

Length-7 Prime Chains under the Collatz Map

Hiroshi Harada

February 19, 2026

1. 概要 (Abstract)

Collatz 予想の文脈では、任意の自然数は最終的に 1 に収束すると考えられている。しかし、局所的には「発散的」な挙動が見られることがあり、特に写像 $f(x) = (3x + 1)/2$ を繰り返し適用することで、素数のみからなる数列（素数連鎖）が生成されることがある。本報告では、初項 $x = 89599$ から始まる長さ 7 の素数連鎖を発見したこと、並びにその連鎖が成立する合同算術的性質について考察する。

2. 定義

Collatz 写像における一般化 Cunningham 連鎖 (Generalized Cunningham Chain) は、以下の条件を満たす数列 (x_0, x_1, \dots, x_k) と定義する：

1. $x_{i+1} = (3x_i + 1)/2$
2. 各 x_i は素数である

この変換 $f(x)$ は、奇数に対して適用される Collatz 問題の「増加ステップ」に対応する。

3. 発見された連鎖

Primorial (素数の階乗) に基づく篩 (ふるい) を用いた系統的な探索により、以下の長さ 7 の素数連鎖が発見された：

- $x_0 = 89599$
- $x_1 = 134399$
- $x_2 = 201599$
- $x_3 = 302399$
- $x_4 = 453599$
- $x_5 = 680399$
- $x_6 = 1020599$

連鎖の終了：次の項 $x_7 = 1530899$ は合成数であり、41 で割り切れる ($1530899 = 41 \times 37339$)。したがって、連鎖は長さ 7 で終了する。

4. 観察：「99」の不変性

この連鎖の特徴として、すべての項が「99」で終わっている点が挙げられる。これは偶然ではなく、以下のような合同条件を満たすことで説明できる：

$$(3x + 1)/2 \equiv x \pmod{100} \Rightarrow x \equiv -1 \pmod{200}$$

実際、初項 $89599 \equiv 199 \pmod{200}$ を満たしており、この性質により連鎖内の各項が特定の剰余類にとどまり、2 や 5 といった小さな素因数を回避しやすくなっていると考えられる。

5. 今後の課題

今回の探索範囲では長さ 7 の連鎖が見つかったが、素数の理論的密度から考えて、より大きな数（例： $x > 10^{12}$ ）の範囲では長さ 8 以上の連鎖が存在する可能性が高い。今後は並列計算やより高度な篩技術を用いた探索が期待される。

6. コードの公開

本研究で使用した Python スクリプトは、本レポートとともに Zenodo にて公開している。再現性の確保およびさらなる研究の発展に資することを目的としている。

License

© 2026 Hiroshi Harada. This work and the accompanying code are licensed under the MIT License.