Lange Nacht der Mathematik

21. - 22. November 2025
(11)1213 – 1. Runde

Liebe Teilnehmer an der **„Langen Nacht der Mathematik“**, ihr freut euch darauf, in dieser Nacht an Aufgaben zu knobeln und zu versuchen, mit logischem Denken, mit geometrischem Vorstellungsvermögen, mit schnellem und richtigem Rechnen und Pfiffigkeit einigen Problemen zu Leibe zu rücken. Dazu sind Ausdauer und Hartnäckigkeit vonnöten. **Es ist Ehrensache, dass ihr die Aufgaben löst und nicht die Erwachsenen oder Lehrer.**

Mit einem Taschenrechner kann kein Beweis geführt werden. Auch ein Programm alleine kann kein Beweis sein und ist nicht gern gesehen.

Bei Verständnisproblemen in der Aufgabenstellung diskutiert ihr untereinander, fragt einen Lehrer oder schaut in unserem Forum vorbei. Hier werden auch alle Tipps und bei Fehlern Korrekturen veröffentlicht. Solltet ihr denken, dass es in einer Aufgabe einen Fehler gibt, können **eure Lehrer** unsere Hotline anrufen.

Um in die nächste Runde zu kommen, müssen alle Aufgaben richtig gelöst und auf unserer Internetseite eingegeben werden. Alle Antworten sind, sofern es nicht explizit im Aufgabentext steht, **ohne Leerzeichen** einzugeben!

In den ersten beiden Runden gibt es zu jeder Aufgabe einen Antworttyp, der das Format der Lösung angibt. Alle Antworttypen setzen sich aus verschiedenen Basis-Antworttypen zusammen.
(Viele Beispiele gibt es hier.) Als Basis-Antworttypen gibt es:

$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen (einschließlich der Null),
$\mathbb{Z}$	ganze Zahlen,
$\mathbb{Q}$	gekürzte Brüche, z.B. 3/7, 13/1 oder 25/4,
$\mathbb{R}$	in Kombination mit pi; e; ..., z.B. 2w(3;5) für 2 mal 3. Wurzel aus 5 oder 25 oder $4pi + 3$ oder $2pi + w(2; 2)$ etc. Häufig akzeptieren wir hier mehrere Schreibweisen.
$\mathbb{R}(n)$	Dezimalbruch gerundet auf n Stellen (mathematisches Runden), z.B. 1,750,
$\{G\}$	Teilmenge von G. Ist $G = \mathbb{N}$ sind $\{3; 7; 8\}$ oder $\{\}$ oder „N“ Beispiele. Ist $G = \mathbb{R}$ und die gesuchte Menge nicht endlich, so suchen wir eine Liste von Intervallen (mit ±inf) als „unendlich“; z.B.: $(-\text{inf}; -5]; [3; 4); (7; 55]; [42; \text{inf})$.
$\{G \times H \times \cdots\}$	Teilmenge von $G \times H \times \cdots$. Bei $\{\mathbb{N} \times \mathbb{Z}\}$ z.B. $\{(1; 4); (2; 9)\}$ oder $\{\}$ oder „NxZ“.
Wort(n)	Zeichenfolge mit n Zeichen. Ist n nicht angegeben, so ist die Länge nicht bekannt,
Zeitangaben	sind im Format dd:hh:mm:ss je nach Genauigkeit gefordert,
Datumsangaben	sind im Format tt.mm.jjjj je nach Genauigkeit anzugeben.

Wir wünschen euch viel Spaß und viel Erfolg!

Das Mathenacht-Team

Aufgabe 1.1: Exponenten

Bestimme alle Werte für $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(2 \cdot 4^{x^2-3x}\right)^2 = 2^{x-1}.$$

Einzugeben ist die Summe aller Lösungen.

Lösungstyp: $\mathbb{R}(2)$

Aufgabe 1.2: Logarithmen

Es sind alle reellen Lösungen $x > 0$ für die folgende Gleichung zu ermitteln.

$$\log_4 x - \log_x 16 = \frac{7}{6} - \log_x 8$$

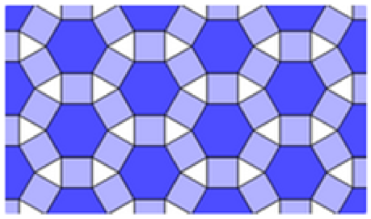
Einzugeben sind die Kubikzahlen der Lösungen in aufsteigender Reihenfolge.

Lösungstyp: $\{\mathbb{R}\}$

Wenn jede teilnehmende Schule uns fünf bis zehn Euro spendete, wäre uns sehr geholfen.
Da wir den Wettbewerb privat betreiben und als Gast in einer Schule für die Nacht aufgenommen werden, müssen wir auch alle benötigten Materialien/Geräte mitbringen. Kosten entstehen für Drucker & Papier, Hotline-Geräte, Fahrtkosten etc.
Stichwort *Mathenacht*
Kontoinhaber: MaWeSH e.V.
Kreditinstitut: Deutsche Skatbank
IBAN: DE 26 8306 5408 0005 4641 70
BIC: GENODEF1SLR

Aufgabe 1.3: Aus Finnland

1. Ein großer quadratischer Badezimmerboden soll mit dem folgenden Muster aus sechseckigen, quadratischen und dreieckigen Fliesen versehen werden.



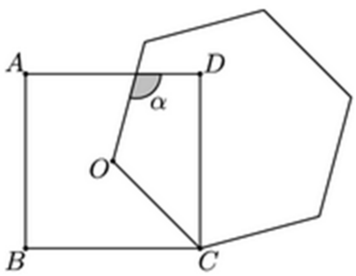
   Es wird angenommen, dass 1000 sechseckige Fliesen benötigt werden.

   Wie viele Quadrate und Dreiecke werden ungefähr benötigt?
   (Bitte in Tausendern angeben, d.h. es wäre 5 einzugeben, wenn es etwa 5000 sind.)

2. Ein Schüler begann mit der Zahl 1 und multiplizierte sie entweder mit 6 oder 10. Dann hat er das Ergebnis entweder mit 6 oder 10 multipliziert und diesen Vorgang viele Male wiederholt. Welche der folgenden Zahlen kann NICHT das Endergebnis sein?

   (a) $2^{100}3^{20}5^{80}$ (b) $2^{90}3^{20}5^{70}$ (c) $2^{90}3^{30}5^{80}$ (d) $2^{110}3^{80}5^{30}$ (e) $2^{50}5^{50}$

3.



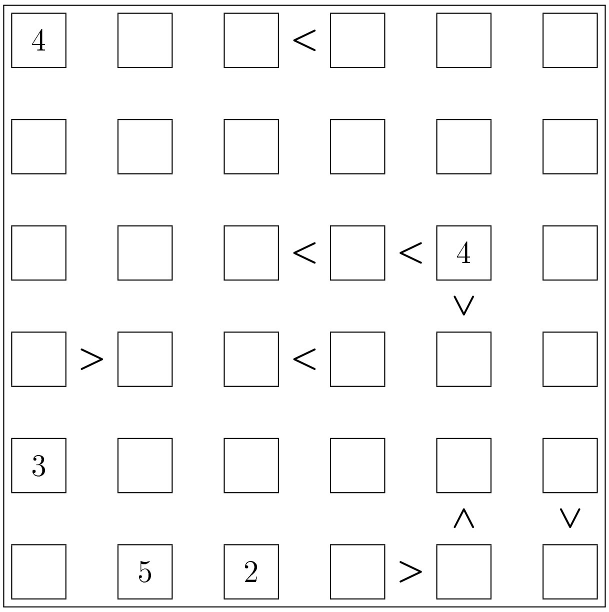
   Ein regelmäßiges Sechseck hat eine Seite $\overline{OC}$, wobei O der Diagonalschnittpunkt des Quadrats ist.

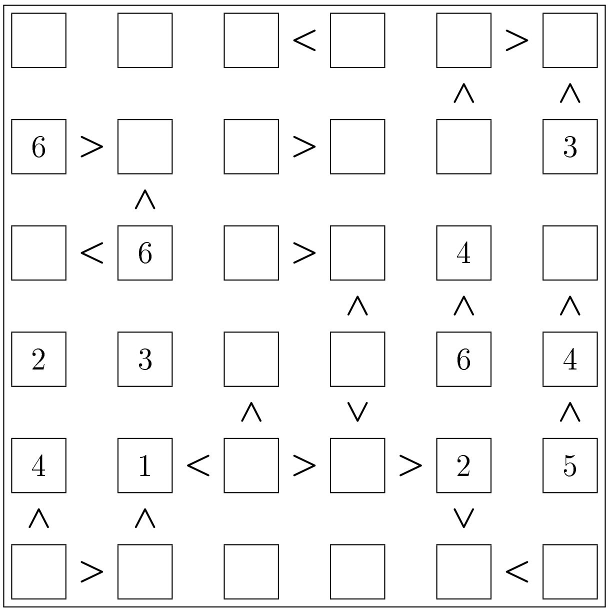
   Wie groß ist der in der Abbildung markierte Winkel α?

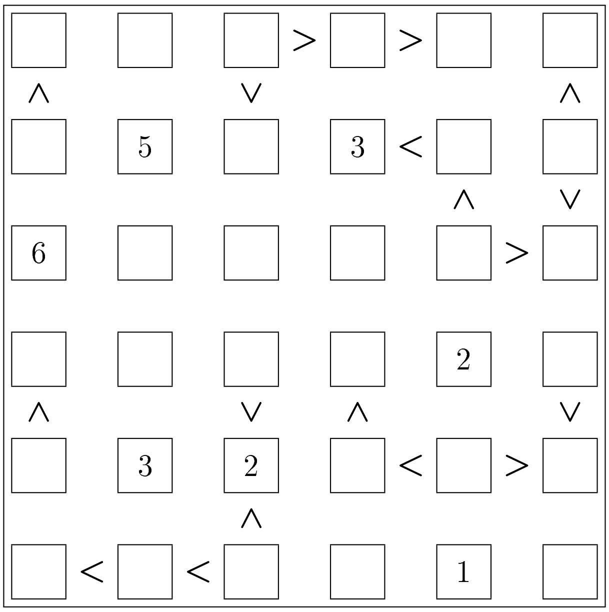
Lösungstyp:
$\mathbb{N}$;$\mathbb{N}$;{Wort(1)};$\mathbb{R}$(1)

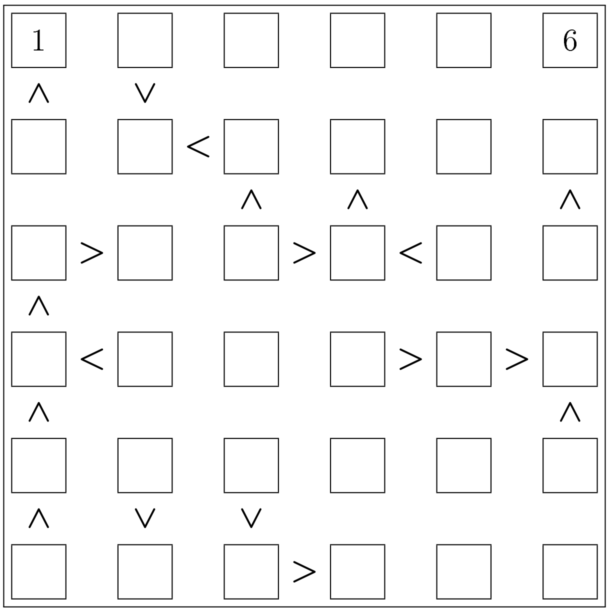
Aufgabe 1.4: Größer oder kleiner (5)

Bei diesem Rätsel wird auf einem quadratischen $n \times n$-Gitter gespielt. Ziel ist es, die Zahlen $1, ..., n$ so zu platzieren, dass jede Zeile und Spalte nur exakt eine von jeder Ziffer enthält. Meist sind zu Beginn einige Ziffern angegeben. Die Besonderheit des Futoshiki sind die zwischen einigen Feldern platzierten Relationszeichen „<“ und „>“ “ , die festlegen, dass der Wert des Feldes höher bzw. niedriger sein muss als der seines Nachbarn. Diese Ungleichheitsrelationen müssen zur Lösung des Rätsels berücksichtigt und somit am Ende alle erfüllt werden.









Gesucht ist die Summe aller einzutragenen Zahlen auf jeder der vier Diagonalen von oben links nach unten rechts.

Lösungstyp: ℕ

Wir suchen Helfer (Studenten; Lehrer; Oberstufenschüler) die uns beim Korrekturlesen der Aufgaben oder bei der Korrektur der Einsendungen helfen wollen!
Der zeitliche Aufwand ist überschaubar! Wenn aus jeder Schule pro ca. 30 Gruppen ein Helfer gestellt würde, wären alle unsere Probleme gelöst. In diesem Forumspost findet ihr mehr Informationen.

Aufgabe 1.5: Ryan

Bisher glaubte die Fachwelt, dass ein Computerprogramm mit einer Laufzeit von $t \in \mathbb{N}$ Schritten mindestens $\frac{t}{\lg(t)}$ Bits an Speicherplatz braucht. Das entspricht einer nahezu linearen Beziehung zwischen Raum und Zeit. Beim Symposium der Association for Computing Machinery (ACM) in Prag präsentierte Williams im Juni 2025 sein neues Ergebnis: Jedes abzählbare, in t Schritten lösbare Problem benötigt maximal $\sqrt{t \cdot \lg(t)}$ Bits an Speicherplatz.
„Das Ergebnis zeigt, dass wir mit unserer bisherigen Intuition komplett falsch lagen “, sagte Williams gegenüber „Scientific American“. „Ich dachte, da muss etwas nicht stimmen, denn das Ergebnis ist äußerst unerwartet.“
Mit seinem Beweis entkräftet Williams die bisherige Annahme über praktisch lösbare Probleme. Denn aus mathematischer Sicht unterscheidet sich das Ergebnis von Williams gewaltig vom bisher vermuteten Zusammenhang. An Stelle der beinahe linearen Beziehung zwischen Raum und Zeit ist sie nun über die Quadratwurzel gegeben; bei steigender Schrittzahl t kommt der Unterschied immer deutlicher zum Vorschein.

1. Mit welchem t stimmen beide Speicherplatzwerte überein?
2. Ab welchem t hat sich durch das Ergebnis der Speicherplatzwert um den Faktor mindestens 10 verkleinert?

Lösungstyp: $\{\mathbb{N}\}$;$\mathbb{N}$

Aufgabe 1.6: Funktionen

1. Gesucht ist die Anzahl aller Paare reeller Zahlen. die folgende Bedingungen erfüllen

$$(x;y) \in [0;\tfrac{\pi}{8}] \times [0;\tfrac{\pi}{8}],$$

$$\cos^6(1000x) - \sin^6(1000y) = 1.$$

2. Gegeben seien

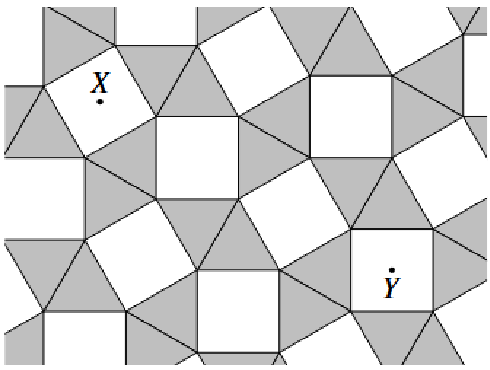
$$\{(x;y)\,|\,x+y=3 \;\wedge\; 2x-y=0\} = A$$
$$\{(x;y)\,|\,x+y=3 \;\wedge\; 3x-ty=4\} = B$$
$$\{(x;y)\,|\,2x-y=0 \;\wedge\; 3x-ty=4\} = C.$$

wobei A, B, C Punkte in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sind.
Ermittle alle Werte für t, für die $|\overline{AB}| = |\overline{AC}|$ gilt.

Einzugeben ist die Summe der Anzahlen aller Lösungen beider Aufgaben.

Lösungstyp: $\mathbb{N}$

Aufgabe 1.7: Zweierlei Fliesen

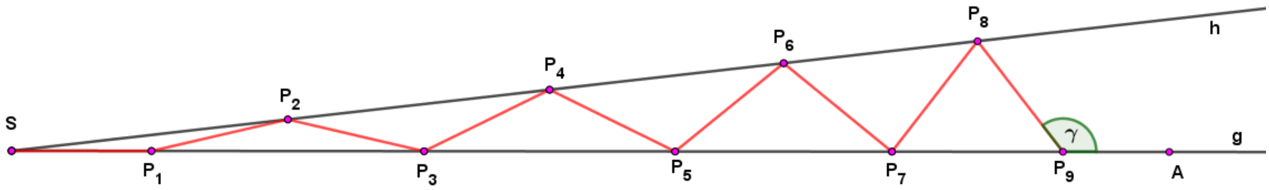


Der Fliesenleger ist fertig.
Im Bild rechts sieht man einen Ausschnitt seiner Arbeit.
Alle Fliesen-Seitenlängen betragen 2 LE.
X und Y seien die Zentren der betr. Quadrat-Fliese.
Gesucht ist der Abstand $|\overline{XY}|$.

(Bei der Eingabe bitte so wenig Zeichen wie möglich benutzen.)

Lösungstyp: $\mathbb{R}$

Aufgabe 1.8: Polygon



Zwei Halbgeraden bilden einen Winkel α, auf dessen Schenkel die Punkte P_i mit $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ liegen. Die Punkte bilden mit dem Scheitelpunkt S einen Polygonzug, dessen Streckenteile alle dieselbe Länge besitzen. Gegeben sei der Winkel $\gamma = \sphericalangle AP_9P_8 = 128{,}32°$.
Gesucht ist $\alpha = \sphericalangle g, h$.

Lösungstyp: $\mathbb{Q}$

Aufgabe 1.9: Spannende Zahl

Betrachten wir eine Menge S, die $m \geq 4$ Elemente enthält, von denen jedes eine positive ganze Zahl ist und von denen keine zwei gleich sind.
Wir bezeichnen S als langweilig, wenn die Menge vier verschiedene ganze Zahlen a, b, c, d enthält, sodass $a + b = c + d$ gilt.
Wir bezeichnen S als spannend, wenn S nicht langweilig ist. Beispielsweise ist $\{2, 4, 6, 8, 10\}$ langweilig, da $4 + 8 = 2 + 10$. Hingegen ist $\{1, 5, 10, 25, 50\}$ spannend.
Gesucht ist eine spannende Teilmenge von aus $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, die genau 5 Elemente enthält.
(Bei der Eingabe sind die gefundenen Zahlen von klein nach groß einzugeben.)
Sollte diese Aufgabe zu einer Zusatzaufgabe erklärt werden, muss in der Lösung auch nachgewiesen worden sein, dass $\{1, 5, 10, 25, 50\}$ spannend ist.

Lösungstyp: $\mathbb{N}$;$\mathbb{N}$;$\mathbb{N}$;$\mathbb{N}$;$\mathbb{N}$

Aufgabe 1.10: Bruchfehler

Heino hat als Ergebnis einer Divisionsaufgabe 57 Rest 52 herausbekommen.
Bei seiner Probe erhält er allerdings 17380. Bei der Kontrolle seiner Rechnung stellt er fest, dass er bei der Probe „geschludert“ hatte, denn er hatte die Zahlen undeutlich geschrieben und bei der Probe beim Divisor im Zehner eine 6 als 0 gelesen.
Gesucht ist die Summe von Dividend und Divisor der ursprünglichen Aufgabe.

Lösungstyp: $\mathbb{N}$