે $y = f(x)$ એક વિધેય છે.

જ્યારે આપણે $x = a$ લઈએ ત્યારે $f(x)$ ની કિંમત $f(a)$ થશે. હવે, જ્યારે x ની કિંમતમાં અલ્પ વધારો કરીને a થી $a+h$ કરવામાં આવે, તો પરિણામે વિધેયની કિંમત $f(a)$ થી $f(a+h)$ થશે. આમ, x ની કિંમતમાં $(a+h)-a = h$ નો ફેરફાર થાય ત્યારે $f(x)$ ની કિંમતમાં $f(a+h)-f(a)$ નો ફેરફાર થશે. a ની કિંમતમાં h જેટલો ફેરફાર કરવાથી વિધેયની કિંમતમાં થયેલો સાપેક્ષ ફેરફાર $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ થશે. જો h ની કિંમત ખૂબ જ અલ્પ કરવામાં આવે, તો આ સાપેક્ષ ફેરફારના લક્ષને $f(x)$ નું 'a' આગળનું વિકલિત કહેવામાં આવે છે અને તેને $f'(a)$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

વ્યાખ્યા : ધારો કે $f : A \to R$ અને $a \in A$, જ્યાં A એ R નો કોઈ વિવૃત્ત અંતરાલ છે. જો $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ નું અસ્તિત્વ હોય, તો આ લક્ષને વિધેય f નું a આગળનું વિકલિત અથવા વિકલન ફળ (Derivative) કહેવાય. તેને સંકેતમાં $f'(a)$ વડે દર્શાવાય છે.

વિકલિત શોધવાની ક્રિયાને **વિકલન** કહેવાય છે.

આમ, $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

f ના પ્રદેશ ગણના કોઈ પણ સભ્ય x માટે $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ ને વિધેય $f(x)$ નું વિકલિત કહેવામાં આવે છે.

જો y એ x નું વિધેય હોય, તો તેના વિકલનને $\frac{dy}{dx}$ વડે દર્શાવવામાં આવે છે.

હવે, આપણે વિકલિતની વ્યાખ્યાનો ઉપયોગ કરીને કેટલાંક વિધેયોનાં વિકલિત મેળવીશું.

ઉદાહરણ 1 : વ્યાખ્યાની મદદથી $f(x) = x$ નું વિકલિત મેળવો.

અહીં, $f(x) = x$

$\therefore \ f(x+h) = x+h$

હવે, $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h}$$

$$= 1 \qquad (\because\ h \neq 0)$$

આમ, જો $f(x) = x$ તો $f'(x) = 1$

ઉદાહરણ 2 : વ્યાખ્યાની મદદથી $f(x) = x^3$ નું વિકલન ફળ મેળવો.

અહીં, $f(x) = x^3$

$$\therefore\ f(x+h) = (x+h)^3$$

$$= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$

હવે, $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3\right) - x^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h\left(3x^2 + 3xh + h^2\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 \qquad (\because\ h \neq 0)$$

$$= 3x^2 + 3x(0) + (0)^2$$

$$= 3x^2$$

આમ, જો $f(x) = x^3$ તો $f'(x) = 3x^2$

ઉદાહરણ 3 : વ્યાખ્યાની મદદથી $f(x) = x^n$ નું વિકલિત મેળવો.

અહીં, $f(x) = x^n$

$$\therefore\ f(x+h) = (x+h)^n$$

હવે, $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

($x + h = t$ લેતાં, જ્યારે $h \to 0$ ત્યારે $t \to x$)

$$= \lim_{t \to x} \frac{t^n - x^n}{t - x} \qquad (\because \ x + h = t)$$

$$= nx^{n-1} \ \left(\because \lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}\right)$$

આમ, જો $f(x) = x^n$ તો $f'(x) = nx^{n-1}$

ઉદાહરણ 4 : વ્યાખ્યાની મદદથી $f(x) = \sqrt{x}$ નું વિકલન ફળ મેળવો.

અહીં, $f(x) = \sqrt{x}$

$\therefore \ f(x+h) = \sqrt{x+h}$

હવે, $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

(અંશ અને છેદને $\sqrt{x+h} + \sqrt{x}$ વડે ગુણતાં)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left(\sqrt{x+h}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{x+h} + \sqrt{x}\right)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \qquad (\because \ h \neq 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+0} + \sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

આમ, જો $f(x) = \sqrt{x}$ તો $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

ઉદાહરણ 5 : વ્યાખ્યાની મદદથી $f(x) = \frac{1}{x}$ નું વિકલિત મેળવો.

અહીં, $f(x) = \frac{1}{x}$

$\therefore \ f(x+h) = \frac{1}{x+h}$

હવે, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{hx(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x - x - h}{hx(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-h}{hx(x+h)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} \qquad (\because \ h \neq 0)$$

$$= \frac{-1}{x(x+0)}$$

$$= \frac{-1}{x^2}$$

આમ, જો $f(x) = \frac{1}{x}$ તો $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

ઉદાહરણ 6 : વ્યાખ્યાની મદદથી $f(x) = k$ (k અચળાંક છે) નું વિકલિત મેળવો.

અહીં, $f(x) = k$

$\therefore \ f(x+h) = k$

હવે, $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{k - k}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0}{h}$$

$$= 0$$

આમ, જો $f(x) = k$ તો $f'(x) = 0$

સ્વાધ્યાય 5.1

વ્યાખ્યાની મદદથી નીચેના વિધેયોના વિકલિત મેળવો :

1. $f(x) = 2x + 3$

2. $f(x) = x^2$

3. $f(x) = x^7$

4. $f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad x \neq -1$

5. $f(x) = \sqrt[3]{x}$

6. $f(x) = \frac{2}{3x-4}, \quad x \neq \frac{4}{3}$

7. $f(x) = 10$

*

5.3 કેટલાંક પ્રમાણિત વિકલિતો

આપણે નીચેના વિધેયોના વિકલિતનો ઉપયોગ કરીશું.

1. જો $y = x^n$ (જ્યાં $n \in R$ અને $x \in R^+$)

તો, $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

2. જો $y = k$ (જ્યાં k અચળ સંખ્યા છે.)

તો, $\frac{dy}{dx} = 0$

5.4 વિકલન માટેના કાર્યનિયમો

x નાં બે વિધેયોનાં સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર માટે વિકલિત મેળવવા માટે કેટલાક નિયમો સાબિત કર્યા વગર આપણે સ્વીકારીશું.

જો u અને v એ x નાં વિકલનીય વિધેયો હોય, તો

નિયમ 1 : જો $y = u \pm v$ હોય, તો

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx}$$

નિયમ 2 : જો $y = u \cdot v$ હોય, તો

$$\frac{dy}{dx} = u \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot \frac{du}{dx}$$

નિયમ 3 : જો $y = \frac{u}{v}, \ v \neq 0$ હોય, તો

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

નિયમ 4 : (સાંકળ નિયમ)

જો y એ u નું વિધેય અને u એ x નું વિધેય હોય, તો

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

વિકલનના ઉપર દર્શાવેલા કાર્યનિયમોનો ઉપયોગ સમજાવતાં કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 7 : $y = x^4 - 3x^2 + 2x - 3$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

$$y = x^4 - 3x^2 + 2x - 3$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^4 - 3x^2 + 2x - 3\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^4\right) - \frac{d}{dx}\left(3x^2\right) + \frac{d}{dx}(2x) - \frac{d}{dx}(3)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(x^4\right) - 3\frac{d}{dx}\left(x^2\right) + 2\frac{d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(3)$$

$$= 4x^3 - 3(2x) + 2(1) - (0)$$

$$= 4x^3 - 6x + 2$$

ઉદાહરણ 8 : $y = x^3 + \sqrt{x} - \frac{4}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{4}$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

$$y = x^3 + \sqrt{x} - \frac{4}{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{4}$$

$$= x^3 + x^{\frac{1}{2}} - 4x^{-1} + x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{2}}\right) - 4\frac{d}{dx}\left(x^{-1}\right) + \frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{3}}\right) + \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= 3x^2 + \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - 4\left(-1\,x^{-1-1}\right) + \left(\frac{-1}{3}\right)x^{\frac{-1}{3}-1} + 0$$

$$= 3x^2 + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-2} - \frac{1}{3}x^{-\frac{4}{3}}$$

$$= 3x^2 + \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}$$

ઉદાહરણ 9 : $y = \left(2x^2 + 3\right)(3x - 2)$ હોય, તો y નું x સાપેક્ષ વિકલન ફળ (વિકલિત) મેળવો.

$$y = \left(2x^2 + 3\right)(3x - 2)$$

અહીં, $u = 2x^2 + 3$ અને $v = 3x - 2$ લો.

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = 4x \text{ અને } \frac{dv}{dx} = 3$$

હવે, $y = u \cdot v$ છે.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$= \left(2x^2 + 3\right)(3) + (3x - 2)(4x)$$

$$= 6x^2 + 9 + 12x^2 - 8x$$

$$= 18x^2 - 8x + 9$$

નોંધ : ઉદાહરણ 9 ને y નું સાદું રૂપ આપીને એટલે કે બે પદોનો ગુણાકાર કરી, કાર્યનિયમ 1 પ્રમાણે પણ ગણી શકાય.

ઉદાહરણ 10 : $y = \dfrac{2x+3}{3x-2}$ **હોય તો** $\dfrac{dy}{dx}$ **મેળવો.**

$$y = \frac{2x+3}{3x-2}$$

અહીં, $u = 2x+3$ અને $v = 3x-2$ લો.

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = 2 \text{ અને } \frac{dv}{dx} = 3$$

હવે, $y = \frac{u}{v}$ છે.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{(3x-2)(2) - (2x+3)(3)}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{(6x-4) - (6x+9)}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{6x-4-6x-9}{(3x-2)^2}$$

$$= \frac{-13}{(3x-2)^2}$$

ઉદાહરણ 11 : $y = \dfrac{3}{4x+5}$ **હોય, તો** y **નું** x **સાપેક્ષ વિકલન કરો.**

$$y = \frac{3}{4x+5}$$

અહીં, $u = 3$ અને $v = 4x+5$ લો.

$$\therefore \frac{du}{dx} = 0 \text{ અને } \frac{dv}{dx} = 4$$

હવે, $y = \frac{u}{v}$ છે.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{(4x+5)(0) - 3(4)}{(4x+5)^2}$$

$$= \frac{0-12}{(4x+5)^2}$$

$$= \frac{-12}{(4x+5)^2}$$

ઉદાહરણ 12 : $y = \dfrac{2x^2 + 3x + 4}{x^2 + 5}$ હોય, તો $\dfrac{dy}{dx}$ મેળવો.

$$y = \frac{2x^2 + 3x + 4}{x^2 + 5}$$

અહીં, $u = 2x^2 + 3x + 4$ અને $v = x^2 + 5$ લો.

$\therefore \quad \dfrac{du}{dx} = 4x + 3$ અને $\dfrac{dv}{dx} = 2x$

હવે, $y = \frac{u}{v}$ છે.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{\left(x^2 + 5\right)(4x + 3) - \left(2x^2 + 3x + 4\right)(2x)}{\left(x^2 + 5\right)^2}$$

$$= \frac{\left(4x^3 + 20x + 3x^2 + 15\right) - \left(4x^3 + 6x^2 + 8x\right)}{\left(x^2 + 5\right)^2}$$

$$= \frac{4x^3 + 20x + 3x^2 + 15 - 4x^3 - 6x^2 - 8x}{\left(x^2 + 5\right)^2}$$

$$= \frac{-3x^2 + 12x + 15}{\left(x^2 + 5\right)^2}$$

ઉદાહરણ 13 : $y = (3x + 7)^8$ નું x પ્રત્યે વિકલન કરો.

$$y = (3x + 7)^8$$

$u = 3x + 7$ લેતાં, $y = u^8$ થશે.

$\therefore \quad \dfrac{du}{dx} = 3$ અને $\dfrac{dy}{du} = 8u^7$

હવે, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$

$$= \left(8u^7\right)(3)$$

$$= 24u^7$$

u ની કિંમત મૂકતાં,

$$\frac{dy}{dx} = 24(3x + 7)^7$$

ઉદાહરણ 14 : $y = \sqrt{x^2 + 3}$ **હોય, તો** $\frac{dy}{dx}$ **મેળવો.**

$$y = \sqrt{x^2 + 3}$$

$u = x^2 + 3$ લેતાં, $y = \sqrt{u}$ થશે.

$\therefore \quad \frac{du}{dx} = 2x$ અને $\frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$.

હવે, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

$$= \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right) (2x)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{u}}$$

u ની કિંમત મૂકતાં,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$$

ઉદાહરણ 15 : $y = 1 + \frac{2}{3 + \frac{4}{x}}$ **નું** x **સાપેક્ષ વિકલિત મેળવો.**

$$y = 1 + \frac{2}{3 + \frac{4}{x}}$$

$$= 1 + \frac{2x}{3x + 4}$$

$$= \frac{(3x + 4) + 2x}{3x + 4}$$

$$\therefore \quad y = \frac{5x + 4}{3x + 4}$$

અહીં, $u = 5x + 4$ અને $v = 3x + 4$ લો

$\therefore \quad \frac{du}{dx} = 5$ અને $\frac{dv}{dx} = 3$

હવે, $y = \frac{u}{v}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{(3x + 4)(5) - (5x + 4)(3)}{(3x + 4)^2}$$

$$= \frac{(15x + 20) - (15x + 12)}{(3x + 4)^2}$$

$$= \frac{15x + 20 - 15x - 12}{(3x+4)^2}$$

$$= \frac{8}{(3x+4)^2}$$

ઉદાહરણ 16 : જો $2xy + 3x + y - 4 = 0$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.

$$2xy + 3x + y - 4 = 0$$

$$\therefore \quad 2xy + y = 4 - 3x$$

$$\therefore \quad y(2x+1) = 4 - 3x$$

$$\therefore \quad y = \frac{4-3x}{2x+1}$$

અહીં, $u = 4 - 3x$ અને $v = 2x + 1$ લો.

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = -3 \text{ અને } \frac{dv}{dx} = 2$$

હવે, $y = \frac{u}{v}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{(2x+1)(-3) - (4-3x)(2)}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{(-6x-3) - (8-6x)}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{-6x - 3 - 8 + 6x}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{-11}{(2x+1)^2}$$

ઉદાહરણ 17 : $y = 2 + 3x + 4x^2 + \frac{5}{6-7x}$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.

$$y = 2 + 3x + 4x^2 + \frac{5}{6-7x}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left[2 + 3x + 4x^2 + \frac{5}{6-7x}\right]$$

$$= 0 + 3(1) + 4(2x) + \frac{d}{dx}\left(\frac{5}{6-7x}\right)$$

$$= 3 + 8x + \frac{(6-7x)(0) - 5(-7)}{(6-7x)^2} \qquad [\because \text{ ભાગાકારનો નિયમ}]$$

$$= 3 + 8x + \frac{35}{(6-7x)^2}$$

ઉદાહરણ **18 :** $y = \left(x + \frac{6}{x+5}\right)\left(\frac{3x+2}{x^2+5x+6}\right)$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.

$$y = \left(x + \frac{6}{x+5}\right)\left(\frac{3x+2}{x^2+5x+6}\right)$$

$$= \left[\frac{x(x+5)+6}{x+5}\right]\left(\frac{3x+2}{x^2+5x+6}\right)$$

$$= \left(\frac{x^2+5x+6}{x+5}\right)\left(\frac{3x+2}{x^2+5x+6}\right)$$

$$= \frac{3x+2}{x+5}$$

અહીં, $u = 3x+2$ અને $v = x+5$ લો.

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = 3 \text{ અને } \frac{dv}{dx} = 1$$

હવે, $y = \frac{u}{v}$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{(x+5)(3) - (3x+2)(1)}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{(3x+15) - (3x+2)}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{3x+15-3x-2}{(x+5)^2}$$

$$= \frac{13}{(x+5)^2}$$

ઉદાહરણ **19 :** $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ હોય, તો $f'(x)$ શોધો અને તે ઉપરથી $f'(1)$ મેળવો.

અહીં, $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$$\therefore f'(x) = 6x + 2$$

$$\therefore f'(1) = 6(1) + 2$$

$$= 8$$

ઉદાહરણ 20 : જો $f(x) = x^2 - x + 3$ હોય, તો x ની કઈ કિંમત માટે $f'(x) = 0$ છે ?

અહીં, $f(x) = x^2 - x + 3$

$\therefore\ f'(x) = 2x - 1 + 0$

$= 2x - 1$

હવે, $f'(x) = 0$ આપેલ છે.

$\therefore\ 2x - 1 = 0$

$\therefore\ 2x = 1$

$\therefore\ x = \frac{1}{2}$

5.5 દ્વિતીય વિકલન

આપણે અગાઉનાં ઘણાં ઉદાહરણોમાં જોયું કે સામાન્ય રીતે x નું વિધેયનું વિકલિત પણ x નું વિધેય હોય છે. $y = f(x)$ ના વિકલિતને $\frac{dy}{dx}$ અથવા $f'(x)$ વડે દર્શાવાય છે. આ વિકલિતને વિધેયનું પ્રથમ ક્રમનું વિકલિત કહેવાય છે. વિધેયના પ્રથમ ક્રમના વિકલિતના વિકલિતને બીજા ક્રમનું વિકલિત કહે છે. તેને $\frac{d^2y}{dx^2}$ અથવા $f''(x)$ વડે દર્શાવાય છે. વિધેયને મહત્તમ કે ન્યૂનતમ બનાવવા માટે પ્રથમ ક્રમના વિકલિતની સાથે બીજા ક્રમનું વિકલિત ઉપયોગી છે. તેનો ઉપયોગ ખર્ચના વિધેયને ન્યૂનતમ બનાવવા, આમદાની વિધેયને મહત્તમ બનાવવા અને નફાના વિધેયને મહત્તમ બનાવવા માટે થાય છે.

હવે આપણે કેટલાક ઉદાહરણ લઈ બીજા ક્રમનું વિકલિત મેળવવાની રીત જોઈશું.

ઉદાહરણ 21 : $y = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 7$ હોય તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ મેળવો. $x = 1$ માટે તેની કિંમત મેળવો.

$y = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x + 7$

$\therefore\ \frac{dy}{dx} = 12x^3 - 6x^2 + 2x - 8$

$\therefore\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]$

$= \frac{d}{dx}\left[12x^3 - 6x^2 + 2x - 8\right]$

$= 36x^2 - 12x + 2$

$x = 1$ મૂકતાં,

$\frac{d^2y}{dx^2} = 36(1)^2 - 12(1) + 2$

$= 36 - 12 + 2$

$= 26$

ઉદાહરણ 22 : $f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 7x + 9$ હોય, તો x ની કઈ કિંમત માટે $f''(x) = 52$ થાય ?

$$f(x) = 4x^3 + 2x^2 + 7x + 9$$

$$\therefore\ f'(x) = 12x^2 + 4x + 7$$

$$\therefore\ f''(x) = 24x + 4$$

હવે, $f''(x) = 52$

$$\therefore\ 24x + 4 = 52$$

$$\therefore\ 24x = 48$$

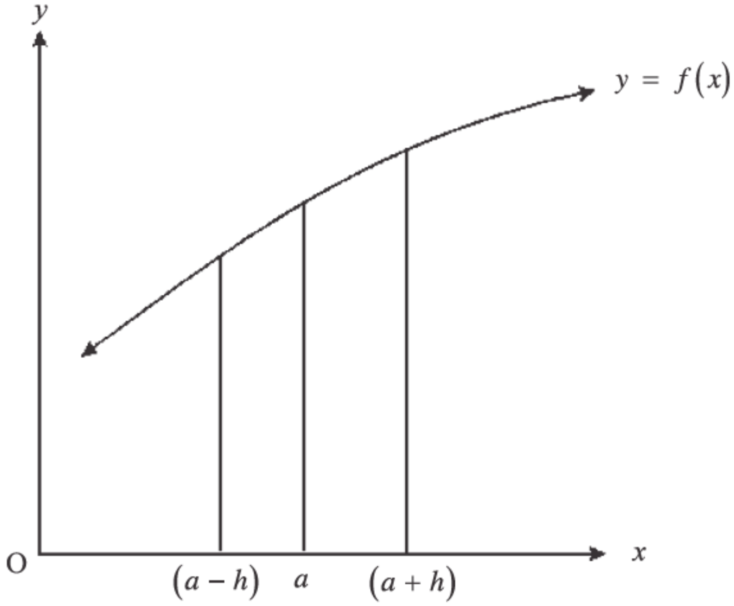
$$\therefore\ x = 2$$

5.6 વધતું વિધેય અને ઘટતું વિધેય

વધતું વિધેય :

આકૃતિમાં $y = f(x)$ વિધેયનો વક્ર દોરવામાં આવ્યો છે. $x = a$ આગળ વિધેયની કિંમત $y = f(a)$ થાય. જો h અલ્પ ધન સંખ્યા હોય અને જો $f(a+h) > f(a)$ તેમજ $f(a) > f(a-h)$ હોય તો $x = a$ આગળ $f(x)$ એ વધતું વિધેય છે એમ કહેવાય.

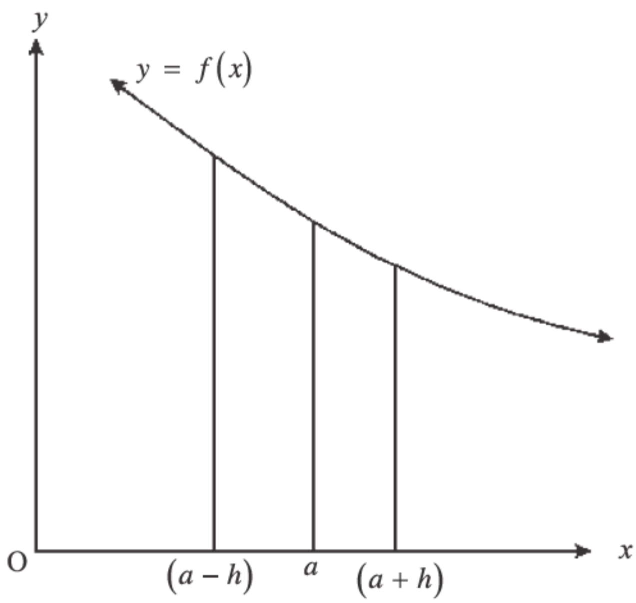
જો $x = a$ આગળ વિધેય વધતું હોય, તો $f'(a) > 0$ થાય.



ઘટતું વિધેય

આકૃતિમાં $y = f(x)$ વિધેયનો વક્ર દોરવામાં આવ્યો છે. $x = a$ આગળ વિધેયની કિંમત $y = f(a)$ થાય. જો h અલ્પ ધન સંખ્યા હોય અને જો $f(a+h) < f(a)$ તેમજ $f(a) < f(a-h)$ હોય તો $x = a$ આગળ $f(x)$ એ ઘટતું વિધેય છે એમ કહેવાય.

જો $x = a$ આગળ વિધેય ઘટતું હોય, તો $f'(a) < 0$ થાય.



ઉદાહરણ 23 : જો $f(x) = x^2 - 4x$ હોય, તો $x = -1$, $x = 0$ અને $x = 3$ આગળ વિધેય વધતું છે કે ઘટતું છે તે નક્કી કરો.

$$f(x) = x^2 - 4x$$

$$\therefore \quad f'(x) = 2x - 4$$

$x = -1$ આગળ

$$f'(-1) = 2(-1) - 4$$

$$= -6 < 0$$

$\therefore$ $x = -1$ આગળ વિધેય ઘટતું છે.

$x = 0$ આગળ

$$f'(0) = 2(0) - 4$$

$$= -4 < 0$$

$\therefore$ $x = 0$ આગળ વિધેય ઘટતું છે.

$x = 3$ આગળ

$$f'(3) = 2(3) - 4$$

$$= 2 > 0$$

$\therefore$ $x = 3$ આગળ વિધેય વધતું છે.

ઉદાહરણ 24 : જો $y = x^3 - 3x^2 + 7$ હોય, તો $x = 1$ અને $x = 3$ આગળ વિધેય વધતું છે કે ઘટતું છે તે નક્કી કરો.

$$y = x^3 - 3x^2 + 7$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x$$

$x = 1$ આગળ

$$\frac{dy}{dx} = 3(1)^2 - 6(1)$$

$$= 3 - 6$$

$$= -3 < 0$$

$\therefore$ $x = 1$ આગળ વિધેય ઘટતું છે.

$x = 3$ આગળ

$$\frac{dy}{dx} = 3(3)^2 - 6(3)$$

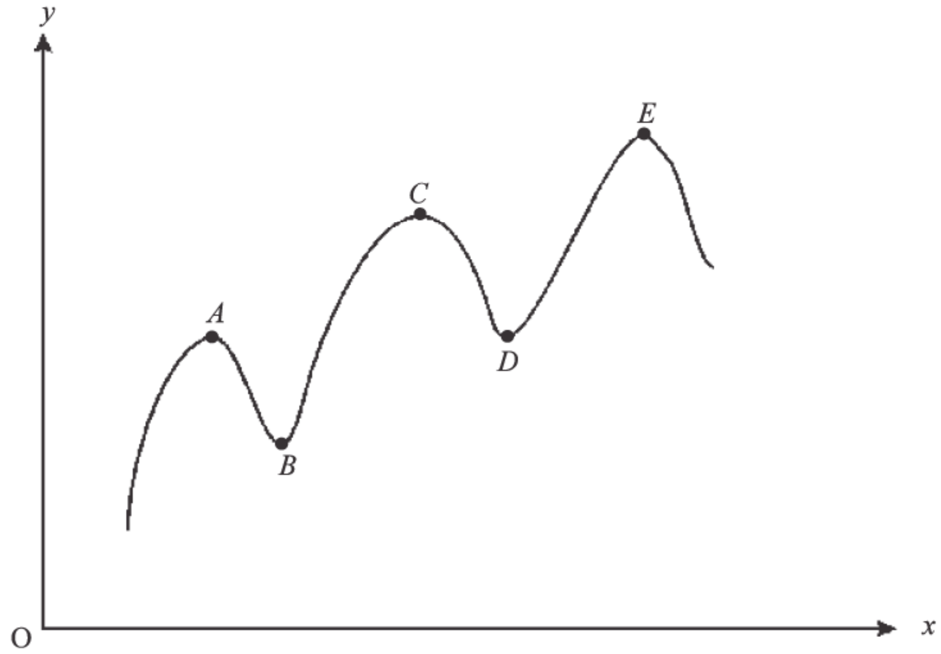
$$= 27 - 18$$

$$= 9 > 0$$

$\therefore$ $x = 3$ આગળ વિધેય વધતું છે.

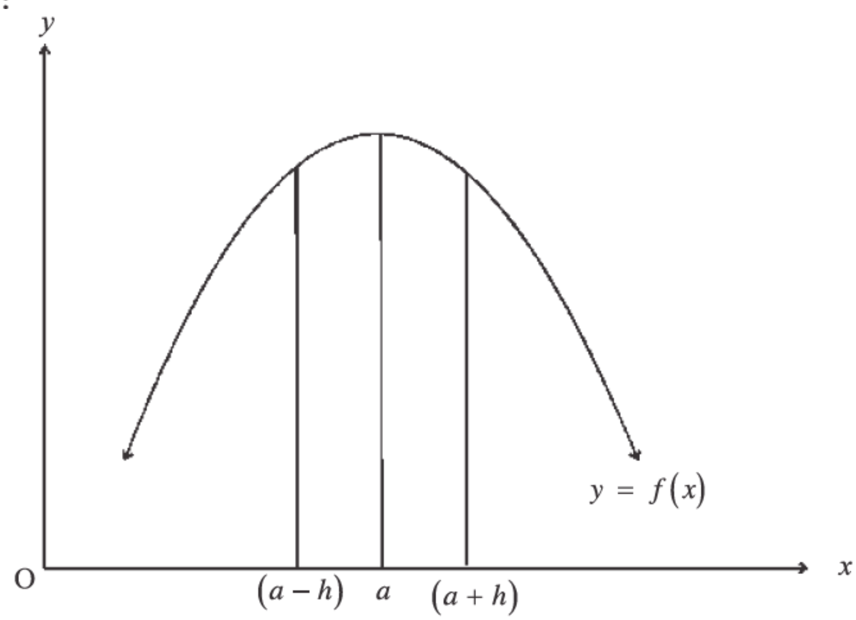
5.7 વિધેયની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો

વધતું અને ઘટતું વિધેયની આપણે ચર્ચા કરી. હવે, આપણે વિધેયની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો મેળવવાની રીતનો અભ્યાસ કરીશું. ધારો કે કોઈ એક વિધેય $y = f(x)$ નો આલેખ નીચે પ્રમાણે મળે છે.



આલેખ ઉપરથી જોઈ શકાય છે કે, A, C અને E બિંદુઓએ વિધેયની કિંમત મહત્તમ છે, જ્યારે B અને D બિંદુઓએ વિધેયની કિંમત ન્યૂનતમ છે. આમ, વિધેયની મહત્તમ કે ન્યૂનતમ કિંમત એક કરતાં વધુ હોઈ શકે.

મહત્તમ કિંમત :

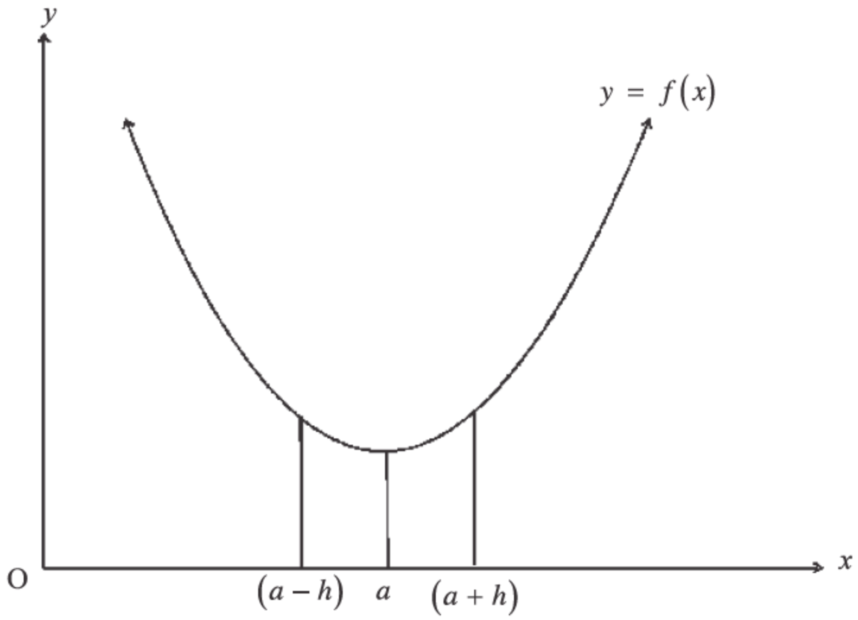


આકૃતિમાં $y = f(x)$ વિધેયનો વક્ર દોરવામાં આવ્યો છે. $x = a$ આગળ વિધેયની કિંમત $y = f(a)$ થાય. જો h અલ્પ ધન સંખ્યા હોય અને જો $f(a) > f(a+h)$ તેમજ $f(a) > f(a-h)$ હોય, તો $x = a$ આગળ વિધેય મહત્તમ છે એમ કહેવાય.

કોઈ એક વિધેય $x = a$ આગળ મહત્તમ થવા માટે નીચેની શરતો જરૂરી અને પર્યાપ્ત છે :

(i) $f'(a) = 0$ (ii) $f''(a) < 0$

ન્યૂનતમ કિંમત :



આકૃતિમાં $y = f(x)$ વિધેયનો વક્ર દોરવામાં આવ્યો છે. $x = a$ આગળ વિધેયની કિંમત $y = f(a)$ થાય. જો h અલ્પ ધન સંખ્યા હોય અને જો $f(a) < f(a+h)$ તેમજ $f(a) < f(a-h)$ હોય, તો $x = a$ આગળ વિધેય ન્યૂનતમ છે એમ કહેવાય.

કોઈ એક વિધેય $x = a$ આગળ ન્યૂનતમ થવા માટે નીચેની શરતો જરૂરી અને પર્યાપ્ત છે :

(i) $f'(a) = 0$ (ii) $f''(a) > 0$

વિધેયની આ રીતે મેળવેલ મહત્તમ કે ન્યૂનતમ કિંમતો એ વિધેયની સ્થાનીય મહત્તમ કે સ્થાનીય ન્યૂનતમ કિંમતો છે.

મહત્તમ કિંમત અથવા ન્યૂનતમ કિંમત એટલે વિધેયની સૌથી મોટામાં મોટી અથવા સૌથી નાનામાં નાની કિંમત એવો અર્થ થતો નથી. $x = a$ આગળ વિધેયની કિંમત મહત્તમ છે, એનો અર્થ ફક્ત એટલો જ થાય છે કે, $x = a$ ની આજુબાજુના અલ્પ ગાળામાં $x = a$ આગળ વિધેયની કિંમત મહત્તમ છે, તે જ રીતે $x = b$ આગળ વિધેયની કિંમત ન્યૂનતમ છે. એનો અર્થ ફક્ત એટલો જ થાય છે કે, $x = b$ ની આજુબાજુના અલ્પ ગાળામાં વિધેયની કિંમત ન્યૂનતમ છે. જે બિંદુઓએ $f(x)$ ની મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ કિંમતો મળે છે તેને **સ્થિર બિંદુઓ** કહે છે અને સ્થિર બિંદુઓ મેળવવાની જરૂરી શરત $\frac{dy}{dx} = 0$ છે.

વિધેયની મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ કિંમતો મેળવવાની રીત :

- આપેલા વિધેય માટે $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ મેળવો.
- સમીકરણ $\frac{dy}{dx} = 0$ નું સમાધાન કરતી x ની કિંમતો મેળવો, જેને સ્થિર બિંદુઓ કહેવાય છે.
- દ્વિતીય વિકલન મેળવી તેમાં x ની આ કિંમતો વારાફરતી મૂકો.
- જે સ્થિર બિંદુ માટે દ્વિતીય વિકલિતની કિંમત ધન થાય, x ની તે કિંમત વિધેયની ન્યૂનતમ કિંમત આપે છે અને જે સ્થિર બિંદુ માટે દ્વિતીય વિકલિતની કિંમત ઋણ થાય, x ની તે કિંમત વિધેયની મહત્તમ કિંમત આપે છે.
- વિધેયની મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ કિંમત મેળવવા ઉપરની x ની કિંમતો વિધેયમાં મૂકવામાં આવે છે.

આપણે કેટલાંક ઉદાહરણથી વિધેયની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમત મેળવવાની રીત જોઈશું.

ઉદાહરણ 25 : $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 4$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો મેળવો.

અહીં, $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 4$

$\therefore \quad f'(x) = 6x^2 + 6x - 12$

સ્થિર કિંમતો માટે $f'(x) = 0$

$\therefore \quad 6x^2 + 6x - 12 = 0$

$\therefore \quad x^2 + x - 2 = 0$

$\therefore \quad (x+2)(x-1) = 0$

$\therefore \quad x = -2$ અથવા $x = 1$

હવે, $f''(x) = 12x + 6$

$x = -2$ આગળ

$$f''(-2) = 12(-2) + 6$$
$$= -18 < 0$$

$\therefore \quad x = -2$ આગળ વિધેયની મહત્તમ કિંમત મળે છે.

$x = 1$ આગળ

$$f''(1) = 12(1) + 6$$
$$= 18 > 0$$

$\therefore \quad x = 1$ આગળ વિધેયની ન્યૂનતમ કિંમત મળે છે.

$f(x)$ની ન્યૂનતમ કિંમત

$x = 1$ ને વિધેય $f(x)$માં મૂકતાં,

$$f(1) = 2(1)^3 + 3(1)^2 - 12(1) - 4$$
$$= 2 + 3 - 12 - 4$$
$$= -11$$

$f(x)$ની મહત્તમ કિંમત

$x = -2$ ને વિધેય $f(x)$માં મૂકતાં,

$$f(-2) = 2(-2)^3 + 3(-2)^2 - 12(-2) - 4$$
$$= -16 + 12 + 24 - 4$$
$$= 16$$

આમ, $f(x)$ ની મહત્તમ કિંમત 16 અને ન્યૂનતમ કિંમત -11 છે.

ઉદાહરણ 26 : $y = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$ ની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો મેળવો.

અહીં, $y = x^3 - 2x^2 - 4x - 1$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x - 4$$

સ્થિર કિંમતો માટે $\frac{dy}{dx} = 0$

$$\therefore \quad 3x^2 - 4x - 4 = 0$$

$$\therefore \quad 3x^2 - 6x + 2x - 4 = 0$$

$$\therefore \quad 3x(x-2) + 2(x-2) = 0$$

$$\therefore \quad (x-2)(3x+2) = 0$$

$\therefore \quad x = 2$ અથવા $x = -\frac{2}{3}$

હવે $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 4$

$x = 2$ આગળ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6(2) - 4$$

$$= 8 > 0$$

$\therefore \quad x = 2$ આગળ વિધેયની ન્યૂનતમ કિંમત મળે છે.

$x = -\frac{2}{3}$ આગળ

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6\left(\frac{-2}{3}\right) - 4$$

$$= -4 - 4$$

$$= -8 < 0$$

$\therefore \quad x = -\frac{2}{3}$ આગળ વિધેયની મહત્તમ કિંમત મળે છે.

y ની ન્યૂનતમ કિંમત

$x = 2$ ને વિધેય y માં મૂકતાં,

$$y = (2)^3 - 2(2)^2 - 4(2) - 1$$

$$= 8 - 8 - 8 - 1$$

$$= -9$$

y ની મહત્તમ કિંમત

$x = -\frac{2}{3}$ ને વિધેય y માં મૂકતાં,

$$y = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(-\frac{2}{3}\right) - 1$$

$$= \frac{-8}{27} - \frac{8}{9} + \frac{8}{3} - 1$$

$$= \frac{13}{27}$$

આમ, y ની મહત્તમ કિંમત $\frac{13}{27}$ અને ન્યૂનતમ કિંમત -9 છે.

5.8 સીમાંત આવક અને સીમાંત ખર્ચ

આપણે જોઈશું કે કેટલાંક અર્થશાસ્ત્ર અને ધંધાકીય પ્રશ્નોના ઉકેલ મેળવવા માટે વિકલનનો ઉપયોગ થાય છે. આપણે જોયું કે, પ્રથમ અને દ્વિતીય વિકલિતનો ઉપયોગ વિધેયની મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો મેળવવામાં થઈ શકે છે.

વિધેયના પ્રથમ વિકલિતનો ઉપયોગ સીમાંત આવક અને સીમાંત ખર્ચ મેળવવામાં થઈ શકે છે.

અર્થશાસ્ત્રના અભ્યાસમાં વસ્તુની કિંમત અને માંગ વચ્ચેના સંબંધો વિધેય દ્વારા રજૂ કરી શકાય છે. જો વસ્તુની કિંમતને p વડે અને તેની માંગને x વડે દર્શાવવામાં આવે તો આ ઉપરથી $x = f(p)$ સંબંધ મળે છે, જેને માંગનું વિધેય કહેવાય છે. કોઈ પણ વસ્તુના x એકમો વેચવાથી થતી આવક અથવા આમદાનીને R વડે દર્શાવીએ તો,

$$R = xp$$

આમ, આમદાની R એ માંગ x નું વિધેય થાય છે.

માંગમાં અલ્પ ફેરફાર થવાથી આમદાનીમાં થતાં ફેરફારને **સીમાંત આમદાની (Marginal Revenue)** કહેવાય છે. આમદાની વિધેયનું x સાપેક્ષ વિકલિત લેવાથી સીમાંત આમદાની મેળવી શકાય છે. આમ, માંગ x હોય ત્યારે

$$\text{સીમાંત આમદાની} = \frac{dR}{dx}$$

વસ્તુના x એકમો ઉત્પાદન કરવાના ખર્ચ C વડે દર્શાવીએ તો C ને પણ x ના વિધેય તરીકે રજૂ કરી શકાય. ઉત્પાદનમાં અલ્પ ફેરફાર કરવાથી ખર્ચમાં થતા ફેરફારને **સીમાંત ખર્ચ (Marginal Cost)** કહેવાય છે. ખર્ચના વિધેયનું x સાપેક્ષ વિકલિત લેવાથી સીમાંત ખર્ચ મેળવી શકાય છે. આમ, ઉત્પાદન x હોય ત્યારે

$$\text{સીમાંત ખર્ચ} = \frac{dC}{dx}$$

ઉદાહરણ27 : જો પિઝ્ઝા (Pizza)ની માંગનું વિધેય $p = 150 - 4x$ હોય, તો જ્યારે પિઝ્ઝાની માંગ 3 હોય, ત્યારે સીમાંત આમદાની શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

અહીં માંગનું વિધેય $p = 150 - 4x$

હવે આમદાની વિધેય $R = p \cdot x$

$$= (150 - 4x)\,x$$

$$\therefore \quad R = 150x - 4x^2$$

સીમાંત આમદાની $\frac{dR}{dx} = 150 - 8x$

તો જ્યારે પિઝ્ઝાની માંગ $x = 3$ હોય ત્યારે

સીમાંત આમદાની $\frac{dR}{dx} = 150 - 8(3)$

$$= 126$$

અર્થઘટન : ચોથો પિઝ્ઝા વેચવાથી થતી આમદાની આશરે ₹ 126 છે.

ઉદાહરણ 28 : જો કોઈ એક વસ્તુની માંગનું વિધેય $x = \frac{50-p}{2}$ હોય, તો જ્યારે વસ્તુની કિંમત 30 હોય, ત્યારે સીમાંત આમદાની શોધો.

અહીં માંગનું વિધેય $x = \frac{50-p}{2}$

$\therefore \quad 2x = 50 - p$

$\therefore \quad p = 50 - 2x$

હવે આમદાની વિધેય $R = p \cdot x$

$= (50 - 2x)x$

$\therefore \quad R = 50x - 2x^2$

સીમાંત આમદાની $\frac{dR}{dx} = 50 - 4x$

કિંમત $p = 30$ હોય ત્યારે

$x = \frac{50-30}{2}$

$\therefore \quad x = 10$

માંગ $x = 10$ હોય ત્યારે

સીમાંત આમદાની $= \frac{dR}{dx} = 50 - 4(10)$

$= 10$

અર્થઘટન : 11મો એકમ વેચવાથી થતી આમદાની આશરે ₹ 10 છે.

ઉદાહરણ 29 : એક વસ્તુના x એકમોના ઉત્પાદનના ખર્ચનું વિધેય $C = 5x^2 + 6x + 2000$ છે. જ્યારે ઉત્પાદન 50 એકમો હોય ત્યારે સીમાંત ખર્ચ શોધો.

ખર્ચનું વિધેય $C = 5x^2 + 6x + 2000$

$\therefore$ સીમાંત ખર્ચ $\frac{dC}{dx} = 10x + 6$

જ્યારે $x = 50$ હોય ત્યારે

સીમાંત ખર્ચ $\frac{dC}{dx} = 10(50) + 6$

$= 506$

અર્થઘટન : 51મો એકમ ઉત્પાદન કરવાનો ખર્ચ આશરે ₹ 506 છે.

5.9 માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા

સામાન્ય રીતે વસ્તુની કિંમતમાં ફેરફાર થાય તો તેની માંગમાં વિરુદ્ધ દિશામાં ફેરફાર પરિણમે છે. વસ્તુની કિંમત વધવાથી તેની માંગમાં ઘટાડો થાય છે અને વસ્તુની કિંમત ઘટવાથી તેની માંગમાં વધારો થાય છે. પરંતુ આ ફેરફારનું પ્રમાણ બધી વસ્તુઓ માટે સમાન હોતું નથી. જેમકે, મોજશોખની વસ્તુઓની કિંમતમાં એકદમ વધારો થાય તો તેમની માંગમાં મોટો ઘટાડો થાય છે, જ્યારે જીવન-જરૂરિયાતની વસ્તુઓની કિંમતમાં વધારો થાય તો તેમની માંગમાં મોટો ઘટાડો થતો નથી. આ રીતે વસ્તુની કિંમતમાં ફેરફાર થવાથી માંગમાં જે પ્રમાણમાં ફેરફાર થાય તેનો અભ્યાસ માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા વડે કરી શકાય છે.

વ્યાખ્યા : માંગમાં થતા ટકાવારી ફેરફાર અને કિંમતમાં થતા ટકાવારી ફેરફારના ગુણોત્તરને માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા (Elasticity of Demand) કહેવાય છે.

એટલે કે,

$$\text{માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા} = -\frac{\text{માંગમાં થતો ટકાવારી ફેરફાર}}{\text{કિંમતમાં થતો ટકાવારી ફેરફાર}}$$

વસ્તુની કિંમત અને તેની માંગ વિરુદ્ધ દિશામાં ફેરફાર થતા હોવાથી આ ગુણોત્તર ઋણ આવે છે. સરળતા ખાતર માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતાની કિંમત ધન મેળવવામાં આવે છે અને તેથી સૂત્રમાં ઋણ નિશાની લેવામાં આવે છે. જો માંગ x અને કિંમત p તરીકે દર્શાવવામાં આવે અને માંગનું વિધેય $x = f(p)$ આપેલું હોય, તો

માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= -\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$ થાય.

ઉદાહરણ30 : જો કોઈ એક વસ્તુની માંગનું વિધેય $x = 50 - 4p$ હોય, તો જ્યારે કિંમત $p = 5$ હોય, ત્યારે માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

માંગનું વિધેય $x = 50 - 4p$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dp} = 0 - 4(1)$$

$$= -4$$

હવે, માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= -\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$

$$= \frac{-p}{(50 - 4p)} \times (-4)$$

$$= \frac{4p}{50 - 4p}$$

કિંમત $p = 5$ હોય ત્યારે

માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= \frac{4(5)}{50 - 4(5)}$

$$= \frac{20}{50 - 20}$$

$$= \frac{20}{30}$$

$$= 0.67$$

અર્થઘટન : જ્યારે કિંમત 5 હોય ત્યારે કિંમતમાં 1 ટકાનો ફેરફાર કરવાથી માંગમાં આશરે 0.67 ટકાનો ફેરફાર (વિરુદ્ધ દિશામાં) થાય છે.

ઉદાહરણ 31 : જો કોઈ એક વસ્તુની માંગનું વિધેય $p = 12 - \sqrt{x}$ હોય, તો જ્યારે માંગ 9 એકમ હોય, ત્યારે માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

માંગનું વિધેય $p = 12 - \sqrt{x}$

$$\therefore \quad \frac{dp}{dx} = 0 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \quad \frac{dx}{dp} = -2\sqrt{x} \qquad \left[\because \quad \frac{dx}{dp} = \frac{1}{\frac{dp}{dx}}\right]$$

હવે, માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= -\frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$

$$= \frac{-\left(12 - \sqrt{x}\right)}{x} \times \left(-2\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{\left(12 - \sqrt{x}\right)\left(2\sqrt{x}\right)}{x}$$

માંગ 9 એકમ હોય ત્યારે

માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= \frac{\left(12 - \sqrt{9}\right)\left(2\sqrt{9}\right)}{9}$

$$= \frac{(12 - 3)(2 \times 3)}{9}$$

$$= \frac{9 \times 6}{9}$$

$$= 6$$

અર્થઘટન : જ્યારે માંગ 9 એકમ હોય ત્યારે કિંમતમાં 1 ટકાનો ફેરફાર કરવાથી માંગમાં 6 ટકાનો ફેરફાર (વિરુદ્ધ દિશામાં) થાય છે.

5.10 ખર્ચ વિધેયનું ન્યૂનતમીકરણ તથા આમદાની વિધેય અને નફાના વિધેયનું મહત્તમીકરણ

વ્યવહારમાં કોઈ પણ વસ્તુના ઉત્પાદનમાં થતો ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તેમજ ઉત્પાદિત એકમો વેચવાથી થતી આમદાની અને નફો મહત્તમ થાય એ પ્રકારના પ્રશ્નો ઉકેલવાના હોય છે. આપણે જાણીએ છીએ કે, ઉત્પાદનનું ખર્ચ C અથવા ઉત્પાદિત એકમોના વેચાણમાંથી થતી આમદાની R અને નફો P ને x ના વિધેય તરીકે રજૂ કરી શકાય અને વિકલનનો ઉપયોગ કરીને તે ન્યૂનતમ અથવા મહત્તમ ક્યારે થાય તે નક્કી કરી શકાય.

ઉત્પાદન-ખર્ચના વિધેય C ને ન્યૂનતમ બનાવવાનું હોય તે માટેની શરતો

$\frac{dC}{dx} = 0$ અને $\frac{d^2C}{dx^2} > 0$ છે.

તેવી જ રીતે આમદાની R ને મહત્તમ બનાવવા માટેની શરતો

$$\frac{dR}{dx} = 0 \text{ અને } \frac{d^2R}{dx^2} < 0 \text{ છે.}$$

અને નફો p ને મહત્તમ બનાવવા માટેની શરતો

$$\frac{dP}{dx} = 0 \text{ અને } \frac{d^2P}{dx^2} < 0 \text{ છે.}$$

ન્યૂનતમ ખર્ચ, મહત્તમ આમદાની અને મહત્તમ નફો મેળવવાની રીત સમજવા કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 32 : દરરોજ x ટન ઉત્પાદન કરવા માટે એક વસ્તુનું એક ટન દીઠ ઉત્પાદન-ખર્ચ $10x^2 - 1000x + 50000$ થાય છે, તો કેટલા ટન ઉત્પાદન કરવાથી ખર્ચ ન્યૂનતમ થશે ? ન્યૂનતમ ખર્ચ પણ શોધો.

ઉત્પાદન ખર્ચનું વિધેય $C = 10x^2 - 1000x + 50000$

$$\therefore \quad \frac{dC}{dx} = 20x - 1000$$

$$\frac{dC}{dx} = 0 \text{ મૂકતાં}$$

$$20x - 1000 = 0$$

$$\therefore \quad 20x = 1000$$

$$\therefore \quad x = 50$$

હવે $\frac{d^2C}{dx^2} = 20$

અહી $x = 50$, $\frac{d^2C}{dx^2}$ માં મૂકતાં,

$$\frac{d^2C}{dx^2} = 20 > 0$$

$\therefore$ $x = 50$ માટે ઉત્પાદન-ખર્ચ ન્યૂનતમ મળે.

ન્યૂનતમ ખર્ચ શોધવા માટે $x = 50$ ને ઉત્પાદન-ખર્ચના વિધેયમાં મૂકતાં,

$$\begin{aligned} \text{ન્યૂનતમ ખર્ચ} &= 10(50)^2 - 1000(50) + 50000 \\ &= 10(2500) - 50000 + 50000 \\ &= 25000 \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 33 : એક ફેક્ટરી x એકમોનું ઉત્પાદન કરે છે અને તેની ઉત્પાદન ક્ષમતા દરરોજના 60,000 એકમોની છે. તેનું કુલ દૈનિક ઉત્પાદન-ખર્ચ $C = 250000 + 0.08x + \frac{200000000}{x}$ છે, તો ન્યૂનતમ ખર્ચ માટે કેટલા એકમોનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ ?

ઉત્પાદન-ખર્ચનું વિધેય $C = 250000 + 0.08x + \frac{200000000}{x}$

$$\therefore \quad \frac{dC}{dx} = 0.08 - \frac{200000000}{x^2}$$

$\frac{dC}{dx} = 0$ મૂકતાં

$$0.08 - \frac{200000000}{x^2} = 0$$

$$\therefore \quad 0.08 = \frac{200000000}{x^2}$$

$$\therefore \quad 0.08\ x^2 = 200000000$$

$$\therefore \quad x^2 = 2500000000$$

$\therefore \quad x = 50000$ અથવા $x = -50000$

ઋણ ઉત્પાદન શક્ય નથી તેથી $x = 50000$ લઈશું.

હવે $\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{400000000}{x^3}$

અહીં $x = 50000$, $\frac{d^2C}{dx^2}$ માં મૂકતાં,

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{400000000}{(50000)^3} > 0$$

$\therefore \quad x = 50000$ માટે ઉત્પાદન-ખર્ચ ન્યૂનતમ મળે.

આમ, 50000 એકમોનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ જેથી ઉત્પાદન-ખર્ચ ન્યૂનતમ મળે.

ઉદાહરણ 34 : જો કોઈ ઘડિયાળનું માંગનું વિધેય $p = 6000 - 2x$ હોય, તો મહત્તમ આમદાની માટે કિંમત શોધો અને તે કિંમતે ઉદ્ભવતી માંગ શોધો.

અહીં માંગનું વિધેય $p = 6000 - 2x$

હવે આમદાની વિધેય $R = p \cdot x$

$$= (6000 - 2x)x$$

$$\therefore \quad R = 6000x - 2x^2$$

$$\therefore \quad \frac{dR}{dx} = 6000 - 4x$$

$\frac{dR}{dx} = 0$ મૂકતાં

$$6000 - 4x = 0$$

$$\therefore \quad 6000 = 4x$$

$$\therefore \quad x = 1500$$

હવે $\dfrac{d^2R}{dx^2} = 0 - 4$

$= -4$

અહીં $x = 1500$, $\dfrac{d^2R}{dx^2}$ માં મૂકતાં,

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -4 < 0$$

$\therefore$ $x = 1500$ માટે આમદાની મહત્તમ થશે.

હવે આ માંગ માટે કિંમત શોધીએ.

$x = 1500$, માંગનું વિધેય $p = 6000 - 2x$ માં મૂકતાં,

કિંમત $p = 6000 - 2(1500)$

$= 6000 - 3000$

$p = 3000$

ઉદાહરણ 35 : એક ઉત્પાદકના ઉત્પાદન-ખર્ચનું વિધેય $C = 100 + 0.015x^2$ અને આમદાની વિધેય $R = 3x$ છે, તો નફાનું વિધેય શોધો. ઉત્પાદકે મહત્તમ નફા માટે કેટલા એકમોનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ ?

ઉત્પાદન-ખર્ચનું વિધેય $C = 100 + 0.015x^2$ અને આમદાની વિધેય $R = 3x$

હવે નફાનો વિધેય $P = R - C$

$= 3x - (100 + 0.015x^2)$

$\therefore$ $P = 3x - 100 - 0.015x^2$

$\therefore$ $\dfrac{dP}{dx} = 3 - 0.015(2x)$

$= 3 - 0.03x$

$\dfrac{dP}{dx} = 0$ મૂકતાં

$3 - 0.03x = 0$

$\therefore$ $3 = 0.03x$

$\therefore$ $x = \dfrac{3}{0.03}$

$x = 100$

હવે $\dfrac{d^2P}{dx^2} = 0 - 0.03(1)$

$= -0.03$

અહીં $x = 100$, $\dfrac{d^2P}{dx^2}$ માં મૂકતાં,

$$\frac{d^2P}{dx^2} = -0.03 < 0$$

$\therefore$ $x = 100$ માટે નફો મહત્તમ થશે.

સારાંશ

- વિકલિત $f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

- જો $y = x^n$, $\dfrac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

- જો $y = k$ (અચળાંક), $\dfrac{dy}{dx} = 0$

- જો u અને v એ xના વિકલનીય વિધેયો હોય, તો

  (1) જો $y = u \pm v$ હોય, તો $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dx} \pm \dfrac{dv}{dx}$

  (2) જો $y = u \cdot v$ હોય, તો $\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

  (3) જો $y = \dfrac{u}{v}$ હોય, તો $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$

  (4) સાંકળનો નિયમ : $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \times \dfrac{du}{dx}$

- જો $x = a$ આગળ વિધેય વધતું હોય, તો $f'(a) > 0$ થવું જોઈએ.

- જો $x = a$ આગળ વિધેય ઘટતું હોય, તો $f'(a) < 0$ થવું જોઈએ.

- વિધેય $x = a$ આગળ મહત્તમ થવા માટે જરૂરી અને પર્યાપ્ત શરતો : $f'(a) = 0$ અને $f''(a) < 0$.

- વિધેય $x = a$ આગળ ન્યૂનતમ થવા માટે જરૂરી અને પર્યાપ્ત શરતો : $f'(a) = 0$ અને $f''(a) > 0$.

- સીમાંત ખર્ચ $= \dfrac{dC}{dx}$

- સીમાંત આમદાની $= \dfrac{dR}{dx}$

- માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતા $= -\dfrac{p}{x} \cdot \dfrac{dx}{dp}$

- ઉત્પાદન ખર્ચના વિધેય Cને ન્યૂનતમ બનાવવાનું હોય તે માટે શરતો $\dfrac{dC}{dx} = 0$ અને $\dfrac{d^2C}{dx^2} > 0$ છે.

- આમદાની Rને મહત્તમ બનાવવાનું હોય તે માટે શરતો $\dfrac{dR}{dx} = 0$ અને $\dfrac{d^2R}{dx^2} < 0$ છે.

- નફો Pને મહત્તમ બનાવવાનું હોય તે માટે શરતો $\dfrac{dP}{dx} = 0$ અને $\dfrac{d^2P}{dx^2} < 0$ છે.

સ્વાધ્યાય 5

વિભાગ A

નીચે આપેલ બહુવિકલ્પ પ્રશ્નો માટે સાચા વિકલ્પની પસંદગી કરો :

1. વિધેય $f(x)$ નું વિકલિતનું સૂત્ર કયું છે ?

(a) $\lim\limits_{h \to x} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) + f(x)}{h}$

(c) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ (d) $\lim\limits_{h \to x} \dfrac{f(x) - f(x+h)}{h}$

2. $y = ax^n$, જ્યાં a અચળ સંખ્યા હોય તો $\dfrac{dy}{dx}$ ની કિંમત શું થાય ?

(a) nx^{n-1} (b) $an\,x^{n-1}$ (c) 0 (d) $an\,x^{n+1}$

3. $y = ax + b$, જ્યાં a અને b અચળ સંખ્યા હોય, તો $\dfrac{dy}{dx}$ શું થાય ?

(a) a (b) b (c) $a + b$ (d) 0

4. $f(x) = \dfrac{4}{x^2}$ નું વિકલિત શું થાય ?

(a) $\dfrac{4}{2x}$ (b) $-\dfrac{8}{x^3}$ (c) $\dfrac{8}{x^3}$ (d) 0

5. બે વિધેયો u અને v, x નાં વિધેયો હોય તો તેમના ગુણાકારનું વિકલિતનું સૂત્ર કયું છે ?

(a) $u\dfrac{du}{dx} + v\dfrac{dv}{dx}$ (b) $u\dfrac{dv}{dx} - v\dfrac{du}{dx}$ (c) $\dfrac{du}{dx} \times \dfrac{dv}{dx}$ (d) $u\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{du}{dx}$

6. u અને v, xનાં વિધેયો હોય, તો $\dfrac{v}{u}$નું વિકલિતનું સૂત્ર કયું છે ?

(a) $\dfrac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ (b) $\dfrac{v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}}{v^2}$ (c) $\dfrac{u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}}{u^2}$ (d) $\dfrac{u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}}{u^2}$

7. $x = a$ આગળ વિધેય વધતું હોય, તો નીચેમાંથી સાચો વિકલ્પો કયો ?

(a) $f'(a) < 0$ (b) $f'(a) > 0$ (c) $f'(a) = 0$ (d) $f''(a) > 0$

8. કોઈ એક વિધેય $x = a$ આગળ ન્યૂનતમ થવા માટેની જરૂરી અને પર્યાપ્ત શરતો કઈ છે ?

(a) $f'(a) = 0,\ f''(a) < 0$ (b) $f'(a) > 0,\ f''(a) > 0$

(c) $f'(a) = 0,\ f''(a) > 0$ (d) $f'(a) < 0,\ f''(a) > 0$

9. માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતાનું સૂત્ર કયું છે ?

(a) $-\dfrac{p}{x} \cdot \dfrac{dx}{dp}$ (b) $\dfrac{p}{x} \cdot \dfrac{dx}{dp}$ (c) $-\dfrac{x}{p} \cdot \dfrac{dp}{dx}$ (d) $-\dfrac{p}{x} \cdot \dfrac{dp}{dx}$

10. આમદાની વિધેય R ને મહત્તમ બનાવવા માટેની શરતો કઈ છે ?

(a) $\frac{dR}{dx} = 0, \ \frac{d^2R}{dx^2} < 0$ (b) $\frac{dR}{dx} = 0, \ \frac{d^2R}{dx^2} > 0$

(c) $\frac{dR}{dx} > 0, \ \frac{d^2R}{dx^2} < 0$ (d) $\frac{dR}{dx} > 0, \ \frac{d^2R}{dx^2} > 0$

વિભાગ B

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ એક વાક્યમાં લખો :

1. વિકલનની વ્યાખ્યા આપો.

2. વિધેય $f(x) = 50$ હોય તો $f'(x)$ શોધો.

3. $y = a^n$, a અચળ સંખ્યા છે તો $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.

4. x નાં બે વિધેયોના ગુણાકારનો કાર્યનિયમ જણાવો.

5. જો $x = a$ આગળ વિધેય ઘટતું હોય, તો $x = a$ આગળ વિધેયનું પ્રથમ વિકલિત કેવું હશે ?

6. કોઈ એક વિધેય $x = a$ આગળ મહત્તમ હોય, તો $x = a$ આગળ વિધેયનું દ્વિતીય વિકલિત કેવું હશે ?

7. વિધેયના સ્થિર બિંદુઓ કોને કહેવાય છે ?

8. સીમાંત આમદાની કોને કહેવાય ?

9. સીમાંત ખર્ચની વ્યાખ્યા આપો.

10. માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતાનું સૂત્ર જણાવો.

11. $f(x) = 7x^2 - 6x + 5$ હોય, તો $f'(x)$ મેળવો.

12. $y = 6x^3 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{6}{5}x - 8$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. વિકલિતની વ્યાખ્યા આપો.

2. વિકલનનો ભાગાકારનો નિયમ જણાવો.

3. કોઈ એક વિધેય $x = a$ આગળ મહત્તમ થવા માટેની જરૂરી અને પર્યાપ્ત શરતો જણાવો.

4. સીમાંત ખર્ચ સમજાવો અને તેનું સૂત્ર આપો.

5. માંગની મૂલ્ય સાપેક્ષતાની વ્યાખ્યા આપો.

6. નફાનું વિધેય P ને મહત્તમ બનાવવા માટેની કઈ શરતો છે ?

7. ઉત્પાદન-ખર્ચના વિધેય C ને ન્યૂનતમ બનાવવાની શરતો જણાવો.

8. જો $f(x) = \sqrt[4]{x}$ હોય તો $f''(x)$ શોધો.

9. વિકલનનો 'સાંકળ નિયમ' લખો.

10. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + x + 1$ માટે $f''(0)$ મેળવો.

11. આમદાની વિધેય $90x - \frac{x^2}{2}$ હોય, તો સીમાંત આમદાની શોધો.

12. વિધેયની મહત્તમ કિંમત એટલે શું ?

13. વિધેય કોઈ એક બિંદુ આગળ ઘટતું છે એવું ક્યારે કહી શકાય ?

14. વિધેય $y = 12 + 4x - 7x^2$, $x = 2$ આગળ વધતું કે ઘટતું છે તે નક્કી કરો.

15. $y = 4x^2 + 4x + 8$ નું વિકલિત શોધો. x ની કઈ કિંમત માટે આ વિકલિત શૂન્ય બને છે તે મેળવો.

16. સાબિત કરો કે $f(x) = x^3 + 5x^2 + 3x + 7$ માટે $f'(2) = 35$

17. જો $f(x) = 3x^2 + 3$ હોય, તો x ની કઈ કિંમત માટે $f'(x) = f(x)$ થાય ?

18. જો $y = 2x^3 + 5x^2 - 3 + \frac{4}{x^2} - \frac{5}{x^3}$ હોય, તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ મેળવો.

19. જો $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ હોય, તો $\frac{d^2y}{dx^2}$ મેળવો.

20. એકમ દીઠ ઉત્પાદન ખર્ચનું વિધેય $C = 0.0012x^2 - 0.18x + 25$ હોય, તો સીમાંત ખર્ચ મેળવો.

વિભાગ D

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. વ્યાખ્યાની મદદથી $y = ax + b$ (a અને b અચળ સંખ્યા છે)નું વિકલિત મેળવો.

2. વ્યાખ્યાની મદદથી $f(x) = x^{10}$ નું વિકલિત મેળવો.

3. વ્યાખ્યાની મદદથી $f(x) = \frac{2}{3 + 4x}$ નું વિકલિત મેળવો.

4. $y = x^3 - 3x^2 - 3x + 80$ વિધેય માટે x ની કઈ કિંમત માટે $\frac{dy}{dx} = -6$ થાય.

5. જો $f(x) = \frac{4x^5 + 3x^3 + 2x^2 + 24}{x^2}$ હોય, તો $f'(2)$ શોધો.

6. $y = (3x^2 + 4x - 2)(3x + 2)$ નું x ની સાપેક્ષ વિકલિત મેળવો.

7. $y = \frac{ax + b}{bx + a}$ (a અને b અચળ સંખ્યા છે) હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.

8. $y = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}}$ નું x સાપેક્ષ વિકલિત મેળવો.

9. $(2x + 3)(y + 2) = 15$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ મેળવો.

10. જો $y = 5 + \frac{6}{7x + 8}$ હોય તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

11. જો $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ હોય, તો $f'(x)$ મેળવો.

12. $(3x^3 - 2x^2 + 1)^{\frac{5}{2}}$ નું x સાપેક્ષ વિકલિત મેળવો.

13. $f(x) = (x^2 + 3x + 4)^7$ હોય, તો $f'(x)$ મેળવો.

14. જો $f(x) = 3x^2 + 4x + 5$ હોય, તો x ની કઈ કિંમત માટે $f'(x) = f''(x)$ થાય ?

15. જો માંગનું વિધેય $p = \frac{2500 - x^2}{100}$ હોય, તો સીમાંત આમદાની મેળવો.

16. જો $y = 3x^2 - 10x + 7$ હોય, તો $x = 1$ અને $x = 2$ આગળ વિધેય વધતું છે કે ઘટતું છે તે નક્કી કરો.

17. જો $y = 2x^3 - 7x^2 - 11x + 5$ હોય, તો $x = \frac{1}{2}$ અને $x = 3$ આગળ વિધેય વધતું છે કે ઘટતું છે તે નક્કી કરો.

18. વિધેય $y = 3 + 2x - 7x^2$, $x = -4$ અને $x = 4$ આગળ વધતું કે ઘટતું વિધેય છે તે નક્કી કરો.

19. ખાંડના એક કારખાનાનું ઉત્પાદન-ખર્ચ $C = \frac{x^2}{10} + 5x + 200$ છે. જો ઉત્પાદન 100 એકમ હોય, તો સીમાંત ખર્ચ શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

20. કોઈ વસ્તુના x એકમ બનાવવા માટે થતા ખર્ચનું વિધેય $C = 50 + 2x + \sqrt{x}$ હોય, તો 100 એકમના ઉત્પાદન માટે સીમાંત ખર્ચ શોધો અને તેનું અર્થઘટન કરો.

21. વિધેયની મહત્તમ અથવા ન્યૂનતમ કિંમતો મેળવવાની રીત જણાવો.

વિભાગ E

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. વિકલન માટેના કાર્યનિયમો આપો.
2. વિધેય વધતું કે ઘટતું છે તે વિકલિતનો ઉપયોગ કરી કેવી રીતે નક્કી કરશો ?
3. વિધેયની મહત્તમ કિંમત એટલે શું ? મહત્તમ કિંમત માટેની શરતો જણાવો.
4. વિધેયની ન્યૂનતમ કિંમત એટલે શું ? ન્યૂનતમ કિંમત માટેની શરતો જણાવો.
5. એક કારખાનામાં સો ટન દીઠ સ્ટીલનું ઉત્પાદન ખર્ચ $\frac{1}{10}x^3 - 4x^2 + 50x + 300$ છે. ન્યૂનતમ ખર્ચ માટે ઉત્પાદન નક્કી કરો.
6. કોઈ માલના x એકમ બનાવવાનું એકમ દીઠ ખર્ચ $C = 1000 + 8x + \frac{5000}{x}$ હોય, તો ખર્ચ ન્યૂનતમ થાય તે માટે કેટલું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ ? ન્યૂનતમ ખર્ચ પણ શોધો.
7. એક વસ્તુના એકમ દીઠ ઉત્પાદન-ખર્ચનું વિધેય $C = 1500 + 0.05x - 2\sqrt{x}$ છે. સાબિત કરો કે ઉત્પાદન 400 એકમ કરવામાં આવે ત્યારે ઉત્પાદન-ખર્ચ ન્યૂનતમ થશે.
8. એક વસ્તુની માંગનું વિધેય $p = 30 - \frac{x^2}{10}$ છે. મહત્તમ આમદાની માટે માંગ અને કિંમત શોધો.
9. બજારમાં ચોખાની માંગ $x = 3(60 - p)$ મહત્તમ આમદાની માટેની માંગ શોધો અને તે માંગ માટેની કિંમત અને આમદાની મેળવો.
10. જો માંગનું વિધેય $p = 75 - \frac{x^2}{2500}$ હોય, તો કઈ માંગે આમદાની મહત્તમ થશે ? મહત્તમ આમદાની માટે કિંમત પણ શોધો.

11. એક ઉત્પાદકનું નફાનું વિધેય $40x + 10000 - 0.1x^2$ છે. કયા ઉત્પાદને તેનો નફો મહત્તમ થશે ? આ મહત્તમ નફો શોધો.

12. એક વેપારીનું નફાનું વિધેય $5x - 100 - 0.01x^2$ છે. મહત્તમ નફો મેળવવા માટે કેટલા એકમોનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ ?

વિભાગ F

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. $y = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 12$, x ની કઈ કિંમતો માટે y મહત્તમ કે ન્યૂનતમ થશે ? આ મહત્તમ અને લઘુતમ કિંમત મેળવો.

2. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 10$ છે. x ની કઈ કિંમતો માટે $f(x)$ મહત્તમ કે ન્યૂનતમ થશે તે શોધો. આ મહત્તમ અને ન્યૂનતમ કિંમતો શોધો.

3. $f(x) = x^3 - x^2 - x + 2$ ની અધિકતમ અને લઘુતમ કિંમતો મેળવો.

4. એક ઉત્પાદક $200x + 15x^2$ રૂપિયા ખર્ચી x એકમોનું ઉત્પાદન કરે છે. માંગનું વિધેય $p = 1200 - 10x$ છે, તો નફાનું વિધેય શોધો અને મહત્તમ નફા માટે કેટલા એકમોનું ઉત્પાદન કરવું જોઈએ ?

5. રેફ્રિજરેટર બનાવતી એક કંપની પોતાની રેફ્રિજરેટરની કિંમત ₹ 10,000 રાખે છે. x રેફ્રિજરેટર બનાવવાનો કુલ ખર્ચ $C = 0.1x^2 + 9000x + 100$ રૂપિયા છે. કેટલાં રેફ્રિજરેટર બનાવવાથી મહત્તમ નફો થાય ?

6. એક રમકડું ₹ 20 ની કિંમતે વેચાય છે. આવાં x રમકડાં બનાવવાનો કુલ ખર્ચ $C = 1000 + 16.5x + 0.001x^2$ ₹ થાય છે. કેટલાં રમકડાં બનાવવાથી મહત્તમ નફો થાય ?

Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646 - 1716)

Gottfried Leibniz was a German polymath and philosopher who occupies a prominent place in the history of mathematics and the history of philosophy, having developed differential and integral calculus independently of Isaac Newton. It was only in the 20th century that his Law of Continuity and Transcendental Law of Homogeneity found mathematical implementation (by means of non-standard analysis). He became one of the most prolific inventors in the field of mechanical calculators.

Leibniz made major contributions to physics and technology, and anticipated notions that surfaced much later in philosophy, probability theory, biology, medicine, geology, psychology, linguistics, and computer science.