1 Das Problem

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Wir definieren die Indexmenge $N = \{1,2,\ldots,n\}$ und zwei Vektoren $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n), q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ mit $n \geq 2$ und $p_i, q_i \in \{0,1\}$ für $i \in N$. Für $i, j \in N$ mit $i < j$ sei

$$\begin{aligned}
\mathrm{one}_i^j(p) &= \#\{k \mid i < k < j, p_k = 1\} \\
\overline{\mathrm{one}}_i^j(p) &= \#\{k \mid 1 \leq k < i, p_k = 1\} + \#\{k \mid j < k \leq n, p_k = 1\} \\
\mathrm{zero}_i^j(p) &= \#\{k \mid i < k < j, p_k = 0\} \\
\overline{\mathrm{zero}}_i^j(p) &= \#\{k \mid 1 \leq k < i, p_k = 0\} + \#\{k \mid j < k \leq n, p_k = 0\}
\end{aligned}$$

Definition 1. *Es sei das Tupel (n, p, q) wie oben beschrieben. Gibt es $i, j \in N$ mit $i < j$, $p_i = p_j$ und*

$$\mathrm{one}_i^j(p) > \overline{\mathrm{one}}_i^j(p), \tag{1}$$

$$\mathrm{zero}_i^j(p) > \overline{\mathrm{zero}}_i^j(p), \tag{2}$$

dann kann für (i, j) folgende Transformation durchgeführt werden, die wir Tausch oder Wechsel nennen

$$\tau_{ij}(p) = (p_1, p_2, \ldots, p_{i-1}, 1 - p_i, p_{i+1}, \ldots, p_{j-1}, 1 - p_j, p_{j+1}, \ldots, p_n).$$

Kann ein q durch eine endliche Folge von m Wechseln aus p erreicht werden, also

$$(\tau_{i_m j_m} \circ \cdots \circ \tau_{i_2 j_2} \circ \tau_{i_1 j_1})(p) = q, \tag{3}$$

schreiben wir auch $p \sim q$.

Definition 2. *Es sei (n, p, q) gegeben mit $\#\{i \in N \mid p_i = 1\}$ und $\#\{i \in N \mid p_i = 0\}$ ungerade. Gilt $p \sim q$, so nennen wir (n, p, q) lösbar.*

Und die Frage ist natürlich: Es sei das Tupel (n, p, q) gegeben. Ist (n, p, q) lösbar?

2 Lösung

Proposition 3. *Es sei (n, p, q) wie in Definition 2 gegeben. Dann ist n gerade.*

Beweis. Da nach Voraussetzung $\#\{i \in N \mid p_i = 1\}$ und $\#\{i \in N \mid p_i = 0\}$ ungerade sind, muss $n = \#\{i \in N \mid p_i = 1\} + \#\{i \in N \mid p_i = 0\}$ gerade sein. □

Proposition 4. *Es sei (n, p, q) wie in Definition 2 gegeben. Dann gilt für jeden Wechsel von (i, j)*

$$j - i \geq \frac{n}{2} + 1, \tag{4}$$

d.h. die Anzahl der Indizes zwischen i und j muss mindestens $\frac{n}{2}$ sein.

Beweis. Als notwendige Voraussetzung für einen Tausch folgt aus Bedingungen 1 und 2

$$\mathrm{one}_i^j(p) + \mathrm{zero}_i^j(p) \geq \overline{\mathrm{one}}_i^j(p) + \overline{\mathrm{zero}}_i^j(p) + 2.$$

Lässt man noch die Bilanzgleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{one}_i^j(p) + \mathrm{zero}_i^j(p) + \overline{\mathrm{one}}_i^j(p) + \overline{\mathrm{zero}}_i^j(p) &= n-2, \\ \mathrm{one}_i^j(p) + \mathrm{zero}_i^j(p) &= j-i-1 \end{aligned}$$

einfließen, folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{one}_i^j(p) + \mathrm{zero}_i^j(p) &\geq n - (\mathrm{one}_i^j(p) + \mathrm{zero}_i^j(p)) \\ 2(j-i-1) &\geq n \\ j-i &\geq \frac{n}{2}+1. \end{aligned}$$

□

Definition 5. *Es sei (n,p,q) wie in Definition 2 gegeben. Wir definieren $L = \{1,\dots,\frac{n}{2}-1\}$ und $R = \{\frac{n}{2}+2,\dots,n\}$.*

Korollar 6. *Es sei (n,p,q) wie in Definition 2 gegeben. Dann können die Indizes $\{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1\}$ nicht wechseln. Ein Wechsel (i,j) findet immer mit einem Index $i \in L$ und einem Index $j \in R$ statt.*

Definition 7. *Es sei (n,p,q) wie in Definition 2 gegeben. Wir nennen $i \in L$ tauschbar, wenn*

$$\mathrm{one}_i^n(p) > \overline{\mathrm{one}}_i^n(p) + p_i - p_n \quad \textit{und} \tag{5}$$

$$\mathrm{zero}_i^n(p) > \overline{\mathrm{zero}}_i^n(p) - p_i + p_n \tag{6}$$

gilt. Analog nennen wir $j \in R$ tauschbar, falls

$$\mathrm{one}_1^j(p) > \overline{\mathrm{one}}_1^j(p) + p_j - p_1 \quad \textit{und} \tag{7}$$

$$\mathrm{zero}_1^j(p) > \overline{\mathrm{zero}}_1^j(p) - p_j + p_1 \tag{8}$$

gilt. Sind alle $\{i \in L \mid p_i \neq q_i\}$ und $\{j \in R \mid p_j \neq q_j\}$ tauschbar, so nennen wir (n,p,q) tauschbar für (n,p,q).

Das bedeutet, dass (i,n) tauschen können, sobald p_n den Wert von p_i annimmt bzw. $(1,j)$ tauschen können, sobald p_1 den Wert von p_j annimmt.

Proposition 8. *Es sei (n,p,q) wie in Definition 2 gegeben. Können $i \in L, j \in R$ tauschen, so sind beide tauschbar.*

Beweis. Da (i,j) tauschen können, ist $p_i = p_j$. Außerdem gelten nach Voraussetzung Ungleichungen 1 und 2.

Betrachten wir den Fall $j = n$. Dann gilt $p_i = p_n$ und es folgen die Ungleichungen 5 und 6, womit i tauschbar ist.

Nun betrachten wir $j < n$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{one}_i^n(p) &= \mathrm{one}_i^j(p) + \mathrm{one}_{j-1}^n(p) \\ &\geq \mathrm{one}_i^j(p) + p_j + p_n \\ &> \overline{\mathrm{one}}_i^j(p) + p_j + p_n \quad \text{mit Ungleichung 1} \\ &= \overline{\mathrm{one}}_i^j(p) + p_i + p_n \\ &\geq \overline{\mathrm{one}}_i^n(p) + p_i + p_n \\ &\geq \overline{\mathrm{one}}_i^n(p) + p_i - p_n \end{aligned}$$

und es gilt Ungleichung 5. Analog folgt Ungleichung 6 und damit ist i tauschbar. Aus Symmetriegründen ist auch j tauschbar. □

Proposition 9. *Es sei (n,p,q) wie in Definition 2 gegeben. Ist $i \in L$ nicht tauschbar, dann kann kein $i' \in L$ mit $i' \geq i$ tauschen. Ist $j \in R$ nicht tauschbar, dann kann kein $j' \in R$ mit $j' \leq j$ tauschen.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$\mathrm{one}_i^n(p) \leq \overline{\mathrm{one}}_i^n(p) + p_i - p_n.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{one}_{i'}^n(p) &\leq \mathrm{one}_i^n(p) - p_{i'} \\
&\leq \overline{\mathrm{one}}_i^n(p) + p_i - p_n - p_{i'} \\
&\leq \overline{\mathrm{one}}_{i'}^n(p) - p_i + p_i - p_n - p_{i'} \\
&= \overline{\mathrm{one}}_{i'}^n(p) - p_n - p_{i'} \\
&\leq \overline{\mathrm{one}}_{i'}^n(p) - p_n + p_{i'}
\end{aligned}$$

und mit analoger Betrachtung für die Anzahl der Nullen und aus Symmetriegründen folgt die Behauptung. □

Proposition 10. *Es sei (n,p,q) wie in Definition 2 gegeben. Ist $i \in L$ tauschbar, dann sind alle $i' \in L$ mit $i' \leq i$ tauschbar. Ist $j \in R$ tauschbar, dann sind alle $j' \in R$ mit $j' \geq j$ tauschbar.*

Beweis. Nach Voraussetzung gilt

$$\mathrm{one}_i^n(p) > \overline{\mathrm{one}}_i^n(p) + p_i - p_n.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{one}_{i'}^n(p) &\geq \mathrm{one}_i^n(p) + p_i \\
&> \overline{\mathrm{one}}_i^n(p) + p_i - p_n + p_i \\
&\geq \overline{\mathrm{one}}_{i'}^n(p) + p_{i'} + p_i - p_n + p_i \\
&\geq \overline{\mathrm{one}}_{i'}^n(p) + p_{i'} - p_n
\end{aligned}$$

und mit analoger Betrachtung für die Anzahl der Nullen und aus Symmetriegründen folgt die Behauptung. □

Lemma 11. *Es sei (n,p,q) wie in Definition 2 gegeben. Genau dann ist $i \in N$ für alle (n,p',q) mit $p' \sim p$ tauschbar, wenn i für (n,p,q) tauschbar ist.*

Beweis. Wir zeigen zunächst: $i \in L$ tauschbar $\Rightarrow$ i ist tauschbar für alle (n,p',q) mit $p' \sim p$. Es reicht zu zeigen, dass i nach einem beliebigen Wechsel tauschbar bleibt. Betrachten wir also einen Wechsel (i',j) mit $i' \neq i$. Da (i',j) wechseln können, sind sie nach Proposition 8 auch tauschbar. Es sei $p' = \tau_{i'j}(p)$. Wir unterscheiden 4 Fälle:

1. $i' > i$ und $j = n$: Nach Voraussetzung gelten

$$\begin{aligned}
\mathrm{one}_i^n(p') &\geq \mathrm{one}_{i'}^n(p') + p'_{i'} \quad \text{wegen } j = n && (9)\\
\overline{\mathrm{one}}_i^n(p) &\leq \overline{\mathrm{one}}_{i'}^n(p) - p_i && (10)\\
\mathrm{one}_{i'}^n(p) &= \mathrm{one}_{i'}^n(p') && (11)\\
\overline{\mathrm{one}}_i^n(p) &= \overline{\mathrm{one}}_i^n(p') && (12)
\end{aligned}$$

Damit folgern wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{one}_i^n(p') &\geq \mathrm{one}_{i'}^n(p') + p'_{i'} \quad \text{Ungleichung 9} \\
&= \mathrm{one}_{i'}^n(p) + p'_{i'} \quad \text{Ungleichung 11} \\
&> \overline{\mathrm{one}}_{i'}^n(p) + \underbrace{p'_{i'} + p_{i'}}_{=1} - p_n \quad \text{mit Ungleichung 5} \\
&= \overline{\mathrm{one}}_{i'}^n(p) + 1 - p_n \\
&\geq \overline{\mathrm{one}}_i^n(p) + p_i + 1 - p_n \quad \text{Gleichung 10} \\
&= \overline{\mathrm{one}}_i^n(p') + p_i + 1 - p_n \quad \text{Gleichung 12} \\
&= \overline{\mathrm{one}}_i^n(p') + p_i + p'_n \\
&\geq \overline{\mathrm{one}}_i^n(p') + p'_i - p'_n.
\end{aligned}$$

Analoge Abschätzungen bezüglich der Nullen führen zur Tauschbarkeit von i für p'.

2. $i' > i$ und $j < n$: Dann ist $p'_i = p'_n = p_i = p_n$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{one}_i^n(p') &\geq \mathrm{one}_{i'}^j(p') + p'_{i'} + p'_n \\
&> \overline{\mathrm{one}}_{i'}^j(p') + p'_{i'} + p'_n \quad \text{denn } (i', j) \text{ können wechseln in } p' \\
&\geq \overline{\mathrm{one}}_i^n(p') + p'_i + p'_n + p'_{i'} + p'_n \\
&\geq \overline{\mathrm{one}}_i^n(p') + p'_i - p'_n.
\end{aligned}$$

Mit analoger Abschätzung bezüglich der Anzahl Nullen bleibt i auch nach dem Wechsel tauschbar.

3. $i' < i$ und $j < n$: Hier gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{one}_i^n(p') &= \mathrm{one}_i^n(p) + p'_j - p_j \\
&> \overline{\mathrm{one}}_i^n(p) + p_i - p_n + p'_j - p_j \quad \text{mit Ungleichung 5} \\
&= \overline{\mathrm{one}}_i^n(p') - p'_{i'} + p_{i'} + p_i - p_n + p'_j - p_j \\
&= \overline{\mathrm{one}}_i^n(p') + p_i - p_n.
\end{aligned}$$

Mit analoger Abschätzung bezüglich der Anzahl Nullen bleibt i somit nach dem Wechsel tauschbar.

4. Es bleibt noch der Fall $i' < i$ und $j = n$. Hier gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{one}_i^n(p') &= \mathrm{one}_i^n(p) \\
&> \overline{\mathrm{one}}_i^n(p) + p_i - p_n \quad \text{mit Ungleichung 5} \\
&= \overline{\mathrm{one}}_i^n(p') - p'_{i'} + p_{i'} + p_i - p_n \\
&= \overline{\mathrm{one}}_i^n(p') - p'_{i'} + p_i \\
&= \overline{\mathrm{one}}_i^n(p') - p'_n + p'_i.
\end{aligned}$$

Mit analoger Betrachtungen für die Anzahl Nullen bleibt i tauschbar.

Insgesamt bleibt also die Tauschbarkeit erhalten. Es gilt noch zu zeigen, dass auch die Nicht-Tauschbarkeit erhalten bleibt. Es sei also

$$\mathrm{one}_i^n(p) \leq \overline{\mathrm{one}}_i^n(p) + p_i - p_n.$$

1. $i' > i$: Dieser Fall kann nicht eintreten, da nach Proposition 9 ein solches i' nicht tauschbar ist.

2. $i' < i$ und $j < n$: Hier gilt

$$\begin{aligned}\text{one}_i^n(p') &= \text{one}_i^n(p) + p'_j - p_j \\ &\leq \overline{\text{one}}_i^n(p) + p_i - p_n + p'_j - p_j \\ &= \overline{\text{one}}_i^n(p') - p'_{i'} + p_{i'} + p_i - p_n + p'_j - p_j \\ &= \overline{\text{one}}_i^n(p') + p_i - p_n \\ &= \overline{\text{one}}_i^n(p') + p'_i - p'_n\end{aligned}$$

und mit gleicher Argumentation wie zuvor bleibt i nicht tauschbar.

3. $i' < i$ und $j = n$: Hier gilt

$$\begin{aligned}\text{one}_i^n(p') &= \text{one}_i^n(p) \\ &\leq \overline{\text{one}}_i^n(p) + p_i - p_n \\ &= \overline{\text{one}}_i^n(p') - p'_{i'} + p_{i'} + p_i - p_n \\ &= \overline{\text{one}}_i^n(p') - p'_{i'} + p_i \\ &= \overline{\text{one}}_i^n(p') - p'_n + p'_i\end{aligned}$$

und auch hier folgt mit gleicher Argumentation wie oben, dass i nicht tauschbar bleibt.

Insgesamt folgt, dass die Nicht-Tauschbarkeit von $i \in L$ unter Wechseln erhalten bleibt und aus Symmetriegründen können wir diese Eigenschaft auf $i \in N$ ausweiten. $\square$

Korollar 12. *Gegeben sei (n, p, q) tauschbar. Jedes (n, p', q) mit $p' \sim p$ ist tauschbar.*

Definition 13. *Es sei (n, p, q) wie in Definition 2 gegeben. Wir definieren die linke Bilanz $b_L(p)$ und die rechte Bilanz $b_R(p)$ über*

$$\begin{aligned}b_L(p) &= \#\{i \in L \mid p_i = 1, q_i = 0\} - \#\{i \in L \mid p_i = 0, q_i = 1\} \\ b_R(p) &= \#\{j \in R \mid p_j = 1, q_j = 0\} - \#\{j \in R \mid p_j = 0, q_j = 1\}\end{aligned}$$

Wir nennen p ausbalanciert, wenn gilt

$$b_L(p) = b_R(p).$$

Lemma 14. *Es sei (n, p, q) wie in Definition 2 gegeben. Damit (n, p, q) lösbar ist, muss p ausbalanciert sein.*

Beweis. Aus Korollar 6 folgt, dass bei jedem Wechsel die linke Bilanz und die rechte Bilanz gleichzeitig entweder um 1 erhöht oder verringert. Insbesondere ändert sich aber die Differenz der Bilanzen nicht. Da im Falle von $p = q$ trivialer Weise $b_L(p) = b_R(p) = 0$ gilt, muss p ausbalanciert sein. $\square$

Definition 15. *Es sei (n, p, q) wie in Definition 2 gegeben. Wir definieren*

$$\sigma(n, p, q) = \#\{i \in N \mid p_i \neq q_i\}.$$

Lemma 16. *Gegeben sei (n, p, q) tauschbar und ausbalanciert mit $\sigma(n, p, q) > 0$. Dann gibt es (n, p', q) tauschbar mit $p' \sim p$ und $\sigma(n, p, q) \geq \sigma(n, p', q)$, wo tauschbare $i \in L$ und $j \in R$ existieren mit $p_i = p_j \neq q_i = q_j$.*

Beweis. Wir können für $i \in L$ ohne Beschränkung der Allgemeinheit $p_i = 0, q_i = 1$ annehmen. Da das Problem ausbalanciert ist, gibt es entweder ein $j \in R$ mit $p_j = 0, q_j = 1$ oder ein $i' \in L$ mit $p_{i'} = 1, q_{i'} = 0$. Im ersten Fall wären wir direkt fertig. Im zweiten Fall nutzen wir aus, dass i und i' tauschbar sind und können einen der beiden mit n tauschen. □

Satz 17. *Es sei (n, p, q) wie in Definition 2 gegeben. Genau dann ist (n, p, q) lösbar, wenn es ausbalanciert und tauschbar ist.*

Beweis. Dass ein lösbares p auch ausbalanciert sein muss, folgt aus Lemma 14. Dass ein lösbares p zudem impliziert, dass (n, p, q) tauschbar ist, ist mit Korollar 12 auch klar. Für die umgekehrte Richtung nehmen wir an, das Problem wäre nicht lösbar. Dann können wir solange Wechsel ausführen bis wir eine kleinste Anzahl an nicht erfüllbaren Wechseln erreichen. Wir betrachten das zugehörige $\bar{p} \sim p$. Dann ist also $\sigma(n, \bar{p}, q) > 0$. Außerdem ist wegen $\bar{p} \sim p$ mit Korollar 12 auch $(n, \bar{p}, q)$ tauschbar. Mit Lemma 16 dürfen wir damit davon ausgehen, dass $i \in L$ und $j \in R$ existieren mit $p_i = p_j \neq q_i = q_j$. Nun gibt es zwei Fälle:

1. $\bar{p}_1 = \bar{p}_n$: Falls $\bar{p}_i = \bar{p}_j = \bar{p}_1 = \bar{p}_n$, setzen wir $p' = (\tau_{in} \circ \tau_{1j})(\bar{p})$, andernfalls $p' = (\tau_{in} \circ \tau_{1j} \circ \tau_{1n})(\bar{p})$.
2. $\bar{p}_1 \neq \bar{p}_n$: Hier nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $\bar{p}_i = \bar{p}_n$. Dann setzen wir $p' = (\tau_{1j} \circ \tau_{1n} \circ \tau_{in})(\bar{p})$.

In jedem Fall erhalten wir durch weitere Wechsel ein (n, p', q) mit $\sigma(n, p', q) < \sigma(n, \bar{p}, q)$, ein Widerspruch. □

Korollar 18. *Es lässt sich in $O(n)$ zeitlichem Aufwand bestimmen, ob das Problem lösbar ist.*

Beweis. Nach Satz 17 müssen wir nur prüfen, ob (n, p, q) ausbalanciert und tauschbar ist. Die Bilanzen lassen sich in $O(n)$ berechnen. Anschließend muss man mit Proposition 10 nur prüfen, ob $\max_{i \in L, p_i \neq q_i} i$ mit n tauschbar ist und ob $\min_{j \in R, p_j \neq q_j} j$ mit 1 tauschbar ist. Das ist jeweils in $O(n)$ Aufwand mit $O(1)$ Speicher möglich. □