Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences - EL JADIDA
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2023/24
Niveau : Algèbre 2 (MIP et IA)

<u>Série 1</u>

Exercice 1. Soit K un corps commutatif. L'ensemble K^2 muni des lois suivantes est-il in K-espace vectoriel ?
1) $(x, y) + (x', y') = (y + y', x + x')$ et $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$.
2) $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\alpha(x, y) = (\alpha x, y)$.
3) $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ et $\alpha(x, y) = (\alpha x, 0)$.

Exercice 2. Soit K un corps commutatif quelconque.
1. Montrer que l'ensemble des solutions d'une équation linéaire homogène à p inconnues sur le corps K est un K-sev de K^p.
2. En déduire que l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n équations à p inconnues sur le corps K est un K-sev de K^p.

Exercice 3. Les ensembles suivants, munis de leurs opérations usuelles, sont-ils des espaces vectoriels ?
$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / x + y + \mathrm{i}z = 0\}$, $E_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 = 0\}$,
$E_3 = \{(x + y, x - y + z, y + 3z) / x, y, z \in \mathbb{R}\}$, $E_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / xy \geq 0\}$,
$E_5 = \{P \in \mathbb{Q}[X] / P(X + 1) = 3P(X - 1) + P(X)\}$,
$E_6 = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(2) = 0\}$, $E_7 = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg(P) = 2\}$,
E_8 est l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$,
E_9 est l'ensemble des fonctions bornées sur $\mathbb{R}$,
E_{10} est l'ensemble des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$,
$E_{11} = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / (u_n)\text{est stationnaire}\}$.

Exercice 4. On considère l'ensemble E des fonctions numériques définies continues sur $I = [0, 1]$. On sait que E est un $\mathbb{R}$-sev de l'ensemble H des fonctions numériques définies sur I. Préciser parmi les ensembles suivants ceux qui sont des sous-espaces vectoriels de E :
1) $F_1 = \{f \in E / f(2) = f(0) + 3\}$.

2) $F_2 = \{f \in H / f(x) = ax \, si \, x > \frac{1}{2} \, et \, f(x) = |a|x \, si \, x \leq \frac{1}{2}, a \in \mathbb{R}\}$.
3) $F_3 = \{f \in E / x^2 f^{(3)}(x) - f(x) = 0\}$.
4) $F_4 = \{f \in E / \int_0^1 f(t)dt = 0\}$.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$$

et

$$G = \{(2a, -a, 0, a) / a \in \mathbb{R}\}.$$

1. Démontrer que F et G sont en somme directe.
2. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que le vecteur $(x - 2a, y + a, z, t - a) \in F$.
3. En déduire que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

Exercice 6. Dans l'espace vectoriel des fonctions numériques $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère les sous-ensembles suivants

$$F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(0) = f(1) = 0\}$$

et

$$G = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) / f(x) = ax + b, \; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Démontrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
2. Démontrer que F et G sont en somme directe.
3. Soit $h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ tels que la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = h(x) - (ax + b)$$

vérifie $f \in F$.
4. En déduire que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = F \oplus G$.

Exercice 7. On considère l'ensemble $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / x + \overline{y} + z = 0\}$.
1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-sev de $\mathbb{C}^3$.
2. Montrer que E n'est pas un $\mathbb{C}$-sev de $\mathbb{C}^3$.
3. Déterminer une base et la dimension du $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^4$ on considère les vecteurs $u = (1, 1, 1, 1)$ et $v = (1, 2, 3, 4)$. Déterminer a et b pour que $w = (1, -1, a, b) \in \text{sev}\langle u, v\rangle$.

Exercice 9. Pour chacune des familles de $\mathbb{R}^2$ suivantes, dire si elle est génératrice, libre ou elle constitue une base de $\mathbb{R}^2$
1)) $A_1 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$.
2) $A_2 = \{(1, 2)\}$.
3) $A_3 = \{(0, 0), (2, 1), \}$.
4) $A_4 = \{(1, 2), (2, 1)\}$.

Exercice 10. Dans $E = \mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $u = (2, 1, 1)$, $v = (1, 3, 1)$ et $w = (-2, 1, 3)$. Montrer que la famille $A = (u, v, w)$ est une base de E et déterminer les coordonnées du vecteur $e = (1, 1, 1)$ dans cette base.

Exercice 11. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ on considère les vecteurs $P = X + 1$, $Q = X^2$ et $R = X^2 - X$. Montrer que la famille $A = (P, Q, R)$ est une base de E et déterminer les coordonnées du vecteur $S = aX^2 + bX + c$ dans cette base.

Exercice 12. Déterminer une base de l'espace vectoriel
1) $F = \{\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y = 2x + z = 0\}$.
2) $G = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(X - 1) = P(X^2)\}$.
3) $H = \{u = (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} / u_n + u_{n+3} = 0\}$.

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $\dim(F) + \dim(G) > n$. Montrer que $F \bigcap G \neq \{0\}$.

Exercice 14. Déterminer le rang des familles de vecteurs de $\mathbb{R}^4$:
1) $A = \{u, v, w\}$ avec $u = (1, 1, 1, 1)$, $v = (1, -1, 1, -1)$ et $w = (1, 0, 1, 1)$.
2) $B = \{u, v, w, t\}$ avec $u = (1, 1, 0, 1)$, $v = (1, -1, 1, 0)$, $w = (2, 0, 1, 1)$ et $t = (0, 2, -1, 1)$.

Exercice 15. Dans $\mathcal{F}(]-1, 1[, \mathbb{R})$ on considère les vecteurs

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},\ f_2(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}},\ f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \text{et } f_4(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Quel est le rang de la famille $A = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$?

Exercice 16. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ on considère les vecteurs P_1, P_2 tels que $P_1 = X^2$, $P_2 = (X-1)^2$. Soit $F = \text{sev}\langle P_1, P_2 \rangle$.

1. Déterminer les coordonnées de P_1 et P_2 dans la base canonique $C = (1, X, X^2)$ de E.
2. Calculer $\text{rg}(P_1, P_2)$ et en déduire que la famille $\{P_1, P_2\}$ est une base de F.
3. Compléter la famille $\{P_1, P_2\}$ en une base de E.
4. En déduire un supplémentaire de F dans E.