Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences - EL JADIDA
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2022/23
Niveau : SMIA2
Algèbre 3

Épreuve d'algèbre 3 Session normale
Durée 1h30'

Exercice 1. Montrer que l'ensemble $H = \{(x, x^2, x^3)/x \in \mathbb{R}\}$ engendre le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2. On considère les ensembles suivants :

$$E = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})/a + d = 0\} \quad \text{et} \quad F = \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})/a + b + c + d = 0\}$$

Soit G le $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ d'équation cartésienne

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$

1. Montrer que E et F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.
2. Déterminer une base et la dimension de E.
3. Déterminer une base et la dimension de G.
4. Soit $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}.$$

(i) Montrer que $f(G) = F$.
(ii) Montrer que l'application $h : G \longrightarrow F$ induite par f de G dans F, définie par $h(u) = f(u)$, est un isomorphisme.
5. En déduire une base et la dimension de F.