Lange Nacht der Mathematik

22. - 23. November 2024
(11)1213 – 1. Runde

Liebe Teilnehmer an der **„Langen Nacht der Mathematik“**, ihr freut euch darauf, in dieser Nacht an Aufgaben zu knobeln und zu versuchen, mit logischem Denken, mit geometrischem Vorstellungsvermögen, mit schnellem und richtigem Rechnen und Pfiffigkeit einigen Problemen zu Leibe zu rücken. Dazu sind Ausdauer und Hartnäckigkeit vonnöten. **Es ist Ehrensache, dass ihr die Aufgaben löst und nicht die Erwachsenen oder Lehrer.**

Mit einem Taschenrechner kann kein Beweis geführt werden. Auch ein Programm alleine kann kein Beweis sein und ist nicht gern gesehen.

Bei Verständnisproblemen in der Aufgabenstellung diskutiert ihr untereinander, fragt einen Lehrer oder schaut in unserem Forum vorbei. Hier werden auch alle Tipps und bei Fehlern Korrekturen veröffentlicht. Solltet ihr denken, dass es in einer Aufgabe einen Fehler gibt, können **eure Lehrer** unsere Hotline anrufen.

Um in die nächste Runde zu kommen, müssen alle Aufgaben richtig gelöst und auf unserer Internetseite eingegeben werden. Alle Antworten sind, sofern es nicht explizit im Aufgabentext steht, **ohne Leerzeichen** einzugeben!

In den ersten beiden Runden gibt es zu jeder Aufgabe einen Antworttyp, der das Format der Lösung angibt. Alle Antworttypen setzen sich aus verschiedenen Basis-Antworttypen zusammen.
(Viele Beispiele gibt es hier.) Als Basis-Antworttypen gibt es:

$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen (einschließlich der Null),
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen,
$\mathbb{Q}$	gekürzte Brüche, z.B. 3/7, 13/1 oder 25/4,
$\mathbb{R}$	in Kombination mit pi; e; ..., z.B. 2w(3;5) für 2 mal 3. Wurzel aus 5 oder 25 oder $4pi + 3$ oder $2pi + w(2;2)$ etc. Häufig akzeptieren wir hier mehrere Schreibweisen.
$\mathbb{R}(n)$	Dezimalbruch gerundet auf n Stellen (mathematisches Runden), z.B. 1,750,
$\{G\}$	Teilmenge von G. Ist $G = \mathbb{N}$ sind $\{3; 7; 8\}$ oder $\{\}$ oder „N“ Beispiele. Ist $G = \mathbb{R}$ und die gesuchte Menge nicht endlich, so suchen wir eine Liste von Intervallen (mit ±inf) als „unendlich“; z.B.: $(-\text{inf}; -5]; [3; 4); (7; 55]; [42; \text{inf})$.
$\{G \times H \times \cdots\}$	Teilmenge von $G \times H \times \cdots$. Bei $\{\mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$ z.B. $\{(1; 4); (2; 9)\}$ oder $\{\}$ oder „NxZ“.
Wort(n)	Zeichenfolge mit n Zeichen. Ist n nicht angegeben, so ist die Länge nicht bekannt,
Zeitangaben	sind im Format dd:hh:mm:ss je nach Genauigkeit gefordert,
Datumsangaben	sind im Format tt.mm.jjjj je nach Genauigkeit anzugeben.

Wir wünschen euch viel Spaß und viel Erfolg!

Das Mathenacht-Team

Aufgabe 1.1: Geht es auch ohne elektronische Hilfe?

Gesucht sind alle Nullstellen der ganzrationalen Funktion

$$f(x) = 6x^7 + 31x^6 - 570x^5 - 2965x^4 + 7074x^3 + 38349x^2 - 21870x - 127575$$

Die Werte sollen ohne elektronische Hilfe ermittelt werden. Einzugeben ist die Summe aller Werte.

Lösungstyp: $\mathbb{Q}$

Aufgabe 1.2: Primzahllücke (1)

Eine Primzahllücke $L(n)$ sei definiert als Anzahl jener natürlichen Zahlen, die auf eine Primzahl p_1 folgen mit der Bedingung, dass alle $(p_1 + i)$ mit $1 \leq i \leq n$ keine Primzahlen sind.
(Z.B. gilt für alle Primzahlzwillinge, von denen niemand weiß, ob es beliebig viele davon oder nur endlich viele gibt $L(n) = 1$.)

Mariekes Vater hat ihr auf einen Zettel $12! = 479\,001\,600$ geschrieben.
Marieke schaut auf diese Zahl, von der sie sofort sieht, dass das keine Primzahl ist und erfährt dann, dass ihr Vater 1 addiert hat und dass diese durch 13 teilbar ist. Dann hatte er aber keine Lust mehr. Er möchte von Marieke wissen, wie lang diese Lücke ist. Dabei darf sie nur Argumente benutzen, ohne jede einzelne Zahl z.B. mit einem Rechner zu überprüfen.

Einzugeben ist die Länge der Lücke, die Marieke unter diesen Bedingungen ermitteln kann.

Lösungstyp: $\mathbb{N}$

Aufgabe 1.3: Delete

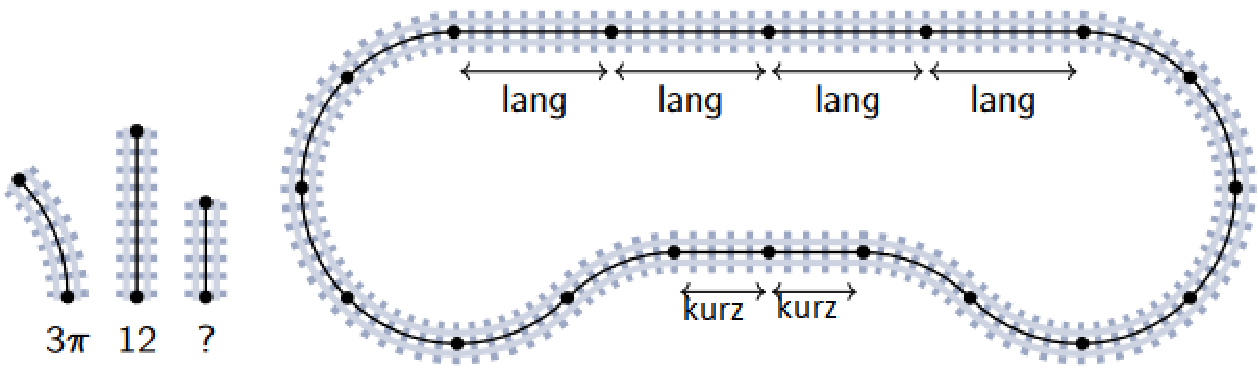
Mary forms the integer N by writing the integers from 1 to 50 in order.
That is,

$N = 1234567891011121314151617181920212223242526272829303132333435363738394041424344454647484950.$

Mary then selects some of the digits in N and discards them, so that the remaining digits, in their original order, form a new integer. The sum of the digits in this new integer is 200.
If M is the largest integer that Mary could have formed, what are the first ten digits of M ?

Lösungstyp: $\mathbb{N}$

Aufgabe 1.4: Spielzeugeisenbahn



Ein Spiezeugeisenbahnset hat verschiedenen Arten von Gleisstücken: ein gebogenes Stück und zwei gerade Stücke mit unterschiedlichen Längen.
Mit acht gebogenen Stücken kann man einen Kreis bilden. Die beiden unten gezeichneten kurzen Gleise passen auch perfekt.
Das lange gerade Stück hat eine Länge von 12 und das gebogene Stück hat eine Länge von 3π, wie in der Skizze gezeigt.
Wie lang ist das kurze gerade Stück?
(Tipp zur Eingabe: bitte nicht ausklammern; falls nötig Radikanden so klein wie möglich und erst im zweiten Summanden, z.B.: $a + b\sqrt[c]{d}$ schreiben als $a + b\text{w}(c; d)$.)

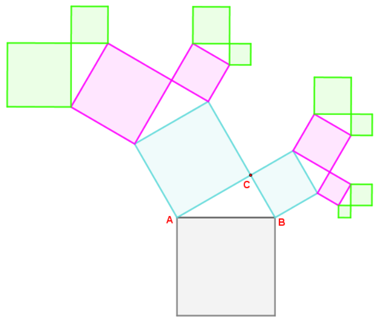
Lösungstyp: $\mathbb{R}$

Aufgabe 1.5: Rechteckspyramide

„Gleichseitige (gerade) Dreieckspyramiden sind doch langweilig“, meint Merle, „wie wäre es mit rechteckigen Pyramiden aus Apfelsinen?“ zu Anika.
Es sei aus aneinander liegenden Apfelsinen ein Rechteck der Apfelsinenmaße $a \times b$ mit $a \leq b$ gelegt, auf das dann ein Rechteck der Apfelsinenmaße $(a-1) \times (b-1)$ gelegt wird und so fort und zwar solange, bis ganz oben eine einzige Reihe Apfelsinen liegt.
Welche Möglichkeiten gibt es, wenn genau 2024 Apfelsinen verbaut werden sollen?
Einzugeben ist die Menge aller möglichen Paare $(a; b)$, aufsteigend sortiert nach dem Wert von a.

Lösungstyp: $\{\mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$

Aufgabe 1.6: Pythagorasbaum



Gegeben sei ein Quadrat (Schritt 0, grau) mit einem Winkel $\alpha < 45°$.
Im ersten Schritt wird über einer Seite ein rechtwinkliges Dreieck Δ_{ABC} mit seinen Kathetenquadrate gezeichnet (Schritt 1, blau).
Dann erfolgt ein zweiter und dritter Schritt wie aus der Zeichnung zu erkennen ist.

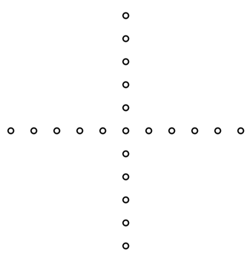
Zu bestimmen ist das Maß des Winkels α (Scheitelpunkt A) in Grad, so dass im dritten Schritt das kleinste Quadrat ein Vierundsechzigstel des Flächenmaßes des Ausgangsquadrats einnimmt.

Nun sei auch noch im Baum ein vierter Schritt durchgeführt. Gesucht ist der Flächeninhalt des am häufigsten auftretenden Quadrats in der Gesamtfigur, wobei das Ausgangsquadrat (in der nullten Stufe) eine Seitenlänge von 1 besitzen möge.

Lösungstyp: $\mathbb{N};\mathbb{Q}$

Wir suchen Helfer (Studenten; Lehrer; Oberstufenschüler) die uns beim Korrekturlesen der Aufgaben oder bei der Korrektur der Einsendungen helfen wollen!
Der zeitliche Aufwand ist überschaubar! Wenn aus jeder Schule pro ca. 30 Gruppen ein Helfer gestellt würde, wären alle unsere Probleme gelöst. In diesem Forumspost findet ihr mehr Informationen.

Aufgabe 1.7: Wie viele?

1. 

   In der linken Skizze sind 21 Punkte auf zwei sich schneidenden Achsen eingezeichnet.

   Wie viele Dreiecke (mit einer Fläche ungleich Null) gibt es, deren drei Eckpunkte frei aus diesen Punkten gewählt werden können?

2. Wie viele Lösungen mit ganzzahligen m und n gibt es für die folgende Gleichung?

$$m^4 + 8n^2 + 350 = n^4 + 42m^2 - 75$$

Lösungstyp: $\mathbb{N};\mathbb{N}$

Aufgabe 1.8: Reihenfolge

Eine „Reihenfolge“ beinhaltet alle Zahlen einer Menge, wobei jede Zahl genau einmal vorkommt. Zum Beispiel sind 312 und 231 zwei der möglichen Reihenfolgen von $\{1, 2, 3\}$.

1. Gesucht ist die Anzahl der Dreiergruppen (a, b, c), wobei a, b und c drei verschiedene Zahlen aus $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ sind und $a < b$ und $b > c$ ist.
2. Wie viele Reihenfolgen von $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ enthalten die Ziffern 254 nacheinander in dieser Anordnung?
3. Eine lokale Spitze in einer Reihenfolge tritt auf, wenn es eine Folge von 3 Zahlen in der Reihenfolge gibt, bei der die mittlere Zahl größer ist als ihre beiden Nachbarn.
   Zum Beispiel enthält die Reihenfolge 35241 von $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ zwei lokale Spitzenwerte.
   Gesucht ist die durchschnittliche Anzahl der lokalen Spitzen in allen 40320 möglichen Reihenfolgen von $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Lösungstyp: $\mathbb{N}$;$\mathbb{N}$;$\mathbb{Q}$

Aufgabe 1.9: Kistenlotterie

Die fünfköpfige Familie Hartmann kauft jede Woche Getränke im Supermarkt ein. Jedes Familienmitglied hat unterschiedliche Vorlieben, aber alle bisher gekauften Getränke stammen von einem Hersteller. Dieser hat nun ein Lockmittel erfunden. Der Hersteller vertreibt 18 verschiedene Getränke in 0,75-Liter-Flaschen.

„Kaufen Sie einen gemischten 12er-Kasten, gefüllt mit Flaschen aus unseren 18 angebotenen Sorten und gewinnen Sie. Die Reihenfolge der Flaschen im gekauften Kasten spielt keine Rolle. Sie haben die freie Wahl der Zusammenstellung, z.B. $3 \times$ Zitronenlimonade, $3 \times$ Cola, $6 \times$ Spezi. In jeder Woche erfolgt eine Zufallsziehung.
50 000 € gewinnt der Kunde mit genau jener in der Ziehungswoche gelosten Kombination.“

Wie viele verschiedene Kisten müssen in einer Woche gekauft werden, damit – wenn alles reiner Zufall ist – der Hauptgewinn in dieser betreffenden Woche fällig wird?

Lösungstyp: $\mathbb{N}$

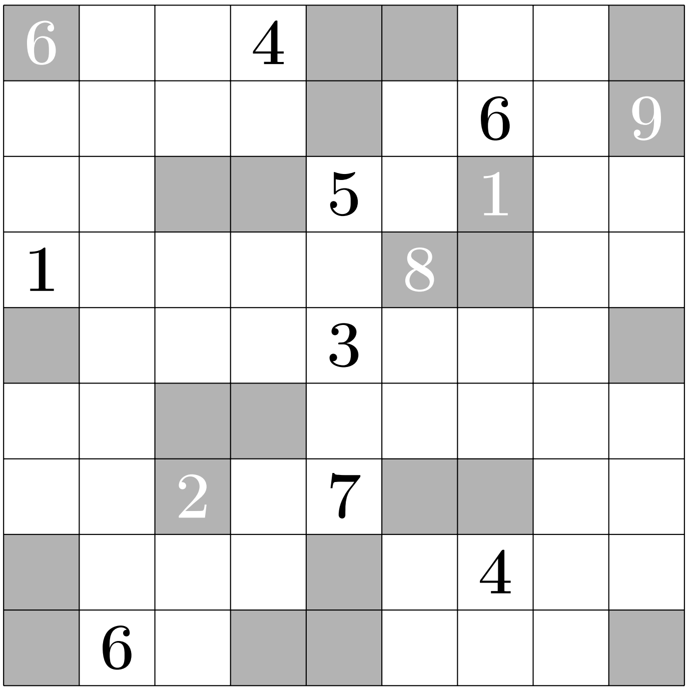
Aufgabe 1.10: Str8ts (3)

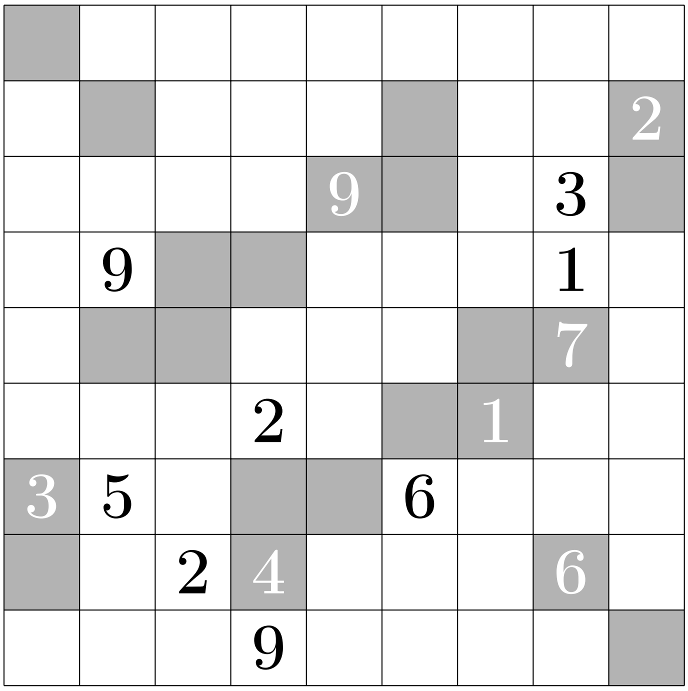
Das Str8ts-Spielfeld besteht aus $n \times n$ Feldern. Die Felder sind zunächst nur teilweise mit Zahlen von 1 bis n belegt. Zusätzlich sind einige Felder dunkel gefärbt und teilweise ebenfalls mit Zahlen von 1 bis n belegt.
Dunkle Felder sind Trennfelder und unterteilen die Zeilen und Spalten des Spielfeldes in Bereiche von senkrecht oder waagrecht zusammenhängenden weißen Feldern. Bereiche werden vom Spielfeldrand oder von dunklen Feldern begrenzt. Sie können verschieden groß sein: Von einem weißen Feld bis hin zu einer kompletten Zeile oder Spalte mit n weißen Feldern.
Die noch freien weißen Felder müssen mit Zahlen von 1 bis n gefüllt werden. Zu beachten ist:

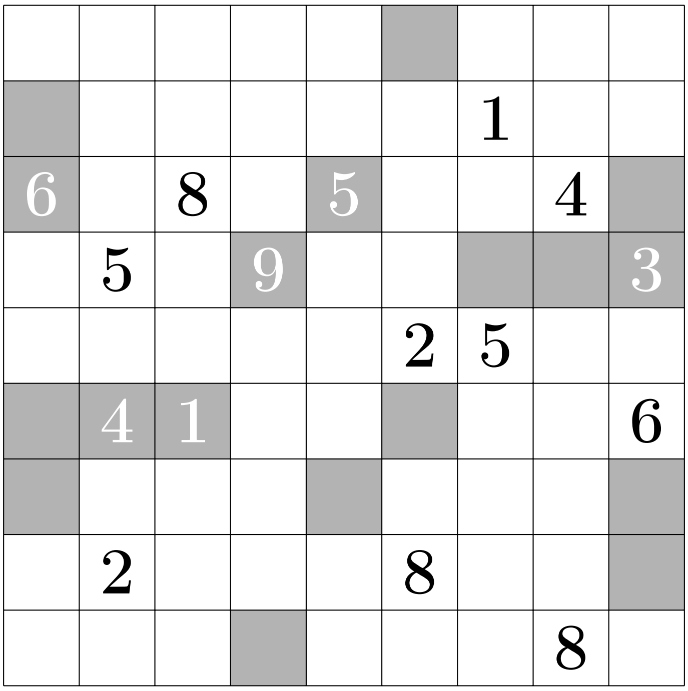
- Wie bei Sudoku darf in jeder Zeile und Spalte jede Zahl höchstens einmal vorkommen, egal ob die Zahl in einem weißen Feld oder als weiße Zahl in einem dunklen Feld steht.
- Alle Zahlen, die einem Bereich, also einer zusammenhängenden Folge von weißen Feldern angehören, müssen eine Straße bilden. Eine Straße ist bei Str8ts eine lückenlose Menge aufeinander folgender Zahlen, die jedoch in beliebiger Reihenfolge in der Abteilung auftreten können.
- Dunkle Felder – ob mit oder ohne Zahl – dienen immer als Trennfelder. Wenn ein dunkles Trennfeld eine Zahl enthält, dann darf diese Zahl in der Zeile und Spalte, die dieses Feld enthält, nicht mehr verwendet werden.

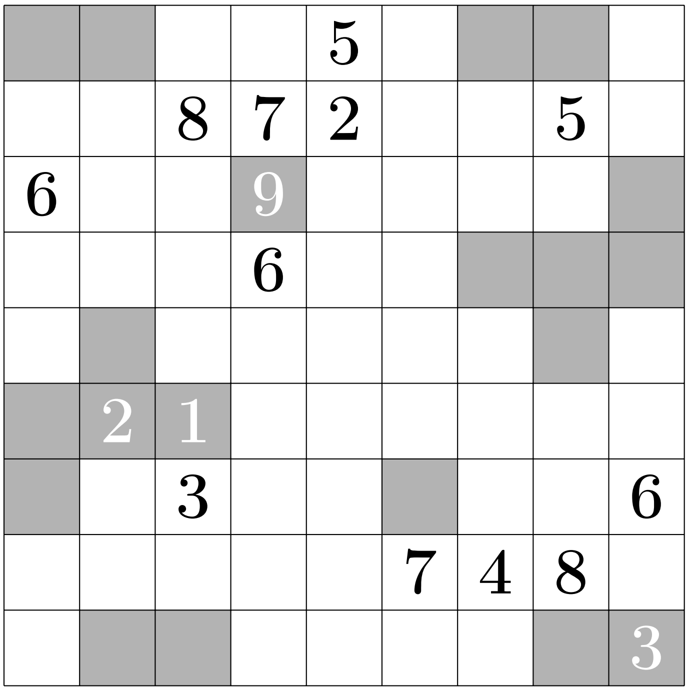
- Dunkle Felder mit Zahlen sind selber nie Teil einer Straße und stehen deshalb in keinem direkten Zusammenhang mit den Straßen in benachbarten weißen Bereichen.
- Manche weiße Felder sind bereits mit Zahlen belegt. Diese Zahlen sind Teil der Straße in dem entsprechenden Bereich.
- Einige dunkle Felder sind leer, sie enthalten keine Zahl, **ihnen wird auch keine Zahl zugeordnet**. Das bedeutet, dass in Zeilen oder Spalten mit leeren schwarzen Feldern deshalb nicht alle Zahlen von 1 bis n vorkommen.
- Es kann auch vorkommen, dass statt der Zahlen in einer Aufgabe nur Buchstaben benutzt werden.

In den 4 Aufgaben gibt es dunkle Felder ohne Zahlen. Jetzt sollen nur (senkrechte) Spalten betrachtet werden. Dann fehlen in den betreffenden dunklen Feldern der Spalten Zahlen aus der Menge 1 bis n. Gesucht ist die Summe dieser Zahlen.









Lösungstyp: ℕ