



Lange Nacht der Mathematik



21. - 22. November 2025
(11)1213 – 2. Runde

Aufgabe 2.1: Klein gegen Groß

Jochen hat ein seltsames Würfelpaar erstanden. Jeder Hexaeder besitzt eine Augensumme von 21. Wenn man mit beiden würfelt (Unentschieden wird nicht berücksichtigt), gewinnt der Große in mehr als der Hälfte der Fälle (gewinnen heißt: die Augensumme ist größer). Nun sollen die beiden Würfel gegeneinander antreten, indem dreimal gewürfelt und die Summe der drei Würfe verglichen wird. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Augensumme nach je drei Würfeln gleich?



4	1	0	6
5		1	
6		2	
1	4	6	6

Lösungstyp: \mathbb{Q}

Aufgabe 2.2: Neunstellig

Gesucht ist die Summe aller neunstelligen positiven ganzen Zahlen mit den folgenden Eigenschaften

- alle Ziffern stammen aus der Menge $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ und keine Ziffer darf wiederholt werden,
- die Summe jeder Fünfergruppe aufeinanderfolgender Ziffern ist durch 5 ohne Rest teilbar,
- die Summe jeder Siebenergruppe aufeinanderfolgender Ziffern ist durch 4 ohne Rest teilbar.

578460213 ist z.B. keine solche Zahl: $4 + 6 + 0 + 2 + 1$ ist nicht durch 5 teilbar.

Lösungstyp: \mathbb{N}

Aufgabe 2.3: Tangens

Ermittle innerhalb des Intervalls $[0^\circ < a, b < 90^\circ]$ alle möglichen Werte für $\cos a \cdot \sin b$, sodass für $a; b$ gilt

$$(4 + \tan^2 a)(5 + \tan^2 b) = \sqrt{320} \cdot \tan a \cdot \tan b.$$

(Benutze für die Eingabe so wenig Zeichen wie möglich.)

Lösungstyp: \mathbb{R}

Aufgabe 2.4: Fakultäten

Die Gleichung

$$a! + b! = 2^c!$$

habe n Lösungen der Form $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), \dots, (a_n, b_n, c_n)$, wobei alle Tripel aus positiven ganzen Zahlen bestehen.

Gesucht ist die Summe aller Elemente (z.B. ist a_1 ein Element) von

$$(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3), \dots, (a_n, b_n, c_n).$$

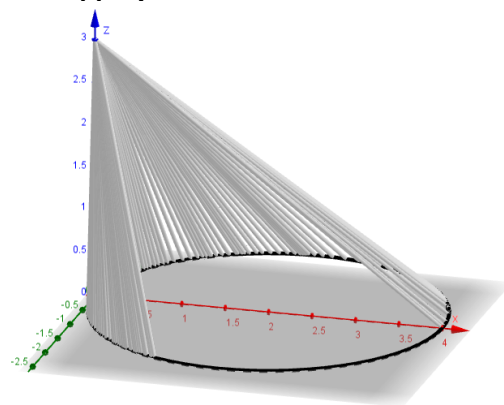
Lösungstyp: \mathbb{N}

Aufgabe 2.5: Steil-Kreiskegel (schiefer Kreiskegel)

„Jetzt soll ich den Mantel berechnen?“, meint Jonte, „wie soll ich das denn machen, dafür haben wir überhaupt keine Formel kennengelernt. Das Volumen wäre kein Thema, aber den Mantel?“

Shivani: „Stimmt, aber das WWW lässt grüßen, und da könnt ihr sicherlich Hilfe erhalten. und wenn ihr ein Integral nicht lösen könnt, hilft euch sicherlich GEOGEBRA. Hier sind die Angaben zu meinem schiefen Kreiskegel: “

Der zur x-Achse symmetrische Standkreis liegt in der xy-Ebene und besitzt einen Radius von $2LE$ und der Ursprung liegt auf dessen Peripherie. Die Spitze befindet sich genau senkrecht über dem Ursprung und die Höhe beträgt $3LE$. Gesucht ist die Maßzahl des vollständigen Kegelmantels.



Lösungstyp: $\mathbb{R}(2)$

Wenn jede teilnehmende Schule uns fünf bis zehn Euro spendete, wäre uns sehr geholfen.

Da wir den Wettbewerb privat betreiben und als Gast in einer Schule für die Nacht aufgenommen werden, müssen wir auch alle benötigten Materialien/Geräte mitbringen. Kosten entstehen für Drucker & Papier, Hotline-Geräte, Fahrtkosten etc.

Stichwort *Mathenacht*

Kontoinhaber: MaWeSH e.V.

Kreditinstitut: Deutsche Skatbank

IBAN: DE 26 8306 5408 0005 4641 70

BIC: GENODEF1SLR

Aufgabe 2.6: Karten ziehen

Ernie und Bert spielen ein Kartenspiel. Ernie hat am Anfang 6 Karten: 2 rote, 2 gelbe und 2 grüne. Bert hat am Anfang 4 Karten: 2 violette und 2 weiße. Ernie fängt an. Ernie und Bert spielen abwechselnd. In jeder Runde zieht der aktuelle Spieler zufällig eine seiner Karten und legt sie offen auf den Tisch. Die Karten bleiben für den Rest des Spiels auf dem Tisch liegen. Ein Spieler gewinnt und das Spiel endet, wenn er zwei Karten derselben Farbe auf den Tisch gelegt hat.

Zu bestimmen ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ernie das Spiel gewinnt.

Lösungstyp: \mathbb{Q}

Aufgabe 2.7: Anzahlen

1. How many digits are in the full expansion of $2025!$?
2. How many terms are there in the expansion of $(a + b + c + d)^{2025}$?
(Two terms are equal and hence only counted once if and only if they share the same factors, so that e.g. ab and ba are the same term.)

Beide Ergebnisse sind nur mit Mitteln aus dem schulischen Unterricht herzuleiten.

Lösungstyp: $\mathbb{N}; \mathbb{N}$

Wir suchen Helfer (Studenten; Lehrer; Oberstufenschüler) die uns beim Korrekturlesen der Aufgaben oder bei der Korrektur der Einsendungen helfen wollen!

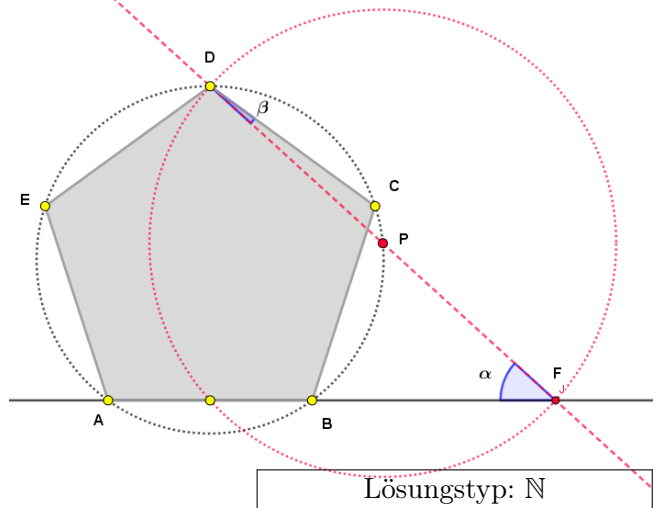
Der zeitliche Aufwand ist überschaubar! Wenn aus jeder Schule pro ca. 30 Gruppen ein Helfer gestellt würde, wären alle unsere Probleme gelöst. In [diesem Forumspost](#) findet ihr mehr Informationen.

Aufgabe 2.8: Punkt auf dem Umkreis (Fünfeck)

Gegeben sei ein regelmäßiges Fünfeck $ABCDE$ mit seinem Umkreis k_1 und ein Punkt P auf dem Umkreis (siehe Skizze rechts).

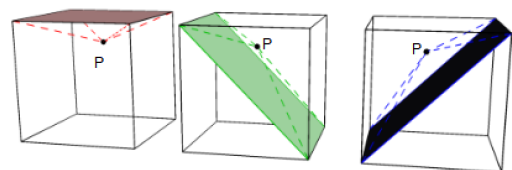
Die Gerade DP erzeuge auf der Peripherie des Umkreis es einen Punkt P , der Mittelpunkt eines Kreises k_2 durch D und den Mittelpunkt der Seite \overline{AB} sei. Die erzeugte Gerade DP erzeugt mit der Geraden AB den Schnittpunkt F .

Gesucht ist $\beta - \alpha$ mit $\alpha = \angle PDC$ und $\beta = \angle BFP$.



Aufgabe 2.9: Drei Pyramiden

Der Punkt P ist in der oberen Hälfte eines Hexaeders positioniert. Wie im rechten Bild zu sehen, ist P jeweils die Spitze einer vierseitigen Pyramide mit unterschiedlichen Grundflächen (rot, grün, schwarz).

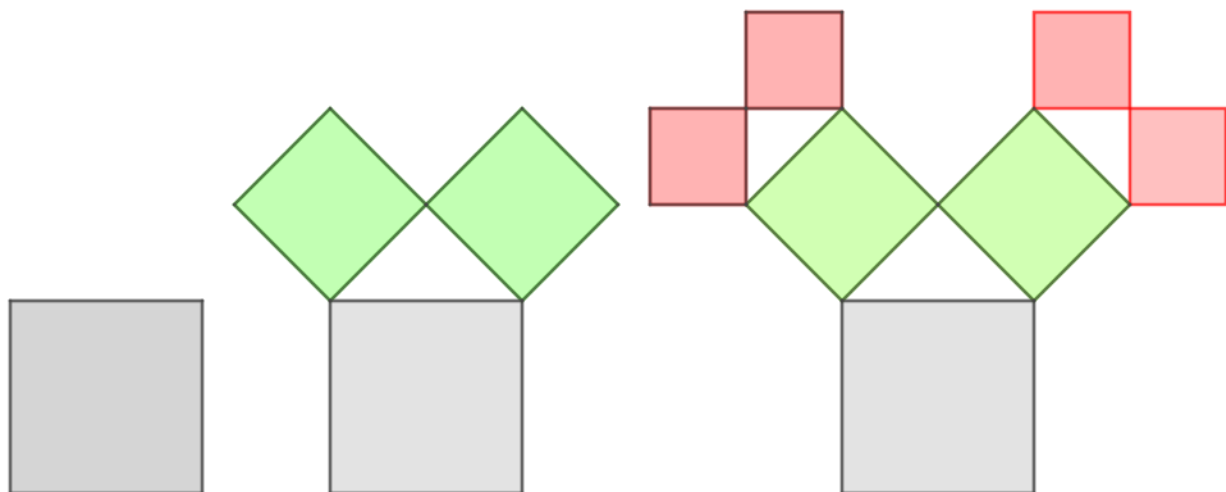


Diese drei Pyramiden besitzen die Volumenmaßzahlen 4, 6 und 7.

Gesucht ist die Maßzahl der Hexaeder-Seitenlänge hoch 3.

Lösungstyp: \mathbb{R}

Aufgabe 2.10: Pythagoras



Oben sind drei Abbildungen 0, 1 und 2 zu sehen,

Abbildung 0 besteht aus einem Quadrat mit der Seitenlänge 18. Für jede ganze Zahl $n \geq 0$ besteht die Figur $n + 1$ aus der n . Figur, auf die dann jeweils neue Quadrate wie abgebildet gezeichnet wurden, deren Seitenlänge jeweils $\frac{2}{3}$ der kleinsten Quadratseitenlänge der vorherigen Figur lang ist.

Entwickle eine Gleichung für den Flächeninhalt A_n der n . Figur mit $n \geq 0$. Gesucht ist die kleinste positive ganze Zahl m mit der Eigenschaft, dass $A_n < m$ für alle ganzen Zahlen $n \geq 0$ ist.

Lösungstyp: \mathbb{N}