પ્રકરણ 15

સંભાવના

It is remarkable that a science, which began with the consideration of games of chance, should be elevated to the rank of the most important subject of human knowledge.—***Pierre Simon Laplace***

15.1 પ્રાસ્તાવિક

આપણે રોજબરોજના જીવનમાં નીચેનાં જેવાં વાક્યોનો ઉપયોગ કરીએ છીએ :

(1) આજે વરસાદ આવવાની સંભાવના છે.

(2) તે પરીક્ષામાં પાસ થશે તેની મને શંકા છે.

(3) વાર્ષિક પરીક્ષામાં કવિતા પ્રથમ આવે તેવી પ્રબળ સંભાવના છે.

(4) ડીઝલના ભાવ વધે તેવી શક્યતા વધારે છે.

(5) આજની મૅચમાં ભારત ટૉસ જીતે તેવી શક્યતા 50-50 છે.

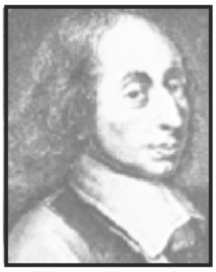
ઉપરનાં વાક્યોમાં ઉપયોગમાં લેવાયેલા શબ્દો સંભાવના, શંકા, શક્યતા વગેરે અચોક્કસતાનાં પરિમાણ દર્શાવે છે. ઉદાહરણ તરીકે (1) માં 'વરસાદ આવવાની સંભાવના' નો અર્થ આજે વરસાદ આવે પણ ખરો અને વરસાદ ન પણ આવે. આ વરસાદ આવવાનું પૂર્વાનુમાન એ આપણા ભૂતકાળના અનુભવોમાં આવી પરિસ્થિતિમાં વરસાદ પડ્યો હતો, તેને ધ્યાનમાં લઈને કરવામાં આવેલ છે. તેવાં જ અનુમાન (2) થી (5) માં દર્શાવેલા છે.

શક્યતાઓની અચોક્કસતાનું માપ ઘણીબધી સ્થિતિમાં માપી શકાય છે.

રમતના સિદ્ધાંતોમાંથી શરૂ થયેલું સંભાવનાશાસ્ત્ર, ભૌતિકવિજ્ઞાન, વિનયન, જીવવિજ્ઞાન, તબીબીવિજ્ઞાન, હવામાનની આગાહી કરનાર ખાતા વગેરે શાખાઓમાં વિસ્તરેલું છે અને દરેક શાખામાં ખૂબ જ ઉપયોગી છે.

15.2 સંભાવના - એક પ્રાયોગિક અભિગમ

અગાઉના ધોરણમાં આપણે સિક્કો ઉછાળવાની રમત, પાસો ફેંકવાની રમત વગેરેમાં શક્યતા(સંભાવના)ની કલ્પના તો કરી જ છે અને તેનાં પરિણામો જોયાં છે. હવે આપણે પ્રયોગમાં કોઈ ચોક્કસ પરિણામની શક્યતા કેટલી છે તે શીખીશું.



Blaise Pascal
(1623–1662)
આકૃતિ 15.1

The concept of probability was developed in a very strange manner. In 1654, a gambler Chevalier de Mere, approached the well-known 17th century French philosopher and mathematician Blaise Pascal regarding certain dice problems. Pascal became interested in these problems, studied them and discussed them with another French mathematician, Pierre de Fermat. Both Pascal and Fermat solved the problems independently. This work was the beginning of Probability Theory.

Pierre de Fermat
(1601–1665)
આકૃતિ 15.2

The first book on the subject was written by the Italian mathematician, J.Cardan (1501–1576). The title of the book was 'Book on Games of Chance' (Liber de Ludo Aleae), published in 1663. Notable contributions were also made by mathematicians J. Bernoulli (1654–1705), P. Laplace (1749–1827), A.A. Markov (1856–1922) and A.N. Kolmogorov (1903-1987).

પ્રવૃત્તિ 1 : (i) કોઈ એક સિક્કો લો. તેને દસ વખત ઉછાળો અને તેની ઉપર ***છાપ*** *(head)* અને ***કાંટો*** *(tail)* કેટલી વખત આવે છે તે નોંધો. નીચેના કોષ્ટકમાં અવલોકનો નોંધો :

કોષ્ટક 15.1

સિક્કો ઉછાળવાના કુલ પ્રયત્નો	સિક્કાની ઉપરની બાજુ છાપ (H) આવે તે પ્રયત્નોની સંખ્યા	સિક્કાની ઉપરની બાજુ કાંટો (T) આવે તે પ્રયત્નોની સંખ્યા
10	—	—

ઉપરનાં અવલોકનો પરથી નીચે આપેલ સૂત્ર પ્રમાણે ગણતરી કરો :

$$\frac{\text{સિક્કાની ઉપરની બાજુ છાપ આવે તે સંખ્યા}}{\text{સિક્કાને ઉછાળવાના કુલ પ્રયત્નોની સંખ્યા}}$$

અને

$$\frac{\text{સિક્કાની ઉપરની બાજુ કાંટો આવે તે સંખ્યા}}{\text{સિક્કાને ઉછાળવાના કુલ પ્રયત્નોની સંખ્યા}}$$

(ii) હવે સિક્કો વીસ વખત ઉછાળો અને ઉપરની રીતે જ અવલોકનોની નોંધ કરો અને ફરીથી ઉપરના અવલોકનોના સમૂહ માટે ગુણોત્તરની કિંમતો શોધો.

(iii) આ જ રીતે સિક્કાને વધુ વખત ઉછાળવાના પ્રયોગનું પુનરાવર્તન કરો. સિક્કાની ઉપરની બાજુ આવતી છાપ અને કાંટાની સંખ્યા નોંધો અને તેમના આનુષંગિક ગુણોત્તર શોધો.

તમે નોંધશો કે જેમ સિક્કો ઉછાળવાના પ્રયત્નો વધુ તેમ ગુણોત્તરની કિંમત 0.5 ની નજીક અને નજીક આવતી જશે. સિક્કાને વધુ વખત ઉછાળવાના પ્રયોગોની નોંધ કરતાં જાવ. નીચેની પ્રવૃત્તિ પણ જૂથમાં કરી શકાય તેવી છે.

પ્રવૃત્તિ 2 : વર્ગમાં 2 અથવા 3 વિદ્યાર્થીઓના જૂથ પાડો. દરેક જૂથમાં એક વિદ્યાર્થી 15 વખત સિક્કો ઉછાળે છે. જૂથના બીજા વિદ્યાર્થી સિક્કા પર છાપ કે કાંટો આવે તે અવલોકનો નોંધશે. [યાદ રાખો કે દરેક જૂથમાં સિક્કો સમતોલ હોવો જોઈએ. દરેક જૂથમાં એક જ સિક્કો ઉછાળવામાં આવે છે તેમ માનો.]

હવે પાટિયા પર કોષ્ટક 15.2 તૈયાર કરો. પહેલું જૂથ-1 તેમનાં અવલોકનો લખશે અને ગુણોત્તરની કિંમત શોધી કાઢશે. પછી જૂથ-2 તેમનાં અવલોકનો લખશે. તેઓ જૂથ-1 અને જૂથ-2 નો સંયુક્ત ગુણોત્તર શોધશે. આ જ રીતે પુનરાવર્તન થતું રહેશે. [આપણે આ ગુણોત્તરને ***સંચયી*** ગુણોત્તર *(cumulative fractions)* કહીશું.] આપણે નોંધીએ કે પ્રથમ ત્રણ હાર એ આ જૂથે આપેલ અવલોકનોના આધારે છે.

કોષ્ટક 15.2

જૂથ (1)	છાપની સંખ્યા (2)	કાંટાની સંખ્યા (3)	છાપની સંચયી સંખ્યા / સિક્કો ઉછાળવાની કુલ સંખ્યા (4)	કાંટાની સંચયી સંખ્યા / સિક્કો ઉછાળવાની કુલ સંખ્યા (5)
1	3	12	$\frac{3}{15}$	$\frac{12}{15}$
2	7	8	$\frac{7+3}{15+15}=\frac{10}{30}$	$\frac{8+12}{15+15}=\frac{20}{30}$
3	7	8	$\frac{7+10}{15+30}=\frac{17}{45}$	$\frac{8+20}{15+30}=\frac{28}{45}$
4	⋮	⋮	⋮	⋮

આ કોષ્ટકમાં આપણે શું જોયું ? આપણે શોધી કાઢ્યું કે જેમજેમ સિક્કો ઉછાળવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા વધે છે તેમ તેમ સ્તંભ (4) અને સ્તંભ (5) માં આવેલ ગુણોત્તર 0.5 ની નજીક અને વધુ નજીક આવે છે.

પ્રવૃત્તિ 3 : (i) એક પાસો 20 વખત ફેંકો અને અંક 1, 2, 3, 4, 5, 6 કેટલી વખત ઉપર દેખાય છે તે નોંધો. આ અવલોકનો કોષ્ટક 15.3 માં દર્શાવો :

કોષ્ટક 15.3

પાસો ફેંકવાની સંખ્યા	પાસા પર મળતા અંકોની સંખ્યા					
	1	2	3	4	5	6
20						

નીચેના ગુણોત્તરની કિંમત શોધો :

* એક સમતોલ પાસાને છ બાજુઓ હોય અને દરેક બાજુ પર 1 થી 6 અંક લખેલા હોય. એક બાજુ પર એક જ અંક હોય. કેટલાંક પાસામાં નંબરના બદલે ટપકાં કરેલાં હોય છે.

$$\frac{\text{પાસા પર અંક 1 આવવાની સંખ્યા}}{\text{પાસો ફેંકવાના પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

$$\frac{\text{પાસા પર અંક 2 આવવાની સંખ્યા}}{\text{પાસો ફેંકવાના પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\text{પાસા પર અંક 6 આવવાની સંખ્યા}}{\text{પાસો ફેંકવાના પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

(ii) હવે સમતોલ પાસો 40 વખત ફેંકો અને અવલોકન નોંધો અને ઉપર પ્રમાણે ગુણોત્તર શોધો.

ઉપરની પ્રવૃત્તિમાં જેમ પાસો ફેંકવાની સંખ્યા વધશે તેમ આપણે દરેક ગુણોત્તરની કિંમત શોધીશું, તો તે $\frac{1}{6}$ ની નજીક અને નજીક આવતી જશે.

આ ચકાસવા માટે આપણે વર્ગમાં એક પ્રવૃત્તિ-2 જેવી જૂથ-પ્રવૃત્તિ કરીશું. વર્ગના વિદ્યાર્થીઓને નાનાં નાનાં જૂથમાં વહેંચો. દરેક જૂથમાં એક વિદ્યાર્થી 10 વખત પાસો ઉછાળશે. અવલોકનો નોંધશે અને સંચયી ગુણોત્તરની ગણતરી થશે.

આપણે અંક 1 માટે ગુણોત્તરની કિંમત કોષ્ટક 15.4 માં નોંધીશું. આ કોષ્ટક બીજા પૂર્ણાંકો માટે પણ વિસ્તારી શકાય અથવા બીજા અંકો માટે આ જ પ્રકારના કોષ્ટક બનાવી શકાય.

કોષ્ટક 15.4

જૂથ (1)	પાસો ફેંકવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા (2)	$\frac{\text{પાસા પર 1 આવે તે સંચયી સંખ્યા}}{\text{પાસા ફેંકવાના પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$ (3)
1	—	—
2	—	—
3	—	—
4	—	—

દરેક જૂથમાં ઉપયોગમાં લેવાતો પાસો એ સમાન કદ અને દેખાવનો હોય તે જરૂરી છે. તેથી આપણે કહી શકીએ કે દરેક જૂથમાં ફેંકાયેલો પાસો એ એકનો એક જ છે.

આ કોષ્ટકમાં આપણે શું જોયું ?

જેમ પાસો ફેંકવાની સંખ્યા વધુ ને વધુ, તેમ સ્તંભ (3) માંનો ગુણોત્તર $\frac{1}{6}$ ની નજીક અને નજીક જશે.

પ્રવૃત્તિ 4 : (i) બે સિક્કાઓ એક સાથે દસ વખત ઉછાળો અને નીચે આપેલ કોષ્ટકના સ્વરૂપમાં અવલોકનોની નોંધ કરો :

કોષ્ટક 15.5

બે સિક્કાઓ ઉછાળવાની સંખ્યા	સિક્કા પર છાપ ન આવવાની સંખ્યા	સિક્કા પર એક છાપ આવવાની સંખ્યા	સિક્કા પર બે છાપ આવવાની સંખ્યા
10	—	—	—

નીચેના ગુણોત્તરો લખો :

$$A = \frac{\text{સિક્કા પર છાપ ન આવવાની સંખ્યા}}{\text{બે સિક્કા ઉછાળવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}$$

$$B = \frac{\text{સિક્કા પર એક છાપ આવવાની સંખ્યા}}{\text{બે સિક્કા ઉછાળવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}$$

$$C = \frac{\text{સિક્કા પર બે છાપ આવવાની સંખ્યા}}{\text{બે સિક્કા ઉછાળવાના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}$$

આ ગુણોત્તરની કિંમતો શોધો.

જો સિક્કા ઉછાળવાની સંખ્યા (પ્રવૃત્તિ 2 પ્રમાણે) તમે વધારતાં જશો તો, જેમ સિક્કો ઉછાળવાની સંખ્યા વધે છે તેમ તમે A, B અને C ની કિંમતો અનુક્રમે 0.25, 0.5, 0.25 ની વધુ ને વધુ નજીક જતાં જશો.

પ્રવૃત્તિ 1 માં, સિક્કાને ઉછાળવાના દરેક પ્રયોગને ***પ્રયત્ન** (trial)* કહે છે. તે જ પ્રમાણે પ્રવૃત્તિ 3 માં પાસા ઉછાળવાના દરેક પ્રયોગને પ્રયત્ન કહે છે અને પ્રવૃત્તિ 4 માં બે સિક્કાને ઉછાળવા તે પણ પ્રયત્ન છે.

આમ, જેમાં એક કે તેથી વધુ પરિણામ મળી શકે એવી દરેક ક્રિયા પ્રયત્ન છે. તેવી પ્રવૃત્તિ 1 માં શક્ય પરિણામો છાપ અને કાંટો હતા, જ્યારે પ્રવૃત્તિ 3 માં શક્ય પરિણામો 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 હતાં.

પ્રવૃત્તિ 1 માં સિક્કાને ઉછાળતાં છાપ આવવી એ ઘટનામાં છાપ એ પરિણામ છે. તે જ પ્રમાણે કાંટો મેળવવાની ઘટનામાં કાંટો એ પરિણામ છે. પ્રવૃત્તિ 2 માં કોઈ એક ચોક્કસ અંક મેળવવો જેમકે 1. તે ઘટનામાં અંક 1 એ પરિણામ છે.

આપણા પ્રયોગમાં યુગ્મ સંખ્યા મેળવવાની ઘટનામાં પાસાને ઉછાળતાં મળતાં પરિણામો 2, 4 અને 6 છે.

તેથી પ્રયોગ માટેની ***ઘટના*** *(event)* એ પ્રયોગનાં કેટલાંક પરિણામોનું એકત્રીકરણ છે. ધોરણ 10 માં તમે ઘટનાની વધુ સારી વિસ્તૃત વ્યાખ્યા સમજશો.

હવે તમે પ્રવૃત્તિ 4 માં ઘટના કઈ છે તે કહી શકશો ?

ઉપરની આ પૂર્વ ભૂમિકા સાથે આપણે જોઈએ કે સંભાવના શું છે ? અહીં આપણે પ્રયત્નોનાં પરિણામ સીધા જોઈ શકીએ છીએ.

આપણે *પ્રાયોગિક અથવા આનુભાવિક* સંભાવના શોધીશું.

ધારો કે કુલ પ્રયત્નો *n* છે. ઘટના E ઉદ્ભવે તેની પ્રાયોગિક સંભાવના P(E) વડે દર્શાવાય છે અને તે આ મુજબ છે :

$$P(E) = \frac{\text{ઘટના ઉદ્ભવે તે ઘટના માટેના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

આ પ્રકરણમાં આપણે પ્રાયોગિક સંભાવનાને બદલે સરળતા ખાતર ફક્ત ***સંભાવના*** *(probability)* જ લખીશું.

આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ચાલો પ્રવૃત્તિ 2 માં પાછા જઈને શરૂઆત કરીએ. કોષ્ટક 15.2 ના ચોથા સ્તંભમાં તમે ગણતરી દ્વારા કયો અપૂર્ણાંક શોધ્યો ? એ બીજુ કાંઈ નહિ પણ છાપ મેળવવાની પ્રાયોગિક સંભાવના છે. નોંધી રાખો કે પ્રયોગમાં કરવામાં આવતા કુલ પ્રયત્નો અને છાપ આવે તે પરિણામો પર સંભાવનાનું મૂલ્ય બદલાતું રહે છે. તે જ પ્રમાણે કાંટો મેળવવાની સંભાવનામાં કોષ્ટક 15.2 ના સ્તંભ (5) માં $\frac{12}{15}$ થી શરૂ થાય અને તે $\frac{2}{3}$, પછી $\frac{28}{45}$, અને આ રીતે આગળ વધશે.

આમ, પ્રાયોગિક સંભાવના એ તમે કરેલા પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા અને તમને તેના તે પ્રયત્નોમાં જે પરિણામ જોઈએ તેની સંખ્યા પર આધારિત છે.

પ્રવૃત્તિ 5 : આગળ વધતાં પહેલાં પ્રવૃત્તિ 3 કરતી વખતે તમે જે કોષ્ટક બનાવ્યું હતું તેની સામે નજર કરો. કેટલીક ચોક્કસ વખત પાસાને ઉછાળતાં પાસા પર અંક 3 મેળવવાની સંભાવના શોધો. જેમ તમે પ્રયત્નોની સંખ્યા વધારો છો તેમ તે સંભાવના કઈ રીતે બદલાય છે તે પણ જુઓ.

આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

ઉદાહરણ 1 : એક સિક્કાને 1000 વખત ઉછાળતાં નીચેની આવૃત્તિઓ મળે છે :

છાપ : 455, કાંટો : 545

દરેક ઘટના માટે સંભાવનાની ગણતરી કરો.

ઉકેલ : અહીં સિક્કો 1000 વખત ઉછાળવામાં આવે છે માટે પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા 1000 થાય. સિક્કા પર છાપ મળે અને સિક્કા પર કાંટો મળે તે ઘટનાઓને અનુક્રમે E અને F કહીશું. ઘટના E ઉદ્ભવવાની સંખ્યા એટલે કે સિક્કા પર છાપ આવવાની સંખ્યા 455 છે.

$$\therefore \text{ E ની સંભાવના } = \frac{\text{સિક્કા પર છાપ આવવાની સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

$$\therefore P(E) = \frac{455}{1000} = 0.455$$

એ જ રીતે, સિક્કા પર કાંટો આવે તે ઘટનાની સંભાવના $= \frac{\text{સિક્કા પર કાંટો આવવાની સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$

$$\therefore P(F) = \frac{545}{1000} = 0.545$$

નોંધીએ કે ઉપરના દાખલામાં $P(E) + P(F) = 0.455 + 0.545 = 1$, અહીં દરેક પ્રયત્નનાં શક્ય પરિણામો E અને F જ છે.

ઉદાહરણ 2 : બે સિક્કાઓ 500 વખત ઉછાળવામાં આવે છે અને આપણને

બે વાર છાપ : 105 વખત મળે છે.

એક વાર છાપ : 275 વખત મળે છે.

એક પણ વાર છાપ ન મળે : 120 વખત બને છે.

આ દરેક ઘટનાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : આપણે બે વખત છાપ મળે, એક વખત છાપ મળે અને એક પણ વખત છાપ ન મળે તે ઘટનાઓને અનુક્રમે E_1, E_2 અને E_3 વડે દર્શાવીએ. આમ,

$$P(E_1) = \frac{105}{500} = 0.21$$

$$P(E_2) = \frac{275}{500} = 0.55$$

$$P(E_3) = \frac{120}{500} = 0.24$$

અહીં નોંધીએ કે $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1$.

વળી, પ્રયત્નનાં શક્ય પરિણામો E_1, E_2 અને E_3 જ છે.

ઉદાહરણ 3 : એક પાસો 1000 વખત ફેંકવામાં આવે છે. પાસા પર 1, 2, 3, 4, 5 અને 6 ની આવૃત્તિઓ કોષ્ટક 15.6 માં દર્શાવેલ છે :

કોષ્ટક 15.6

પરિણામ	1	2	3	4	5	6
આવૃત્તિ	179	150	157	149	175	190

દરેક પરિણામ આવવાની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે E_i એ પરિણામ i આવવાની ઘટના છે, જ્યાં $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

$$\text{પરિણામ } i \text{ મેળવવાની સંભાવના} = P(E_i) = \frac{i \text{ ની આવૃત્તિ}}{\text{પાસો ફેંકવાની કુલ સંખ્યા}}$$

$$\therefore P(E_1) = \frac{179}{1000} = 0.179$$

તે જ રીતે $P(E_2) = \frac{150}{1000} = 0.15$, $P(E_3) = \frac{157}{1000} = 0.157$,

$P(E_4) = \frac{149}{1000} = 0.149$, $P(E_5) = \frac{175}{1000} = 0.175$

અને $P(E_6) = \frac{190}{1000} = 0.19$.

નોંધીએ કે $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + P(E_4) + P(E_5) + P(E_6) = 1$

એ પણ નોંધો કે :

(i) પ્રત્યેક ઘટનાની સંભાવના 0 અને 1 ની વચ્ચે આવેલી હોય છે.

(ii) બધી જ સંભાવનાઓનો સરવાળો 1 થાય છે.

(iii) ફક્ત $E_1, E_2, \ldots, E_6$ એ પ્રયત્નનાં શક્ય તેટલાં પરિણામ છે.

ઉદાહરણ 4 : ટેલિફોન ડિરેક્ટરીના એક પાના પર 200 ટેલિફોન નંબર હતા. તે નંબરમાં એકમના સ્થાનના અંકના આવૃત્તિ-વિતરણ (દાખલા તરીકે ટેલિફોન નંબર 25828573 નો એકમનો અંક 3 છે) માટેનું કોષ્ટક 15.7 આપેલ છે.

કોષ્ટક 15.7

એકમનો અંક	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
આવૃત્તિ	22	26	22	22	20	10	14	28	16	20

પાના પર જોયા સિવાય, કોઈ એક નંબર પસંદ કરવામાં આવે છે. એકમના સ્થાન પરનો અંક 6 હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ :

$$\text{એકમના સ્થાને અંક 6 હોય તે ઘટનાની સંભાવના} = \frac{\text{6 આવવાની આવૃત્તિ}}{\text{પસંદ કરેલ કુલ ટેલિફોન નંબરની સંખ્યા}}$$

$$= \frac{14}{200} = 0.07$$

તેવી જ રીતે તમે એકમના સ્થાને બીજા અંકો આવે તેની પ્રાયોગિક સંભાવના શોધી શકો.

ઉદાહરણ 5 : હવામાન ખાતાની કચેરી બતાવે છે કે છેલ્લા સળંગ 250 દિવસના તેમના હવામાનની આગાહી પૈકી 175 દિવસ તે સાચી પડી.

(i) તો આપેલ કોઈ એક દિવસે હવામાનની આગાહી સાચી પડી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

(ii) આપેલ કોઈ એક દિવસે હવામાનની આગાહી સાચી ન પડી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : હવામાનની આગાહી કરી હોય તે માટેના દિવસોની સંખ્યા = 250

(i) P(હવામાનની આગાહી સાચી પડી હોય તે દિવસોની સંખ્યા)

$$= \frac{\text{હવામાનની આગાહી સાચી પડી હોય તેવા દિવસોની કુલ સંખ્યા}}{\text{હવામાનની આગાહી કરેલ કુલ દિવસોની સંખ્યા}}$$

$$= \frac{175}{250} = 0.7$$

(ii) હવામાનની આગાહી સાચી પડી ન હોય તે દિવસોની સંખ્યા = 250 – 175 = 75

તેથી, P(હવામાનની આગાહી સાચી પડી ન હોય તે દિવસ) = $\frac{75}{250}$ = 0.3

નોંધો કે :

P(આગાહી સાચી પડી હોય) + P(આગાહી સાચી ન પડી હોય) = 0.7 + 0.3 = 1

ઉદાહરણ 6 : ટાયર બનાવતી એક કંપનીએ પોતાનું ટાયર બદલાવવાનું થાય તે પહેલાં કેટલું અંતર કાપે છે તેની નોંધ કરી છે. નીચેનું કોષ્ટક 1000 ટાયર વિશે પરિણામ દર્શાવે છે.

કોષ્ટક 15.8

અંતર (કિમીમાં) કરતાં ઓછું	4000 થી ઓછું	4000 થી 9000	9001 થી 14000	14000 થી વધુ
આવૃત્તિ	20	210	325	445

જો તમે આ કંપનીનું ટાયર ખરીદો તો :

(i) 4000 કિમી અંતર કાપતા પહેલાં ટાયર બદલવાની જરૂર પડી હોય તેની સંભાવના શોધો.

(ii) ટાયરે 9000 કિમીથી વધુ અંતર કાપ્યું હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

(iii) ટાયર બદલવાની જરૂર 4000 કિમી અને 14,000 કિમી અંતર કાપ્યાની વચ્ચે પડી હોય તેની સંભાવના કેટલી ?

ઉકેલ : (i) પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા = 1000.

4000 કિમી અંતર કાપતાં પહેલાં ટાયર બદલવું પડે તેવા પ્રયત્નોની સંખ્યા = 20.

તેથી, P(4000 કિમી અંતર કાપ્યા પહેલાં ટાયર બદલવું પડે) = $\frac{20}{1000}$ = 0.02

(ii) 9000 કિમી અંતર કાપ્યા પછી ટાયર બદલવું પડે તેની આવૃત્તિ = 325 + 445 = 770

આથી, P(9000 કિમીથી વધુ અંતર ટાયરે કાપ્યું હોય) = $\frac{770}{1000}$ = 0.77

(iii) કાપેલ અંતર 4000 કિમી અને 14,000 કિમીની વચ્ચે હોય ત્યારે ટાયર બદલવું પડે તેની આવૃત્તિ = 210 + 325 = 535.

તેથી, P(4000 કિમીથી 14,000 કિમીની વચ્ચે ટાયર બદલવું પડે) = $\frac{535}{1000}$ = 0.535

ઉદાહરણ 7 : માસિક એકમ કસોટીમાં વિદ્યાર્થીએ મેળવેલ ગુણ ટકામાં નીચે મુજબ છે :

કોષ્ટક 15.9

એકમ કસોટી	I	II	III	IV	V
મેળવેલ ગુણ ટકામાં	69	71	73	68	74

આ માહિતી પરથી વિદ્યાર્થીએ એકમ કસોટીમાં 70 ટકાથી વધુ ટકા મેળવ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.

ઉકેલ : અહીં વિદ્યાર્થીએ આપેલી એકમ કસોટીની કુલ સંખ્યા = 5

વિદ્યાર્થીએ 70 ટકાથી વધુ ટકા એકમ કસોટીમાં મેળવ્યા હોય તે કસોટીની સંખ્યા = 3.

તેથી, P(70 ટકાથી વધુ ગુણ મેળવ્યા હોય) = $\frac{3}{5}$ = 0.6

ઉદાહરણ 8 : કોઈ એક શહેરમાં કોઈ વીમા કંપનીએ યાદચ્છિક રીતે 2000 ડ્રાઈવરની પસંદગી કરી. તેમની ઉંમર અને તેમણે કરેલ અકસ્માત વચ્ચેનો સંબંધ શોધ્યો. તે માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલ છે :

કોષ્ટક 15.10

ડ્રાઈવરની ઉંમર (વર્ષમાં)	એક વર્ષમાં કરેલ અકસ્માત				
	0	1	2	3	3 થી વધુ
18 - 29	440	160	110	61	35
30 - 50	505	125	60	22	18
50 થી વધુ	360	45	35	15	9

શહેરમાં યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ કોઈ એક ડ્રાઈવર માટે નીચેની ઘટનાઓની સંભાવના શોધો :

(i) ઉંમર 18-29 વર્ષ હોય અને 1 વર્ષમાં બરાબર 3 અકસ્માત કર્યા હોય.

(ii) ઉંમર 30-50 વર્ષ હોય અને 1 વર્ષમાં 1 કે તેથી વધુ અકસ્માત કર્યા હોય.

(iii) 1 વર્ષમાં એક પણ અકસ્માત ન કર્યા હોય.

ઉકેલ : ડ્રાઈવરની કુલ સંખ્યા = 2000.

(i) ઉંમર 18-29 વર્ષ હોય અને 1 વર્ષમાં બરાબર 3 અકસ્માત કર્યા હોય તેવા ડ્રાઈવરોની સંખ્યા = 61.

તેથી, P (18-29 વર્ષની ઉંમર હોય અને 3 અકસ્માત કર્યા હોય તેવા ડ્રાઈવર) = $\frac{61}{2000}$

$= 0.0305 \approx 0.031$

(ii) ડ્રાઈવરની ઉંમર 30-50 વર્ષ હોય અને 1 વર્ષમાં 1 કે તેથી વધુ અકસ્માત કર્યા હોય તેવા ડ્રાઈવરોની સંખ્યા

$= 125 + 60 + 22 + 18 = 225$

માટે, P(30-50 વર્ષની ઉંમર અને 1 કે તેથી વધુ અકસ્માત કર્યા હોય તેવા ડ્રાઈવર)

$= \frac{225}{2000} = 0.1125 \approx 0.113$

(iii) 1 વર્ષમાં એક પણ અકસ્માત ન કર્યા હોય તેવા ડ્રાઈવરોની સંખ્યા $= 440 + 505 + 360$

$= 1305$

તેથી, P(અકસ્માત ન કર્યા હોય તેવા ડ્રાઈવર) = $\frac{1305}{2000}$ = 0.653

ઉદાહરણ 9 : (કોષ્ટક 14.3, ઉદાહરણ 4, પ્રકરણ 14), આવૃત્તિ-વિતરણનું કોષ્ટક ધ્યાનમાં લો. તે 38 વિદ્યાર્થીઓનું વજન દર્શાવે છે.

(i) વિદ્યાર્થીનું વજન વર્ગ 46-50 કિગ્રામાં હોય તેની સંભાવના શોધો.

(ii) આ માહિતીના સંદર્ભમાં એવી બે ઘટનાઓ દર્શાવો કે એકમાં સંભાવના 0 આવે અને બીજી ઘટનામાં સંભાવના 1 આવે.

ઉકેલ : (i) વિદ્યાર્થીઓની કુલ સંખ્યા = 38 અને વિદ્યાર્થીનું વજન વર્ગ 46 - 50 કિગ્રામાં હોય તેવા વિદ્યાર્થીની સંખ્યા = 3.

તેથી, P(46 - 50 કિગ્રામાં વજન ધરાવતા વિદ્યાર્થીઓ) = $\frac{3}{38} = 0.079$

(ii) દાખલા તરીકે એવી ઘટના લો જેમાં વિદ્યાર્થીનું વજન 30 કિગ્રા હોય. આપણા ઉદાહરણમાં કોઈ પણ વિદ્યાર્થીનું વજન 30 કિગ્રા નથી. તેથી આ ઘટનાની સંભાવના 0 છે. તે જ પ્રમાણે વિદ્યાર્થીનું વજન 30 કિગ્રાથી વધુ હોય તેની સંભાવના = $\frac{38}{38} = 1$.

ઉદાહરણ 10 : બિયારણની 5 થેલી પૈકી દરેકમાંથી 50 બીજ પસંદ કરવામાં આવ્યા અને તેને અંકુરણ માટે ઉચિત પરિસ્થિતિમાં મૂકવામાં આવ્યા. 20 દિવસ પછી દરેકમાંથી અંકુરિત થયેલાં બીજની ગણતરી કરવામાં આવી અને તે નીચે પ્રમાણે છે :

કોષ્ટક 15.11

થેલી	1	2	3	4	5
અંકુરિત થયેલ બીજની સંખ્યા	40	48	42	39	41

નીચેનામાંથી બીજની અંકુરિત થવાની સંભાવના શોધો :

(i) થેલીમાંનાં 40 થી વધુ બીજ

(ii) થેલીમાંનાં 49 બીજ

(iii) થેલીમાંનાં 35 થી વધુ બીજ

ઉકેલ : થેલીની કુલ સંખ્યા = 5.

(i) 50 માંથી 40 થી વધુ બીજ અંકુરિત થયાં હોય તેવી થેલીની સંખ્યા = 3.

P(થેલીમાં 40 થી વધુ બીજ અંકુરિત થયાં હોય) = $\frac{3}{5} = 0.6$

(ii) 49 બીજ અંકુરિત થયાં હોય તેવી થેલીની સંખ્યા = 0.

P(થેલીમાં 49 બીજ અંકુરિત થયાં હોય) = $\frac{0}{5} = 0$.

(iii) થેલીમાં 35 થી વધુ બીજ અંકુરિત થયાં હોય તેવી થેલીની સંખ્યા = 5.

તેથી, જરૂરી સંભાવના = $\frac{5}{5} = 1$.

નોંધ : ઉપરનાં બધાં જ ઉદાહરણોમાં તમે નોંધ્યું હશે કે સંભાવનાનું મૂલ્ય હંમેશાં 0 થી 1 વચ્ચેનો અપૂર્ણાંક હોય છે. (0 અને 1 સહિત)

સ્વાધ્યાય 15.1

1. ક્રિકેટમાં, એક સ્ત્રી ખેલાડીએ 30 બૉલમાંથી 6 વાર દડાને ક્ષેત્રરેખા(boundary)ની બહાર મોકલ્યો. તેણે દડાને ક્ષેત્રરેખાની બહાર ન મોકલ્યો હોય તેની સંભાવના શોધો.

2. બે બાળકો ધરાવતાં 1500 કુટુંબો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવ્યા અને નીચેની માહિતી પ્રાપ્ત થઈ :

કુટુંબમાં છોકરીઓની સંખ્યા	2	1	0
કુટુંબની સંખ્યા	475	814	211

યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરેલ કુટુંબમાં

(i) 2 છોકરીઓ હોય. (ii) 1 છોકરી હોય. (iii) એક પણ છોકરી ન હોય.

તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

આ બધી સંભાવનાઓનો સરવાળો 1 થાય છે તે પણ ચકાસો.

3. ઉદાહરણ 5, વિભાગ 14.4, પ્રકરણ 14 નો વિચાર કરો. વર્ગનો વિદ્યાર્થી ઑગષ્ટ માસમાં જન્મ્યો હોય તેની સંભાવના શોધો.

4. ત્રણ સિક્કાઓને એક સાથે 200 વખત ઉછાળતાં મળતાં પરિણામોની આવૃત્તિઓ નીચે પ્રમાણે છે :

પરિણામ	**3 છાપ**	**2 છાપ**	**1 છાપ**	**છાપ ન આવે**
આવૃત્તિ	23	72	77	28

જો ત્રણ સિક્કાને એક સાથે ઉછાળતાં બે વાર છાપ આવે તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

5. કોઈ એક સંસ્થાએ યાદચ્છિક રીતે 2400 કુટુંબોને પસંદ કર્યાં અને તેમની આવક તેમજ તેમની પાસેનાં વાહનોની સંખ્યા જાણવા માટેનું સર્વેક્ષણ કર્યું. તેમાંથી પ્રાપ્ત માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ છે :

માસિક આવક	**કુટુંબ દીઠ વાહન**			
(₹ માં)	**0**	**1**	**2**	**2 થી વધુ**
7000 થી ઓછી	10	160	25	0
7000 – 10000	0	305	27	2
10000 – 13000	1	535	29	1
13000 – 16000	2	469	59	25
16000 થી વધુ	1	579	82	88

ધારો કે એક કુટુંબ પસંદ કરવામાં આવે છે. પસંદ કરેલ કુટુંબ માટે નીચે આપેલી માહિતી પરથી સંભાવના શોધો :

(i) માસિક આવક ₹ 10000 – 13000 હોય અને તેમની પાસે ફક્ત 2 વાહન હોય.

(ii) માસિક આવક ₹ 16000 થી વધુ હોય અને તેમની પાસે ફક્ત 1 જ વાહન હોય.

(iii) માસિક આવક ₹ 7000 થી ઓછી હોય અને તેમની પાસે એક પણ વાહન ન હોય.

(iv) માસિક આવક ₹ 13000 – 16000 હોય અને તેમની પાસે 2 થી વધુ વાહન હોય.

(v) એક કરતાં વધુ વાહન ન હોય.

6. કોષ્ટક 14.7, પ્રકરણ 14 ધ્યાનમાં લો.

(i) કોઈ વિદ્યાર્થીએ ગણિતની કસોટીમાં 20 ટકાથી ઓછા ગુણ મેળવ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.

(ii) કોઈ વિદ્યાર્થીએ 60 કે તેથી વધુ ગુણ મેળવ્યા હોય તેની સંભાવના શોધો.

7. આંકડાશાસ્ત્ર વિષય પ્રત્યેનો વિદ્યાર્થીઓનો અભિગમ જાણવા માટે 200 વિદ્યાર્થીઓનું સર્વેક્ષણ કરવામાં આવ્યું. તેની માહિતી નીચેના કોષ્ટકમાં દર્શાવેલી છે :

અભિગમ	વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા
ગમે	135
ન ગમે	65

યાદચ્છિક રીતે કોઈ એક વિદ્યાર્થીને પસંદ કરતાં મળતી નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(i) આંકડાશાસ્ત્ર ગમે (ii) આંકડાશાસ્ત્ર ન ગમે

8. સ્વાધ્યાય 14.2 પ્રશ્ન નં. 2 નો વિચાર કરો. કોઈએ એક સ્ત્રી ઈજનેરને યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરતાં મળતી નીચેની ઘટનાની સંભાવના શોધો.

(i) તેના કાર્યક્ષેત્રથી 7 કિમીથી ઓછા અંતરે રહેતા હોય.

(ii) તેના કાર્યક્ષેત્રથી 7 કિમીથી વધુ અંતરે રહેતા હોય.

(iii) તેના કાર્યક્ષેત્રથી $\frac{1}{2}$ કિમીથી ઓછા અંતરે રહેતા હોય.

9. **પ્રવૃત્તિ :** તમારી શાળાના દરવાજા આગળ ઊભા રહો અને ચોક્કસ સમય-મર્યાદામાં દ્વિચક્રી વાહનો, ત્રિચક્રી વાહનો અને ચાર પૈડાવાળાં કેટલાં વાહનો પસાર થાય છે તેની આવૃત્તિ નોંધો. કુલ વાહનની સંખ્યામાંથી પસાર થતું વાહન દ્વિચક્રી વાહન હોય તેની સંભાવના શોધો.

10. **પ્રવૃત્તિ :** તમારા વર્ગમાં રહેલા વિદ્યાર્થીઓને 3 અંકવાળી એક સંખ્યા લખવાનું કહો. યાદચ્છિક રીતે કોઈ એક વિદ્યાર્થી પસંદ કરો. પસંદ કરેલ વિદ્યાર્થી દ્વારા લખાયેલ સંખ્યા એ 3 થી વિભાજ્ય હોય તેની સંભાવના શોધો. યાદ રાખો કે જો આપેલી સંખ્યાના અંકોનો સરવાળાને 3 વડે નિઃશેષ ભાગી શકાય તો આપેલ સંખ્યા એ 3 વડે વિભાજ્ય છે.

11. ઘઉંના લોટની થેલી પર 5 કિગ્રા વજન લખેલ હોય તેવી 11 થેલી પસંદ કરી. તેમાં ખરેખર કેટલો લોટ છે તે વજન(કિગ્રામાં) નીચે પ્રમાણે આપેલ છે :

4.97 5.05 5.08 5.03 5.00 5.06 5.08 4.98 5.04 5.07 5.00

આમાંની કોઈ એક થેલી યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરતાં તેમાં લોટનું વજન 5 કિગ્રાથી વધુ હોય તેની સંભાવના શોધો.

12. સ્વાધ્યાય 14.2 માં પ્રશ્ન નં. 5 નો વિચાર કરો. કોઈ એક શહેરમાં હવામાં સલ્ફર ડાયૉક્સાઈડની સાંદ્રતા શોધવા માટેનો પ્રયોગ કરવામાં આવ્યો. તે દસ લાખના ભાગમાં (*ppm*) 30 દિવસની માહિતીનું આવૃત્તિ-વિતરણ તમારે તૈયાર કરવાનું હતું. આ કોષ્ટકનો ઉપયોગ કરીને 0.12 - 0.16 વર્ગ માટે સલ્ફર ડાયૉક્સાઈડની સાંદ્રતાની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

13. સ્વાધ્યાય 14.2 ના દાખલા 1 નો વિચાર કરો. એક વર્ગના 30 વિદ્યાર્થીઓના રૂધિર જૂથ માટેનું આવૃત્તિ-વિતરણ તમારે તૈયાર કરવાનું હતું. તો આ વિદ્યાર્થીઓમાંથી કોઈ એક વિદ્યાર્થીનું રૂધિર જૂથ AB હોય તેની સંભાવનાની ગણતરી કરો.

15.3 સારાંશ

આ પ્રકરણમાં આપણે નીચેના મુદ્દાઓ શીખ્યા :

1. પ્રયોગના જરૂરી પરિણામોના સમૂહને તે પ્રયોગની ઘટના કહે છે.

2. ઘટનાથી પ્રાપ્ત થાય તેની (પ્રાયોગિક) સંભાવના P(E) આ રીતે વ્યાખ્યાયિત થાય છે.

$$P(E) = \frac{E \text{ ઉદ્ભવવા માટેના પ્રયત્નોની સંખ્યા}}{\text{પ્રયત્નોની કુલ સંખ્યા}}$$

3. કોઈ પણ ઘટનાની સંભાવના 0 અને 1 ની વચ્ચે જ હોય છે. (0 અને 1 સહિત)