

Discovery of an 8-length Prime Chain under a 3-adic Collatz-like Map

Hiroshi Harada — February 22, 2026

Abstract

本報告では、3 進 Collatz 型の写像によって生成される長さ 8 の素数連鎖を発見したことを述べる。写像 $f(n)$ は以下のように定義される：

- $n \equiv 1 \pmod{3}$ のとき： $f(n) = (4n - 1) / 3$
- $n \equiv 2 \pmod{3}$ のとき： $f(n) = (4n + 1) / 3$
- $n \equiv 0 \pmod{3}$ のとき：連鎖終了

6×10^8 までの全探索の結果、長さ 8 の素数連鎖は **46,000,363** を初項とするものが唯一であった。同等以上の長さを持つ連鎖は他に確認されなかった。

1. Definition

3 進素数連鎖 (3-adic prime chain) とは、素数列 (p_0, p_1, \dots, p_k) が以下を満たすものである：

- $p_{i+1} = f(p_i)$
- 各 p_i は素数
- $f(p_k)$ が合成数になるか、 $p_k \equiv 0 \pmod{3}$ で連鎖終了

これは、古典的な Cunningham 連鎖 ($2p \pm 1$) を、3 進 Collatz 的な分岐写像へ一般化したものである。

2. Discovered Length-8 Chain

46000363, 61333817, 81778423, 109037897, 145383863, 193845151, 258460201, 344613601

各ステップは $p_{i+1} = (4p_i \pm 1) / 3$ を満たし、符号は $p_i \pmod{3}$ によって決定される。8 個すべての値は、決定論的素数判定により素数であることを確認した。

3. Search Method

Python (SymPy) を用いて、 6×10^8 未満のすべての素数を対象に探索を行った。各素数 p から写像 f を反復適用し、途中の値がすべて素数である場合のみ連鎖として記録した。長さ 8 連鎖の部分列 (長さ 6 や 7 の prefix) は「独立した連鎖」としては数えない。

結果：

- 長さ 8：1 本 (唯一の極大連鎖)
- 長さ 7：0 本 (すべて長さ 8 の部分列)
- 長さ 6：複数本 (多くが長さ 8 連鎖に合流)

したがって、46,000,363 を初項とする連鎖が、探索範囲内で唯一の長さ 8 連鎖である。

4. Observations

4.1 増加率

写像は概ね $f(n) \approx (4/3)n$ で増加するため、値は急速に大きくなる。素数密度の減少と相まって、長い素数連鎖は極めて稀になる。

4.2 3 進的分岐構造

写像は $n \pmod{3}$ のみに依存して分岐し、常に整数値を返す。これは古典的 Cunningham 連鎖にはない特徴である。

4.3 一意性

6×10^8 未満では、長さ 8 以上の素数連鎖は他に存在しなかった。より大きな範囲で長さ 9 以上の連鎖が存在するかは未解決である。

5. Conclusion

本研究では、初項 46,000,363 から始まる長さ 8 の 3 進 Collatz 型素数連鎖を発見した。これは 6×10^8 までの探索で唯一の長さ 8 連鎖であり、この写像の下で長い素数連鎖が極めて稀であることを示している。

6. Code Availability

本研究で使用した Python スクリプトは、Zenodo 提出物に含まれている。

License

© 2026 Hiroshi Harada — MIT License.

This work and the accompanying code are licensed under the MIT License.