Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences - EL JADIDA
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2022/23
Niveau : SMIA2
Algèbre 3

Un corrigé de l'épreuve d'algèbre 3
Session normale

Exercice 1. On prend $x = 1$ pour trouver le vecteur $u = (1, 1, 1)$, $x = -1$ pour trouver le vecteur $v = (-1, 1, -1)$ et $x = 2$ pour trouver le vecteur $(2, 4, 8)$.
On a

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 - L_1 \to L_3]{L_2 - L_1 \to L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{rg}\{u, v, w\} = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$, par suite $\{u, v, w\}$ engendre $\mathbb{R}^3$. Puisque $u, v, w \in H$, alors H engendre $\mathbb{R}^3$.

Exercice 2.
1. On $0_2 \in E$, donc $E \neq \varnothing$.
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$. On a
$\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + a' & \alpha b + b' \\ \alpha c + c' & \alpha d + d' \end{pmatrix}$.
Puisque $\alpha a + a' + \alpha d + d' = \alpha(a + d) + a' + d' = 0$, alors $\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in E$ et donc E est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et par suite un espace vectoriel.
On $0_2 \in F$, donc $F \neq \varnothing$.
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in F$. On a
$\alpha a + a' + \alpha b + b' + \alpha c + c' + \alpha d + d' = \alpha(a + b + c + d) + a' + b' + c' + d' = 0$, alors $\alpha \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \in F$ et donc F est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et par suite un espace vectoriel.
2. On a

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in E &\Longleftrightarrow d = -a \\ &\Longleftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Posons $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors (A_1, A_2, A_3) engendre E.
On a

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff a = b = c = 0.$$

Donc (A_1, A_2, A_3) est libre et par suite une base de E. On a $\dim(E) = 3$.
2. Le système $x_1+x_2+x_3+x_4 = 0$ est échelonné et on a x_1 principale et x_2, x_3, x_4 secondaires. On a $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4$. Donc $(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2(-1, 1, 0, 0) + x_3(-1, 0, 1, 0) + x_4(-1, 0, 0, 1) = x_2 u + x_3 v + x_4 w$ où

$$u = (-1, 1, 0, 0), v = (-1, 0, 1, 0), w = (-1, 0, 0, 1).$$

On a (u, v, w) est une base de G et $\dim(G) = 3$.
4.(i) On a : $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in G \iff x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \iff \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \in E \iff$ $f(x_1, x_2, x_3, x_4) \in F$. Donc $f(G) = F$.
(ii) On a $h(G) = f(G) = F$ donc h est surjective. De plus on a

$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0_2 \iff \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff (x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0).$$

Donc $\ker(h) = \{(0, 0, 0, 0)\}$, alors h est injective. Par suite h est un isomorphisme.
5. Puisque h est un isomorphisme, alors $\dim(F) = \dim(G) = 3$. Puisque (u, v, w) est une base de G, alors $(h(u), h(v), h(w))$ est une base de F où

$$h(u) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, h(v) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h(w) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque. *(exercice 1) Soit B la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*
Soit $u = (x, x^2, x^3)$, $v = (y, y^2, y^3)$, $w = (z, z^2, z^3)$. On a
$mat_B(u, v, w) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{pmatrix}$.
Donc $\det_B(mat_B(u, v, w)) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix} = xyz \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$.
Ce dernier déterminant est de Vandermonde, il est donc non nul si et seulement si $x \neq y$, $x \neq z$ et $y \neq z$.
On a donc (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ $\iff \det_B(mat_B(u, v, w)) \neq 0 \iff$.
$x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$, $x \neq y$, $x \neq z$ et $y \neq z$