Lange Nacht der Mathematik

22. - 23. November 2024
(11)1213 – 2. Runde

Aufgabe 2.1: Logarithmen?

Die Summe der zwei Lösungen der Gleichung

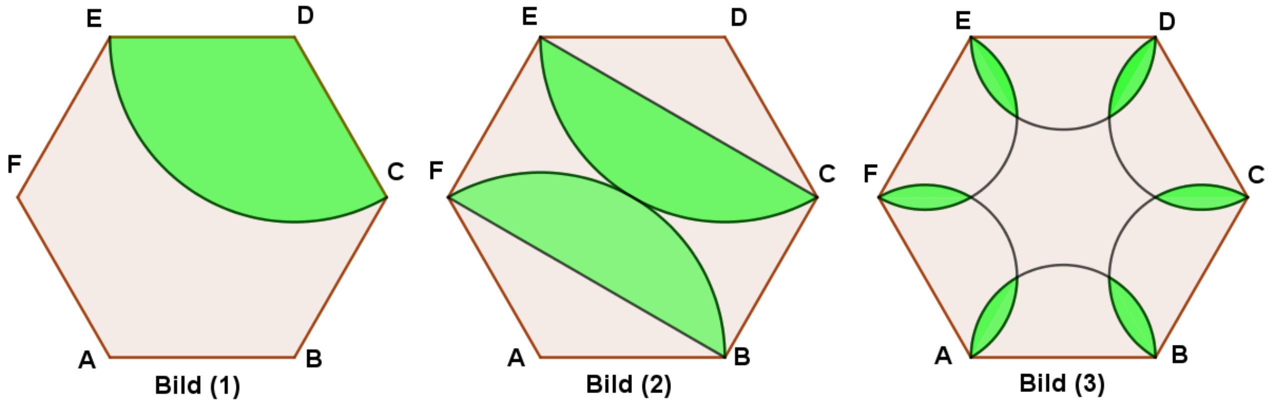
$$\left(\sqrt{x}\right)^{\log_2 x - \log_x 2} = 16$$

liefert den Bruch $\frac{m}{n}$, wobei m und n teilerfremd zueinander sind.
Gesucht ist $10m + n$.

Lösungstyp: $\mathbb{N}$

Aufgabe 2.2: Regelmäßiges Sechseck

$ABCDEF$ sei ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge 6.



1. Ein Kreisbogen mit dem Mittelpunkt D und dem Radius 6 wird von C nach E gezeichnet (siehe Skizze).
   Gesucht ist die Maßzahl des schraffierten Sektors.
2. Ein Kreisbogen mit dem Mittelpunkt D und dem Radius 6 wird von C nach E gezeichnet. Ein zweiter Kreisbogen mit Mittelpunkt A und Radius 6 wird von B nach F gezeichnet. Diese Bögen tangieren (berühren) sich im Mittelpunkt des Sechsecks. Die Sehnen $\overline{BF}$ und $\overline{CE}$ sind ebenfalls eingezeichnet.
   Gesucht ist die Maßzahl des schattierten Flächeninhalte.
3. Entlang jeder Kante des Sechsecks wird ein Halbkreis mit dem Durchmesser 6 gezeichnet.
   Gesucht ist die Maßzahl des Flächeninhalts aller schraffierten Bereiche, d. h. die Gesamtfläche der Regionen, die innerhalb von genau zwei der Halbkreise liegen.

Am Schluss ist die Summe aller drei exakten Werte zu bilden. Davon ist einzugeben der *pi*-Anteil (nur Koeffizient) und der Faktor des Wurzel-Summanden.

Lösungstyp: $\mathbb{R}(1)$;$\mathbb{R}(1)$

Aufgabe 2.3: U=A-Dreiecke

Ein „ganzzahliges Dreieck“ sei definiert als ein Dreieck, dessen Seiten in ganzen Zahlen messbar sind. Gesucht sind alle ganzzahligen Dreiecke, deren Umfang gleich dem Flächeninhalt ist;
und einzugeben ist die Summe der jeweils kleinsten Seitenlängen.

Lösungstyp: $\mathbb{N}$

Aufgabe 2.4: Le kangourou

Wir betrachten die drei Abbildungen

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \qquad f(n)=\begin{cases} n+3 & \text{für } n \text{ gerade} \\ \frac{n+1}{2} & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \tag{1}$$

$$g:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \qquad g(n)=\begin{cases} n-3 & \text{für } n\equiv 0 \mod 3 \\ n-2 & \text{für } n\equiv 1 \mod 3 \\ n-1 & \text{für } n\equiv 2 \mod 3 \end{cases} \tag{2}$$

$$h:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \qquad h(n)=\begin{cases} n+5 & \text{für } n \text{ ungerade} \\ \frac{n}{2} & \text{für gerades } n \end{cases} \tag{3}$$

Gegeben seien :

$$f(f(d_1)) = 26 \text{ mit ungeradem } d_1 > 50$$
$$g(g(g(g(g(d_2))))) = 44$$
$$h(h(h(d_3))) = 35 \text{ mit ungeradem } d_3.$$

Die Abstände eines Punktes P, der innerhalb des Quadrates ABCD liegen möge, zu den Eckpunkten A, B und C betrage

$$|\overline{PA}| = Q(d_1) \text{ cm},$$
$$|\overline{PB}| = Q(d_2) \text{ cm und}$$
$$|\overline{PC}| = Q(d_3) \text{ cm},$$

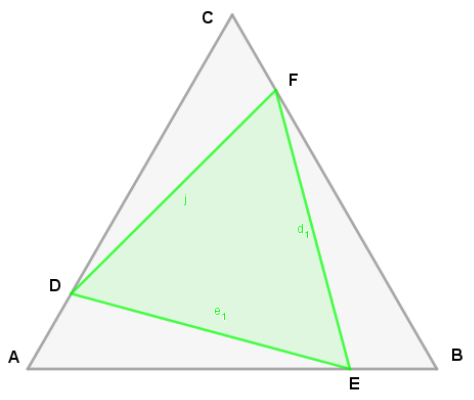
wobei $Q(\ldots)$ eine Quersumme darstellt. Gesucht ist die Maßzahl des Abstand $|\overline{PD}|$ in Zentimetern.

Lösungstyp: $\mathbb{N}$

Aufgabe 2.5: Im Dreieck

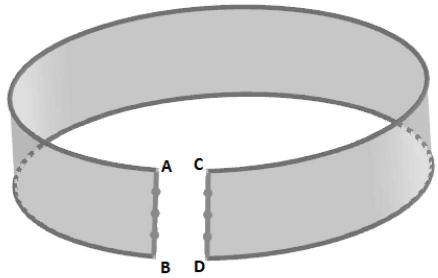
(a) Im gleichseitigen Dreieck Δ_{ABC} sind die Strecken
$k = |\overline{AD}| = |\overline{BE}| = |\overline{CF}| = 1$ lang.
Gesucht ist das Quadrat des exakten Flächeninhalt des Dreiecks Δ_{DEF} für den Fall, dass $c = |\overline{AB}| = 4$ lang ist.
Einzugeben ist das Quadrat des Flächeninhalts.

(b) Wie lang muss k – bei gleichem c – gewählt werden, damit der Flächeninhalt des Dreiecks Δ_{DEF} ein Drittel des Ausgangsdreiecks ist?

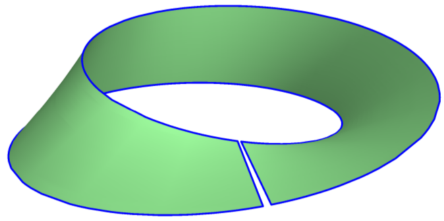


Lösungstyp: $\mathbb{Q};\mathbb{Q}$

Aufgabe 2.6: August Ferdinand Möbius - Johann Benedict Listing



Gegeben sei ein Papierstreifen einer Länge L (siehe Skizze rechts). Dieser werde zu einem Ring geschlossen und eines der Enden vor dem Verkleben um 180° gedreht (es fallen dann sowohl A und D als auch B und C zusammen). Es entsteht das allseits bekannte Möbius-Band. Dieses Band hat nur eine Seite, eine Kante und ist nicht orientierbar. Hier sei sie gekennzeichnet durch
(Länge des Papiers/t Teilungen/n Halbdrehungen)=(1/2/1).



1. Nun werde das Band durch Schneiden parallel zum Rand gedrittelt. Die Bänder, die nach dem Zerschneiden entstehen seien von klein nach groß sortiert einzugeben.
2. Nun werde das Band vor dem Dritteln um 360° gedreht und verklebt. Was entsteht nun? Die Bänder, die nach dem Zerschneiden entstehen seien von klein nach groß sortiert einzugeben.
3. Nun werde das Band vor dem Dritteln um 540° gedreht und verklebt. Was entsteht nun? Die Bänder, die nach dem Zerschneiden entstehen seien von klein nach groß sortiert einzugeben.
4. Nun werde das Band vor dem Dritteln um 720° gedreht und verklebt. Was entsteht nun? Die Bänder, die nach dem Zerschneiden entstehen seien von klein nach groß sortiert einzugeben.

Die Ergebnisse könnten jeweils als Drillinge (Länge der Bänder; t-Teilungen;n-Halbdrehungen) notiert werden. Da hier nur Drittelungen abgefragt werden, kann die mittlere Komponente entfallen und dementsprechend sind Paare einzugeben, z.B. $(2;4)$ würde bedeuten, dass ein entstandenes Band die doppelte Länge besitzt und 4 Halbdrehungen.

Lösungstyp: $\{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\};\{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\};\{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\};\{\mathbb{N}\times\mathbb{N}\}$

Wir suchen Helfer (Studenten; Lehrer; Oberstufenschüler) die uns beim Korrekturlesen der Aufgaben oder bei der Korrektur der Einsendungen helfen wollen!
Der zeitliche Aufwand ist überschaubar! Wenn aus jeder Schule pro ca. 30 Gruppen ein Helfer gestellt würde, wären alle unsere Probleme gelöst. In diesem Forumspost findet ihr mehr Informationen.

Aufgabe 2.7: Dreiecksumfang; Radius gesucht

Gegeben sei ein Dreieck Δ_{ABC} mit den Winkeln α, β, γ und den jeweils gegenüberliegenden Seiten a, b, c mit $c = 33\,\text{cm}$.
Wie groß ist der größtmögliche Dreiecksumfang unter der Voraussetzung, dass dieser ganzzahlig ist und gleichzeitig $b : a = 3 : 8$ gilt?

Ohne die Annahme, dass der Dreiecksumfang ganzzahlig ist, lassen sich zu festen Punkten A und B mit $|\overline{AB}| = 33\,\text{cm}$ beliebig viele Punkte C konstruieren, sodass im entstehenden Dreieck Δ_{ABC} das Verhältnis $b : a = 3 : 8$ gilt. Alle diese Punkte C liegen jedoch auf einem Kreis k. Gesucht ist der Radius von k.

Lösungstyp: $\mathbb{N};\mathbb{Q}$

Wenn jede teilnehmende Schule uns fünf bis zehn Euro spendete, wäre uns sehr geholfen.
Da wir den Wettbewerb privat betreiben und als Gast in einer Schule für die Nacht aufgenommen werden, müssen wir auch alle benötigten Materialien/Geräte mitbringen. Kosten entstehen für Drucker & Papier, Hotline-Geräte, Fahrtkosten etc.
Stichwort *Mathenacht*
Kontoinhaber: MaWeSH e.V.
Kreditinstitut: Sparkasse Lübeck
IBAN: DE 18 2305 0101 0160 0413 56

Aufgabe 2.8: Gleichungssysteme (2)

1. Gesucht sind alle geordneten Tripel $(a;b;c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$ab + c = 17 \tag{1}$$
$$a + bc = 19 \tag{2}$$

Die Tripel sind größenmäßig von klein nach groß in der Reihenfolge $a;b;c$ einzugeben.

2. Drei ganze Zahlen $a;b;c$ erfüllen das folgende Gleichungssystem

$$a^{|b|} = 16 \tag{20}$$
$$b^{|c|} = 512 \tag{21}$$
$$c^{|a|} = 6561 \tag{22}$$

Gesucht sind alle Tripel (der Größe nach in der Reihenfolge von a, b, c).

3. Zu ermitteln sind alle Tripel aus $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ (der Größe nach in der Reihenfolge von a, b, c) die das folgende Gleichungssystem erfüllen:

$$a^b = 343 \tag{30}$$
$$b^c = 10 \tag{31}$$
$$c^a = 7 \tag{32}$$

Lösungstyp: $\{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}\};\{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\};\{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$

Aufgabe 2.9: Mehrere Ebenen

Eine Ebene unterteilt den Raum in zwei Regionen. Zwei Ebenen, die sich in einer Geraden schneiden, unterteilen den Raum in vier Regionen.
Nehmen wir nun an, dass zwölf Ebenen im Raum gegeben sind, so dass

a) sich jeweils zwei in einer Geraden schneiden,

b) jeweils drei sich in einem Punkt schneiden,

c) keine vier von ihnen haben einen gemeinsamen Punkt,

gleichzeitig erfüllt sind.
In wie viele Regionen ist der Raum jeweils unterteilt, wenn alle drei genannten Bedingungen erfüllt sind?

Lösungstyp: $\mathbb{N}$

Aufgabe 2.10: Daten

The mean, median, unique mode, and range of a collection of 2024 positive integers are all equal to 2024.
What is the largest integer that can be an element of this collection?

(Hilfe: *mean*: Zentralwert entspricht dem arithmetischen Mittel; *unique mode* entspricht dem Modalwert; *range* entspricht der Differenz zwischen größtem und kleinstem Wert der Menge.)

Lösungstyp: $\mathbb{N}$