



આલેખનો પરિચય

પ્રકરણ

15

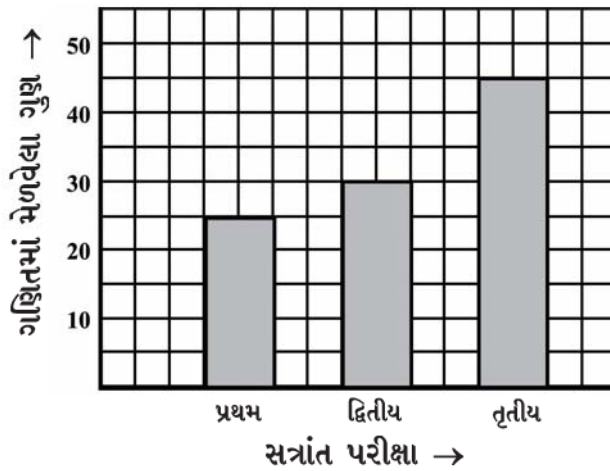
15.1 પ્રાસ્તાવિક

શું તમે સમાચારપત્રો, ટેલિવિઝન, સામયિકો, પુસ્તકો વગેરેમાં આલેખો જોયા છે ? આંકડાકીય તથ્યોને દૃશ્ય સ્વરૂપે રજૂ કરવાના ઉદ્દેશ્યથી આલેખ તૈયાર કરવામાં આવે છે. આલેખના ઉપયોગથી આંકડાકીય માહિતી ઝડપથી, સરળતાથી અને સ્પષ્ટપણે સમજી શકાય છે. આમ, આલેખ એ પ્રાપ્ત થયેલ માહિતીની દૃશ્ય રજૂઆત છે. માહિતીને કોષ્ટક સ્વરૂપે પણ દર્શાવી શકાય છે. આમ છતાં, આલેખ દ્વારા રજૂ થતી માહિતી વધુ સરળતાથી સમજી શકાય છે. જ્યારે પ્રાપ્ત માહિતી કોઈ ચલના સાપેક્ષમાં વધે કે ઘટે (દા.ત. બજારમાં તેજ છે કે મંદી) તે જાણવા કે પછી બે માહિતી અથવા તો કોઈ એક માહિતીને તેની ભૂતકાળની માહિતી સાથે સરખાવવા માટે તો આલેખ ખરેખર ખૂબ જ ઉપયોગી છે. કેટલાક પ્રકારના આલેખ આપણે અગાઉ શીખી ચૂક્યા છીએ. ચાલો ઝડપથી તેને યાદ કરી લઈએ.

15.1.1 લંબ આલેખ (દંડ આલેખ)

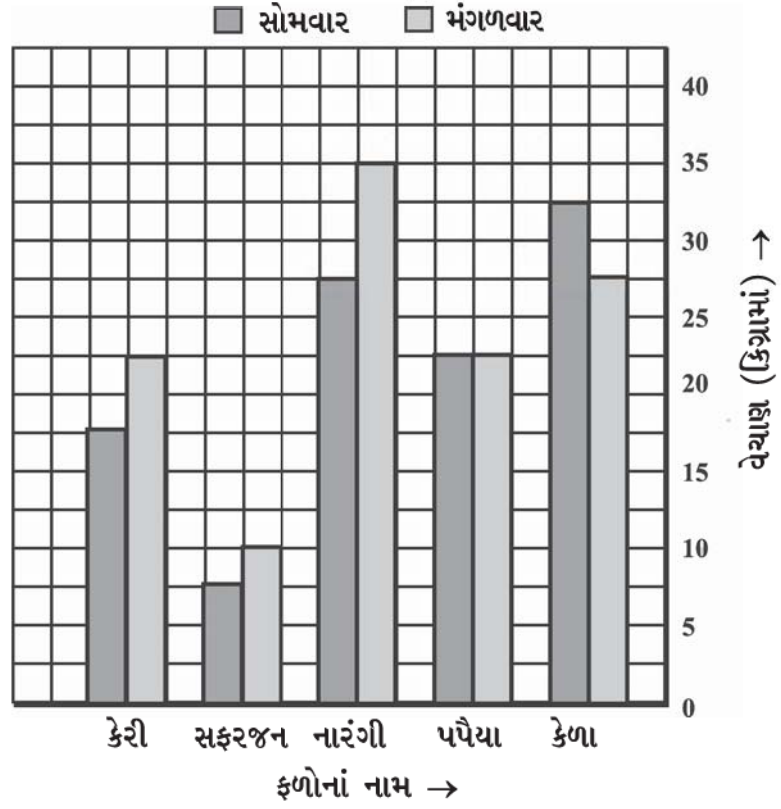
લંબ આલેખ (Bar graph) નો મુખ્ય ઉપયોગ માહિતીના કેટલાંક વિભાગો વચ્ચે તુલના કરવામાં થાય છે. લંબ આલેખને આડી અથવા ઊભી સમાંતર લીટીઓ દ્વારા દર્શાવાય છે. જોવામાં સરળતા રહે તે માટે સ્તંભ સ્વરૂપે પણ દોરી શકાય છે. (અહીં એ નોંધીએ કે આ સ્તંભને જાડાઈ સાથે કોઈ સંબંધ નથી માત્ર ઊંચાઈને જ ધ્યાનમાં લેવાની છે. એટલે કે લંબ આલેખ એક જ પરિમાણ ધરાવે છે.)

આકૃતિ 15.1માં ગણિત વિષયની ત્રણ સત્રાંત પરીક્ષામાં અનુએ મેળવેલ ગુણના લંબ આલેખ છે. આ આલેખ દ્વારા તમે અનુના પરીક્ષામાં દેખાવની સરખામણી સરળતાથી કરી શકો છો.



આકૃતિ 15.1

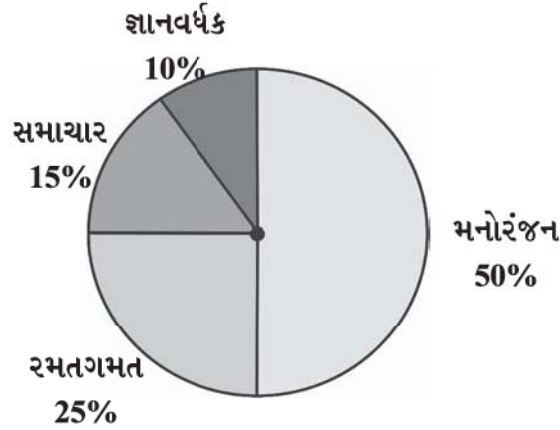
આકૃતિ 15.2માં દર્શાવ્યા મુજબ લંબ આલેખમાં લંબ / સ્તંભ જોડીમાં પણ હોઈ શકે છે. આ આલેખ આપણને બે દિવસના ગાળામાં જુદા જુદા ફળોના થયેલ વેચાણની તુલનાત્મક માહિતી રજૂ કરે છે. આમ, આકૃતિ 15.2 એ આકૃતિ 15.1થી કઈ રીતે જુદી પડે છે ? એ બાબતે તમારા મિત્ર સાથે ચર્ચા કરો.



આકૃતિ 15.2

15.1.2 વૃત આલેખ (વર્તુળ આલેખ)

કોઈ સમગ્ર માહિતીના સાપેક્ષે તેના કોઈ એક અંશ કે પછી એક અંશની બીજા અંશ સાથે સરખામણી કરવા માટે વૃત આલેખ (Circle-graph / Pie graph) વપરાય છે. આકૃતિ 15.3માં વૃત આલેખ (વર્તુળ આલેખ) દર્શાવેલો છે. તેમાં ટેલિવિઝનની જુદી-જુદી ચેનલ જોનાર લોકોની માહિતી ટકામાં દર્શાવેલ છે.



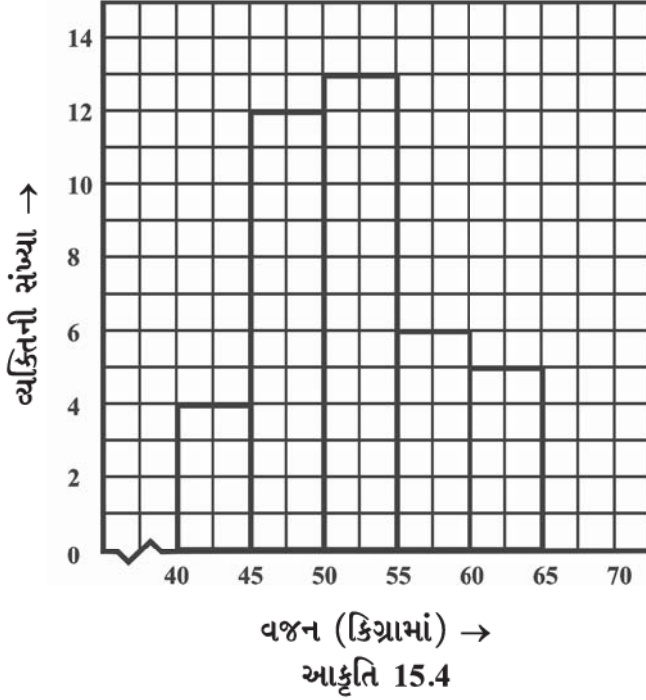
આકૃતિ 15.3

15.1.3 સ્તંભ આલેખ

આપેલ સતત માહિતીને જ્યારે વર્ગ સ્વરૂપે આપવામાં આવેલ હોય ત્યારે તેના લંબ આલેખને સ્તંભઆલેખ (Histogram) તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. અહીં સ્તંભની જાડાઈ ધ્યાને લેવામાં આવે છે. (સ્તંભ આલેખ દ્વિ-પરિમાણીય છે : ઊંચાઈ અને જાડાઈ) તેના સ્તંભો સમગ્ર વિસ્તારમાં એકબીજાને લગોલગ આવેલા હોય છે.

આકૃતિ 15.4માં વસાહતના 40 લોકોનાં વજનનું આવૃત્તિ વિતરણ સ્તંભ આલેખ (હિસ્ટોગ્રામ) દ્વારા દર્શાવેલ છે.

વજન (કિગ્રામાં)	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65
વ્યક્તિની સંખ્યા	4	12	13	6	5



આકૃતિ 15.4માં X અક્ષ પર દર્શાવેલ (~~~~) ઊંચી નીચી રેખા બતાવે છે કે 0 થી 40 વચ્ચેની સંખ્યા આપણે આલેખમાં બતાવેલ નથી.

અહીં આલેખમાં સ્તંભ વચ્ચે જગ્યા નથી કારણ કે માહિતીમાં આપેલાં વર્ગો વચ્ચે જગ્યા નથી, માહિતી સળંગ છે. આ સ્તંભ આલેખ દ્વારા તમને શું માહિતી પ્રાપ્ત થાય છે ? તેની યાદી બનાવવાનો પ્રયત્ન કરો.

15.1.4 રેખીય આલેખ

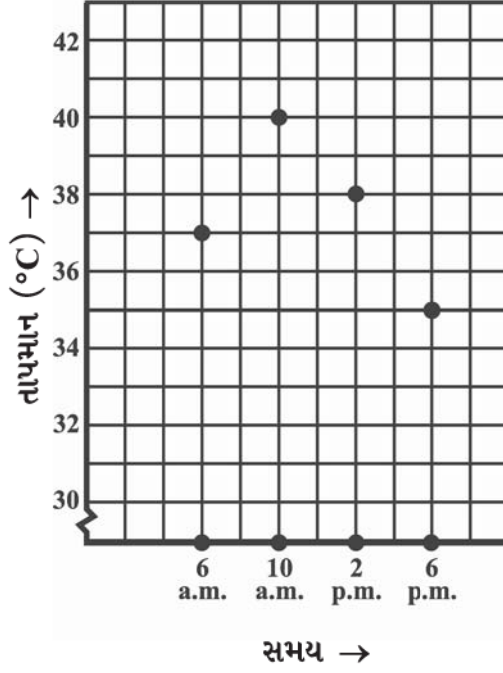
નિશ્ચિત સમયગાળામાં સમય સાથે માહિતીમાં થતો સતત ફેરફાર દર્શાવવા રેખીય આલેખ (Line Graph) વપરાય છે.



જ્યારે રેણુ બિમાર હતી ત્યારે ડોક્ટરે દર ચાર કલાકે તેણીના શરીરનું તાપમાન નોંધેલ. આ માહિતી આલેખ સ્વરૂપે રજૂ કરેલ હતી. (જે આકૃતિ 15.5 અને આકૃતિ 15.6માં બતાવેલ છે.) આપણે આ આલેખને “સમય વિરુદ્ધ તાપમાનનો આલેખ” કહી શકીએ. આકૃતિ 15.5 અને આકૃતિ 15.6 એ નીચેના કોષ્ટકમાં આપેલ માહિતીની ચિત્રાત્મક રજૂઆત છે.

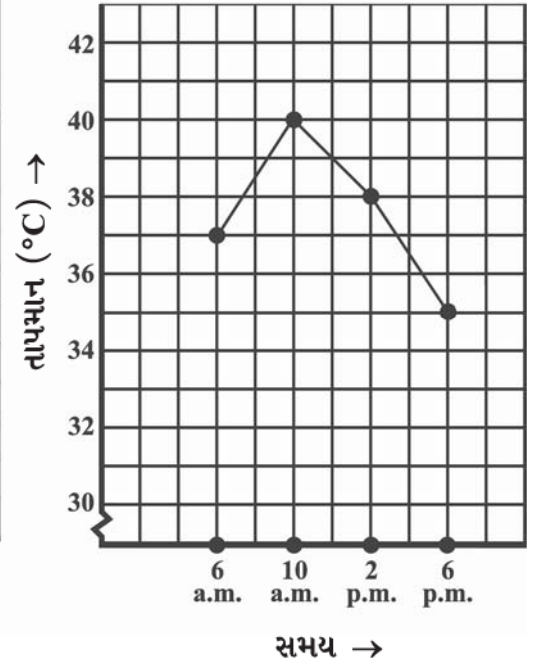
સમય	6 a.m.	10 a.m.	2 p.m.	6 p.m.
તાપમાન ($^{\circ}\text{C}$)	37	40	38	35

આલેખમાં આડી રેખાને સામાન્ય રીતે X અક્ષ કહે છે. જ્યારે તાપમાન લેવામાં આવેલ હતું તે સમય X અક્ષ પર બતાવેલ છે. વળી, આલેખમાં ઊભી રેખાને સામાન્ય રીતે Y અક્ષ કહે છે. અહીં Y અક્ષ પર શાનું માપ લેવામાં આવેલ છે ?



આકૃતિ 15.5

આપેલ માહિતીના દરેક જોડકાને આલેખ પર બિંદુ દ્વારા દર્શાવેલ છે.



આકૃતિ 15.6

માહિતીનાં જોડકાઓ દ્વારા પ્રાપ્ત બિંદુઓને રેખાખંડથી જોડતા પરિણામ સ્વરૂપે રેખીય આલેખ પ્રાપ્ત થાય છે.

આલેખ તમને શું-શું કહે છે ? અહીં આલેખમાં આપણે તાપમાનમાં થતો ફેરફાર જોઈ શકીએ છીએ. આકૃતિ 15.5 પરથી આપણે કહી શકીએ કે 10 a.m. વાગ્યે મહત્તમ તાપમાન હતું અને પછી 6 p.m. સુધી તાપમાનમાં સતત ઘટાડો થતો રહેલ. અહીં આપણે નોંધી શકીએ કે 6 a.m. થી 10 a.m.ના સમયગાળામાં તાપમાનમાં 3°C ($40^{\circ}\text{C} - 37^{\circ}\text{C}$) જેટલો વધારો થયેલ.

અહીં 8 a.m. વાગ્યે તાપમાનની કોઈ નોંધ કરવામાં આવેલ ન હતી. છતાં તમે આલેખના આધારે કહી શકશો કે ત્યારે તાપમાન 37°C થી વધારે હતું. (કેવી રીતે ? વિચારો.)

ઉદાહરણ 1 : (“દેખાવ અથવા પ્રદર્શન” આધારિત આલેખ)

આકૃતિ 15.7માં આપેલા બે આલેખ વર્ષ 2007માં જુદી-જુદી દસ મેચ દરમિયાન બે બલ્લેબાજ (બેટ્સમેન) A અને Bએ બનાવેલા રન દર્શાવે છે. આલેખનો અભ્યાસ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

- બંને અક્ષ પર શું માહિતી આપેલ છે ?
- કઈ રેખા બેટ્સમેન Aના રનનો સ્કોર બતાવે છે ?
- વર્ષ 2007માં કઈ મેચમાં બંને બેટ્સમેને સરખા રનનો સ્કોર કર્યો હતો ?
- બંને બેટ્સમેનમાંથી કોણ વિશ્વાસપાત્ર છે ? (શા માટે તમે આમ નિર્ણય કર્યો ?)

ઉકેલ :

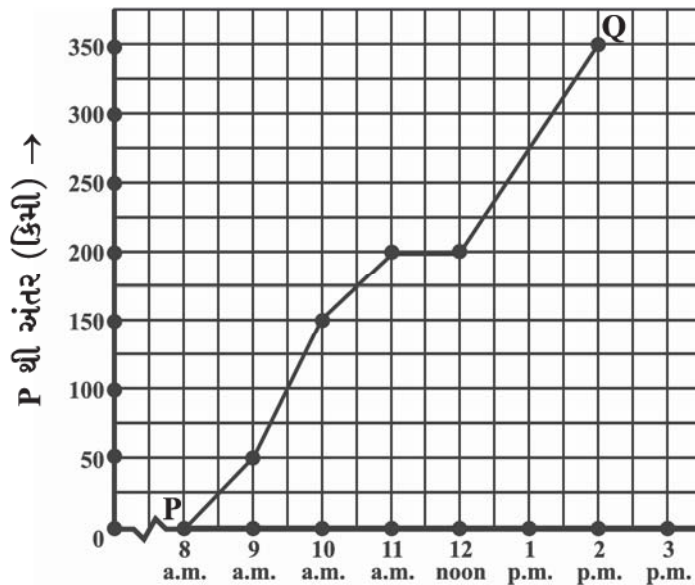
- વર્ષ 2007 દરમિયાન રમાયેલ મેચ X અક્ષ પર દર્શાવેલ છે. Y અક્ષ પર દરેક મેચમાં બંને ખેલાડીએ બનાવેલા કુલ રન દર્શાવેલ છે.
- બેટ્સમેન A દ્વારા બનાવવામાં આવેલ રનના આલેખને તૂટક રેખા વડે દર્શાવેલ છે. (આ બાબત આલેખની ઉપરની બાજુએ પહેલેથી જ દર્શાવેલ છે.)

- (iii) ચોથી મેચ દરમિયાન બંને બેટ્સમેને સમાન રન (60 રન) બનાવેલ છે. (બંને આલેખ આ બિંદુ પર ભેગા થતાં હોવાથી આપણે આમ કહી શકીએ.)
- (iv) બેટ્સમેન Aએ એક મેચમાં સૌથી વધુ રન બનાવ્યા છે. પણ ઓછા રનના ખાડા પણ આલેખમાં જોવા મળે છે. બેટ્સમેન Aની રમતમાં સાતત્ય નથી. જ્યારે બીજી તરફ બેટ્સમેન B એ કોઈ મેચમાં 40 થી ઓછા રન કર્યા નથી. આમ છતાં તેનો મહત્તમ સ્કોર 100 રન છે. જે બેટ્સમેન Aના 115 રન કરતાં ઓછા છે. ઉપરાંત ખેલાડી A બે મેચમાં શૂન્ય રન સાથે આઉટ થયેલ છે અને પાંચ મેચમાં 40 થી ઓછો સ્કોર કરેલ છે. તેને કારણે ખેલાડી Aના આલેખમાં ઘણા મોટા ઉતાર-ચઢાવ છે તેના સાપેક્ષે ખેલાડી Bની રમતમાં વધુ સાતત્ય હોવાથી તે વધુ વિશ્વાસપાત્ર બેટ્સમેન છે.

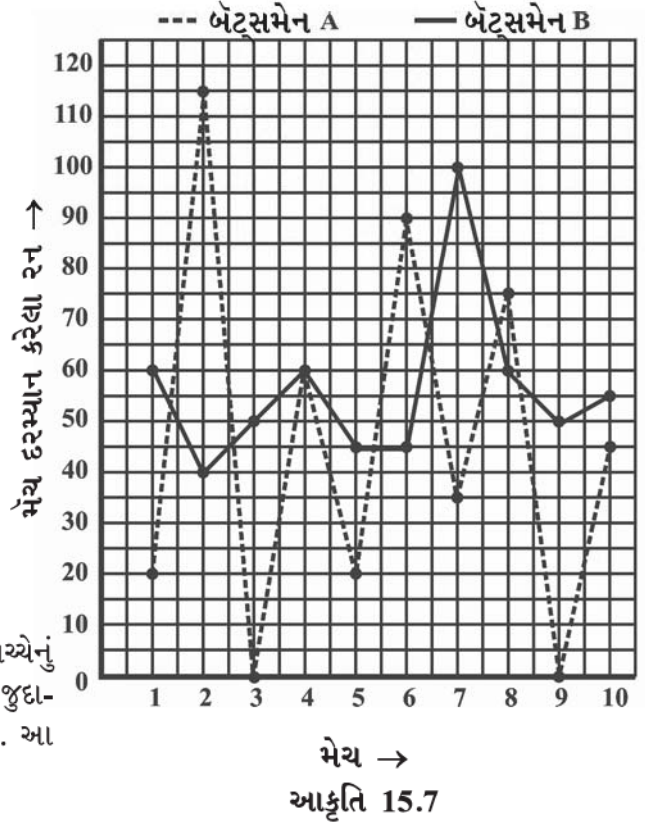
ઉદાહરણ 2 :

એક કાર શહેર P થી શહેર Q તરફ યાત્રા કરે છે. બંને શહેર વચ્ચેનું અંતર 350 કિલોમીટર છે. આકૃતિ 15.8માં આપેલ આલેખમાં જુદા-જુદા સમયે કાર અને શહેર P વચ્ચેનું અંતર આપેલ છે. આ આલેખનો અભ્યાસ કરી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો.

- બંને અક્ષો પર કઈ માહિતી આપેલ છે ?
- કારની યાત્રા ક્યારે અને ક્યાંથી શરુ થઈ ?
- પ્રથમ એક કલાકમાં કાર કેટલી દૂર ગઈ ?
- બે કલાક બાદ અને ત્રણ કલાક બાદ કાર કેટલે દૂર પહોંચી હતી ?
- શું પ્રથમ ત્રણ કલાકની ઝડપ સરખી રહી હતી ? આ તમે કેમ જાણ્યું ?
- શું કાર કેટલાક સમય માટે કોઈ સ્થળે ઊભી રહેલ ? તમારા જવાબનો તર્ક રજુ કરો.
- કાર ક્યારે શહેર Q પહોંચશે ?



સમય →
આકૃતિ 15.8



ઉકેલ :

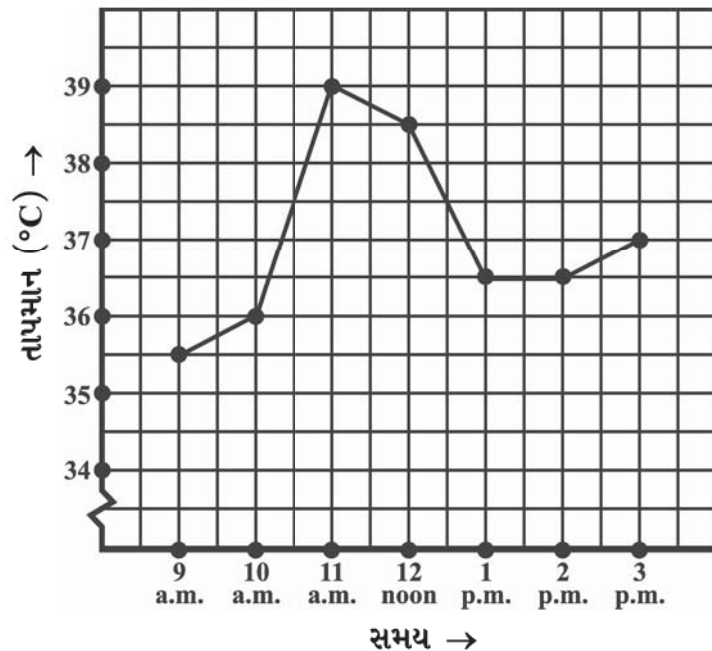
- (i) x અક્ષ પર સમય દર્શાવેલ છે. y અક્ષ પર શહેર Pથી કારનું અંતર દર્શાવેલ છે.
- (ii) કાર શહેર Pથી યાત્રાની શરૂઆત સવારે 8 વાગ્યે કરે છે.
- (iii) પ્રથમ કલાક દરમિયાન કારે 50 કિલોમીટરનું અંતર કાપેલું હતું. [આ બાબત આ મુજબ સમજી શકાય. સવારે 8 વાગ્યે શહેર Pથી યાત્રા શરૂ કરી હતી અને સવારે 9 વાગ્યે તે 50 કિમી પર પહોંચેલ હતી (આલેખમાં આ બાબત જુઓ). તેથી કહી શકાય કે પ્રથમ કલાક દરમિયાન એટલે કે 8 a.m. અને 9 a.m.ની વચ્ચે કાર દ્વારા 50 કિમીની યાત્રા થઈ હતી.]
- (iv) કાર દ્વારા કપાયેલ અંતર
 - (a) બીજા કલાકે (એટલે કે 9 a.m થી 10 a.m. દરમિયાન) 100 કિમી (150-50)
 - (b) ત્રીજા કલાકે (એટલે કે 10 a.m.થી 11 a.m. દરમિયાન) 50 કિમી (200-150)
- (v) પ્રશ્ન (iii) અને (iv)ના જવાબના આધારે આપણે કહી શકીએ કે કારની ઝડપ સમગ્ર સમય દરમિયાન સરખી રહી ન હતી (આલેખ એ પણ બતાવે છે કે ઝડપ કઈ રીતે બદલી).
- (vi) આલેખમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે કાર સવારે 11 વાગ્યે અને 12 વાગ્યે પણ P શહેરથી 200 કિમી દૂર જ હતી. આ સમય દરમિયાન કાર દ્વારા કપાયેલ અંતર આલેખની અંદર સમક્ષિતિજ રેખા દ્વારા પ્રદર્શિત થાય છે. આ બાબત પણ એ પુષ્ટિ કરે છે કે આ સમય દરમિયાન કારે યાત્રા કરેલ નથી, કાર ઊભી રહેલ હતી.
- (vii) બપોરે 2:00 વાગ્યે કાર Q શહેર પર પહોંચી હશે.



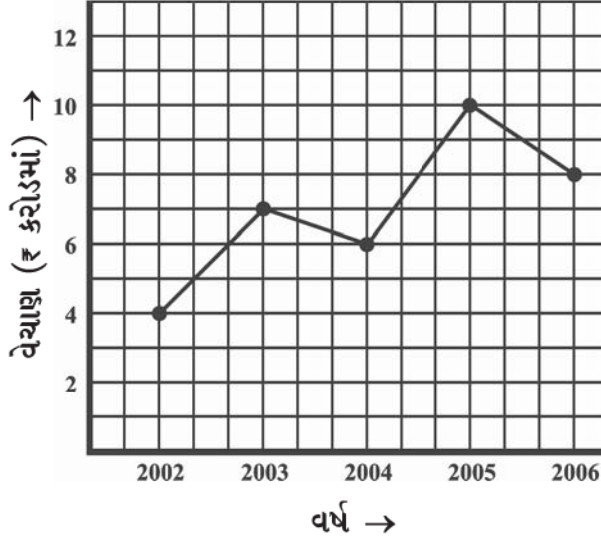
સ્વાધ્યાય 15.1

1. નીચે આપેલ આલેખ હોસ્પિટલમાં એક દર્દીનું દર કલાકે લીધેલ તાપમાન દર્શાવે છે. તેના પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

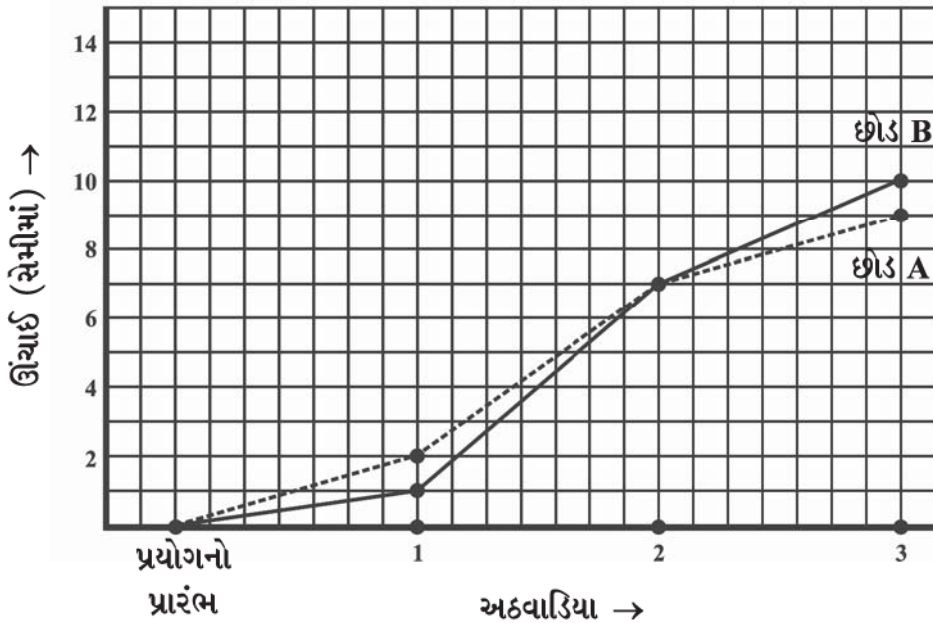
- (a) બપોરે 1 વાગ્યે દર્દીના શરીરનું તાપમાન શું હતું ?
- (b) દર્દીના શરીરનું તાપમાન 38.5°C ક્યારે હતું ?



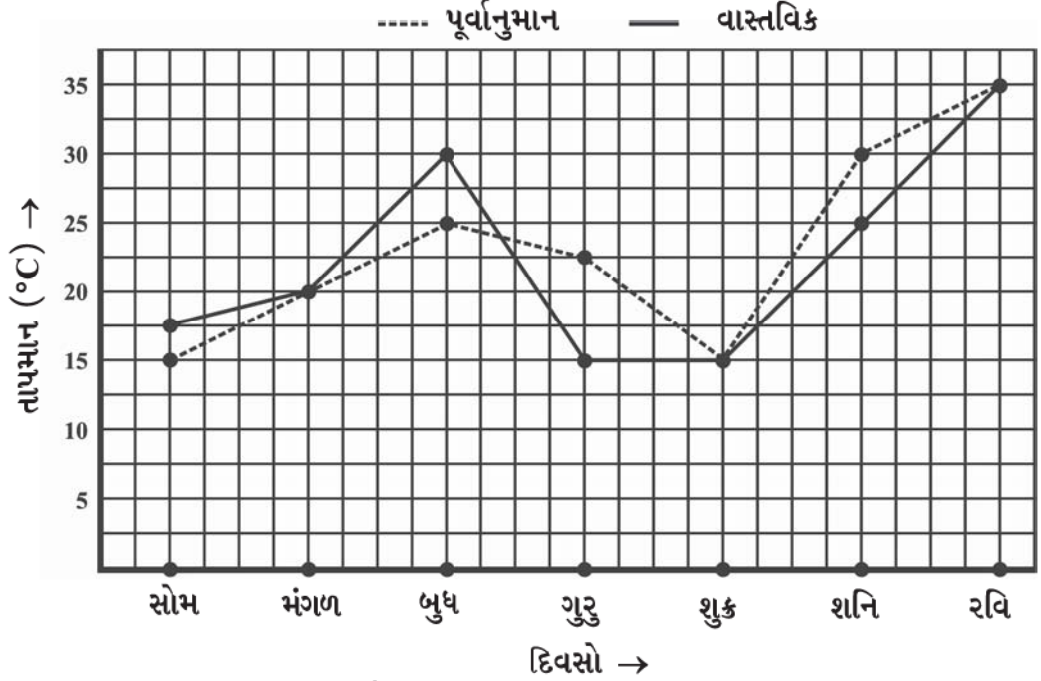
- (c) આ સમગ્ર સમય દરમિયાન દર્દીનું તાપમાન બે વખત સરખું રહ્યું હતું. આ બન્ને સમય કયા હતા ?
- (d) બપોરના 1:30 વાગ્યે દર્દીનું તાપમાન શું હતું ? આ તારણ પર તમે કઈ રીતે પહોંચ્યા ?
- (e) સમયના કયા ગાળામાં દર્દીનું તાપમાન વધી રહ્યાનું જણાતું હતું ?
2. નીચે આપેલા રેખીય આલેખમાં એક ઉત્પાદક કંપનીએ જુદા-જુદા વર્ષમાં કરેલ વેચાણ દર્શાવેલ છે. તે પરથી નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ લખો :
- (a) (i) વર્ષ 2002 અને (ii) વર્ષ 2006માં કેટલું વેચાણ થયું હતું ?
- (b) (i) વર્ષ 2003 અને (ii) વર્ષ 2005માં કેટલું વેચાણ થયું હતું ?
- (c) વર્ષ 2002 અને વર્ષ 2006નાં વેચાણ વચ્ચે કેટલો તફાવત હતો ?
- (d) કયા વર્ષના વેચાણનો તફાવત તેના અગાઉના વર્ષની સરખામણીમાં મહત્તમ હતો ?



3. વનસ્પતિશાસ્ત્રના એક પ્રયોગમાં બે છોડ A અને Bને પ્રયોગશાળાની સમાન પરિસ્થિતિમાં ઉછેરવામાં આવ્યા. તેમની ઊંચાઈને અઠવાડિયાના અંતે માપવામાં આવતી હતી. આમ, ત્રણ અઠવાડિયા સુધી પ્રયોગ કરવામાં આવેલો. પ્રયોગના પરિણામને આલેખમાં દર્શાવેલ છે.



- (a) (i) 2 સપ્તાહ પછી (ii) 3 સપ્તાહ પછી છોડ Aની ઊંચાઈ કેટલી હતી ?
 (b) (i) 2 સપ્તાહ પછી (ii) 3 સપ્તાહ પછી છોડ Bની ઊંચાઈ કેટલી હતી ?
 (c) ત્રીજા સપ્તાહ દરમિયાન છોડ Aની ઊંચાઈ કેટલી વધી ?
 (d) બીજા સપ્તાહના અંતથી ત્રીજા સપ્તાહનાં અંત સુધીમાં છોડ Bની ઊંચાઈ કેટલી વધી ?
 (e) કયા સપ્તાહમાં છોડ Aની ઊંચાઈ સૌથી વધુ વધી ?
 (f) કયા સપ્તાહમાં છોડ Bની ઊંચાઈ સૌથી ઓછી વધી ?
 (g) શું કોઈ એક સપ્તાહમાં બન્ને છોડની ઊંચાઈ સરખી હતી ? સ્પષ્ટ કરો.
4. નીચે આપેલા આલેખમાં કોઈ એક સપ્તાહના દરેક દિવસ માટે પૂર્વાનુમાન કરેલ તાપમાન અને વાસ્તવિક તાપમાન દર્શાવેલ છે.
- (a) કયા દિવસે પૂર્વાનુમાન કરેલ તાપમાન અને વાસ્તવિક તાપમાન સમાન હતા ?
 (b) સપ્તાહ દરમિયાન પૂર્વાનુમાન કરેલ મહત્તમ તાપમાન કેટલું હતું ?
 (c) સપ્તાહ દરમિયાન લઘુત્તમ વાસ્તવિક તાપમાન કેટલું હતું ?
 (d) કયા દિવસે વાસ્તવિક તાપમાન અને પૂર્વાનુમાન કરેલ તાપમાન વચ્ચેનો તફાવત સૌથી વધુ હતો ?



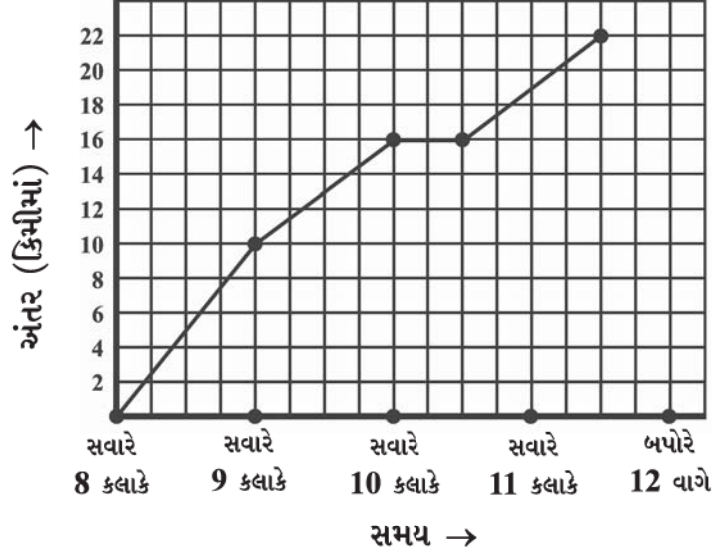
5. નીચેના કોષ્ટકના આધારે રૈખિક આલેખ દોરો :
- (a) જુદા-જુદા વર્ષોમાં કોઈ પર્વતીય શહેરમાં કેટલા દિવસો માટે હિમવર્ષા થયેલ તે અત્રે દર્શાવેલ છે.

વર્ષ	2003	2004	2005	2006
દિવસોની સંખ્યા	8	10	5	12

- (b) એક ગામની અંદર જુદા-જુદા વર્ષમાં પુરુષ અને સ્ત્રીની વસ્તી (હજારમાં) આ મુજબ છે :

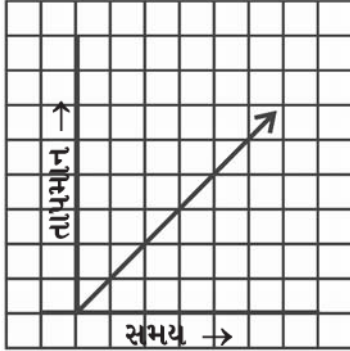
વર્ષ	2003	2004	2005	2006	2007
પુરુષોની સંખ્યા	12	12.5	13	13.2	13.5
સ્ત્રીઓની સંખ્યા	11.3	11.9	13	13.6	12.8

6. એક ટપાલી કોઈ નગરથી તે જ નગરના એક ઉપનગરમાં એક વેપારીને પાર્સલ પહોંચાડવા સાયકલ લઈને જાય છે. જુદા-જુદા સમયે નગરથી તેનું અંતર નીચેના આલેખમાં દર્શાવેલ છે.
- x અક્ષ પર સમય દર્શાવવા માટે શું પ્રમાણમાપ લેવામાં આવ્યું છે ?
 - ટપાલીએ આ મુસાફરી માટે કેટલો સમય લીધો ?
 - નગરથી વેપારીનું સ્થળ કેટલું દૂર છે ?
 - શું ટપાલી તેના માર્ગમાં ક્યાંક થોભ્યો હતો ? વિગતે સમજાવો.
 - કયા સમયગાળામાં તેણે સૌથી ઝડપી સવારી કરી ?

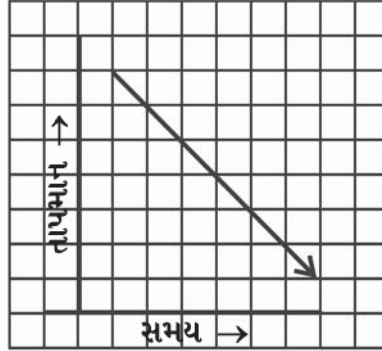


7. નીચે આપેલા આલેખોમાંથી કયા આલેખો સમય અને તાપમાન માટે શક્ય (સંભવ) છે. તમારો જવાબ સમજાવો.

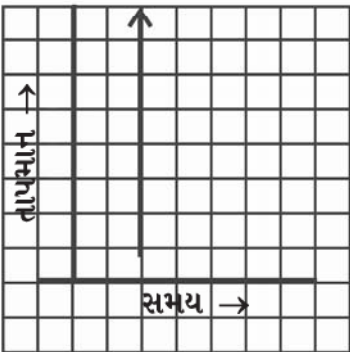
(i)



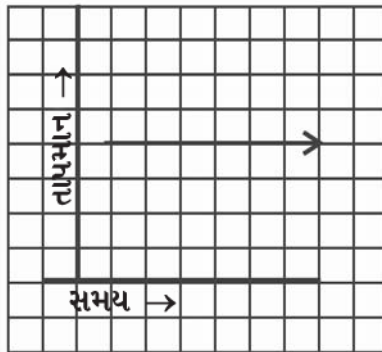
(ii)



(iii)

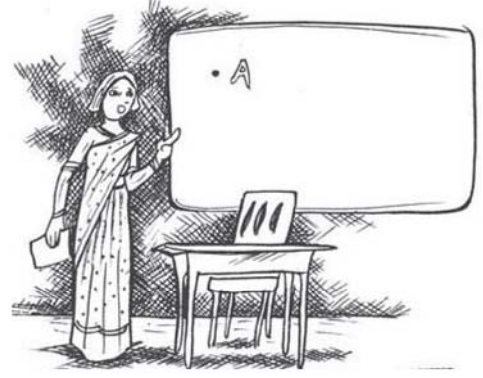


(iv)



15.2 સુરેખ આલેખ

રેખીય આલેખ કેટલાક રેખાખંડોને પરસ્પર જોડીને બનાવવામાં આવે છે. ક્યારેક આ આલેખ એક પૂરી અખંડિત રેખા સ્વરૂપે પણ હોઈ શકે છે. આવા આલેખને સુરેખ આલેખ (Linear Graph) કહેવામાં આવે છે. આ પ્રકારના આલેખ દોરવા માટે આલેખપત્ર પર કેટલાક બિંદુઓ દર્શાવવાની જરૂર પડે છે. હવે આપણે આલેખપત્ર પર સરળતાથી બિંદુઓ કઈ રીતે અંકિત કરી શકાય તે શીખીશું.



15.2.1 બિંદુની સ્થિતિ

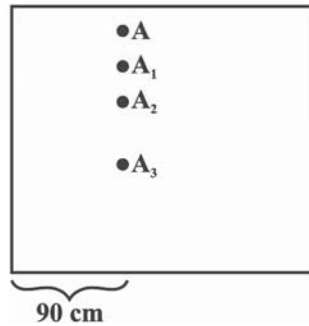
શિક્ષિકાએ બ્લેકબોર્ડ પર એક બિંદુ (Point) અંકિત કર્યું. પછી તેઓએ વિદ્યાર્થીઓને પૂછ્યું કે તેઓ આ બિંદુના સ્થાનને કઈ રીતે વર્ણવી શકે ? ત્યારે તેઓને કેટલાક જવાબ પ્રાપ્ત થયા.



આકૃતિ 15.9

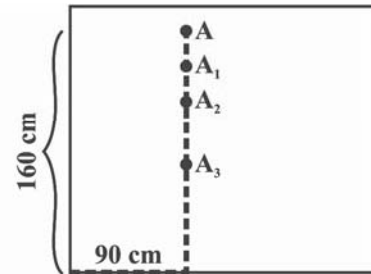
શું આમાંનું કોઈ પણ એક વિધાન આપણને બિંદુનું સ્થાન સુનિશ્ચિત (નક્કી) કરવામાં મદદરૂપ થશે ? ના. શા માટે નહીં ? આ બાબતે વિચારો.

ત્યારે જહોને એક સુઝાવ આપ્યો. તેણે બ્લેકબોર્ડની ડાબી બાજુની ધારથી બિંદુનું અંતર માપ્યું અને કહ્યું, “આ બિંદુ બ્લેકબોર્ડની ડાબી બાજુની ધારથી 90 સેમી દૂર આવેલું છે.” શું તેણે ખરેખર ઉપયોગી સુઝાવ આપ્યો તેમ તમે વિચારો છો ?



આકૃતિ 15.10

A, A_1, A_2 અને A_3 એ બધા બિંદુઓ બોર્ડની ડાબી ધારથી 90 સેમી દૂર આવેલા છે.

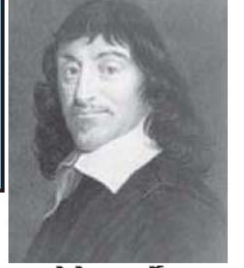


આકૃતિ 15.11

બિંદુ A એ બ્લેકબોર્ડની ડાબી ધારથી 90 સેમી અને નીચેની ધારથી 160 સેમી અંતરે આવેલ છે.

ત્યારે રેખા સુધારેલા વિધાન સાથે ઊભી થઈ અને કહ્યું, “આ બિંદુ બ્લેકબોર્ડની ડાબી ધારથી 90 સેમી અને નીચેની ધારથી 160 સેમી દૂરની સ્થિતિ પર આવેલ છે.” આમ, સમસ્યાનો પૂરેપૂરો ઉકેલ પ્રાપ્ત થયો (આકૃતિ 15.11). હવે શિક્ષિકાએ જણાવ્યું, “આ બિંદુનું સ્થાન આપણે (90, 160) લખીને દર્શાવી શકીએ.” શું બિંદુ (160, 90) એ બિંદુ (90, 160) થી ભિન્ન હશે ? આ બાબતે વિચારો.

સત્તરમી સદીમાં ગણિતશાસ્ત્રી રેને દેકાર્ટ(Rene Descartes) એ એક કીડીને છતના એક ખૂણા પાસેથી ચાલતી જોઈ અને તેમણે કોઈ પણ સમતલમાં બિંદુનું સ્થાન સુનિશ્ચિત કરવા માટેની પદ્ધતિ વિકસાવવાની શરૂઆત કરી હતી તેવું માનવામાં આવે છે. તેથી જ તેમની યાદમાં આડી અને ઊભી રેખાથી પ્રાપ્ત બે માપની મદદથી કોઈ એક બિંદુનું સ્થાન સુનિશ્ચિત કરવાની પદ્ધતિને કાર્ટેઝિયન પદ્ધતિ તરીકે ઓળખવામાં આવે છે.



રેને દેકાર્ટ
(1596-1650)

15.2.2 નિર્દેશાંક

ધારો કે તમે એક થિયેટરમાં જાઓ છો અને ટિકિટ પર દર્શાવેલ નિયત જગ્યા તમે શોધો છો. તેના માટે તમારે બે સંખ્યાની જરૂર પડશે : હરોળ નંબર અને સીટ નંબર. કોઈ એક બિંદુને સમતલમાં સુનિશ્ચિત કરવા માટેની આ આધારભૂત પદ્ધતિ છે.



આકૃતિ 15.12માં જુઓ કે બિંદુ (3, 4)ને આલેખપત્રની ડાબી ધારથી 3 એકમ અને નીચેની ધારથી 4 એકમ દૂર કેવી રીતે સુનિશ્ચિત કરવામાં આવેલ છે. આલેખપત્ર ચોરસ જાળી સ્વરૂપે હોય છે, જેથી આ સમાન ચોરસ આપણને માપનમાં ઉપયોગી થાય. આલેખપત્ર ઉપર આપણે સૌપ્રથમ આપણી જરૂરિયાત અને અનુકૂળતા મુજબ x અક્ષ અને y અક્ષ દર્શાવીએ છીએ અને પછી તેના પર બિંદુનું સ્થાન સુનિશ્ચિત કરીએ છીએ. આકૃતિ 15.12માં 3ને આપેલ બિંદુનો x નિર્દેશાંક તથા 4ને y નિર્દેશાંક (Coordinates) કહેવામાં આવે છે. (ઘણી વખત x નિર્દેશાંકને સ્થાને x યામ અને y નિર્દેશાંકને સ્થાને y યામ જેવો શબ્દ પ્રયોગ પણ થાય છે.) તેથી આપણે (3, 4)ને આપેલ બિંદુના નિર્દેશાંક કહીએ છીએ. ઊભા યામને y યામ અને આડા યામને x યામ કહેવામાં આવે છે. નિર્દેશાંક (3, 4) બતાવે છે કે ઉદ્ગમ બિંદુથી કેટલાં એકમ જમણી બાજુ જવાનું છે અને કેટલાં એકમ ઉપર જવાનું છે.

ઉદાહરણ 3 : બિંદુ (4, 3)ને આલેખ પર અંકિત કરો. શું બિંદુ (4, 3) અને બિંદુ (3, 4) બંને એક જ બિંદુ છે ?

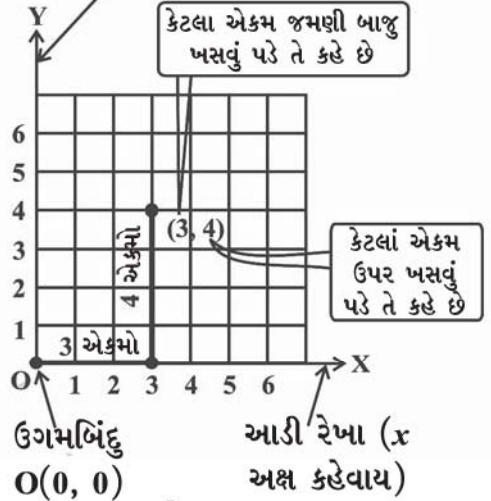
ઉકેલ : સૌ પ્રથમ x અક્ષ અને y અક્ષ દર્શાવો. (જે ખરેખર સંખ્યારેખા જ છે.) હવે ઉદ્ગમબિંદુ $O(0, 0)$ થી શરૂ કરો. 4 એકમ જમણી બાજુ ખસો. પછી 3 એકમ ઉપર તરફ જતાં તમે બિંદુ (4, 3) પર પહોંચી જશો. આકૃતિ 15.13 પરથી આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે બિંદુ (3, 4) અને બિંદુ (4, 3) બંને અલગ બિંદુ છે.

ઉદાહરણ 4 : નીચે આપેલા નિર્દેશાંકને અનુરૂપ અક્ષર આકૃતિ 15.14માંથી પસંદ કરો.

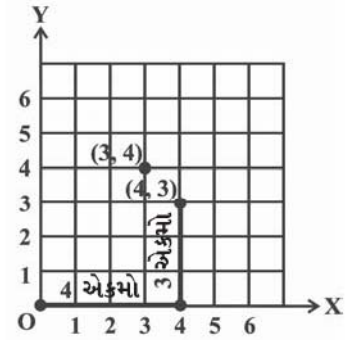
- (i) (2, 1) (ii) (0, 5)
- (iii) (2, 0) (iv) બિંદુ Aના નિર્દેશાંક લખો.
- (v) બિંદુ Fના નિર્દેશાંક લખો.

ઊભી રેખા (y અક્ષ)

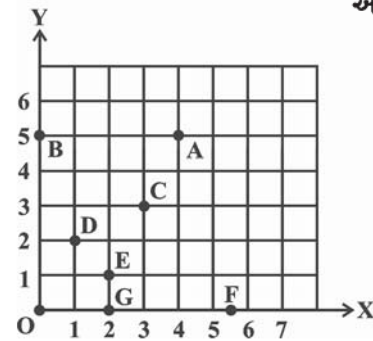
કહેવાય



આકૃતિ 15.12



આકૃતિ 15.13



આકૃતિ 15.14

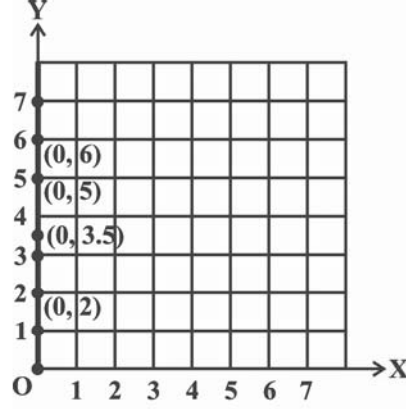
ઉકેલ :

- (i) બિંદુ E એ (2, 1) છે (બિંદુ D એ (2, 1) નથી !).
- (ii) બિંદુ B એ (0, 5) છે (શા માટે ? તમારા મિત્ર સાથે ચર્ચા કરો).
- (iii) બિંદુ G એ (2, 0) છે.
- (iv) બિંદુ Aના નિર્દેશાંક (4, 5) છે.
- (v) બિંદુ Fના નિર્દેશાંક (5.5, 0) છે.

ઉદાહરણ 5 : નીચે આપેલાં બિંદુઓને આલેખપત્ર પર અંકિત કરો અને ખાતરી કરી જુઓ કે તેઓ બધાં એક જ રેખા પર આવેલાં છે ? જો તેઓ એક જ રેખા પર રહેલાં હોય તો તે રેખાનું નામ આપો.

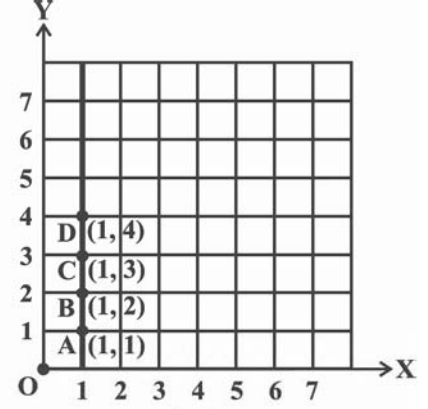
- (i) (0, 2), (0, 5), (0, 6), (0, 3.5)
- (ii) A (1, 1), B (1, 2), C (1, 3), D (1, 4)
- (iii) K (1, 3), L (2, 3), M (3, 3), N (4, 3)
- (iv) W (2, 6), X (3, 5), Y (5, 3), Z (6, 2)

ઉકેલ :



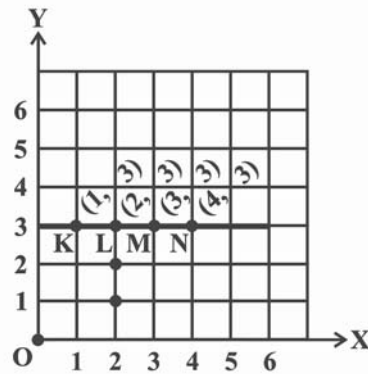
(i)

આ બધા બિંદુઓ એક જ રેખા પર આવેલાં છે, જે y અક્ષ છે.



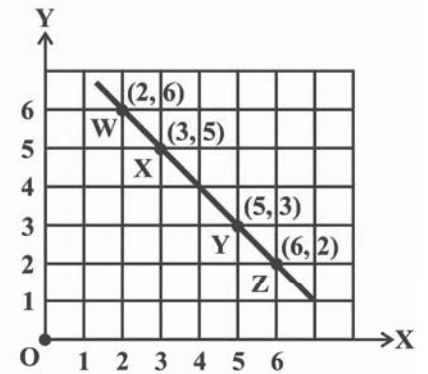
(ii)

આ બધા બિંદુઓ એક જ રેખા પર આવેલાં છે. તે રેખા AD છે. (તમે આ રેખાનું નામકરણ બીજી રીતે પણ કરી શકો) આ રેખા y અક્ષને સમાંતર છે.



(iii)

આ બધા બિંદુઓ એક જ રેખા પર આવેલાં છે. આપણે તેને રેખા KL અથવા રેખા KM અથવા રેખા MN વગેરેથી ઓળખી શકીએ. તે x અક્ષને સમાંતર છે.



(iv)

આ બધા બિંદુઓ એક જ રેખા પર આવેલાં છે. આપણે તેને XY અથવા WY અથવા YZ વગેરેથી નામાંકિત કરી શકીએ.

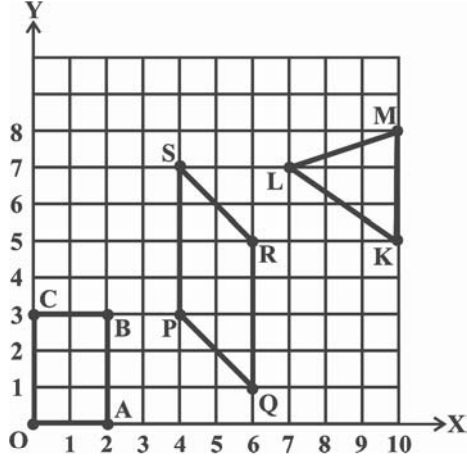
અહીં એ નોંધો કે, ઉપરોક્ત તમામ કિસ્સામાં આપેલ બિંદુઓને આલેખપત્ર પર દર્શાવીને તેમને જોડતા એક સીધી રેખા સ્વરૂપે પ્રાપ્ત થાય છે. આ પ્રકારના આલેખને રેખિક આલેખ કહેવામાં આવે છે.

આકૃતિ 15.5

સ્વાધ્યાય 15.2



- નીચેના બિંદુઓને આલેખપત્ર પર અંકિત કરો અને ચકાસણી કરો કે તે બધા એક જ રેખા પર આવેલા છે ?
 (a) A (4, 0), B (4, 2), C (4, 6), D (4, 2.5)
 (b) P (1, 1), Q (2, 2), R (3, 3), S (4, 4)
 (c) K (2, 3), L (5, 3), M (5, 5), N (2, 5)
- બિંદુઓ (2, 3) અને (3, 2)માંથી પસાર થતી રેખા દોરો. આ રેખા x અક્ષ અને y અક્ષને જે બિંદુમાં છેદે તે બિંદુના નિર્દેશાંક દર્શાવો.
- આલેખમાં દર્શાવેલ દરેક આકૃતિઓના શિરોબિંદુનાં નિર્દેશાંક લખો.
- નીચે આપેલાં વિધાનો ખરા છે કે ખોટા તે જણાવો.
 ખોટાં વિધાનો સુધારીને લખો.
 (i) જે બિંદુનો x નિર્દેશાંક શૂન્ય હોય અને y નિર્દેશાંક શૂન્યેતર હોય તે બિંદુ y અક્ષ પર આવેલ હોય છે.
 (ii) જે બિંદુનો y નિર્દેશાંક શૂન્ય હોય અને x નિર્દેશાંક 5 હોય તે બિંદુ y અક્ષ પર આવેલ હોય છે.
 (iii) ઉદ્ગમબિંદુના નિર્દેશાંક (0, 0) હોય છે.



15.3 આલેખના કેટલાક ઉપયોગ

દૈનિક જીવનમાં તમે કદાચ જોયું હશે કે સુવિધાઓનો તમે જેટલો વધારે ઉપયોગ કરો છો તેની કિંમત પણ તમારે વધારે ચૂકવવી પડે છે. ઉદાહરણ તરીકે તમે જો વીજળીનો વધુ ઉપયોગ કરશો તો વીજળીનું બિલ પણ વધારે જ ચૂકવવું પડશે અને જો તમે વીજળી ઓછી વાપરશો તો વીજળીનો ખર્ચ પણ ઘણો ઓછો આવશે. અહીં આ ઉદાહરણમાં તમે જોઈ શકો છો કે એક રાશિ બીજી રાશિને અસર કરે છે. વીજળીના બિલની રકમને વીજળીના વપરાશનો જથ્થો અસર કરે છે. અહીં આપણે કહી શકીએ કે વીજળીનો જથ્થો એ એક સ્વતંત્ર ચલ છે (અથવા કેટલીક વખત અંકુશિત ચલ છે) અને વીજળીનાં બિલની રકમ પરતંત્ર ચલ છે. આવા ચલો વચ્ચેનો સંબંધ આપણે આલેખ દ્વારા દર્શાવી શકીએ.

વિચારો, ચર્ચા કરો અને લખો

એક કારની પેટ્રોલની ટાંકી ભરવા માટે તમારે કેટલી રકમ ચૂકવવી પડશે ? તેનો આધાર તમે કેટલાં લિટર પેટ્રોલ ખરીદો છો તેના પર રહેલો છે. જે અહીં સ્વતંત્ર ચલ છે. આ બાબતે વિચારો.

ઉદાહરણ 6 : (માત્રા અને મૂલ્ય)

નીચેના કોષ્ટકમાં પેટ્રોલની માત્રા અને તેની કિંમત આપવામાં આવી છે :

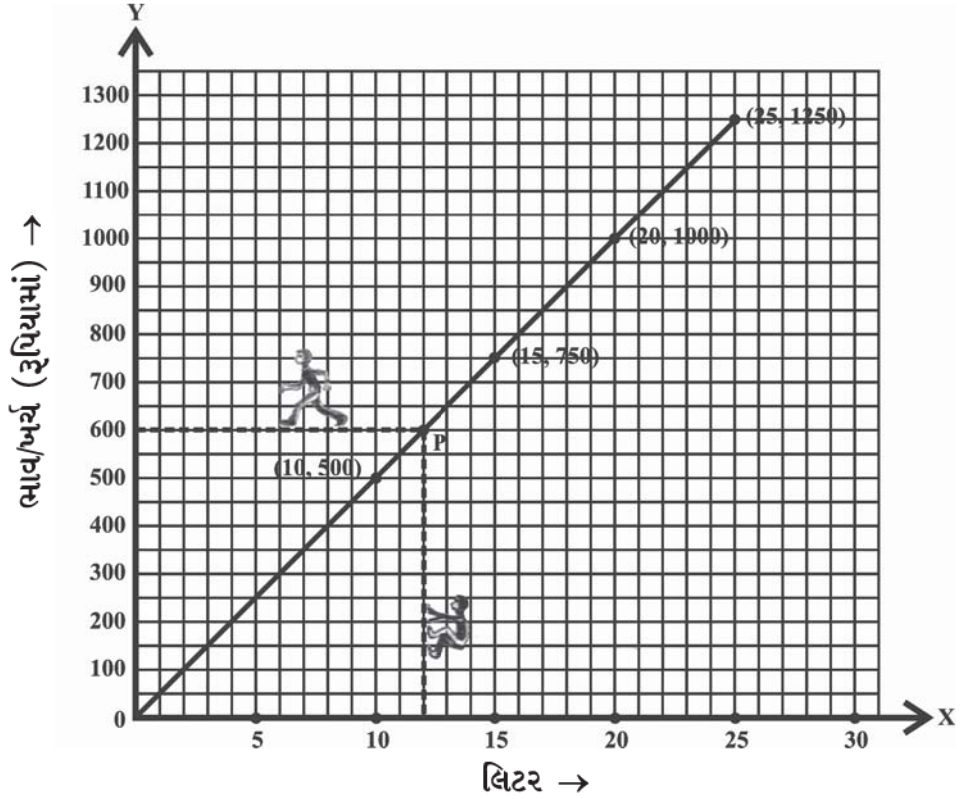
પેટ્રોલની માત્રા (લિટરમાં)	10	15	20	25
પેટ્રોલનું મૂલ્ય (રૂપિયામાં)	500	750	1000	1250

આ આંકડાઓ દર્શાવવા આલેખ દોરો.



ઉકેલ :

(i) આકૃતિ 15.16માં દર્શાવ્યા મુજબ સૌ પ્રથમ આપણે અનુકૂળતા મુજબ પ્રમાણમાપ લઈશું.



આકૃતિ 15.16

- (ii) સમક્ષિતિજ અક્ષ (x અક્ષ) પર પેટ્રોલની માત્રા દર્શાવીશું.
- (iii) y અક્ષ પર પેટ્રોલની કિંમત દર્શાવીશું.
- (iv) બિંદુઓ (10, 500), (15, 750), (20, 1000) અને (25, 1250)ને આલેખ પર અંકિત કરો.
- (v) અંકિત કરેલા આ બિંદુઓને જોડો.

આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે આ આલેખ રેખા સ્વરૂપે છે. (તે એક રેખિક આલેખ છે.) આ આલેખ ઉદ્ગમબિંદુમાંથી શા માટે પસાર થાય છે ? આ બાબતે વિચારો.

આ આલેખ આપણને કેટલીક બાબતો(તથ્યો)નાં અનુમાન કરવામાં મદદરૂપ થઈ શકે છે. ધારો કે આપણે 12 લિટર પેટ્રોલ ખરીદવા માટે કેટલી રકમ જોઈશે તે જાણવા ઇચ્છીએ છીએ. આ માટે આપણે x અક્ષ પર 12 લિટર પાસેથી ઉર્ધ્વ દિશામાં જઈશું જેથી આલેખ પરના P બિંદુ પર પહોંચીશું. ત્યાંથી y અક્ષ તરફ સમક્ષિતિજ (સીધી) દિશામાં જતા આપણે y અક્ષ પર પહોંચીશું, જ્યાં ₹ 600 મૂલ્ય દર્શાવે છે. આથી આપણે આ રીતે આલેખનો ઉપયોગ કરીને 12 લિટર પેટ્રોલ માટે આપણે ₹ 600 ચૂકવવા પડ્યા હશે તેનું અનુમાન કરી શકીએ છીએ.

આ આલેખ એક એવી પરિસ્થિતિ દર્શાવે છે કે જેમાં બે માત્રા એકબીજાને સમયલનમાં છે. (કઈ રીતે ? વિચારો) આવી પરિસ્થિતિમાં આલેખ હંમેશાં રેખિક હોય છે.



પ્રયત્ન કરો

ઉપરનાં ઉદાહરણનાં આલેખનો ઉપયોગ કરીને જણાવો કે ₹ 800માં કેટલી માત્રામાં પેટ્રોલ ખરીદી શકાય ?

ઉદાહરણ 7 : (મુદ્દલ અને સાદું વ્યાજ)

એક બેંક વરિષ્ઠ નાગરિકોને તેમનાં રોકાણ પર 10% સાદું વ્યાજ આપે છે. જમા કરાવેલ મુદ્દલ અને તેના પર પ્રાપ્ત થનાર સાદા વ્યાજના સંબંધને દર્શાવવા એક આલેખ દોરો. પ્રાપ્ત આલેખના આધારે નીચેની બાબતો શોધો.

(a) ₹ 250નાં રોકાણ પર પ્રાપ્ત થનાર વાર્ષિક વ્યાજ શોધો.

(b) ₹ 70 વાર્ષિક સાદું વ્યાજ મેળવવા માટે કેટલી મુદ્દલનું રોકાણ કરવું પડશે ?

ઉકેલ :

જમા રાશિ	એક વર્ષ માટે સાદું વ્યાજ
₹ 100	₹ $\frac{100 \times 1 \times 10}{100} = ₹ 10$
₹ 200	₹ $\frac{200 \times 1 \times 10}{100} = ₹ 20$
₹ 300	₹ $\frac{300 \times 1 \times 10}{100} = ₹ 30$
₹ 500	₹ $\frac{500 \times 1 \times 10}{100} = ₹ 50$
₹ 1000	₹ 100

આલેખ દોરવા માટેનાં પગલાં :

1. અંકિત કરવાની થતી જમા રાશિ માટે સાદા વ્યાજની ગણતરી કરો.
2. x અક્ષ અને y અક્ષ પર લેવાની થતી રાશિઓ નક્કી કરો.
3. યોગ્ય પ્રમાણમાપ પસંદ કરો.
4. બિંદુઓ અંકિત કરો.
5. બિંદુઓને જોડો.

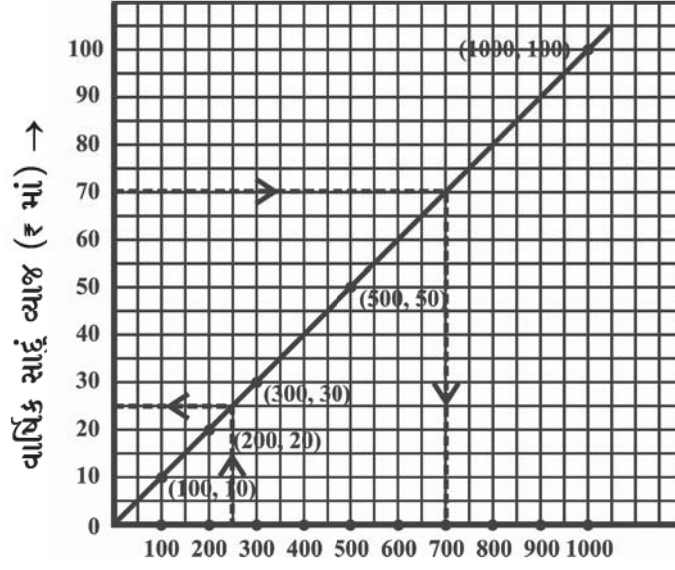
આપણને નીચે મુજબની કિંમત ધરાવતું કોષ્ટક પ્રાપ્ત થશે.

જમા રાશિ (₹માં)	100	200	300	500	1000
વાર્ષિક સાદું વ્યાજ (₹માં)	10	20	30	50	100

- (i) પ્રમાણમાપ : 1 એકમ = ₹ 100 (x અક્ષ માટે)
1 એકમ = ₹ 10 (y અક્ષ માટે)
- (ii) જમા કરાવેલ મુદ્દલને x અક્ષ પર દર્શાવો.
- (iii) પ્રાપ્ત થતા સાદા વ્યાજને y અક્ષ પર દર્શાવો.
- (iv) (100, 10), (200, 20), (300, 30), (500, 50) વગેરે બિંદુઓને આલેખપત્ર પર અંકિત કરો.
- (v) બિંદુઓને જોડો. આકૃતિ 15.17માં દર્શાવ્યા મુજબનો આલેખ મળશે, જે રેખા સ્વરૂપે છે.
 - (a) x અક્ષ પર ₹ 250 મુદ્દલને અનુરૂપ y અક્ષ પર ₹ 25 સાદું વ્યાજ પ્રાપ્ત થાય છે.
 - (b) y અક્ષ પર ₹ 70 સાદું વ્યાજ મેળવવા આનુષંગિક x અક્ષ પર ₹ 700ની રકમનું મુદ્દલ હોવું જોઈએ.

પ્રયત્ન કરો

શું ઉદાહરણ 7 એ સમયલનનો કિસ્સો છે ?



જમા રાશિ (₹ માં) →

આકૃતિ 15.17

ઉદાહરણ 8 : (સમય અને અંતર)

અજીત 30 કિમી/કલાકની ઝડપે સતત સ્કૂટર ચલાવી શકે છે. આ પરિસ્થિતિ માટે સમય → અંતરનો આલેખ દોરો. આ આલેખનો ઉપયોગ કરી નીચેની બાબતો શોધો :

(i) 75 કિમી અંતર કાપવા માટે અજીત કેટલો સમય લેશે ? (ii) $3\frac{1}{2}$ કલાકમાં અજીતે કાપેલું અંતર શોધો.

ઉકેલ :

મુસાફરીના કલાક	કાપેલું અંતર
1 કલાક	30 કિમી
2 કલાક	2×30 કિમી = 60 કિમી
3 કલાક	3×30 કિમી = 90 કિમી
4 કલાક	4×30 કિમી = 120 કિમી આવી જ રીતે આગળ

આ રીતે આપણને માહિતીનું કોષ્ટક મળશે.

સમય (કલાકમાં)	1	2	3	4
કાપેલ અંતર (કિમીમાં)	30	60	90	120

(i) પ્રમાણમાપ : (આકૃતિ 15.18)

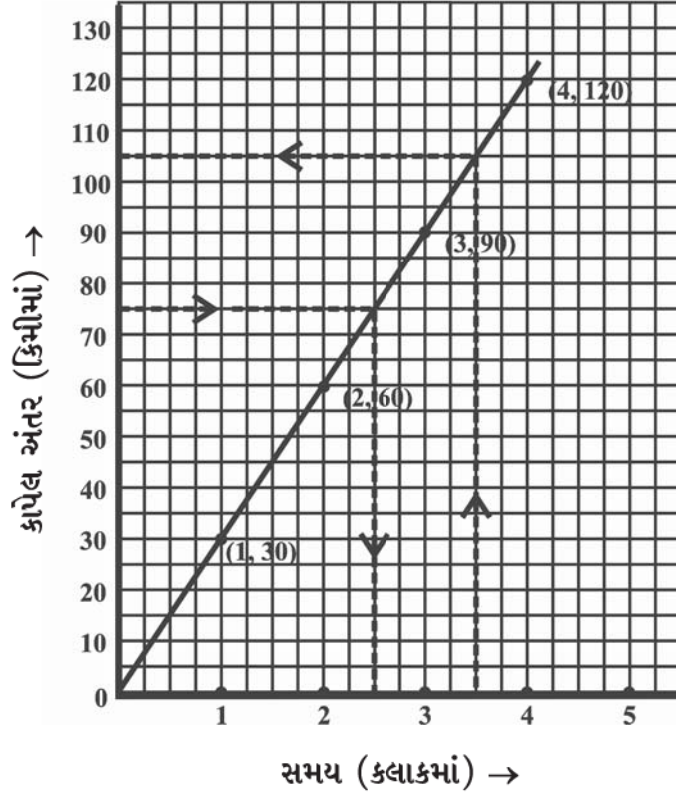
x અક્ષ માટે : 2 એકમ = 1 કલાક

y અક્ષ માટે : 1 એકમ = 10 કિમી

(ii) x અક્ષ પર સમય દર્શાવશું.

(iii) y અક્ષ પર અંતર દર્શાવશું.

(iv) (1, 30), (2, 60), (3, 90), (4, 120) બિંદુઓને આલેખમાં અંકિત કરો.



આકૃતિ 15.18

- (v) ઉપરોક્ત બિંદુઓને જોડતા આપણને રૈખિક આલેખ પ્રાપ્ત થશે.
- (a) y અક્ષ પર 75 કિમી અંતર લેતાં તેને અનુરૂપ x અક્ષ પર 2.5 કલાક સમય પ્રાપ્ત થાય છે. આમ, 75 કિમી અંતર કાપવા માટે 2.5 કલાકનો સમય લાગશે.
- (b) x અક્ષ પર $3\frac{1}{2}$ કલાક લેતા તેને અનુરૂપ y અક્ષ પર 105 કિમી અંતર પ્રાપ્ત થશે. આમ, $3\frac{1}{2}$ કલાકમાં અજીત 105 કિમી અંતર કાપશે.

સ્વાધ્યાય 15.3

1. યોગ્ય પ્રમાણમાપનો ઉપયોગ કરી નીચેના કોષ્ટકના આધારે આલેખ દોરો.

(a) સફરજનના ભાવ (કિંમત)

સફરજનની સંખ્યા	1	2	3	4	5
કિંમત (₹ માં)	5	10	15	20	25

(b) કાર દ્વારા કપાયેલ અંતર

સમય (કલાકમાં)	6 a.m.	7 a.m.	8 a.m.	9 a.m.
અંતર (કિમીમાં)	40	80	120	160



- (i) 7:30 a.m. થી 8:00 a.m. દરમિયાન કારે કેટલું અંતર કાપ્યું હશે ?
(ii) કાર દ્વારા યાત્રા શરૂ કર્યાના સ્થળથી 100 કિમી દૂર પહોંચવા માટે કેટલો સમય લાગ્યો હશે ?

(c) એક વર્ષ માટે જમા કરાવેલ મુદ્દલ માટે વ્યાજ આ મુજબ છે :

જમા રકમ (રૂમાં)	1000	2000	3000	4000	5000
સાદું વ્યાજ (રૂમાં)	80	160	240	320	400

- (i) શું આ આલેખ ઉદ્ગમબિંદુમાંથી પસાર થશે ?
(ii) આલેખનો ઉપયોગ કરી ₹ 2500નું વાર્ષિક સાદું વ્યાજ મેળવો.
(iii) દર વર્ષે ₹ 280 વ્યાજ મેળવવા માટે કેટલી રકમ મુદ્દલ તરીકે જમા કરાવવી પડશે ?

2. નીચેના કોષ્ટક માટે આલેખ દોરો :

(i)

ચોરસની બાજુ (સેમીમાં)	2	3	3.5	5	6
પરિમિતિ (સેમીમાં)	8	12	14	20	24

શું આ રૈખિક આલેખ છે ?

(ii)

ચોરસની બાજુ (સેમીમાં)	2	3	4	5	6
ક્ષેત્રફળ (ચોરસ સેમીમાં)	4	9	16	25	36

શું આ રૈખિક આલેખ છે ?

આપણે શું ચર્ચા કરી ?

- માહિતીની રજૂઆત આલેખ સ્વરૂપે કરવાથી તે સરળતાથી સમજાય છે.
- (i) લંબ આલેખ જુદા-જુદા વિભાગોની વચ્ચે તુલના કરવા માટે ઉપયોગી છે.
(ii) વર્તુળ આલેખ એક સંપૂર્ણ ભાગના જુદા-જુદા ભાગોની તુલના કરવા માટે ઉપયોગી છે.
(iii) હિસ્ટોગ્રામ એ સતત વર્ગો સ્વરૂપની માહિતી માટેનો સ્તંભ આલેખ છે.
- સમયના નિશ્ચિત ગાળામાં પરિવર્તન પામતી માહિતીને દર્શાવવા રેખા આલેખનો ઉપયોગ થાય છે.
- જ્યારે રેખા આલેખ એક અખંડિત/પૂર્ણ રેખા સ્વરૂપે મળે છે ત્યારે તેને રૈખિક આલેખ કહેવામાં આવે છે.
- આલેખપત્ર પર કોઈ પણ બિંદુની સ્થિતિ સુનિશ્ચિત કરવા માટે આપણને x નિર્દેશાંક અને y નિર્દેશાંકની જરૂર પડે.
- એક સ્વતંત્ર ચલ અને પરતંત્ર ચલ વચ્ચેનો સંબંધ આલેખ દ્વારા પ્રદર્શિત કરી શકાય.