

Geometric Progreassion in Nature

Bacteria such as *Shewanella Oneidensis* Multiply by doubling their population in size after as little as 40 minutes. A geometric progression such as this, where each number is double the previous number produces a rapid increase in the population in a very short time.

9

ગુણોત્તર-શ્રેણી (Geometric Progression)

વિષયવસ્તુ :

- 9.1 અર્થ
- 9.2 n મું પદ મેળવવાનું સૂત્ર
- 9.3 શ્રેણીનો અર્થ
- 9.4 ત્રણા કમિક પદો

9.1 અર્થ (Meaning)

શ્રેણી એટલે કોઈ ચોક્કસ નિયમને અનુસરતી સંખ્યાઓની ગોઠવણી. શ્રેણીના અલગ-અલગ પ્રકાર હોય છે. આપણે સમાંતર શ્રેણીનો અભ્યાસ કરી ચૂક્યા છીએ. જે શ્રેણીમાં કોઈ પણ બે કમિક પદોનો તફાવત સરખો અને શુંચેતર હોય તેને સમાંતર શ્રેણી કહે છે. દા.ત., 3, 6, 9, 12,

હવે આપણે બીજી શ્રેણી ગુણોત્તર-શ્રેણી વિશે અભ્યાસ કરીશું.

ધારો કે આપણે 3, 6, 12, 24, ... શ્રેણી લઈએ.

આ શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 3 છે. જો પ્રથમ પદ 3 ને 2 વડે ગુણીએ તો આપણને $3 \times 2 = 6$ મળે છે જે શ્રેણીનું બીજું પદ છે. જો બીજા પદ 6 ને 2 વડે ગુણીએ તો આપણને $6 \times 2 = 12$ મળે છે જે શ્રેણીનું ત્રીજું પદ છે. બીજા શબ્દોમાં આ શ્રેણીના કમિક પદોથી મળતા નીચેના ગુણોત્તરો અચલ રહે છે :

$$\frac{\text{બીજું પદ}}{\text{પ્રથમ પદ}} = 2, \frac{\text{ત્રીજું પદ}}{\text{બીજું પદ}} = 2, \frac{\text{ચોથું પદ}}{\text{ત્રીજું પદ}} = 2, \text{ આ જ રીતે આગળ}$$

બીજી શ્રેણી 4, -12, 36, -108, ... લઈએ.

આ શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 4 છે. જો પ્રથમ પદ 4 ને (-3) વડે ગુણીએ તો આપણને $4 \times (-3) = -12$ મળે છે, જે શ્રેણીનું બીજું પદ છે. જો બીજા પદ (-12) ને (-3) વડે ગુણીએ તો આપણને $(-12) \times (-3) = 36$ મળે છે, જે શ્રેણીનું ત્રીજું પદ છે. બીજા શબ્દોમાં આ શ્રેણીના કમિક પદોથી મળતા નીચેના ગુણોત્તરો અચલ રહે છે :

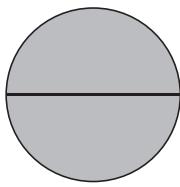
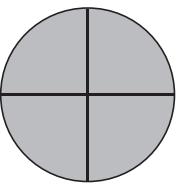
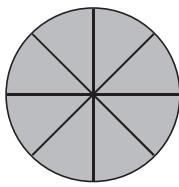
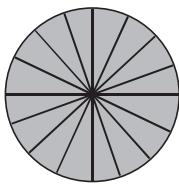
$$\frac{\text{બીજું પદ}}{\text{પ્રથમ પદ}} = -3, \quad \frac{\text{ત્રીજું પદ}}{\text{બીજું પદ}} = -3, \quad \frac{\text{ચોથું પદ}}{\text{ત્રીજું પદ}} = -3, \text{ આ જ રીતે આગળ}$$

હજુ એક શ્રેણી $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ લઈએ.

આ શ્રેણીનું પ્રથમ પદ 2 છે. જો પ્રથમ પદ 2 ને $\frac{1}{2}$ વડે ગુણીએ તો આપણને $2 \times \frac{1}{2} = 1$ મળે છે, જે શ્રેણીનું બીજું પદ છે. જો બીજા પદ 1 ને $\frac{1}{2}$ વડે ગુણીએ તો આપણને $1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ મળે છે, જે શ્રેણીનું ત્રીજું પદ છે. બીજા શબ્દોમાં આ શ્રેણીનાં કમિક પદોથી મળતાં નીચેના ગુણોત્તરો અચલ રહે છે :

$$\frac{\text{બીજું પદ}}{\text{પ્રથમ પદ}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\text{ત્રીજું પદ}}{\text{બીજું પદ}} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\text{ચોથું પદ}}{\text{ત્રીજું પદ}} = \frac{1}{2}, \text{ આ જ રીતે આગળ}$$

ઉપર તપાસેલ ત્રાણ શ્રેણીઓ પૈકીની દરેક શ્રેણીમાં જોઈ શકાય છે કે $n \geq 1$ માટે શ્રેણીનાં $(n+1)$ મા પદ અને n મા પદના ગુણોત્તર શૂન્યેતર અચલ છે. આવી શ્રેણીને ગુણોત્તર-શ્રેણી કહેવાય.

				
વાસની સંખ્યા	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$
વર્તુળના ભાગોની સંખ્યા	$2 = 2^1$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$16 = 2^4$

ઉપર્યુક્ત આકૃતિઓમાં વાસની સંખ્યા અનુક્રમે $1, 2, 4, 8, \dots$ છે, જે ગુણોત્તર-શ્રેણી દર્શાવે છે.

તેમજ વર્તુળના ભાગોની સંખ્યા અનુક્રમે : $2, 4, 8, 16, \dots$ છે, તે પણ ગુણોત્તર-શ્રેણી દર્શાવે છે.

ગુણોત્તર-શ્રેણીના કેટલાક વ્યવહારિક ઉદાહરણો

ધારો કે એક ધનિક વ્યક્તિની સંપત્તિ આશરે 200 કરોડ રૂપિયા છે અને તે દર 5 વર્ષે બમણી થાય છે.

હાલની સંપત્તિ 200 કરોડ છે અને પ્રથમ 5 વર્ષના અંતે બમણી થાય છે તેથી પ્રથમ 5 વર્ષ બાદ તે સંપત્તિ $200 \times 2 = 400$ કરોડ રૂપિયા થશે. હવે બીજાં 5 વર્ષના અંતે સંપત્તિ ફરીથી બમણી થતાં તે $400 \times 2 = 800$ કરોડ રૂપિયા થશે. આમ તેની સંપત્તિ અનુક્રમે 200, 400, 800, ... (કરોડમાં) થશે, જે 2 ગુણોત્તરવાળી ગુણોત્તર-શ્રેણી બનાવે છે.





એક વક્તિ ₹ 10,000 બેન્કમાં જમા કરાવે છે. બેન્ક તેને તેના રોકાશ પર વાર્ષિક 10 % ચકવૃદ્ધિ વાજ આપે છે. એટલે કે તેની જમા રાશિ દર વર્ષે 10 ટકાના દરે વધશે.

બેન્કમાં જમા કરાવેલ રકમ ₹ 10,000 છે અને બેન્ક 10 % વાજ આપે છે તેથી એક વર્ષ બાદ $10,000 + 1000 = ₹ 11,000$ થશે. હવે બેન્ક ₹ 11,000 ઉપર 10 % વાજ આપશે તેથી બીજા વર્ષના અંતે તે $11,000 + 1100 = ₹ 12,100$ થશે. તે જ રીતે ત્રીજા વર્ષના અંતે $12,100 + 1210 = ₹ 13,310$ થશે. આમ, $10000, 11000, 12100, 13310, \dots$ જે 1.1 ગુણોત્તર વાળી ગુણોત્તર-શ્રેણી બનાવે છે.

કોઈ એક જગ્યાએ કૂડ ઓઈલનો 50 લાખ મેટ્રિક ટન જથ્થો છે અને તે દર વર્ષે 10 % ઘટે છે.

હાલનો કૂડ ઓઈલનો જથ્થો 50 લાખ મેટ્રિક ટન છે. કૂડ ઓઈલનો જથ્થો દર વર્ષે 10 % ઘટે છે તેથી પ્રથમ વર્ષના અંતે $50,000,000 - 50,000,000 (50,000,000 \text{ ના } 10\%) = 45,000,000$ મેટ્રિક ટન થશે. બીજા વર્ષના અંતે $45,000,000 - 45,000,000 (45,000,000 \text{ ના } 10\%) = 40,500,000$ મેટ્રિક ટન થશે. આમ, $50,000,000, 45,000,000, 40,500,000, \dots$ જે 0.9 ગુણોત્તરવાળી ગુણોત્તર શ્રેણી બનાવે છે.



9.2 n મું પદ મેળવવાનું સૂત્ર (Formula for obtaining n^{th} term)

જો a અને r શુન્યેતર વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય, તો ધનપૂર્ણક $n \geq 1$ માટે જે શ્રેણીનું n મું પદ $T_n = ar^{n-1}$ હોય તે શ્રેણીને ગુણોત્તર-શ્રેણી કહે છે. a ને શ્રેણીનું પ્રથમ પદ અને r ને શ્રેણીનો સામાન્ય ગુણોત્તર (common ratio) કહે છે.

આમ, ગુણોત્તર-શ્રેણીનાં કમિક પદો a, ar, ar^2, ar^3, \dots છે અને n મા પદ $T_n = ar^{n-1}$ ને ગુણોત્તર-શ્રેણીનું સામાન્ય પદ કહે છે.

ઉદાહરણ 1 : જો ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં પ્રથમ પદ અને સામાન્ય ગુણોત્તર અનુકૂમે 7 અને 2 હોય તો છહું પદ શોધો.

ગુણોત્તર-શ્રેણીનું પ્રથમ પદ $a = 7$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = 2$ છે અને છહું પદ શોધવાનું છે. એટલે કે, $n = 6$.

a, r અને n ની કિમતોને n મા પદ $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂક્તાં,

$$\begin{aligned} T_6 &= 7 \times (2)^{6-1} \\ &= 7 \times (2)^5 \\ &= 7 \times 32 \\ &= 224 \end{aligned}$$

આમ, શ્રેણીનું છહું પદ 224 છે.

ઉદાહરણ 2 : એક ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં સામાન્ય ગુણોત્તર અને પાંચમું પદ અનુક્રમે 3 અને 324 હોય તો પ્રથમ પદ શોધો.

ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં સામાન્ય ગુણોત્તર $r = 3$ અને પાંચમું પદ 324 છે. અહીં $T_5 = 324$ અને પ્રથમપદ એટલે કે a શોધવાનું છે

$$\text{અહીં } T_5 = 324 \text{ છે.}$$

$$\therefore ar^{5-1} = 324 \quad (\because T_n = ar^{n-1})$$

$$\therefore a (3)^4 = 324 \quad (\because r = 3)$$

$$\therefore a \times 81 = 324$$

$$\therefore a = \frac{324}{81} = 4$$

આમ, શ્રેષ્ઠીનું પ્રથમ પદ 4 છે.

ઉદાહરણ 3 : જો ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં પ્રથમ પદ અને ચોથું પદ અનુક્રમે 5 અને 40 હોય તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીનું પ્રથમ પદ $a = 5$ અને ચોથું પદ 40 છે. અહીં $T_4 = 40$ અને આપણે સામાન્ય ગુણોત્તર r શોધવાનો છે.

$$\text{અહીં } T_4 = 40 \text{ છે.}$$

$$\therefore ar^{4-1} = 40 \quad (\because T_n = ar^{n-1})$$

$$\therefore 5 \times r^3 = 40 \quad (\because a = 5)$$

$$\therefore r^3 = \frac{40}{5} = 8$$

$$\therefore r = 2$$

આમ, શ્રેષ્ઠીનો સામાન્ય ગુણોત્તર 2 છે.

ઉદાહરણ 4 : એક ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીનું પ્રથમ પદ અને સામાન્ય ગુણોત્તર અનુક્રમે 4 અને -2 છે. જો શ્રેષ્ઠીનું n મું પદ -128 હોય તો n ની કિંમત શોધો.

આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં પ્રથમ પદ $a = 4$, સામાન્ય ગુણોત્તર $r = -2$ અને n મું પદ -128 એટલે કે $T_n = -128$ છે.

$$\text{અહીં } T_n = -128$$

$$\therefore ar^{n-1} = -128 \quad (\because T_n = ar^{n-1})$$

$$\therefore 4 \times (-2)^{n-1} = -128 \quad (\because a = 4 \text{ અને } r = -2)$$

$$\therefore (-2)^{n-1} = \frac{-128}{4} = -32$$

$$\therefore (-2)^{n-1} = (-2)^5$$

બંને બાજુની ધાતને સરખાવતાં,

$$n - 1 = 5$$

$$\therefore n = 6$$

ઉદાહરણ 5 : જો ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં ચોથું અને સાતમું પદ અનુક્રમે $\frac{3}{4}$ અને $\frac{3}{32}$ હોય તો દસમું પદ શોધો.

ધારો કે ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીનું પ્રથમ પદ = a અને સામાન્ય ગુણોત્તર = r છે.

આપણને $T_4 = \frac{3}{4}$ અને $T_7 = \frac{3}{32}$ આપેલ છે.

$$\text{આમ } \frac{T_7}{T_4} = \frac{ar^6}{ar^3} = r^3 \quad \text{અને} \quad \frac{T_7}{T_4} = \frac{\frac{3}{32}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{32} \times \frac{4}{3} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore r^3 = \frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$\therefore r = \frac{1}{2}$$

અથ $r = \frac{1}{2}$ ને $T_4 = ar^3 = \frac{3}{4}$ માં મૂકતાં,

$$\therefore a \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore a \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore a = \frac{3}{4} \times 8$$

$$\therefore a = 6$$

હવે શ્રેષ્ઠિનું દસમું પદ શોધવાનું છે અહીં, $n = 10$.

a, r અને n ની ક્રમતોને $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં,

$$T_{10} = 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1}$$

$$= 6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^9$$

$$= 6 \times \frac{1}{512}$$

$$= \frac{3}{256}$$

આમ, શ્રેષ્ઠિનું 10 મું પદ $\frac{3}{256}$ છે.

ઉદાહરણ 6 : ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી 9, -6, 4, ... નું 5 મું પદ શોધો.

અહીં $a = 9$ અને $r = \frac{-6}{9} = \frac{-2}{3}$ છે. 5 મું પદ શોધવાનું છે એટલે કે $n = 5$

a, r અને n ની ક્રમતો $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં

$$T_5 = 9 \times \left(\frac{-2}{3}\right)^{5-1}$$

$$= 9 \times \left(\frac{-2}{3}\right)^4$$

$$= 9 \times \frac{16}{81}$$

$$= \frac{16}{9}$$

આમ, શ્રેષ્ઠિનું 5 મું પદ $\frac{16}{9}$ છે.

ઉદાહરણ 7 : ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$ નું આડમું પદ શોધો.

$$\text{અહીં } a = \frac{1}{8} \text{ અને } r = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}} = 2. \text{ આડમું પદ શોધવાનું છે એટલે કે } n = 8$$

a, r અને n ની કિંમતોને $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં,

$$T_8 = \frac{1}{8} \times (2)^{8-1}$$

$$= \frac{1}{8} \times (2)^7$$

$$= \frac{1}{8} \times 128$$

$$= 16$$

આમ, શ્રેષ્ઠીનું આડમું પદ 16 છે.

ઉદાહરણ 8 : જો કોઈ એક ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીનું બીજું પદ 4 હોય તો પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર શોધો.

ધારો કે, પ્રથમ પદ = a અને સામાન્ય ગુણોત્તર = r છે.

અહીં બીજું પદ 4 છે એટલે કે $T_2 = 4$.

હવે $n = 1, n = 2$ અને $n = 3$ ને $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં

$$T_1 = a, T_2 = ar \text{ અને } T_3 = ar^2 \text{ મળો છે.}$$

આમ, $T_1 \times T_2 \times T_3 = a \times ar \times ar^2$

$$= a^3 \times r^3$$

$$= (ar)^3$$

$$= (4)^3$$

$$(\because T_2 = ar = 4)$$

$$= 64$$

આમ, શ્રેષ્ઠીના પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર 64 થાય છે.

ઉદાહરણ 9 : એક ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીનું પ્રથમ પદ અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર અનુક્રમે 3 અને 216 છે. તો શ્રેષ્ઠીનું 7 મું પદ શોધો.

શ્રેષ્ઠીનું પ્રથમ પદ 3 છે એટલે કે $a = 3$.

હવે $n = 1, n = 2$ અને $n = 3$ ને $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં $T_1 = a, T_2 = ar$ અને $T_3 = ar^2$ મળો છે.

પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર 216 આપેલ છે.

એટલે કે $T_1 \times T_2 \times T_3 = 216$ છે.

હવે, $T_1 \times T_2 \times T_3 = 216$

$$\therefore a \times ar \times ar^2 = 216$$

$$\therefore a^3 \times r^3 = 216$$

$$\therefore 3^3 \times r^3 = 216 \quad (\because a = 3)$$

$$\therefore 27 \times r^3 = 216$$

$$\therefore r^3 = \frac{216}{27} = 8$$

$$\therefore r = 2$$

તેથી શ્રેષ્ઠીનું સાતમું પદ $T_7 = ar^6$

$$\begin{aligned}\therefore T_7 &= 3 \times (2)^6 \\ &= 3 \times 64 \\ &= 192\end{aligned}$$

આમ, શ્રેણીનું સાતમું પદ 192 છે.

ઉદાહરણ 10 : જો સંખ્યાઓ 2, G, 50 ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે તો G ની કિંમત શોધો.

અહીં $T_1 = 2$, $T_2 = G$ અને $T_3 = 50$ છે.

$$\text{સામાન્ય ગુણોત્તર} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$$

$$\begin{aligned}\therefore \frac{G}{2} &= \frac{50}{G} \\ \therefore G^2 &= 100 \\ \therefore G &= \pm 10 \\ \therefore G &= 10 \text{ અથવા } -10\end{aligned}$$

ઉદાહરણ 11 : જો સંખ્યાઓ a, b, c, d માટે $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c}$ હોય તો a, b, c, d ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે તેમ બતાવો.

ધારો કે $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = r$, જ્યાં r એક શૂન્યેતર અચલ છે.

$$\begin{aligned}\therefore b &= ar, c = br, d = cr \\ \therefore c &= (ar) r = ar^2 \text{ અને } d = (ar^2) r = ar^3\end{aligned}$$

જો $T_1 = a, T_2 = b = ar, T_3 = c = ar^2, T_4 = d = ar^3$

લઈએ તો T_1, T_2, T_3, T_4 ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે. આમ a, b, c, d ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે.

ઉદાહરણ 12 : ગુણોત્તર-શ્રેણી 0.008, 0.016, 0.032, ...નું કેટલામું પદ 4.096 છે ?

અહીં $a = 0.008$ અને $r = \frac{0.016}{0.008} = 2$ છે.

હવે, $T_n = 4.096$

$$\begin{aligned}\therefore ar^{n-1} &= 4.096 \\ \therefore 0.008 \times (2)^{n-1} &= 4.096\end{aligned}$$

$$\therefore 2^{n-1} = \frac{4.096}{0.008}$$

$$\therefore 2^{n-1} = 512$$

$$\therefore 2^{n-1} = 2^9$$

અને બાજુ ધાતને સરખાવતાં,

$$n - 1 = 9$$

$$\therefore n = 10$$

આમ, શ્રેણીનું 10મું પદ 4.096 છે.

ઉદાહરણ 13 : જો ગુણોત્તર-શ્રેણીનું નીજું પદ તે શ્રેણીના પ્રથમ પદનો વર્ગ હોય અને ચોથું પદ 243 હોય તો શ્રેણી શોધો.

ધારો કે પ્રથમ પદ = a અને સામાન્ય ગુણોત્તર = r છે. અહીં નીજું પદ, પ્રથમ પદનો વર્ગ છે. એટલે કે $T_3 = a^2$

$$\therefore T_3 = ar^2 = a^2$$

$$\therefore r^2 = a$$

ઉપરાંત ચોણું પદ 243 એટલે કે $T_4 = 243$

$$\therefore T_4 = ar^3 = 243$$

$$\therefore r^2 \times r^3 = 243 \quad (\because r^2 = a)$$

$$\therefore r^5 = 243$$

$$\therefore r^5 = 3^5$$

$$\therefore r = 3$$

$$\text{હવે, } a = r^2$$

$$\therefore a = 3^2$$

$$\therefore a = 9$$

$a = 9$ અને $r = 3$ લેતાં, 9, 27, 81, 243... શ્રેષ્ઠી મળે છે.

ઉદાહરણ 14 : એક વ્યક્તિ વર્ષ 2009માં બેન્કમાં ₹ 10,000 જમા કરાવે છે. વર્ષ 2010માં ₹ 20,000 જમા કરાવે છે. અને વર્ષ 2011માં ₹ 40,000 જમા કરાવે છે. કોઈ એક વર્ષમાં જમા કરાવેલ રકમ પાછલા વર્ષમાં જમા કરાવેલ રકમ કરતાં બમણી છે. તો વર્ષ 2014માં વ્યક્તિએ કેટલી રકમ જમા કરાવી હશે ?

એક વ્યક્તિ પ્રથમ વર્ષમાં એટલે કે વર્ષ 2009માં ₹ 10,000 જમા કરાવે છે. \therefore પ્રથમ પદ (a) = 10,000 છે. દર વર્ષે જમા કરેલ રકમ અગાઉના વર્ષ કરતાં બમણી છે તેથી સામાન્ય ગુણોત્તર (r) = 2 છે. આપણે વર્ષ 2014માં જમા કરેલ રકમ શોધવાની છે એટલે $n = 6$.

a, r અને n ને $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂક્તાં,

$$T_6 = 10000 (2)^{6-1}$$

$$= 10,000 (2)^5$$

$$= 10,000 \times 32$$

$$= 3,20,000$$

આમ, વર્ષ 2014માં જમા કરેલ રકમ ₹ 3,20,000 છે.

ઉદાહરણ 15 : એક 50,000 લિટરની ક્ષમતાવાળી પાણીની ટાંકી પાણીથી પૂરેપૂરી ભરેલી છે. લિકેજના કારણે દર અઠવાડિયે પાણીનું સ્તર અગાઉ કરતાં અડધું થઈ જાય છે, તો પાંચ અઠવાડિયાં પછી પાણીનું સ્તર કેટલું હશે ? (નવું પાણી ટાંકીમાં ઉમેરાતું નથી.)

50,000 લિટરની ક્ષમતાવાળી પાણીની ટાંકી પાણીથી પૂરેપૂરી ભરેલ છે. $\therefore a = 50,000 = T_1$, દર અઠવાડિયે પાણીનું સ્તર અગાઉ કરતાં અડધું થઈ જાય છે. \therefore સામાન્ય ગુણોત્તર (r) = $\frac{1}{2}$ થશે.

એક અઠવાડિયા પછીનું પાણીનું સ્તર = $50,000 \times \frac{1}{2} = 25,000$ લિટર થશે. આપણે પાંચ અઠવાડિયાં પછીનું પાણીનું સ્તર શોધવાનું છે એટલે $n = 6$.

a, r અને n ની કિંમતો $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂક્તાં,

$$T_6 = 50,000 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1}$$

$$= 50,000 \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$= 50,000 \times \frac{1}{32} = 1562.5$$

આમ, પાંચ અઠવાડિયા પછી પાણીનું સ્તર 1562.5 લિટર હશે.

ઉદાહરણ 16 : એક શહેરની વસ્તી 20 લાખ છે. જો વસ્તી દર વર્ષે 3 ટકાના દરે વધતી હોય તો 6 વર્ષ પછી તે શહેરની વસ્તી કેટલી હશે ?

શહેરની હાલની વસ્તી 2000000 છે. $\therefore a = 2000000 = T_1$. વસ્તી દર વર્ષે 3 ટકાના દરે વધે છે.

$$\therefore r = 1.03$$

$$\begin{aligned} &\text{વસ્તી 3 ટકાના દરે વધે છે તેથી} \\ &\therefore r = \frac{100+3}{100} = 1.03 \end{aligned}$$

એક વર્ષ પછી શહેરની વસ્તી = $2000000 \times 1.03 = 2060000 = T_2$ થશે. આપણે 6 વર્ષ પછીની વસ્તી શોધવાની છે એટલે $n = 7$.

$$a, r અને nની કિંમતો T_n = ar^{n-1} માં મૂકૃતાં,$$

$$T_7 = 20,00000 (1.03)^{7-1}$$

$$= 20,00000 (1.03)^6$$

$$\therefore T_7 = 2388104.5930$$

આમ, 6 વર્ષ પછી શહેરની વસ્તી આશરે 23,88,105 થશે.

ઉદાહરણ 17 : મશીનના ઘસારાનો દર વર્ષ 15 % રાખવો અનું સરકાર નક્કી કરે છે. જો મશીનની ખરીદકિંમત ₹ 50,000 હોય, તો સાત વર્ષ પછી મશીનની કિંમત કેટલી થશે ?

મશીનની ખરીદકિંમત ₹ 50,000 છે. $\therefore a = 50,000 = T_1$. મશીનનો ઘસારો દર વર્ષ 15 % છે.

$$\therefore r = 0.85$$

$$\boxed{\text{મશીનની કિંમતમાં વર્ષ } 15 \text{ ટકાનો ઘટાડો છે. } \therefore r = \frac{100 - 15}{100} = 0.85$$

એક વર્ષ પછીની મશીનની કિંમત = $50,000 \times 0.85$

$$= 42,500 = T_2 \text{ થશે.}$$

સાત વર્ષ પછીની મશીનની કિંમત શોધવાની છે એટલે $n = 8$.

$$a, r અને nની કિંમતો T_n = ar^{n-1} માં મૂકૃતાં,$$

$$T_8 = 50,000 (0.85)^{8-1}$$

$$= 50,000 (0.85)^7$$

$$= 16028.8544$$

$$\approx 16028.85$$

આમ, સાત વર્ષ પછીની મશીનની કિંમત ₹ 16,028.85 થશે.

9.3 શ્રેઢીનો અર્થ (Meaning of Sequence)

જો a, ar, ar^2, ar^3, \dots ને ગુણોત્તર-શ્રેણી લઈએ તો $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$ એ ગુણોત્તર શ્રેઢી બનશે.

દા.ત., જો 2, 6, 18, 54, ... ગુણોત્તર-શ્રેણી હોય તો તેનાથી મળતી ગુણોત્તર શ્રેઢી $2 + 6 + 18 + 54 + \dots$ થશે.

ગુણોત્તર-શ્રેણીના પ્રથમ n પદોના સરવાળાને સંકેત S_n વડે દર્શાવવામાં આવે છે. તેથી

$$S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n$$

$$\text{જ્યાં } T_n = ar^{n-1}, n = 1, 2, 3, \dots$$

આમ, $S_1 = T_1, S_2 = T_1 + T_2, S_3 = T_1 + T_2 + T_3$ વગેરે.

જો બધાં પદો a અને r ના રૂપમાં દર્શાવીએ તો,

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \text{ મળશે.}$$

ગુણોત્તર-શ્રેણીના સંદર્ભમાં નીચે દર્શાવેલ સૂત્રો આપણે સાબિતી વગર સ્વીકારી લઈશું :

$$(1) \frac{T_{n+1}}{T_n} = r = \text{સામાન્ય ગુણોત્તર, અહીં } n \text{ ધન પૂર્ણક છે.}$$

$$(2) T_{n+1} = S_{n+1} - S_n \text{ જ્યાં } n = 1, 2, 3, \dots$$

$$(3) S_n = na \text{ જ્યાં } r = 1$$

$$(4) S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r - 1)} \text{ જ્યાં } r \neq 1$$

$$(5) S_n = \frac{rT_n - a}{(r - 1)} \text{ જ્યાં } r \neq 1$$

ઉદાહરણ 18 : ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી 5, 15, 45, ... ના પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો શોધો.

$$\text{અહીં પ્રથમ પદ } a = 5 \text{ અને સામાન્ય ગુણોત્તર } r = \frac{15}{5} = 3 \text{ છે.}$$

પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો શોધવાનો છે. ∴ $n = 5$.

$$a, r \text{ અને } n\text{ની કિંમતોને } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)} \text{ માં મૂક્તાં,}$$

$$S_5 = \frac{5(3^5 - 1)}{(3-1)}$$

$$= \frac{5(243 - 1)}{2}$$

$$= \frac{5(242)}{2}$$

$$= 605$$

આમ, પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો 605 છે.

ઉદાહરણ 19 : ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી 8, 4, 2, ... ના પ્રથમ 6 પદોનો સરવાળો શોધો.

$$\text{અહીં પ્રથમ પદ } a = 8 \text{ અને સામાન્ય ગુણોત્તર } r = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ છે. પ્રથમ 6 પદોનો સરવાળો શોધવાનો છે.}$$

$$\therefore n = 6.$$

$$a, r \text{ અને } n\text{ની કિંમતોને } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)} \text{ માં મૂક્તાં,}$$

$$\therefore S_6 = \frac{8 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 1 \right]}{\left(\frac{1}{2} - 1\right)}$$

$$= \frac{8 \left[\frac{1}{64} - 1 \right]}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{8 \left[-\frac{63}{64} \right]}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$= 8 \times \left(-\frac{63}{64}\right) \times \left(\frac{2}{-1}\right)$$

$$= \frac{63}{4}$$

આમ, પ્રથમ 6 પદોનો સરવાળો $\frac{63}{4}$ છે.

ઉદાહરણ 20 : એક ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીનું પ્રથમ પદ 3 અને સામાન્ય ગુણોત્તર 2 હોય તો પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ $a = 3$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = 2$ છે. પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો શોધવાનો છે, એટલે કે $n = 4$.

$$a, r \text{ અને } n\text{ની કિંમતોને } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)} \text{ માં મૂક્તાં,}$$

$$S_4 = \frac{3[2^4 - 1]}{(2-1)}$$

$$= \frac{3(16-1)}{1}$$

$$= 3 \times 15$$

$$= 45$$

આમ, પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો 45 છે.

ઉદાહરણ 21 : એક ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી જેમાં સામાન્ય ગુણોત્તર 0.2 અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો 0.496 છે તો પ્રથમ પદ શોધો.

અહીં સામાન્ય ગુણોત્તર $r = 0.2$ અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો 0.496 એટલે કે $S_3 = 0.496$ છે.

$$r અને n ની કિંમતોને S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)} માં મૂકતાં,$$

$$\therefore 0.496 = \frac{a[0.2^3 - 1]}{0.2 - 1}$$

$$\therefore 0.496 = \frac{a(0.008 - 1)}{(-0.8)}$$

$$\therefore 0.496 = \frac{a(-0.992)}{(-0.8)}$$

$$\therefore a = \frac{0.496 \times (-0.8)}{(-0.992)}$$

$$\therefore a = 0.4$$

આમ, પ્રથમ પદ 0.4 છે.

ઉદાહરણ 22 : ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી 800, 400, 200, ...ના કેટલા પદોનો સરવાળો 1500 થશે ?

અહીં પ્રથમ પદ $a = 800$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{400}{800} = 0.5$ છે. પ્રથમ n પદોનો સરવાળો 1500 છે.

એટલે કે $S_n = 1500$

$$a અને rની કિંમતોને S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)} માં મૂકતાં,$$

$$S_n = \frac{800[(0.5)^n - 1]}{(0.5 - 1)}$$

$$\therefore 1500 = \frac{800[(0.5)^n - 1]}{(-0.5)}$$

$$\therefore (0.5)^n - 1 = \frac{1500 \times (-0.5)}{800}$$

$$\therefore (0.5)^n = 1 - 0.9375$$

$$(0.5)^n = 0.0625$$

$$\therefore (0.5)^n = (0.5)^4$$

બંને બાજુ ઘાતને સરખાવતાં,

$$n = 4$$

આમ, પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો 1500 થશે.

ઉદાહરણ 23 : એક ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં પ્રથમ પદ 27 અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો 189 છે. સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ $a = 27$ અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો 189 છે. એટલે કે $S_3 = 189$

$$\text{કિંમતોને } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)} \text{ માં મૂક્તાં,}$$

$$\therefore S_3 = \frac{27(r^3 - 1)}{(r-1)}$$

$$\therefore 189 = \frac{27(r-1)(r^2 + r + 1)}{(r-1)}$$

$$\therefore 189 = 27(r^2 + r + 1)$$

$$\therefore r^2 + r + 1 = 7$$

$$\therefore r^2 + r - 6 = 0$$

$$\therefore (r+3)(r-2) = 0$$

$$\therefore r = -3 \text{ અથવા } r = 2$$

આમ, સામાન્ય ગુણોત્તર - 3 અથવા 2 છે.

ઉદાહરણ 24 : એક ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં પ્રથમ પદ 1 છે અને પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો 1 છે. સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ $a = 1$ અને પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો 1 છે. એટલે કે $S_5 = 1$.

$$\text{કિંમતોને } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)} \text{ માં મૂક્તાં,}$$

$$\therefore S_5 = \frac{1(r^5 - 1)}{(r-1)}$$

$$\therefore 1 = \frac{(r^5 - 1)}{(r-1)}$$

$$\therefore r^5 - 1 = r - 1$$

$$\therefore r^5 = r$$

$$\therefore r^4 = 1$$

$$\therefore r = \pm 1$$

જો $a = 1$ અને $r = 1$ હોય તો પ્રથમ પાંચ પદો 1, 1, 1, 1, 1 થાય, જેનો સરવાળો 5 થાય પણ આપેલ સરવાળો 1 છે. તેથી $r = 1$ શક્ય નથી.

જો $a = 1$ અને $r = -1$ હોય તો પ્રથમ પાંચ પદો 1, -1, 1, -1, 1 થાય, જેનો સરવાળો 1 થાય, તેથી $r = -1$ થશે.

આમ, સામાન્ય ગુણોત્તર - 1 છે.

ઉદાહરણ 25 : ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી 2, 4, 8, 16.....નાં પ્રથમ n પદોનો સરવાળો 5000 થી વધે નહીં તેવી n ની મહત્તમ કિંમત શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ $a = 2$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{4}{2} = 2$. n પદોનો સરવાળો 5000 થી વધે નહિએ.

એટલે કે $S_n \leq 5000$.

$$a \text{ અને } r \text{ ને } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)} \text{ માં મૂક્તાં,}$$

$$S_n = \frac{2(2^n - 1)}{(2-1)}$$

$$= 2(2^n - 1)$$

હવે, $S_n \leq 5000$ હોવાથી

$$2(2^n - 1) \leq 5000$$

$$\therefore 2^n - 1 \leq 2500$$

$$\therefore 2^n \leq 2501$$

હવે n ની વિવિધ ધન પૂર્ણક કિંમતો માટે 2^n ની કિંમતોનું કોષ્ટક નીચે મુજબ બનાવીએ અને n ની જે ધન પૂર્ણક કિંમત માટે $2^n \leq 2501$ થાય તેવી n ની મહત્વમ કિંમત લઈશું.

n	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

કોષ્ટક પરથી જોઈ શકાશે કે $n = 10$ માટે $2^n = 1024$, $n = 11$ માટે $2^n = 2048$ છે અને $n = 12$ માટે $2^n = 4096$ જે 2501 કરતાં વધુ છે.

$n = 11$ તે n ની મહત્વમ કિંમત છે કે જેના માટે $2^n \leq 2501$ થાય.

$$\therefore n = 11$$

ઉદાહરણ 26 : ગુણોત્તર-શ્રેણી 1, 3, 3^2 , 3^3 , ...ના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો 3000 થાય તેવી n ની લઘૃતમ કિંમત શોધો.

અહીં પ્રથમ પદ $a = 1$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{3}{1} = 3$. પ્રથમ n પદોનો સરવાળો ઓછામાં ઓછો 3000 હોવો જોઈએ એટલે કે $S_n \geq 3000$.

$$a \text{ અને } r \text{ને } S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)} \text{ માં મૂક્તાં,}$$

$$S_n = \frac{1(3^n - 1)}{(3-1)}$$

$$= \frac{3^n - 1}{2}$$

હવે, $S_n \geq 3000$ હોવાથી

$$\therefore \frac{3^n - 1}{2} \geq 3000$$

$$\therefore 3^n - 1 \geq 6000$$

$$\therefore 3^n \geq 6001$$

હવે n ની વિવિધ ધન પૂર્ણક કિંમતો માટે 3^n ની કિંમતોનું કોષ્ટક નીચે મુજબ બનાવીએ અને n ની જે ધન પૂર્ણક કિંમત માટે $3^n \geq 6001$ થાય તેવી n ની લઘૃતમ કિંમત લઈશું.

n	4	5	6	7	8	9
3^n	81	243	729	2187	6561	19683

કોષ્ટક પરથી જોઈ શકાય છે $n = 8, 9, \dots$ માટે $3^n \geq 6001$ છે.

આમ, n ની લઘૃતમ કિંમત 8 છે જેને માટે $3^n \geq 6001$ હોય.

$$\therefore n = 8$$

ઉદાહરણ 27 : એક ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી માટે $S_8 = 10S_4$ હોય તો 'r' શોધો.

$$\text{અહીં, } S_8 = 10S_4$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{a(r^8 - 1)}{(r-1)} &= 10 \left[\frac{a(r^4 - 1)}{(r-1)} \right] \\ \therefore r^8 - 1 &= 10(r^4 - 1) \\ \therefore (r^4 - 1)(r^4 + 1) &= 10(r^4 - 1) \\ \therefore r^4 + 1 &= 10 \\ r^4 &= 9 \\ \therefore r^2 &= 3 \\ \therefore r &= \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

ઉદાહરણ 28 : એક વ્યક્તિ તેના દીકરાને 1લી માર્ચે રૂ 5 આપે છે, 2જી માર્ચે રૂ 10 આપે છે, 3જી માર્ચે રૂ 20 આપે છે. આમ રોજ અગાઉના દિવસ કરતા બમણી રકમ આપે છે. તો 10મી માર્ચ સુધી વ્યક્તિએ તેના દીકરાને કેટલી રકમ આપી હશે ?

વ્યક્તિ 1લી માર્ચે રૂ 5 આપે છે તેથી પ્રથમ પદ $a = 5$. રોજ આપેલ રકમ અગાઉના દિવસ કરતાં બમણી રકમ આપે છે તેથી સામાન્ય ગુણોત્તર $r = 2$ છે. આપણે 10મી માર્ચ સુધી આપેલ રકમ શોધવાની છે. તેથી $n = 10$.

$$a, r અને nની ટિંભતો $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,$$

$$\begin{aligned} S_{10} &= \frac{5(2^{10} - 1)}{(2-1)} \\ &= \frac{5(1024 - 1)}{1} \\ &= 5 \times 1023 \\ &= 5115 \end{aligned}$$

આમ, 10મી માર્ચ સુધી આપેલ રકમ રૂ 5115 થશે.

ઉદાહરણ 29 : એક વ્યક્તિને કુલ રૂ 2,42,000 નું દાન પાંચ મહિનામાં કરવું છે. દરેક મહિને દાનમાં આપેલ રકમ અગાઉના મહિનામાં કરેલ દાન કરતાં ગ્રીજા ભાગની છે તો વ્યક્તિએ પહેલા મહિને દાનમાં આપેલ રકમ શોધો.

એક વ્યક્તિને કુલ રૂ 242000 નું દાન પાંચ મહિનામાં કરવું છે. એટલે કે $S_5 = 242000$ અને $n = 5$. દરેક મહિને દાનમાં આપેલ રકમ અગાઉના મહિનામાં કરેલ દાન કરતાં ગ્રીજા ભાગની છે તેથી સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{1}{3}$. આપણે પ્રથમ મહિને આપેલ દાનની રકમ શોધવાની છે. એટલે કે, a શોધવાનો છે.

$$r અને nની ટિંભતોને $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$ માં મૂકતાં,$$

$$S_5 = \frac{a \left[\left(\frac{1}{3}\right)^5 - 1 \right]}{\left(\frac{1}{3}-1\right)}$$

$$\therefore 242000 = \frac{a\left(\frac{1}{243}-1\right)}{\left(-\frac{2}{3}\right)}$$

$$\therefore 242000 = \frac{a\left(-\frac{242}{243}\right)}{\left(-\frac{2}{3}\right)}$$

$$\therefore 242000 = a \times \left(\frac{-242}{243}\right) \times \left(\frac{3}{-2}\right)$$

$$\therefore 242000 = a \times \frac{121}{81}$$

$$\therefore a = \frac{242000 \times 81}{121}$$

$$\therefore a = 162000$$

આમ, પ્રથમ મહિને આપેલ દાનની રકમ ₹ 1,62,000 છે.

ઉદાહરણ 30 : એક વ્યક્તિ બેન્કમાં ₹ 20,000 વર્ષ 8 ટકાના દરે ચકવૃદ્ધિ વાજે મૂકે છે. પાંચ વર્ષ પછી વ્યક્તિને કેટલી રકમ મળશે?

વ્યક્તિ રૂ 20,000 બેન્કમાં મૂકે છે.

$$\therefore a = 20,000 = T_1$$

બેન્ક જમા કરેલ રકમ ૫ર ૮ ટકા વાજ આપે છે. $\therefore r = 1.08$

$$\text{એક વર્ષ પછી મળતી રકમ} = 20,000 \times 1.08 = 21,600 = T_2$$

આપણે પાંચ વર્ષ પછી મળતી રકમ શોધવાની છે એટલે $n = 6$ લઈશું.

a, r અને n ની કિંમતો $T_n = ar^{n-1}$ માં મૂકતાં,

$$\begin{aligned} T_6 &= 20,000 \times (1.08)^{6-1} \\ &= 20,000 \times (1.08)^5 \\ &= 29386.5615 \\ &\approx 29386.56 \end{aligned}$$

આમ, પાંચ વર્ષ પછી મળતી રકમ ₹ 29,386.56 છે.

ઉદાહરણ 31 : ત્રણ ધન સંખ્યાઓ $k + 1, 3k - 1, 5k + 1$ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે. તો k શોધો.

અહીં, $k + 1, 3k - 1, 5k + 1$ ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે.

રકમ 8 ટકાના દરે વધે છે તેથી

$$r = \frac{100+8}{100} = 1.08$$

તેથી $\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} =$ સામાન્ય ગુણોત્તર r થશે.

$$\therefore \frac{3k-1}{k+1} = \frac{5k+1}{3k-1}$$

$$\therefore (3k - 1)^2 = (5k + 1)(k + 1)$$

$$\therefore 9k^2 - 6k + 1 = 5k^2 + 6k + 1$$

$$\therefore 4k^2 - 12k = 0$$

$$\therefore 4k(k - 3) = 0$$

$$\therefore 4k = 0 \text{ અથવા } k - 3 = 0$$

$$\therefore k = 0 \text{ અથવા } k = 3$$

પણ $k = 0$ માટે $(3k - 1)$ -ની કિંમત - 1 મળશે જે ઋણ છે. તેથી $k = 0$ અસ્વીકાર્ય છે. આમ, $k = 3$ છે

ઉદાહરણ 32 : જો 15, x , 240, y ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં હોય તો x અને y -ની કિંમતો શોધો.

અહીં, 15, x , 240, y ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં છે.

$$\text{તેથી } \frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_3} \text{ સામાન્ય ગુણોત્તર } r \text{ થશે.}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_2} \text{ લેતાં,}$$

$$\therefore \frac{x}{15} = \frac{240}{x}$$

$$\therefore x^2 = 15 \times 240$$

$$= 3600$$

$$\therefore x = \pm 60$$

$$\therefore x = 60 \text{ અથવા } -60$$

$$\text{ઉપરાંત } \frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_3}$$

$$\therefore \frac{240}{x} = \frac{y}{240}$$

$$\therefore xy = 240 \times 240$$

$$\therefore xy = 57600$$

હવે, જો $x = 60$ લઈએ તો

$$60y = 57600$$

$$\therefore y = \frac{57600}{60}$$

$$\therefore y = 960$$

અને

$x = -60$ લઈએ તો

$$-60y = 57600$$

$$\therefore y = \frac{57600}{-60}$$

$$\therefore y = -960$$

આમ, $x = 60$ અને $y = 960$ અથવા $x = -60$ અને $y = -960$.

ઉદાહરણ 33 : જો એક ગુણોત્તર-શ્રેણીમાં $T_n = 80$, $S_n = 157.5$ અને $r = 2$ હોય તો a અને n શોધો.

અહીં T_n અને S_n ની કિંમતો આપેલ છે તેથી

$$S_n = \frac{rT_n - a}{r-1} \text{ સૂત્રનો ઉપયોગ કરીશું.}$$

T_n , r અને S_n ની કિંમતો સૂત્રમાં મૂક્તાં,

$$157.5 = \frac{2 \times 80 - a}{2 - 1}$$

$$\therefore 157.5 = 160 - a$$

$$\therefore a = 160 - 157.5$$

$$\therefore a = 2.5$$

હવે $T_n = ar^{n-1}$

$$\therefore 80 = 2.5 \times (2)^{n-1}$$

$$\therefore 2^{n-1} = 32$$

$$\therefore 2^{n-1} = 2^5$$

અને બાજુ ધાત સરખાવતાં,

$$n - 1 = 5$$

$$\therefore n = 6$$

આમ, $a = 2.5$ અને $n = 6$ છે.

ઉદાહરણ 34 : જો ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી માટે $T_n = 2^{n+1}$ હોય તો S_4 મેળવો.

$$\text{આહી}, T_n = 2^{n+1} \text{ છે.}$$

$$\therefore T_1 = 2^{1+1} = 4, T_2 = 2^{2+1} = 8, T_3 = 2^{3+1} = 16, \dots$$

આહી પ્રથમ પદ $a = 4$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $r = \frac{8}{4} = 2$ થશે. પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો મેળવવાનો છે તેથી $n = 4$.

$$a, r \text{ અને } n \text{ ની કેન્દ્રતોને S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)} \text{ માં મૂકતાં,}$$

$$S_4 = \frac{4(2^4 - 1)}{(2-1)}$$

$$= \frac{4(16 - 1)}{1}$$

$$= 4 \times 15$$

$$= 60$$

$$\text{આમ, } S_4 = 60.$$

ઉદાહરણ 35 : જો ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં $S_n = \frac{2}{3}(4^n - 1)$ હોય તો T_{n+1} મેળવો.

$$\begin{aligned} \text{આપણે જાણીએ છીએ કે } T_{n+1} &= S_{n+1} - S_n \\ &= \frac{2}{3}[4^{n+1} - 1] - \frac{2}{3}[4^n - 1] \\ &= \frac{2}{3}[(4^{n+1} - 1) - (4^n - 1)] \\ &= \frac{2}{3}[4^{n+1} - 1 - 4^n + 1] \\ &= \frac{2}{3}[4^{n+1} - 4^n] \\ &= \frac{2}{3} \times 4^n [4 - 1] \end{aligned}$$

$$\therefore T_{n+1} = 2(4^n)$$

ઉદાહરણ 36 : જો ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી $S_n = \frac{4}{3}(3^n - 1)$ હોય તો T_3 શોધો.

$$\text{આપણે જાણીએ છીએ કે } T_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

$$\therefore$$

$$T_3 = S_3 - S_2$$

$$= \frac{4}{3}(3^3 - 1) - \frac{4}{3}(3^2 - 1)$$

$$= \frac{4}{3}[(27 - 1) - (9 - 1)]$$

$$= \frac{4}{3}[26 - 8]$$

$$= \frac{4}{3}(18)$$

$$\therefore T_3 = 24$$

9.4 ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીનાં ત્રણ કમિક પદો (Three consecutive terms of geometric progression)

ઘણી વખત ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં કમિક પદોના સરવાળા અને ગુણાકાર આપ્યા હોય અને પદો શોધવાના હોય છે. જો ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીનાં પદ a, ar, ar^2, ar^3, \dots લઈએ તો પદોની કિંમતો શોધી શકાય પરંતુ આ રીતે પદોની પસંદગી કરવાથી ગણતરી કેટલીક વાર સરળ બનતી નથી. શ્રેષ્ઠીનાં પદોના સ્વરૂપની ધારણા એવી રીતે કરવી જોઈએ કે જેથી ગણતરી સરળ બને. n -ની કેટલીક કિંમતો માટે આ ધારણા નીચે દર્શાવી છે :

$$n = 3 \text{ માટે, ત્રણ કમિક પદો : } \frac{a}{r}, a, ar$$

$$n = 4 \text{ માટે, ચાર કમિક પદો : } \frac{a}{r^3}, \frac{a}{r}, ar, ar^3$$

$$n = 5 \text{ માટે, પાંચ કમિક પદો : } \frac{a}{r^4}, \frac{a}{r}, a, ar, ar^2$$

નોંધ : આપણે ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીનાં અજ્ઞાત પદો શોધવાનો અભ્યાસ માત્ર ત્રણ પદો પૂરતો જ સીમિત રાખીશું.

ઉદાહરણ 37 : એક ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીનાં ત્રણ કમિક પદોનો સરવાળો 26 અને ગુણાકાર 216 છે તો તે શ્રેષ્ઠીનાં ત્રણ પદો શોધો.

અહીં આપણે ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીનાં ત્રણ પદો ધારણા અનુસાર $\frac{a}{r}, a, ar$ લઈએ.

હવે ત્રણ પદોનો ગુણાકાર = 216

$$\therefore \frac{a}{r} \times a \times ar = 216$$

$$\therefore a^3 = 216$$

$$\therefore a = 6$$

$$\text{ત્રણ પદોનો સરવાળો} = 26$$

$$\therefore \frac{a}{r} + a + ar = 26$$

$$\therefore a \left(\frac{1}{r} + 1 + r \right) = 26$$

$$\therefore 6 \left(\frac{1+r+r^2}{r} \right) = 26 \quad (\because a = 6)$$

$$\therefore 3(1 + r + r^2) = 13r$$

$$\therefore 3 + 3r + 3r^2 = 13r$$

$$\therefore 3r^2 - 10r + 3 = 0$$

$$\therefore (r - 3)(3r - 1) = 0$$

$$\therefore r = 3 \text{ અથવા } r = \frac{1}{3}$$

હવે જો આપણે $a = 6$ અને $r = 3$ લઈએ તો ત્રણ કમિક પદો $\frac{6}{3} = 2, 6, 6 \times 3 = 18$ બનશે. આમ, ત્રણ કમિક પદો

2, 6, 18 થશે.

જો આપણે $a = 6$ અને $r = \frac{1}{3}$ લઈએ તો ત્રણ કમિક પદો $\frac{6}{1/3} = 18, 6, 6 \times \frac{1}{3} = 2$ બનશે.

આમ, ત્રણ કમિક પદો 18, 6, 2 થશે.

ઉદાહરણ 38 : એક ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીના ત્રણ કમિક પદોનો સરવાળો 9.5 અને ગુણાકાર 27 છે તો શ્રેષ્ઠીનાં ત્રણ પદો શેધો.

અહીં આપણે ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીનાં ત્રણ પદો ધારણા અનુસાર $\frac{a}{r}, a, ar$ લઈએ.

હવે ત્રણ પદોનો ગુણાકાર = 27

$$\therefore \frac{a}{r} \times a \times ar = 27$$

$$\therefore a^3 = 27$$

$$\therefore a = 3$$

ત્રણ પદોનો સરવાળો = 9.5

$$\therefore \frac{a}{r} + a + ar = 9.5$$

$$\therefore a \left(\frac{1}{r} + 1 + r \right) = 9.5$$

$$\therefore 3 \left(\frac{1+r+r^2}{r} \right) = 9.5 \quad (\because a = 3)$$

$$\therefore 3 + 3r + 3r^2 = 9.5r$$

$$\therefore 3r^2 - 6.5r + 3 = 0$$

બંને બાજુ 2 વડે ગુણતા,

$$\therefore 6r^2 - 13r + 6 = 0$$

$$\therefore (2r - 3)(3r - 2) = 0$$

$$\therefore r = \frac{3}{2} \text{ અથવા } r = \frac{2}{3}$$

હવે, જો આપણે $a = 3$ અને $r = \frac{3}{2}$ લઈએ તો ત્રણ કમિક પદો $\left(\frac{3}{2} \right)^0 = 2, 3, 3 \times \frac{3}{2} = \frac{9}{2}$ બનશે.

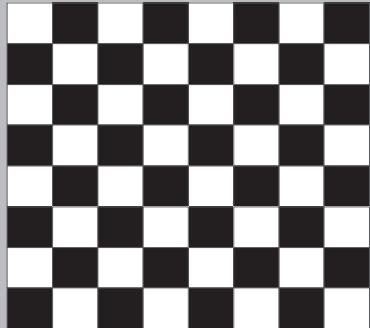
આમ, ત્રણ કમિક પદો $2, 3, \frac{9}{2}$ થશે.

જો આપણે $a = 3$ અને $r = \frac{2}{3}$ લઈએ તો ત્રણ કમિક પદો $\frac{3}{2} = \frac{9}{2}, 3, 3 \times \frac{2}{3} = 2$ બનશે.

આમ, ત્રણ કમિક પદો $\frac{9}{2}, 3, 2$ થશે.

પ્રવૃત્તિ

- (1) યેસ બોર્ડના એક ખાનામાં અનાજનો એક દાઢો મૂકો, બીજા ખાનામાં બે દાઢા, ત્રીજા ખાનામાં ચાર દાઢા, ચોથા ખાનામાં આઠ દાઢા અને આ જ રીતે આગળ. યેસ બોર્ડના છેલ્લા ખાનામાં અનાજના કેટલા દાઢા મૂકવામાં આવશે?



(2)

$$1 + 0.1 + 0.01 + 0.001 + 0.0001 = 1.1111$$

ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીનો ઉપયોગ ચકાશો.

Hint : અહીં 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001 શ્રેષ્ઠી છે.

સારાંશ અને સૂત્ર

- $n \geq 1$ માટે શ્રેષ્ઠીના $(n+1)$ માં પદ અને n માં પદનો ગુણોત્તર શૂન્યેતર અચલ હોય તેવી શ્રેષ્ઠીને ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી કહેવાય.
- જો a, ar, ar^2, ar^3, \dots ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી હોય તો $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$ ગુણોત્તર શ્રેઢી છે.
- n માં પદ $T_n = ar^{n-1}$ ને ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીનું સામાન્ય પદ કહે છે. (જ્યાં $n \geq 1$)
- $\frac{T_{n+1}}{T_n} = r =$ સામાન્ય ગુણોત્તર, અહીં n ધન પૂર્ણક છે.
- $T_{n+1} = S_{n+1} - S_n ; n = 1, 2, 3, \dots$
- જ્યારે $r = 1$ હોય ત્યારે $S_n = na$
- જ્યારે $r \neq 1$ હોય ત્યારે $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{(r-1)}$
- જ્યારે $r \neq 1$ હોય ત્યારે $S_n = \frac{rT_n - a}{r-1}$
- ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીના ગ્રાફ કભિક પદોની ધારણા : $\frac{a}{r}, a, ar$

स्वाध्याय ९

વિભાગ A

नीये आपेल बहुविकल्प प्रश्नो माटे साचा विकल्पनी पसंदगी करो :

विभाग B

નીચેના પ્રશ્નોના એક વાક્યમાં જવાબ આપો :

1. ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી ar, ar^2, ar^3, \dots નું n મું પદ શું થશે ?
 2. ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી $0.1, 0.01, 0.001, \dots$ નો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.
 3. ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી $7, 7, 7, \dots$ માટે પ્રથમ 20 પદોનો સરવાળો શોધો.
 4. જો ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીનું n મું પદ $T_n = 2^{n+1}$ હોય તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.
 5. જો સંખ્યાઓ $4, 1, y$ ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં હોય તો y ની કિંમત શોધો.
 6. એક ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં કોઈ પણ બે કમિક પદોનો સરવાળો શુંચ હોય તો સામાન્ય ગુણોત્તર શું હશે ?
 7. એક ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં $S_7 = 15$ અને $S_6 = 11$ હોય તો સાતમું પદ શોધો.
 8. વિધાન “જો a, b, c, d ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં હોય તો $ad = bc$ થશે” સાચું છે કે ખોટું ?
 9. ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી માટે વિધાન “ $T_1 = S_1$ ” સાચું છે કે ખોટું તે જણાવો.

વિભાગ C

નીચેના પ્રશ્નોના જવાબ આપો :

1. ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીની વાખ્યા આપો.
2. ગુણોત્તર શ્રેદીની વાખ્યા આપો.
3. એક ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં સામાન્ય ગુણોત્તર 1 હોય અને $S_8 = 24$ હોય તો પ્રથમ પદ શોધો.
4. ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં $T_1 = 2$ અને પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર 1000 હોય તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.
5. જો ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં $a = 2$ અને $r = 3$ હોય તો પ્રથમ 4 પદોનો સરવાળો શોધો.
6. ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી 4, 12, 36, ... નું કેટલામું પદ 324 છે ?
7. એક ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં $a = \frac{4}{9}$ અને $r = \frac{-3}{2}$ હોય તો $T_3 = \dots$
8. જો ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીનો સામાન્ય ગુણોત્તર 2 હોય તો સાતમા અને ત્રીજા પદનો ગુણોત્તર મેળવો.
9. નીચેની શ્રેષ્ઠીના માઝા પ્રમાણેના પદો શ્રેષ્ઠી સૂત્રથી મેળવો :

(1) 2, 10, 50, ...	(દશહાલું પદ)	(2) 100, 50, 25, ...	(સાતમું પદ)
(3) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27}, \dots$	(આઈમું પદ)	(4) $2, 2\sqrt{2}, 4, \dots$	(પાંચમું પદ)

વિભાગ D

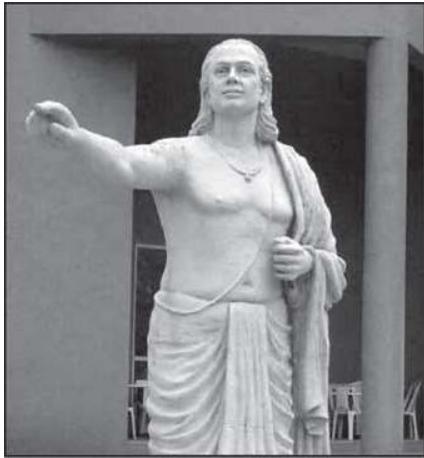
નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

1. આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં $T_5 = 405$ અને $T_7 = 3645$ હોય તો T_4 શોધો.
2. જો ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં પ્રથમ પદ $\frac{27}{16}$ અને સામાન્ય ગુણોત્તર $\frac{2}{3}$ હોય તો T_5 અને S_4 શોધો.
3. આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં $a = 4$ અને $T_5 = \frac{1}{4}$ હોય તો T_7 શોધો.
4. આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં $T_2 = 9$ અને $T_5 = 243$ હોય તો S_4 શોધો.
5. ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં પ્રથમ પદ 10 છે અને $T_4 = 0.08$ હોય તો પ્રથમ ત્રણ પદોનો સરવાળો શોધો.
6. ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી માટે $T_1^2 = T_2$ અને $T_3 = 64$ હોય તો ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી લખો.
7. જો $5, m, 20, t$ ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં હોય તો m અને t શોધો.
8. આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં $a = 10, r = 0.1$ અને $T_n = 0.01$ હોય તો n શોધો.
9. આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં $a = 1, r = 3$ અને $S_n = 121$ હોય તો n શોધો.
10. જો $S_n = \frac{2}{3} (2^n - 1)$ હોય તો T_4 શોધો.
11. જો $S_n = 4 (3^n - 1)$ હોય તો T_{n+1} શોધો.
12. જો ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં બીજું પદ 5 હોય તો પ્રથમ ત્રણ પદોનો ગુણાકાર શોધો.
13. ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી 2, 4, 8, 16, ...નાં કેટલાં પદોનો સરવાળો 126 થશે ?
14. એક ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં $T_n = 324, S_n = 484$ અને $r = 3$ હોય તો a અને n શોધો.
15. નીચે આપેલ ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીના માઝા પ્રમાણે સરવાળા શ્રેદી સૂત્રથી શોધો :

(1) 4, 16, 64, ... (પ્રથમ 4 પદ)	(3) 100, 20, 4, ... (પ્રથમ 5 પદ)
(2) 2, 3, $\frac{9}{2}, \dots$ (પ્રથમ 5 પદ)	(4) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ (પ્રથમ 10 પદ)

નીચેનાના ઉકેલ મેળવો :

- ત્રણ ધન સંખ્યાઓ $k + 4$, $4k - 2$ અને $7k + 1$ ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં છે, તો k શોધો.
- ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી $1, 3, 3^2, 3^3$ ના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો 365 થી વધે નહિ તેની n ની મહત્તમ કિંમત શોધો.
- ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી $1, 2, 2^2, 2^3, \dots$ ના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો 2000 કે તેથી વધુ હોય તેવી n ની લઘુતમ કિંમત શોધો.
- ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠી $y, \frac{y}{3}, \frac{y}{9}, \dots$ ($y > 0$)નાં પ્રથમ પાંચ પદોનો સરવાળો 121 હોય તો x શોધો.
- ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં $S_4 = 10 S_2$ હોય, તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.
- ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં પાંચમા અને ત્રીજા પદોનો સરવાળો અને તફાવત $5:3$ ના પ્રમાણમાં હોય તો સામાન્ય ગુણોત્તર શોધો.
- એક ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં ત્રણ કમિક પદોનો સરવાળો 31 અને ગુણાકાર 125 છે. તે શ્રેષ્ઠીનાં ત્રણ પદો શોધો.
- એક ગુણોત્તર-શ્રેષ્ઠીમાં ત્રણ કમિક પદોનો સરવાળો 6 અને ગુણાકાર -64 છે. તે શ્રેષ્ઠીનાં ત્રણ પદો શોધો.
- એક બાંધકામ વ્યવસાયની કંપની ગ્રાહકોને આકર્ષવા ફૂલોટ્ટસની એક યોજના મસ્તુત કરે છે. આ યોજનામાં ગ્રાહકે પ્રથમ હપતામાં $10,000$ રૂપિયા ચૂકવવાના અને ત્યાર પછીના દરેક વાર્ષિક હપતાની રકમ તેના અગાઉના હપતાની રકમથી બમણી રકમ આપવાની થાય છે. દસ હપતા સુધીમાં ગ્રાહકે કુલ કેટલા રૂપિયા ચૂકવવા પડશે ?
- એક બેન્કર પહેલી મિનિટમાં 128 નોટની ગણતરી કરે છે અને ત્યાર બાદ તે દર મિનિટે અગાઉની મિનિટ કરતાં અડવી નોટો ગણતો જાય છે. તો તેણે પાંચ મિનિટમાં કેટલી નોટો ગણી હશે ?
- એક ગામની વસ્તી 5000 છે. જો વસ્તી દર વર્ષ 2 ટકાના દરે વધતી હોય તો દસ વર્ષ બાદ તે ગામની વસ્તી કેટલી હશે ?
- એક ગાડીની કિંમતમાં દર વર્ષ 10 ટકાના દરે ઘસારો થાય છે. જો ગાડીની ખરીદકિંમત $5,00,000$ રૂપિયા હોય, તો 6 વર્ષ પછી ગાડીની કેટલી કિંમત હશે ?



Aryabhatta
(476 – 550)

Aryabhatta was a famous Indian mathematician and astronomer. His notable contributions to the world of science and mathematics includes the theory that the earth rotates on its axis, explanations of the solar and lunar eclipses, solving of quadratic equations, place value system with zero, and approximation of pie (π). Aryabhatta had defined sine, cosine, and inverse sine back in his era, influencing the birth of trigonometry. His calendar calculation has been in continuous use in India, on which the present day Panchangam is based. His studies are also base for the national calendars of Iran and Afghanistan today.

The ISRO (Indian Space Research Organization) named its first satellite after the genius mathematician and astronomer.

જવાબો

સ્વાધ્યાય 1

વિભાગ A

- | | | | | |
|--------|--------|--------|--------|---------|
| 1. (c) | 2. (b) | 3. (a) | 4. (d) | 5. (a) |
| 6. (b) | 7. (c) | 8. (a) | 9. (b) | 10. (c) |

સ્વાધ્યાય 2.1

1. 50 કુટુંબોમાં બાળકોની સંખ્યા દર્શાવતું અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ

બાળકોની સંખ્યા (x)	0	1	2	3	કુલ
કુટુંબોની સંખ્યા (f)	6	16	21	07	50

2. 60 કર્મચારીઓની પૂરા વર્ષમાં ઉમર દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

ઉમર(વર્ષ)	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	કુલ
કર્મચારીઓની સંખ્યા	3	8	10	11	12	7	6	3	60

3. 60 દિવસ દરમિયાન મોબાઇલનું ઉત્પાદન દર્શાવતું અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

મોબાઇલની સંખ્યા	100 - 199	200 - 299	300 - 399	400 - 499	500 - 599	600 - 699	700 - 799	800 - 899	900 - 999	1000 - 1100	કુલ
દિવસોની સંખ્યા	2	4	9	7	10	8	9	4	3	4	60

‘થી ઓછા’ પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

‘થી ઓછા’ મોબાઈલનો સંખ્યા	99.5	199.5	299.5	399.5	499.5	599.5	699.5	799.5	899.5	999.5	1099.5
સંચયી આવૃત્તિ	0	2	6	15	22	32	40	49	53	56	60

‘થી વધુ’ પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

‘થી વધુ’ કે તેટલી મોબાઈલની સંખ્યા	99.5	199.5	299.5	399.5	499.5	599.5	699.5	799.5	899.5	999.5	1099.5
‘થી વધુ’ સંચયી આવૃત્તિ	60	58	54	45	38	28	20	11	7	4	0

4.	વર્ગ	0 - 99	100 - 299	300 - 499	500 - 749	750 - 899	900 - 999
	મધ્યકિંમત	49.5	199.5	399.5	624.5	824.5	949.5
	વર્ગલંબાઈ	100	200	200	250	150	100
	આવૃત્તિ	10	12	14	16	8	10

5. ‘થી ઓછા’ પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

x કે તેથી ઓછી ભૂલો	0	1	2	3
સંચયી આવૃત્તિ	140	250	370	400

‘થી વધુ’ પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

x કે તેથી વધુ ભૂલોની સંખ્યા	0	1	2	3
સંચયી આવૃત્તિ	400	260	150	30

6. અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

વર્ગ	45 - 49	50 - 54	55 - 59	60 - 64	65 - 69	70 - 74	75 - 79	કુલ
આવૃત્તિ	30	80	100	50	150	80	10	500

7. નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

વર્ગ	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	60 - 65	65 - 70	કુલ
આવૃત્તિ	17	8	15	8	6	3	2	1	60

વર્ગ	0 - 50	50 - 160	160 - 300	300 - 500	500 - 800	800 - 1000	કુલ
આવૃત્તિ	10	30	40	60	80	30	250

વર્ગ	7 - 16	17 - 26	27 - 36	37 - 46	47 - 56	કુલ
આવૃત્તિ	160	120	43	40	2	365

વર્ગ	0.9875 - 1.4875	1.4875 - 1.9875	1.9875 - 2.4875	2.4875 - 2.9875	2.9875 - 3.4875	3.4875 - 3.9875	કુલ
આવૃત્તિ	5	10	20	20	10	5	70

સ્વાધ્યાય 2.2

1. કોલેજમાં અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓની જાતિ અને અભ્યાસ-વર્ષ અનુસાર સંખ્યા દર્શાવતું કોષ્ટક

અભ્યાસ-વર્ષ	જાતિ		કુલ
	છોકરાઓ	છોકરીઓ	
પ્રથમ	330	220	550
દ્વિતીય	225	225	450
તૃતીય	300	100	400
કુલ	855	545	1400

2. 1600 કર્મચારીઓની જાતિ તેમજ વૈવાહિક દરજાને દર્શાવતું કોષ્ટક

વૈવાહિક દરજાને	જાતિ		કુલ
	પુરુષો	સ્ત્રીઓ	
પરિણીત	715	485	1200
અપરિણીત	205	195	400
કુલ	920	680	1600

3. બેન્કમાં ભરતી માટે બોલાવેલ ઉમેદવારોનો હોદા, જાતિ તેમજ તેમનો વૈવાહિક દરજાને દર્શાવતું કોષ્ટક

હોદો	પરિણીત			અપરિણીત			કુલ		
	પુરુષ	સ્ત્રી	કુલ	પુરુષ	સ્ત્રી	કુલ	પુરુષ	સ્ત્રી	કુલ
મેનેજર									
કલાર્ક									
ક્રેશિયર									
પટાવાળા									
કુલ									

4. નોકરીનો અનુભવ, રહેણાંક અને વૈવાહિક દરજા અનુસાર સ્ત્રીઓની સંખ્યા દર્શાવતું કોષ્ટક

વિસ્તાર	વૈવાહિક દરજાને						કુલ		
	પરિણીત			અપરિણીત					
	અનુભવી	બિનઅનુભવી	કુલ	અનુભવી	બિનઅનુભવી	કુલ	અનુભવી	બિનઅનુભવી	કુલ
મજૂર	250	93	343	163	43	206	413	136	549
અન્ય	87	400	487	14	800	814	101	1200	1301
કુલ	337	493	830	177	843	1020	514	1336	1850

5. વર્ષ 2011થી 2014 દરમિયાન કંપનીમાં જાતિવાર કેળવાયેલ અને બિનકેળવાયેલ કારીગરોની સંખ્યા દર્શાવતું કોષ્ટક

વર્ષ	કેળવાયેલ			બિનકેળવાયેલ			કુલ		
	પુરુષ	સ્ત્રી	કુલ	પુરુષ	સ્ત્રી	કુલ	પુરુષ	સ્ત્રી	કુલ
2011	1170	80	1250	260	140	400	1430	220	1650
2012	1300	175	1475	200	50	250	1500	225	1725
2013	1460	240	1700	40	10	50	1500	250	1750
2014	1670	290	1960	30	10	40	1700	300	2000

સ્વાધ્યાય 2

વિભાગ A

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1. (d) | 2. (d) | 3. (b) | 4. (a) | 5. (c) |
| 6. (a) | 7. (b) | 8. (a) | 9. (c) | 10. (a) |
| 11. (c) | 12. (a) | 13. (c) | 14. (b) | 15. (b) |

વિભાગ C

- | | |
|--------------------------|-----------------------|
| 7. 4.5, 17, 37, 62, 87.5 | 8. 10, 15, 25, 25, 26 |
|--------------------------|-----------------------|

9. 'થી ઓછા' પ્રકારનું અસતત સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

પ્રાપ્તાંક કે તેથી ઓછા	10	20	30	40	50
સંચયી આવૃત્તિ	10	40	70	90	100

10. વર્ષ દરમિયાન વસ્તુની માંગ દર્શાવતું કોષ્ટક

માંગ	સારી	મધ્યમ	ઓછી	કુલ
અંદવાડિયાની સંખ્યા	12	22	18	52

વર્ષ	ગુજરાતી A			ગુજરાતી B			કુલ		
	પેટાગુણ 1	પેટાગુણ 2	કુલ	પેટાગુણ 1	પેટાગુણ 2	કુલ	પેટાગુણ 1	પેટાગુણ 2	કુલ
2014	200	100	300	100	100	200	300	200	500
2015	150	400	550	150	300	450	300	700	1000

વિભાગ D

8.

વર્ગ	200 - 300	300 - 400	400 - 500	500 - 600	600 - 700	700 - 800	કુલ
આવૃત્તિ	20	80	80	40	60	20	300

9. 40 કર્મચારીઓનો જાતિવાર વૈવાહિક દરજો દર્શાવતું કોષ્ટક

જાતિ	પારિણીત	અપારિણીત	કુલ
પુરુષ	8	8	16
સ્ત્રી	15	9	24
કુલ	23	17	40

10. કામદારોની માસિક આવક દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

માસિક વેતન (₹)	2400 - 2900	2900 - 3400	3400 - 3900	3900 - 4400	4400 - 4900	4900 - 5400	5400 - 5900	5900 - 6400	કુલ
કામદારોની સંખ્યા	3	9	18	25	23	10	7	5	100

11. 200 વિદ્યાર્થીઓના ગુણનું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

ગુણ	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70	70 - 80	80 - 90	90 - 100	કુલ
વિદ્યાર્થીઓ	20	40	50	35	25	22	6	1	1	200

વર્ગ	10 - 15	15 - 20	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50
આવૃત્તિ	12	18	16	22	14	10	6	2

13. અમદાવાદ શહેરમાં વ્યક્તિઓના પરિવહન માટે ઉપયોગમાં આવતી BRTS અને AMTS ની બસના પ્રકારો દર્શાવતું કોષ્ટક

પરિવહનનો પ્રકાર	બસના પ્રકાર		કુલ
	વાતાનુકૂલિત	બિનવાતાનુકૂલિત	
BRTS	250	100	350
AMTS	150	500	650
કુલ	400	600	1000

14. કોલેજના વિદ્યાર્થીઓનું વિદ્યાશાખામાં જાતિની સંખ્યા દર્શાવતું કોષ્ટક

વિદ્યાશાખા	જાતિ		કુલ
	છોકરાઓ	છોકરીઓ	
વિજ્ઞાન	250	350	600
વાણિજ્ય	650	250	900
કુલ	900	600	1500

19. પાસપાસેની સ્તંભાકૃતિ

21. વર્તુળાકૃતિ

વિભાગ E

1. આંબાવાડીમાં 30 દિવસ દરમિયાન ઊરેલી કેરીઓનું અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

કેરીની સંખ્યા	90 - 94	95 - 99	100 - 104	105 - 109	110 - 114	115 - 119	120 - 124	125 - 129	કુલ
દિવસોની સંખ્યા	2	3	6	4	4	4	4	3	30

2. એક શહેરના 40 રિક્ષાચાલકોએ કરેલ દૈનિક કમાણીનું અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

દૈનિક કમાણી (₹)	200 - 219	220 - 239	240 - 259	260 - 279	280 - 299	300 - 319	320 - 339	340 - 359	કુલ
રિક્ષાચાલકોની સંખ્યા	4	6	4	6	4	5	6	5	40

3. વિસ્તારના 50 રહેણાકમાં થયેલ પાણીનો વપરાશ દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

પાણીનો વપરાશ	20 - 25	25 - 30	30 - 35	35 - 40	40 - 45	45 - 50	50 - 55	55 - 60	કુલ
ધરોની સંખ્યા	2	10	9	7	10	5	3	4	50

4. 50 કર્મચારીઓનું વજન (કિગ્રામાં) દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

કર્મચારીઓનું વજન	60 - 65	65 - 70	70 - 75	75 - 80	80 - 85	85 - 90	કુલ
કર્મચારીઓની સંખ્યા	5	11	11	11	7	5	50

5. ‘થી ઓછા’ પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

ઊર્ધ્વ સીમાબિંદુ	24.5	29.5	34.5	39.5	44.5	49.5	54.5	59.5
સંચયી આવૃત્તિ	0	3	11	21	26	41	49	50

‘થી વધુ’ પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

અધઃ સીમાબિંદુ કે તેથી વધુ	24.5	29.5	34.5	39.5	44.5	49.5	54.5	59.5
સંચયી આવૃત્તિ	50	47	39	29	24	9	1	0

6. કારખાનામાં 30 દિવસ દરમિયાન ગેરહાજર રહેતા કામદારોની સંખ્યા દર્શાવતું અસતત આવૃત્તિ-વિતરણ

ગેરહાજર કામદારો	0	1	2	3	4	5	6	કુલ
દિવસોની સંખ્યા	5	7	5	6	4	2	1	30

‘થી ઓછા’ પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

ગેરહાજર કામદારો કે તેથી ઓછા	0	1	2	3	4	5	6
દિવસોની સંખ્યા	5	12	17	23	27	29	30

7. શાળામાં ભણતા 850 વિદ્યાર્થીઓનું ધોરણ અને જાતિવાર વર્ગીકરણ દર્શાવતું કોઈક

ધોરણ	જાતિ		કુલ
	છોકરાઓ	છોકરીઓ	
10	255	145	400
11	125	125	250
12	150	50	200
કુલ	530	320	850

8. વર્ષ 2013 થી 2015 દરમિયાન શાળાના વિદ્યાર્થીઓનું જાતિવાર હોસ્ટેલમાં રહેનાર અને ન રહેનાર વિદ્યાર્થીઓ દર્શાવતું કોઈક

વર્ષ	હોસ્ટેલમાં રહેનાર			હોસ્ટેલમાં ન રહેનાર			કુલ		
	છોકરાઓ	છોકરીઓ	કુલ	છોકરાઓ	છોકરીઓ	કુલ	છોકરાઓ	છોકરીઓ	કુલ
2013	600	350	950	200	50	250	800	400	1200
2014	700	420	1120	260	100	360	960	520	1480
2015	840	520	1360	260	100	360	1100	620	1720

9. 2000 ઉમેદવારોની અરજીઓનું અભ્યાસ, જાતિ તેમજ વૈવાહિક દરજાઓ દર્શાવતું કોઈક

અભ્યાસ	પુરુષ			સ્ત્રી			કુલ		
	પરિણીત	અપરિણીત	કુલ	પરિણીત	અપરિણીત	કુલ	પરિણીત	અપરિણીત	કુલ
સ્નાતક	150	450	600	160	240	400	310	690	1000
અનુસ્નાતક	192	288	480	160	160	320	352	448	800
અન્ય બલસાયિક	70	70	140	36	24	60	106	94	200
કુલ	412	808	1220	356	424	780	768	1232	2000

10. (1) 50 ટકાનો વધારો
(2) 20 ટકા
(3) પુરુષોમાં 53.33 ટકાનો વધારો અને સ્ત્રીઓમાં 40 ટકાનો વધારો.

વિભાગ F

1. આંખનાં લેન્સની જાડાઈ દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

લેન્સની જાડાઈ	1.505 - 1.510	1.510 - 1.515	1.515 - 1.520	1.520 - 1.525	1.525 - 1.530	કુલ
લેન્સની સંખ્યા	5	3	6	7	4	25

ખામીવાળા લેન્સની ટકાવારી = 36 %

2. 30 દિવસ દરમિયાન શેરના બંધભાવમાં થયેલ ફેરફારો દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

શેરની ડિમન (₹)	10.5 - 12.5	12.5 - 14.5	14.5 - 16.5	16.5 - 18.5	18.5 - 20.5	20.5 - 22.5	કુલ
દિવસોની સંખ્યા	2	6	8	4	8	2	30

(i) ₹ 17.5 (ii) 16 દિવસો (iii) 6 દિવસો

3. 40 દિવસ દરમિયાન મિક્સરના ઉત્પાદનની સંખ્યામાં થતા તરફાવતો દર્શાવતું નિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

મિક્સરનાં ઉત્પાદનમાં થયેલ તરફાવત	-12 થી -6	-6 થી 0	0 થી 6	6 થી 12	12 થી 18	18 થી 24	કુલ
દિવસોની સંખ્યા	2	5	12	10	6	5	40

‘થી ઓછા’ પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

ગ્રિફ સીમાબિંદુ	-12	-6	0	6	12	18	24
સંચયી આવૃત્તિ	0	2	7	19	29	35	40

‘થી વધુ’ પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

અધ: સીમાબિંદુ	-12	-6	0	6	12	18	24
સંચયી આવૃત્તિ	40	38	33	21	11	5	0

4. 30 વિદ્યાર્થીઓની ઊંચાઈ દર્શાવતું અનિવારક સતત આવૃત્તિ-વિતરણ

ઊંચાઈ (સેમી)	140 - 144	145 - 149	150 - 154	155 - 159	160 - 164	165 - 169	કુલ
વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા	2	8	8	4	6	2	30

‘થી ઓછા’ પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

ગ્રિફ સીમાબિંદુ	139.5	144.5	149.5	154.5	159.5	164.5	169.5
સંચયી આવૃત્તિ	0	2	10	18	22	28	30

‘થી વધુ’ પ્રકારનું સંચયી આવૃત્તિ-વિતરણ

અધ: સીમાબિંદુ	139.5	144.5	149.5	154.5	159.5	164.5	169.5
સંચયી આવૃત્તિ	30	28	20	12	8	2	0

(i) 8 વિદ્યાર્થીઓ (ii) 12 વિદ્યાર્થીઓ (iii) 149 સેમી

5. યુનિવર્સિટીના વિદ્યાર્થીઓનું વિદ્યાશાખા તેમજ જાતિ અનુસાર વર્ગીકરણ

વિદ્યાશાખા	ઇક્ષોરાઓ	ઇક્ષોરીઓ	કુલ
ઇજનેરી	7750	3150	10,900
ડાક્ટરી	6000	4000	10,000
વિજ્ઞાન	7000	1000	8000
વિનયન	2800	6800	9600
વાણિજ્ય	450	1050	1500
કુલ	24,000	16,000	40,000



સ્વાધ્યાય 3.1

- (1) મધ્યક = 1.78 સેમી
- (2) સુધારેલ મધ્યક = 24.5 વર્ષ, ભાગ લઈ શકશે.
- (3) મધ્યક = 41 મિમી
- (4) મધ્યક = 35.36 ગુણ
- (5) મધ્યક = 7.49 મિનિટ
- (6) મધ્યક = ₹ 18.76 લાખ
- (7) મધ્યક = 40 એકમો

સ્વાધ્યાય 3.2

- (1) ભિન્ન મધ્યક = ₹ 198.75
(2) ભારિત મધ્યક = 118.09 ટકાવારી ફેરફાર
(3) ભારિત મધ્યક = ₹ 506.67
(4) મધ્યક = 82 ગુણ

સ્વાધ્યાય 3.3

- (1) ગુજરાતી મધ્યક = 2.61 પુસ્તકો
(2) સરેરાશ ધસારો = 6.05 % (ગુજરાતી મધ્યક)
(3) ગુજરાતી મધ્યક = 61.73 કિમી

સ્વાધ્યાય 3.4

- ચતુર્થકો $Q_1 = 4$ ગુણ, $Q_2 = 6$ ગુણ, $Q_3 = 7$ ગુણ
- મધ્યસ્થ = 229.17 કિમી, 50 % દિવસોની મુસાફરી 229.17 કિમી કે તેથી ઓછી હશે.
 $Q_3 = 291.67$ કિમી, સૌથી ઓછી મુસાફરી થયેલ 75 % દિવસોમાં મહત્તમ અંતર 291.67 કિમી હશે.
- $D_8 = 314.29$ કિમી, સૌથી ઓછી મુસાફરી થયેલ 80 % દિવસોમાં મહત્તમ અંતર 314.29 કિમી હશે.
- $P_{62} = 259.17$ કિમી, સૌથી ઓછી મુસાફરી થયેલ 62 % દિવસોમાં મહત્તમ અંતર 259.17 કિમી હશે.
- મધ્યસ્થ = 19 વર્ષ, 50 % વિદ્યાર્થીઓની ઉભર 19 વર્ષ કે તેથી ઓછી હશે.
 $Q_1 = 18$ વર્ષ, 25 % વિદ્યાર્થીઓની ઉભર 18 વર્ષ કે તેથી ઓછી હશે.
- $D_4 = 19$ વર્ષ, 40 % વિદ્યાર્થીઓની ઉભર 19 વર્ષ કે તેથી ઓછી હશે.
- $P_{32} = 18.92$ વર્ષ, 32 % વિદ્યાર્થીઓની ઉભર 18.92 વર્ષ કે તેથી ઓછી હશે.
- મધ્યસ્થ = ₹ 21.78 હજાર, સૌથી વધુ વેતન ધરાવતા 20 % કર્મચારીઓના વેતનની ન્યૂનતમ સીમા = ₹ 26.84 હજાર
- મધ્યસ્થ = ₹ 495
- અવગ્નિકૃત માહિતી પરથી મધ્યસ્થ = 4 દિવસ
વગ્નિકૃત માહિતી પરથી મધ્યસ્થ = 4.17 દિવસ
બંને કિંમતો લગભગ સમાન છે.

સ્વાધ્યાય 3.5

- બહુલક = 138
- બહુલક = 13 કેક
- આસાદિત સૂત્ર માટે મધ્યક = 68.85 વર્ષ, મધ્યસ્થ = 67.11 વર્ષ તેથી બહુલક = 63.63 વર્ષ
- બહુલક તેની વ્યાખ્યાની રીતે શોધી શકતો નથી જ્યારે આસાદિત સૂત્રથી મેળવી શકાય.
- સૂત્રના આધારે બહુલક = 152.35 ગ્રામ
આલેખ પરથી બહુલક = 153 ગ્રામ
- બહુલક = ₹ 22 હજાર

સ્વાધ્યાય 3

વિભાગ A

- | | | | | |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1. (a) | 2. (d) | 3. (b) | 4. (c) | 5. (a) |
| 6. (b) | 7. (c) | 8. (d) | 9. (c) | 10. (b) |
| 11. (a) | 12. (b) | 13. (c) | 14. (b) | 15. (d) |

વિભાગ B

- | | | |
|----------------------|----------------------------|------------------|
| 2. ભારિત મધ્યક | 4. $M_o = 3 M - 2 \bar{x}$ | 7. કાર્લ પિયર્સન |
| 8. મધ્યસ્થ = 55 | 9. મધ્યક = 13 | 10. બહુલક = 10 |
| 11. બીજી સંખ્યા = 4 | 12. $Q_1 = 4$ | 13. મધ્યસ્થ |
| 14. $P_{75} = 25.75$ | 15. મધ્યસ્થ = 150 | |

વિભાગ C

- | | | |
|------------------------|--------------------------|-----------------------|
| 7. મધ્યસ્થ = 5.8 | 8. બીજી સંખ્યા = 16 | 9. મધ્યક = 293 |
| 10. $a = 10$ | 11. મિશ્ર મધ્યક = 81 ગુણ | 12. મધ્યસ્થ = 2 વાહનો |
| 13. ભારિત મધ્યક = 1090 | | |

વિભાગ D

7. સરેરાશ વિકાસદર = 2.87 % ગુણોત્તર મધ્યક
8. $D_7 = 8$ ફોન, 70 % ટિવસોનું વેચાણ 8 કે તેથી ઓછા ફોનનું હશે.
 $P_{15} = 6$ ફોન, 15 % ટિવસોનું વેચાણ 6 કે તેથી ઓછા ફોનનું હશે.
9. મધ્યક = 30.07 મિ.લિ. મશીન યોજય રીતે કામ કરે છે.
10. મધ્યક = 61.62 ગુણ
11. નવો મધ્યક = 34.69
12. મધ્યસ્થ = 54 ગુણ
13. મધ્યક = 138.9 એકમો. જાહેરાતથી વેચાણનો મધ્યક વધ્યો છે.

વિભાગ E

- | | |
|---|---|
| 1. મધ્યસ્થ = 362.5 યુનિટ | 2. બહુલક = ₹ 2.86 હજાર |
| 3. $Q_1 = 34.21$ ગૂણ, $D_4 = 36.69$ ગૂણ | 4. મધ્યક = 164.97 સેમી |
| 5. મધ્યસ્થ = ₹ 15.2 હજાર | 6. બહુલક = 23 હજાર |
| 7. મધ્યક = 24.46 ગુણ | 8. $Q_1 = 6.66$ કલાક, $Q_3 = 7.64$ કલાક |

વિભાગ F

1. (i) $D_3 = 25$, નાપાસ થનારા વિદ્યાર્થીઓમાં મહત્તમ ગુણ 25 હશે તેથી પાસ થવા માટે 26 ગુણ જરૂરી હશે.
(ii) $P_{95} = 60.83$, સૌથી વધુ ગુણ મેળવનારા 5 % વિદ્યાર્થીઓમાં ન્યૂનતમ ગુણ 61 હશે.
2. A માટે મધ્યક = 22.33 હજાર કિમી
B માટે મધ્યક = 23.5 હજાર કિમી \therefore B બ્રાન્ડના ટાયર વધારે સારા
3. આસાદિત સૂત્ર માટે મધ્યક = 16.71 મોટર, મધ્યસ્થ = 16.72 મોટર
તેથી બહુલક = 16.74 મોટર
4. મધ્યક = 35.93 કિવન્ટલ મધ્યસ્થ = 35.11 કિવન્ટલ
5. બહુલક = 34 વર્ષ
6. બહુલક = 72.5 એકમો. બહુલકની કિંમત વધી છે.
7. x માટે મધ્યસ્થ = 13.26 ડબા
 y માટે મધ્યસ્થ = 10.7 ડબા
 x નું વેચાણ વધારે છે.
8. બહુલક = 25.5 વર્ષ



સ્વાધ્યાય 4.1

1. વિસ્તાર = 40 સેમી, વિસ્તારાંક = 0.12
 3. વિસ્તાર = 60 ગુણ, વિસ્તારાંક = 0.6
2. વિસ્તાર = 35, વિસ્તારાંક = 0.90
 4. વિસ્તાર = ₹ 29 હજાર, વિસ્તારાંક = 0.74

સ્વાધ્યાય 4.2

1. $Q_d = 7.88$ મિલી, ચતુર્થક વિચલનાંક = 0.29
 3. $Q_d = ₹ 38.54$, ચતુર્થક વિચલનાંક = 0.32
2. $Q_d = 10$ ગુણ, ચતુર્થક વિચલનાંક = 0.33

સ્વાધ્યાય 4.3

1. સરેરાશ વિચલન = 5 સેમી
 2. સરેરાશ વિચલન = 2.8 બેરિંગ, સરેરાશ વિચલનાંક = 0.35
 3. સરેરાશ વિચલન = 3.33 મિનિટ, સરેરાશ વિચલનાંક = 0.46
 4. સરેરાશ વિચલન = 15 ટી.વી., સરેરાશ વિચલનાંક = 0.25
 5. સરેરાશ વિચલન = 13.18 બોક્સ

સ્વાધ્યાય 4.4

1. $s = 2.67$ ગુણ
 3. $s = 6.71$ એકમો, પ્રમાણિત વિચલનાંક = 0.35
 5. $s = 19.76$ વર્ષ, પ્રમાણિત વિચલનાંક = 0.56
2. $s = 2.65$ કાર
 4. $s = 12.89$ (લાખ રૂપિયા)

સ્વાધ્યાય 4.5

1. શેર A માટે : $\bar{x} = ₹ 321$, $s = ₹ 2.65$, ચલનાંક = 0.83 %
 શેર B માટે : $\bar{x} = ₹ 140$, $s = ₹ 7.14$, ચલનાંક = 5.1 %, શેર Bના ભાવમાં સાપેક્ષ ચલન વધુ છે.
 2. કંપની A અને B ના ચલનાંક અનુક્રમે 5 % અને 4 % છે. કંપની B ના વેતનમાં સ્થિરતા વધુ છે.
 3. બે શ્રેષ્ઠિનાં મધ્યકે અનુક્રમે 50 અને 36

સ્વાધ્યાય 4.6

1. $\bar{x}_c = 53.45$, $S_c = 12.64$
 2. $\bar{x}_c = 21$ મિનિટ, $S_c = 5.22$ મિનિટ

સ્વાધ્યાય 4

વિભાગ A

1. (b) 2. (a) 3. (d) 4. (c) 5. (a) 6. (c)
 7. (a) 8. (c) 9. (b) 10. (c) 11. (a) 12. (a)

વિભાગ B

3. સાપેક્ષ માપો 4. પ્રમાણિત વિચલન 5. (સેન્ટિમીટર)²
 6. વિસ્તાર = 100 સેમી 7. $Q_d = 15.91$ 8. $s = 0$
 9. સરેરાશ વિચલન = 2

વિભાગ C

4. સરેરાશ વિચલન અને પ્રમાણિત વિચલન 5. વિસ્તાર = 14, વિસ્તારાંક = 1.75
 6. $Q_d = 6$, ચતુર્થક વિચલનાંક = 0.67 7. સરેરાશ વિચલન = 2.4
 8. વિચરણ = 25 9. $s = 1.41$

10. A નો ચલનાંક 20 %, B નો ચલનાંક = 25%, ઉત્પાદનના સંદર્ભમાં ફેકટરી A વધુ સ્થિર છે.
 11. ચતુર્થક વિચલનાંક = 0.29

વિભાગ D

વિભાગ E

- $\bar{x} = 25.17$ ગુણ, સરેરાશ વિચલન = 3.81 ગુણ
 - $Q_1 = ₹ 16.5$ હજાર, $Q_3 = ₹ 43.75$ હજાર, $Q_d = ₹ 13.63$ હજાર
 - $s = 15.94$ રન
 - $Q_1 = 14.5$ ગુણ, $Q_3 = 34.5$ ગુણ, $Q_d = 10$ ગુણ
 - ટીમ A માટે : $\bar{x} = 1.45$ ગોલ, $s = 1.48$ ગોલ, ચલનાંક = 102.07 %
ટીમ B માટે : $\bar{x} = 1.07$ ગોલ, $s = 1.33$ ગોલ, ચલનાંક = 124.3 %
ટીમ A વહુ સંગીન છે.
 - સુધારેલો મધ્યક = 39.3
સુધારેલો પ્રમાણિત વિચલન = 10.24
 - કુલ ખર્ચ y માટે : વિસ્તાર = 150, ચહુર્થક વિચલન = 15, સરેરાશ વિચલન = 24 અને પ્રમાણિત વિચલન = 30

વિભાગ F

1. વિસ્તાર = 32 મુલાકાત, વિસ્તારાંક = 0.84
ચતુર્થક વિચલન = 6 મુલાકાત, ચતુર્થક વિચલનાંક = 0.33
સરેરાશ વિચલન = 5.91 મુલાકાત, સરેરાશ વિચલનાંક = 0.33
 2. $\bar{x} = 15.54$ દિવસો, $s = 1.45$ દિવસો, $\bar{x} \pm s = 14.09$ દિવસો થી 16.99 દિવસો, 55 %
 3. ચતુર્થક વિચલન યોગ્ય માપ છે. $Q_1 = 17.5$ ગુણ, $Q_3 = 29$ ગુણ, $Q_d = 5.75$ ગુણ, ચતુર્થક વિચલનાંક = 0.25
 4. $s = ₹ 14.84$ હજાર
 5. $\bar{x} = ₹ 42.6$, સરેરાશ વિચલન = ₹ 14.99
 6. $\bar{x} = ₹ 404.35$, $s = ₹ 172.58$, ચલનાંક = 42.68 %
 7. વિદ્યાર્થી A માટે : $\bar{x} = 62$ ગુણ, $s = 11.49$ ગુણ, ચલનાંક = 18.53 %
વિદ્યાર્થી B માટે : $\bar{x} = 60.5$ ગુણ, $s = 8.62$ ગુણ, ચલનાંક = 14.25 %
વિદ્યાર્થી B ના ગુણનો ચલનાંક ઓછો છે તેથી વિદ્યાર્થી B અભ્યાસમાં વધુ સુસંગત છે.
 8. સમૂહ A માટે : $\bar{x} = 46.29$ કિગ્રા, $s = 11.57$ કિગ્રા, ચલનાંક = 25 %
સમૂહ B માટે : $\bar{x} = 46.43$ કિગ્રા, $s = 10.93$ કિગ્રા, ચલનાંક = 23.54 %
સમૂહ A માં સાપેક્ષ ચલન વધુ છે.



પ્રકરણ 5

સ્વાધ્યાય 5.1

1. $\bar{x} = 4.27$ દૂધની કોથળીઓ, $M_0 = 4$ દૂધની કોથળીઓ, $s = 1.65$ દૂધની કોથળીઓ, $j = 0.16$
2. $\bar{x} = 14.01$ ટીચ, $M = 14$ ટીચ, $s = 0.87$ ટીચ, $j = 0.03$, ધન વિષમતા
3. $\bar{x} = 14.22$ મિનિટ, $M_0 = 12.28$ મિનિટ, $s = 5.33$ મિનિટ, $j = 0.36$, ધન વિષમતા
4. $\bar{x} = ₹ 9.92$ લાખ, $M_0 = ₹ 9.8$ લાખ, $s = ₹ 2.37$ લાખ, $j = 0.05$, ધન વિષમતા
5. $\bar{x} = ₹ 20.12$ લાખ, $M = ₹ 21.5$ લાખ, $s = ₹ 7.98$ લાખ, $S_k = ₹ -4.14$ લાખ, $j = -0.52$, ઋણ વિષમતા
6. $\bar{x} = 10.31$ હજાર ગાંસડી, $M = 9.86$ હજાર ગાંસડી, $s = 6.33$ હજાર ગાંસડી, $S_k = 1.35$ હજાર ગાંસડી, $j = 0.21$, ધન વિષમતા
7. $\bar{x} = 9.5$ સેલ્ફિયસ, $M = 8.6$ સેલ્ફિયસ, $s = 7.27$ સેલ્ફિયસ, $S_k = 2.7$ સેલ્ફિયસ, $j = 0.37$, ધન વિષમતા.

સ્વાધ્યાય 5.2

1. $Q_1 = 20$ વર્ષ, $M = 22$ વર્ષ, $Q_3 = 25$ વર્ષ, $j = 0.2$, ધન વિષમતા
2. $Q_1 = ₹ 335$ લાખ, $M = ₹ 490$ લાખ, $Q_3 = ₹ 912.5$ લાખ, $S_k = ₹ 267.5$ લાખ, $j = 0.46$, ધન વિષમતા
3. $Q_1 = 40$ હજાર ટન, $M = 48$ હજાર ટન, $Q_3 = 68.75$ હજાર ટન, $S_k = 12.75$ હજાર ટન, $j = 0.44$, ધન વિષમતા
4. $Q_1 = ₹ 18.27$ હજાર, $M = ₹ 20.53$ હજાર, $Q_3 = ₹ 22.44$ હજાર, $j = -0.08$

સ્વાધ્યાય 5

વિભાગ A

- | | | | | | | |
|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1. (c) | 2. (b) | 3. (c) | 4. (c) | 5. (a) | 6. (d) | 7. (c) |
| 8. (d) | 9. (a) | 10. (b) | 11. (c) | 12. (a) | 13. (d) | 14. (b) |

વિભાગ B

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 13. ઋણ વિષમતા ધરાવે છે. | 14. ઋણ વિષમતા ધરાવે છે. |
| 15. ઋણ વિષમતા ધરાવે છે. | 16. આવૃત્તિ-વિતરણ સંભિતતા ધરાવે છે. |
| 17. આવૃત્તિ-વિતરણ સંભિતતા ધરાવે છે. | |

વિભાગ C

- | | | |
|----------------------------|-----------------|--------------------------|
| 5. $\bar{x} = 46$ | 6. $M = 69$ | 7. $M = 32.50$ |
| 8. $s = 12$ | 9. $j = 0.33$ | 10. $j = -0.15$ |
| 11. $M = 42$, $j = -0.4$ | 13. $j = -0.24$ | 14. $s = 4$, $s^2 = 16$ |
| 15. $M_0 = 38$, $j = 0.5$ | | |

વિભાગ D

- | | |
|--|---|
| 5. સમૂહ A નો વિષમતાંક $j = -0.17$, સમૂહ B નો વિષમતાંક $j = -0.40$, સમૂહ A સંભિતતાની નજીક છે. | 6. સમૂહ A નો $Q_1 = 36$, $M = 48$, $Q_3 = 72$, સમૂહ A નો $j = 0.33$, સમૂહ B નો $j = 0.39$, સમૂહ A કરતા સમૂહ B વધુ વિષમ છે. |
| 7. $S_k = 1.6$, $j = 0.07$ | 8. $s = 8$, $j = -0.025$ |
| 9. $\bar{x} = 32$, $s = 4$, $j = -0.15$ | 10. $M_0 = 66$, $M = 62$ |

11. $s = 12$, $M_o = 56$, $M = 61.33$, ચલનાંક $= 18.75$ 12. $j = -0.75$
 13. $\bar{x} = 36$, $M_o = 24$, $M = 32$, કાર્લ પિયર્સનની રીતે $j = 0.19$, બાઉલીની રીતે $j = -0.4$

વિભાગ E

6. પેઢી A : કાર્લ પિયર્સનની રીતે વિષમતાંક $j = 0.69$, બાઉલની રીતે વિષમતાંક $j = -0.25$
 પેઢી B : કાર્લ પિયર્સનની રીતે વિષમતાંક $j = 1.58$, બાઉલીની રીતે વિષમતાંક $j = 0.5$
 કાર્લ પિયર્સનની પદ્ધતિમાં પેઢી A કરતાં પેઢી B ની માહિતી વધુ વિષમતા ધરાવે છે. બાઉલીની પદ્ધતિમાં પેઢી A કરતાં પેઢી B વધુ વિષમ છે.
 7. $\bar{x} = 18.9$ ડાન, $M = 18$ ડાન, $s = 4.44$ ડાન, $j = 0.61$
 8. $\bar{x} = 21.14$ એકમ, $M_o = 20$ એકમ, $s = 1.65$ એકમ, $j = 0.69$
 9. $\bar{x} = 240$, $s = 7.5$, $j = -2.4$, અણ વિષમતા

વિભાગ F

1. $Q_1 = 2$ કલાક, $M = 3$ કલાક, $Q_3 = 4$ કલાક, $j = 0$, બાઉલીનો, $j = 0$
 2. $\bar{x} = 14.89$ સેલ્વિયસ $M = 15.12$ સેલ્વિયસ, $s = 7.95$ સેલ્વિયસ, $j = -0.09$, અણ વિષમતા
 3. $\bar{x} = 31.42$ ગૃણ, $M = 31.32$ ગૃણ, $s = 11.68$ ગૃણ, $j = 0.026$, ધન વિષમતા
 4. $Q_1 = ₹ 17.5$ લાખ, $Q_3 = ₹ 34.38$ લાખ, $M = ₹ 26$ લાખ, $j = -0.007$, અણ વિષમતા
 5. $\bar{x} = 9.28$ એકમ $M = 8$ એકમ, $s = 6.66$ એકમ, $S_k = 3.84$, $j = 0.58$
 6. $Q_1 = 4.19$ મિલી, $Q_3 = 4.46$ મિલી, $M = 4.32$ મિલી, $j = 0.037$, ધન વિષમતા
 7. $\bar{x} = 9.23$ પોકેટ, $M = 4.75$ પોકેટ, $s = 10.22$ પોકેટ, $j = 1.32$, ધન વિષમતા
 8. $Q_1 = 2.95$ ચોમી, $Q_3 = 5.95$ ચોમી, $M = 4.55$ ચોમી, $j = -0.067$, અણ વિષમતા
 9. $\bar{x} = 180$ ચોમી ક્ષેત્રફળ, $M_o = 180$ ચોમી ક્ષેત્રફળ, $s = 41.63$ ચોમી ક્ષેત્રફળ, $j = 0$, આપેલ વિતરણ સંભિત છે.
 10. $Q_1 = 23.75$ યુનિટ, $Q_3 = 35.63$ યુનિટ, $M = 30.5$ યુનિટ, $j = -0.14$



સ્વાધ્યાય 6.1

- | | | | | |
|---------------|------------|------------|--------------|----------|
| 1. (1) 720 | (2) 2450 | (3) 40,320 | (4) 3,62,880 | |
| 2. $n = 11$ | 3. $r = 4$ | 4. $n = 7$ | 5. 24 | 6. 600 |
| 7. 2880 | 8. 576 | 9. 72 | 10. 24 | |
| 11. (1) 50400 | (2) 151200 | (3) 90720 | 12. 2:1 | 13. 9072 |
| 14. (1) 49 | (2) 12 | (3) 83 | (4) 93 | (5) 40 |
| 15. 240 | 16. 720 | | | |

સ્વાધ્યાય 6.2

- | | | | | |
|----------------|--------------------------|-----------|--------------|--------------|
| 1. (1) 330 | (2) 1 | (3) 300 | (4) 1 | |
| 2. (1) $n = 8$ | (2) $r = 8$ અથવા $r = 5$ | | (3) $n = 6$ | (4) $n = 10$ |
| 3. 28 | 4. 10 | 5. 120 | 6. 2184 | |
| 7. (1) 11 | (2) 15 | 8. (1) 78 | (2) 16 | |
| 9. (1) 56 | (2) 20 | 10. 55 | 11. 63 | |
| 12. (1) 35 | (2) 21 | 13. 127 | 14. 560, 126 | |
| 15. $n = 8$ | 16. $r = 4$ | | | |

स्वाध्याय 6.3

- 1.**

 - (1) $27a^3 + 108a^2b + 144ab^2 + 64b^3$
 - (2) $1 + 7x + 21x^2 + 35x^3 + 35x^4 + 21x^5 + 7x^6 + x^7$
 - (3) $\frac{81}{x^4} - \frac{144}{x^2} + 96 - \frac{256x^2}{9} + \frac{256x^4}{81}$
 - (4) $\frac{x^3}{729} + \frac{2x^2}{27} + \frac{5x}{3} + 20 + \frac{135}{x} + \frac{486}{x^2} + \frac{729}{x^3}$
 - (5) $\frac{a^5}{32} - \frac{5a^4b}{48} + \frac{5a^3b^2}{36} - \frac{5a^2b^3}{54} + \frac{5ab^4}{162} - \frac{b^5}{243}$

2.

 - (1) 352
 - (2) 198
 - (3) 248

स्वाध्याय ६

विभाग A

- 1.** (d) **2.** (a) **3.** (b) **4.** (d) **5.** (b) **6.** (c)
7. (b) **8.** (a) **9.** (d) **10.** (a) **11.** (d)

વિભાગ B

- 5.** 1,6,15,20,15,6,1 **7.** 60 **8.** 6 **9.** 7 **10.** 5039 **11.** 60 **12.** 120

ପିଲାଗ୍ରୀ

- 2.** 720 **3.** 144 **4.** 12441600 **5.** 96 **6.** 12 **7.** 72

8. 18 9. 1:1 10. 6 11. 12 12. 5200

- 13.** $8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3$

- $$14 - x^3 = 3x + \frac{3}{x} = \frac{1}{c}$$

- 14.** $x^5 - 3x^4 + x^3$

15. $y^5 + 5y^4k + 10y^3k^2 + 10y^2k^3 + 5yk^4 + k^5$

વિભાગ D

1. (1) 120 (2) 72 (3) 24	2. 1152	3. (1) 48 (2) 12 (3) 36
4. 4370	5. (1) 4 (2) 16 (3) 12	6. (1) 9 (2) 12 (3) 6
7. (1) 1 (2) 36 (3) 12	8. (1) 34 (2) 50	9. 44
		10. 416

સ્વાધ્યાય 7

વિભાગ A

- 1.** (d) **2.** (b) **3.** (b) **4.** (a) **5.** (c) **6.** (c) **7.** (a)

विभाग B

1. (1) ખોદું (2) ખોદું (3) સાચું (4) સાચું
 (5) સાચું (6) ખોદું (7) સાચું

2. નિર્ધારણ 3. સ્તરિત 4. પાડિક 5. ટિપેટ 6. સમાણ તપાસ

વિભાગ D

દાખલા નંબર 13 થી 17ના આપેલ જવાબ ઉપરાંત અન્ય યાદશ્રિક નિદર્શ પણ મળી શકે છે.

13. 018, 096, 027, 007, 012
14. 27, 32, 59, 66, 32, 48, 25
15. પુરવણી સહિત : 170, 111, 002, 203, 111, 233, 300
પુરવણીરહિત : 170, 111, 002, 203, 233, 300, 250
16. પ્રથમ વર્ષ : 158, 092, 009, 200
દ્વિતીય વર્ષ : 019, 131, 057, 006
તૃતીય વર્ષ : 027, 070, 198, 200
17. ધર્તિ પકવતાં ખેડૂતો : 12, 18, 20, 11, 03, 10
ચોખા પકવતાં ખેડૂતો : 04, 11, 08, 13
19. $N = 20, n = 4, k = N/n = 20/4 = 5$
નિદર્શ 1 : 1, 6, 11, 16 નિદર્શ 4 : 4, 9, 14, 19
નિદર્શ 2 : 2, 7, 12, 17 નિદર્શ 5 : 5, 10, 15, 20
નિદર્શ 3 : 3, 8, 13, 18
20. $N = 30, n = 10, k = N/n = 30/10 = 3$
નિદર્શ 1 : 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28
નિદર્શ 2 : 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29
નિદર્શ 3 : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30



સ્વાધ્યાય 8

વિભાગ A

1. (a) 2. (a) 3. (b) 4. (b) 5. (c) 6. (c) 7. (b) 8. (c)

વિભાગ B

1. પ્રદેશ ગણ અને સહપ્રદેશ ગણ અરિકત ન હોવા જોઈએ.
2. હા
3. ના
7. ના. બંને વિધેયોના પ્રદેશ ગણ જુદા છે.
8. અનેક-એક
9. એક-એક

વિભાગ C

4. $R_f = \{3, 4, 5\}$
5. અનેક-એક
6. એક-એક
7. $D_f = \{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\}$
8. 0
9. $R_f = \{-\frac{3}{4}, 0, \frac{3}{10}\}$
10. 27
11. અનેક-એક
12. $x = 2$
13. એક-એક
14. 14
15. 0

વિભાગ D

1. $D_f = \{10, 20, 30\}, B = \{18, 48, 98, 128, 148\}, R_f = \{48, 98, 148\}$
2. $D_f = \{-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}, B = \{-\frac{1}{5}, 1, \frac{1}{3}, 3\}, R_f = \{-\frac{1}{5}, 1, \frac{1}{3}, 3\}$

3. $f(-1) = -1, f(-2) = -\frac{5}{4}, f\left(\frac{1}{2}\right) = 5$ 4. $D_f = \{3, 4, 5, 7\}$ 5. $x = \pm \frac{1}{2}$
 6. $R_f = \{2, 5, 10, 17\}$ 7. 5 8. $\{0, 3\}$
 9. અસમાન વિધેયો 10. અનેક-એક 12. $\frac{14}{27}$
 13. 36 14. $\frac{58}{11}$ 15. 40, 1300



પ્રકરણ 9

વિભાગ A

1. (d) 2. (a) 3. (a) 4. (b) 5. (c)
 6. (b) 7. (d) 8. (c) 9. (a) 10. (c)

વિભાગ B

1. $a r^n$ 2. 0.1 3. 140 4. 2 5. $\frac{1}{4}$
 6. -1 7. 4 8. સાચું 9. સાચું

વિભાગ C

3. $a = 3$ 4. $r = 5$ 5. 80 6. પાંચમું
 8. 16 9. (1) 6250 (2) $\frac{25}{16}$ (3) $\frac{128}{6561}$ (4) 8

વિભાગ D

1. ± 135 2. $T_5 = \frac{1}{3}$ અને $S_4 = \frac{65}{16}$ 3. $\frac{1}{16}$ 4. 120
 5. 12.4 6. 4, 16, 64.... 7. $m = \pm 10, t = \pm 40$
 8. $n = 4$ 9. $n = 5$ 10. $\frac{16}{3}$ 11. $8(3^n)$
 12. 125 13. 6 14. $a = 4$ અને $n = 5$
 15. (1) 340 (2) $\frac{211}{8}$ (3) 124.96 (4) $\frac{1023}{1024}$

વિભાગ E

1. $k = 5$ 2. $n = 6$ 3. $n = 11$
 4. 81 5. $r = \pm 3$ 6. $r = \pm 2$
 7. 1, 5, 25 અથવા 25, 5, 1 8. 2, -4, 8 અથવા 8, -4, 2 9. $S_{10} = ₹ 1,02,30,000$
 10. 248 નોટે 11. 6095 12. ₹ 2,65,720.50

