Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences - EL JADIDA
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2023/24
Niveau : MIP et IA
Algèbre 2

Épreuve d'algèbre 2 Session normale
Durée 1h30'

Exercice 1. Soit φ l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}_2[X]$ défini par :

$$\varphi(P) = (X+2)P', \quad P \in E.$$

1. Déterminer la matrice $M = \mathrm{Mat}_B(\varphi)$ de φ dans la base canonique $B = (1, X, X^2)$ de E et calculer son rang.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ et une base de $\ker(\varphi)$.
3. Montrer que $E = \ker(\varphi) \oplus \mathrm{Im}(\varphi)$.
4. Soient $P_1 = -1$, $P_2 = 1 + X$ et $P_3 = 2 + X^2$. Montrer que $C = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de E
5. Déterminer la matrice $N = \mathrm{Mat}_C(\varphi)$ de φ dans la base C.

Exercice 2. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$ muni de sa base canonique $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$. Soit f l'endomorphisme de E défini par

$$f(x,y,z,t) = (x - y + z, y + z + t, 0, x + y + 3z + 2t).$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et sa dimension.
2. Vérifier que $u = (-2,-1,1,0)$ et $v = (-1,-1,0,1)$ sont des vecteurs de $\ker(f)$ et déterminer une base de $\ker(f)$.
3. On considère les points $A = (1,0,1,1)$ et $B = (2,2,0,6)$ de l'espace affine E.
a) Vérifier que $f(A) = B$.
b) Soit F l'image réciproque de l'ensemble $\{B\}$, c'est-à-dire, $F = f^{-1}(\{B\})$. Montrer que F est un sous-espace affine de E et déterminer sa direction.

Exercice 3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la matrice J telle que $A = I_3 + J$ et montrer que $J^3 = 0_3$.
2. En utilisant la formule du binôme de Newton pour les matrices, exprimer A^n en fonction de n, où n est un entier naturel non nul.