Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences - EL JADIDA
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2023/24
Niveau : Algèbre 2 (MIP & IA)

Série 2

Exercice 1. Soient $\mathcal{E}$ un ensemble non vide et F un espace vectoriel. Montrer que $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction F si et seulement si $\mathcal{E}$ est muni d'une loi externe + qui à un couple $(A, \overrightarrow{u})$ de $\mathcal{E} \times F$ associe un élément $A + \overrightarrow{u}$ de $\mathcal{E}$ vérifiant les axiomes suivantes :
1. $\forall A \in \mathcal{E}, \forall \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \in F,\ A + (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = (A + \overrightarrow{u}) + \overrightarrow{v}$
2. $\forall A, B \in \mathcal{E}, \exists! \overrightarrow{u} \in F,\ B = A + \overrightarrow{u}$
Dans ce cas, $\mathcal{E}$ est de direction F.

Exercice 2. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine et soit $\mathcal{F}$ une partie non vide de $\mathcal{E}$.
1. On suppose que $\mathcal{F}$ un sous espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ et soit A un point quelconque de $\mathcal{F}$. Montrer que

$$\{\overrightarrow{AM}/M \in \mathcal{F}\} = \{\overrightarrow{MN}/M, N \in \mathcal{F}\}$$

et donc l'ensemble $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ ne dépend pas du point A.
2. On suppose que $\mathcal{F}$ un sous espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ et soit A un point de $\mathcal{F}$. Montrer que

$$M \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}.$$

3. Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si il existe $A \in \mathcal{F}$ et un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ tel que $\mathcal{F} = A + \overrightarrow{\mathcal{G}}$.
Dans ce cas, $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ est la direction de $\mathcal{F}$.
4. En déduire que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si il existe un point A de $\mathcal{F}$ tel que l'ensemble $\overrightarrow{G} = \{\overrightarrow{AM}/M \in \mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Exercice 3.
1. Montrer que l'ensemble des solutions S d'un système d'équations linéaires

compatible à n inconnues (S) est un sous espace affine de $\mathbb{R}^n$ de direction l'ensemble des solutions S_0 du système homogène associé.
2. Généralement, si $\dim(\mathcal{E}) = n$, $\mathcal{R} = (A, \mathcal{B})$ un repère cartésien de $\mathcal{E}$ et (S) un système d'équations linéaires compatible à n inconnues. Alors l'ensemble $\mathcal{F}$ des points $M = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}}$ tels que $(x_1, \ldots, x_n) \in S$ est un sous espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}} = \{(x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}/(x_1, \ldots, x_n) \in S_0\}$.

Exercice 4. Montrer que
1. L'ensemble $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4/x + y = 1, 2x + y + z + t = 2$ et $x + y + 2z - t = 1\}$ est un sous espace affine de $\mathbb{R}^4$.
2. L'ensemble $G = \{(x - 2y + z - 1, y + z, 2x + 3y - z\sqrt{2})/x, y, z \in \mathbb{R}\}$ est un sous espace affine de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5.
1. Montrer que l'ensemble

$$H = \{P \in \mathbb{R}_3[X]/4P(X) = P(X + 1) + XP'(X) + Q(X)\}$$

est un sous espace affine de $\mathbb{R}_3[X]$ où $Q(X) = 1 + X + 2X^2$.
2. Déterminer un repère cartésien $\mathcal{H}$ de H et la dimension de H.
3. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in H$. Déterminer les coordonnées de P dans le repère $\mathcal{H}$.

Exercice 6. Soient $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ deux espaces affines quelconques et soit G un espace vectoriel. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.
1. Si $A \in \mathcal{E}$ alors $\{A\}$ est un sous espace affine de $\mathcal{E}$.
2. Un espace affine de dimension 0 est un point.
3. Un sous-espace vectoriel de G est un sous-espace affine de G.
4. Un sous-espace affine de G est un sous-espace vectoriel de G.
5. Un sous-espace affine de G passant par $\overrightarrow{0}$ est un sous-espace vectoriel de G.
6. Soient $\mathcal{H}$ et $\mathcal{T}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$ de même dimension. Si $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{T}$ alors $\mathcal{H} = \mathcal{T}$

7. Si $\mathcal{H}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ et si A et B sont deux points distincts de $\mathcal{H}$ alors la droite (AB) est contenue dans $\mathcal{H}$.
8. On suppose que $\dim(\mathcal{E}) \geq 1$. Si $A \in \mathcal{E}$ alors il existe au moins une droite $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$ qui passe par A.
9. On suppose que $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$. Si $A, B \in \mathcal{E}$ alors il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ de $\mathcal{E}$ qui passe par A et B.
10. On suppose que $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$. Si $\mathcal{D}$ est une droite de $\mathcal{E}$ alors il existe au moins un plan $\mathcal{P}$ de $\mathcal{E}$ qui contient $\mathcal{D}$.
11. On suppose que $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$. Si $\mathcal{D}$ est une droite de $\mathcal{E}$ et A un point de $\mathcal{E}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{D}$, alors il existe un unique plan $\mathcal{P}$ de $\mathcal{E}$ qui contient $\mathcal{D}$ et qui passe par A.
12. On suppose que $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$. Trois points alignés sont coplanaires.
13. On suppose que $\dim(\mathcal{E}) \geq 2$. Si $A \in \mathcal{E}$ et $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}$ alors A et $\mathcal{D}$ sont coplanaires.
14. $\mathcal{E} \times \mathcal{F}$ est un espace affine.
15. L'image d'un sous-espace vectoriel de G par une translation est un sous-espace vectoriel de G.

Exercice 7. La partie $E = \{x \in \mathbb{R}/x > 0\}$ de $\mathbb{R}$ est-elle un sous-espace affine de $\mathbb{R}$?

Exercice 8. Montrer que
i) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles, alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont confondus ou bien leur intersection est vide.
ii) Si $\mathcal{F}$ est faiblement parallèle à $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{F}$ est contenu dans $\mathcal{G}$ ou $\mathcal{F}$ ne rencontre pas $\mathcal{G}$.

Exercice 9. Montrer que
1) les points A, B et C sont alignés si et seulement si la famille $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ est liée.
2) les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si la famille $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ est liée.

Exercice 10. Soient les points pondérés $(A_i, \lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ avec $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$.

Montrer qu'il existe un unique point $G \in \mathcal{E}$ tel que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$. Dans ce cas on a

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}.$$

où O est un point quelconque.

Exercice 11. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, montrer que la droite $D = D((1,2,0), \overrightarrow{u} = (2,-1,2))$ est faiblement paralléle au plan P : $2x + 6y + z + 5 = 0$ est perpendiculaire au plan P' : $-2x + y - 2z + 3 = 0$.

Exercice 12. Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, montrer que le plan $P : 2x+6y+z+5 = 0$ est perpendiculaire au plan $P' : -2x+y-2z+3 = 0$.

Exercice 13. Soit $\mathcal{E}$ un espace affine quelconque.
1. Montrer que l'image d'un sous espace affine de $\mathcal{E}$ par une translation de $\mathcal{E}$ est un sous espace affine de $\mathcal{E}$ parallèle à ce sous-espace affine.
2. Montrer que l'image d'un sous espace affine de $\mathcal{E}$ par une homothétie de $\mathcal{E}$ est un sous espace affine de $\mathcal{E}$ parallèle à ce sous espace affine.

Exercice 14. (Bases affines)
Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de direction F.
1. Une famille $(M_1, ..., M_n)$ de points de $\mathcal{E}$ est dite affinement génératrice lorsque tout point de E peut s'exprimer comme barycentre des M_i.
Montrer que $(M_1, ..., M_n)$ est affinement génératrice si et seulement si la famille de vecteurs $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \ldots, \overrightarrow{M_1M_n})$ est génératrice.
2. Une famille $(M_1, ..., M_n)$ de points de $\mathcal{E}$ est dite affinement libre lorsqu'aucun des points M_i ne peut s'exprimer comme barycentre des autres points.
Montrer que $(M_1, ..., M_n)$ est affinement libre si et seulement si la famille de vecteurs $(\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}, \ldots, \overrightarrow{M_1M_n})$ est libre.
3. Une famille $(M_1, ..., M_n)$ de points de $\mathcal{E}$ est dite une base affine lorsqu'elle est affinement génératrice et libre.
a) Montrer que si $(A_0, ..., A_m)$ est une base affine de $\mathcal{E}$ de dimention m, alors $(A_0, \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0M_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_m})$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$.

b) Réciproquement, si $(A, \overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u}_m)$ est un repère cartésien de $\mathcal{E}$, alors en posant $A_i = A + \overrightarrow{u_i}$, la famille $(A, A_1, \dots, A_m)$ est une base affine.

""Ainsi, une base affine fournit naturellement des repères cartésien""

4. Soit $(A_0, ..., A_m)$ est une base affine de $\mathcal{E}$ et soit M un point de $\mathcal{E}$. Si M est le barycentre des (A_i, λ_i), on dit que $(\lambda_0, \dots, \lambda_m)$ sont les coordonnées barycentriques du point M dans la base affine $(A_0, ..., A_m)$.
a) Montrer que si $(\lambda_0, \dots, \lambda_m)$ et $(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$ sont des coordonnées barycentriques de M alors il existe $\beta \in \mathbb{R}^\star$ tel que $(\lambda_0, \dots, \lambda_m) = \beta(\alpha_0, \dots, \alpha_m)$.
b) Il y a unicité des coordonnées barycentriques si on impose $\sum \lambda_i = 1$. Dans ce cas les coordonnées sont dites normalisées.

""Ainsi, on peut repérer les points de $\mathcal{E}$ de manière différente que le repérage en coordonnées cartésiennes""