Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences - EL JADIDA
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2023/24
Niveau : MIP et IA
Algèbre 2

Un corrigé de l'épreuve d'algèbre 2
Session normale

Exercice 1.
1. On a $\varphi(1) = 0$, $\varphi(X) = X + 2$ et $\varphi(X^2) = 2X^2 + 4X$. Donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

On a $\mathrm{rg}(M) = 2$.
2. On a $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{sev}\langle \varphi(1), \varphi(X), \varphi(X^2)\rangle = \mathrm{sev}\langle X + 2, 2X^2 + 4X\rangle$. On a aussi $\dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = \mathrm{rg}(\varphi) = \mathrm{rg}(M) = 2$. Donc $\{X + 2, 2X^2 + 4X\}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\varphi)$ telle que $\mathrm{card}\{X + 2, 2X^2 + 4X\} = \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$, alors c'est une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$.
On a $\dim(\ker(\varphi)) = \dim(E) - \dim(\mathrm{Im}(\varphi)) = 3 - 2 = 1$. Puisque $\varphi(1) = 0$, alors $1 \in \ker(\varphi)$. Comme $1 \neq 0$ et $\dim(\ker(\varphi)) = 1$, alors $\{1\}$ est une base de $\ker(\varphi)$.
3. On a $\dim(E) = \dim(\ker(\varphi)) + \dim(\mathrm{Im}(\varphi))$. Soit $P \in \ker(\varphi) \bigcap \mathrm{Im}(\varphi)$. Alors $\exists a, b, c \in \mathbb{R}$, tels que $P = a.1 = a$ et $P = b(X + 2) + c(2X^2 + 4X)$. Donc $b(X + 2) + c(2X^2 + 4X) = a$, alors $2b = a$, $2c = 0$ et $b + 4c = 0$, donc $a = 0$, alors $P = 0$. Donc $\ker(\varphi) \bigcap \mathrm{Im}(\varphi) = \{0\}$. Par suite, $E = \ker(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)$.
4. On considère le tableau des coordonnées des vecteurs de C

$$\begin{matrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0. \\ 2 & 0 & 1 \end{matrix}$$

Ce tableau est échelonné de rang 3, donc $\mathrm{rg}(C) = \mathrm{card}(C) = 3 = \dim(E)$. Alors C est une base de E.
5. On a

$$\mathrm{Mat}_B(C) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. On doit chercher $\mathrm{Mat}_C(B)$.

On a

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & y & + & 2z & = & x'\\ & & y & & & = & y'\\ & & & & z & = & z'\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} -x' & + & y' & + & 2z' & = & x\\ & & y' & & & = & y\\ & & & & z' & = & z\end{array}\right.$$

$$\iff \begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

Par suite,

$$\mathrm{Mat}_C(B)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Remarque : On a trouvé dans ce cas particulier que $\mathrm{Mat}_C(B)=\mathrm{Mat}_B(C)$.
5. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} (E,C) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_E"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (E,C) \arrow[d, "\mathrm{id}_E"'] \\ (E,B) \arrow[r, "f"] & (E,B) \end{tikzcd}$$

On a $\mathrm{id}_E\circ f=f\circ\mathrm{id}_E$, donc $\mathrm{Mat}_{C,B}(\mathrm{id}_E)\times\mathrm{Mat}_C(f)=\mathrm{Mat}_B(f)\times\mathrm{Mat}_{C,B}(\mathrm{id}_E)$, alors $\mathrm{Mat}_B(C)\times\mathrm{Mat}_C(f)=\mathrm{Mat}_B(f)\times\mathrm{Mat}_B(C)$. Par suite, $\mathrm{Mat}_C(f)=\mathrm{Mat}_C(B)\times\mathrm{Mat}_B(f)\times\mathrm{Mat}_B(C)$. En conclusion,

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_C(f)&=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}0 & -1 & 8\\ 0 & 1 & 4\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exercice 2.
1. On a $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{sev}\langle f(e_1),f(e_2),f(e_3),f(e_4)\rangle$ avec $f(e_1)=(1,0,0,1)$, $f(e_2)=(-1,1,0,1)$, $f(e_3)=(1,1,0,3)$ et $f(e_4)=(0,1,0,2)$. Pour determiner une base de $\mathrm{Im}(f)$ on échelonne le tableau des coordonées des vecteurs $f(e_1),f(e_2),f(e_3),f(e_4)$,

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{array} \xrightarrow[L_3-L_1\to L_3]{L_2+L_1\to L_2} \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2\end{array} \xrightarrow[L_3-L_2\to L_3]{L_4-L_2\to L_4} \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

Posons $w = (1,0,0,1)$ et $z = (0,1,0,2)$, alors $\{w,z\}$ est une base de $\text{Im}(f)$. On a donc $\dim(\text{Im}(f)) = 2$.
2. On a $f(u) = (0,0,0,0)$ et $f(v) = (0,0,0,0)$. Donc $u, v \in \ker(f)$. On a aussi $\dim(\ker(f)) = \dim(E) - \dim(\text{Im}(f)) = 4 - 2 = 2$.
On considère le tableau des coordonnées de u et v
$\begin{matrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{matrix} \xrightarrow{-2L_2 + L_1 \to L_2} \begin{matrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{matrix}.$
On a alors $\text{rg}(u,v) = \text{card}(u,v) = 2 = \dim(\ker(f))$, donc $\{u,v\}$ est une base de $\ker(f)$.
3. a) On a $f(A) = (2,2,0,6) = B$.
b) Soit $C \in F$, alors $f(C) = B$, donc $f(C) = f(A)$, c'est-à-dire, $f(C-A) = 0_E$, donc $C - A \in \ker(f)$, alors $C \in A + \ker(f)$. Par suite, $F \subseteq A + \ker(f)$. Réciproquement, Soit $C \in A + \ker(f)$, alors $C = A + g$ avec $g \in \ker(f)$, donc $f(C) = f(A) + f(g) = f(A) = B$, alors $C \in F$. Donc $A + \ker(f) \subseteq F$. Par suite, $F = A + \ker(f)$. En conclusion, F est le sous-espace affine passant par A est de direction $\ker(f)$.

Exercice 3.

1. On a $J = A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

2. On a $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 0_3.$

3. On a $A = I_3 + J$, comme $I_3 \times J = J \times I_3$, alors pour $n \in \mathbb{N}^{ast}$, on a $A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} I_3^{n-k} J^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k$. Comme $j^3 = 0$, alors pour tout $k \geq 3$, on a $J^k = 0$. Donc

$$A^n = \binom{n}{0} J^0 + \binom{n}{1} J^1 + \binom{n}{2} J^2 = I_3 + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2,$$

alors

$$\begin{aligned} A^n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(3-n)}{2} & 1-2n & -n \\ n(n-2) & 4n & 1+2n \end{pmatrix} \end{aligned}$$