Université Chouaïb Doukkali
Faculté des Sciences

MOHAMMED MOUÇOUF

Cours d'Algèbre 2

Année 2023-2024

Chapitre 2

Espaces affines

2.1 Espaces affines

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble non vide et $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On dit que $\mathcal{E}$ est un espace affine de direction $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ ssi il existe une application :

$$\phi : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{E}}$$

$$(A, B) \longmapsto \overrightarrow{AB}$$

telle que :

$$1. \forall A, B, C \in \mathcal{E}, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \text{ relation de Chasles}$$

$$2. \forall \Omega \in \mathcal{E}, \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}, \exists! M \in \mathcal{E}, \overrightarrow{\Omega M} = \overrightarrow{u}$$

Les éléments de $\mathcal{E}$ seront appelés des points et ceux de $\mathcal{E}^2$ seront nommés bipoints. La dimension de l'espace affine $\mathcal{E}$ est par définition celle de l'espace vectoriel sous-jacent $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Remarque 1. *Il y a deux types d'objets en jeu : les éléments de $\mathcal{E}$ (appelés points et notés $A, B, X, Y, ...$) et ceux de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ (appelés vecteurs et notés $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{u}, ...$).*

Exemples 1.
1. L'ensemble $\mathcal{E}$ des (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $x + y + z = 1$ est un espace affine de direction l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$.

2. Généralement : L'ensemble $\mathcal{E}$ des $(x_1,...,x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tels que $a_1x_1+...+a_nx_n=b$ est un espace affine de direction l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}=\{(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n/a_1x_1+...+a_nx_n=0\}$ $(a_1,...a_n,b$ sont des réels donnés).
3. Exemple important :On peut munir un sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^n$ d'une structure d'espace affine, de direction lui-même, dite structure affine canonique, en considérons l'addition comme une loi externe. Dans ce cas le vecteur $\overrightarrow{\overrightarrow{u}\overrightarrow{v}}=\overrightarrow{v}-\overrightarrow{u}$. Ici, il faut faire bien attention. Sur l'ensemble E, on considère deux structures différentes : la structure (canonique) d'espace vectoriel et la structure (canonique) d'espace affine. Ainsi, un élément de l'ensemble E (c'est-à-dire un n-uplet $(x_1,...,x_n)$ de nombres réels) peut être considéré tantôt comme un vecteur, tantôt comme un point : tout dépend de la structure qu'on veut considérer à ce moment là.

2.2 VECTORIALISATION D'UN ESPACE AFFINE

Nous avons vu que tout espace vectoriel donne naissance à un espace affine (exemple 3.). Mais cet espace possède un point particulier : le vecteur $\overrightarrow{0}$. Au contraire, dans un espace affine général $\mathcal{E}$ aucun point n'est privilégié par rapport aux autres : on pourrait dire que la géométrie affine est de la géométrie vectorielle sans origine a priori. Cependant on peut quand même selon les besoins de la cause choisir un point O comme **origine** de E. Cela permet de **vectorialiser** E **en** O, c'est-à-dire d'identifier le point A de $\mathcal{E}$ avec le vecteur $\overrightarrow{OA}$.

Vectorialiser un espace affine $\mathcal{E}$ en une origine convenablement choisie permet de ramener un problème affine à un problème équivalent dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, où l'on dispose de tous les outils de l'algèbre linéaire : c'est une méthode très fréquemment utilisée.

2.3 Translations et homothéties

Notation . *D'après la propriété (2) de la structure d'espace affine, pour tout point A de $\mathcal{E}$ et tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, il existe un unique point B de $\mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{v}$. On* ***note*** *$A+\overrightarrow{v}$ ce point B, c'est-à-dire qu'on a : $B=A+\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{v}$. On peut* *donc écrire :* $A + \overrightarrow{AB} = B$.

Remarque 2.
Attension : On a défini la somme d'un point et d'un vecteur comme un certain point : le +, ici, est une notation et n'est pas le + de l'espace vectoriel.

Définition 3. *Soit* $\mathcal{E}$ *un espace affine d'espace vectoriel sous-jacent* $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *un vecteur de* $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ *; on appelle translation de vecteur* $\overrightarrow{v}$ *l'application* $t_{\overrightarrow{v}}$ *de* $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{E}$ *définie par* $t_{\overrightarrow{v}}(A) = A + \overrightarrow{v}$.

Définition 4. *Soient* A *un point de* $\mathcal{E}$ *et* $k \in \mathbb{R}$ *un scalaire non nul. On appelle homothétie de centre* A *et de rapport* k *l'application* $h_{k,A}$ *de* $\mathcal{E}$ *dans* $\mathcal{E}$ *définie par* $h_{k,A}(M) = A + k\overrightarrow{AM}$.

2.4 SOUS-ESPACES AFFINES

Une partie non vide $\mathcal{F}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si pour tout point A de $\mathcal{F}$, l'ensemble $\overrightarrow{\mathcal{F}} = \{\overrightarrow{AM}/M \in \mathcal{F}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ (qui ne dépent pas du point A). L'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ est alors la direction de $\mathcal{F}$. On dit alors que $\mathcal{F}$ est le sous-espace affine passant par A et de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}}$
Donc une partie $\mathcal{F}$ d'un espace affine $\mathcal{E}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ si et seulement si $\mathcal{F}$ est un espace affine de direction un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.

Proposition 5. *Soient* $\mathcal{F}$ *un sous espace affine de* $\mathcal{E}$ *de direction* $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ *et* A *un point de* $\mathcal{F}$. *Alors :*
1) $M \in \mathcal{F}$ *si et seulement si* $\overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}$.
2) $\mathcal{F} = A + \overrightarrow{\mathcal{F}} = \{A + \overrightarrow{u} / \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}\}$.

Exemples 2.
1. Un point est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$ *de direction* $\{0\}$.
2. L'ensemble $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n / a_1x_1 + ... + a_nx_n = b\}$ *(*$a_1, ...a_n$ *sont des réels donnés non tous nuls et* b *un réel quelconque) est un sous-espace affine de* $\mathbb{R}^n$ *(muni de sa structure canonique d'espace affine).*
3. Tout sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ *est un sous-espace affine de l'espace affine* $\mathbb{R}^n$.

2.5 INTERSECTION DE SOUS-ESPACES AFFINES

Proposition 6. *Une intersection quelconque de sous-espaces affines $\mathcal{F}_i$, $(i \in I)$, est ou bien vide ou un sous-espace affine dont la direction est l'intersection des directions :*

$$\overrightarrow{\bigcap_{i\in I}\mathcal{F}_i} = \bigcap_{i\in I}\overrightarrow{\mathcal{F}_i}$$

2.6 PARALLELISME

Définitions 7. *Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de $\mathcal{E}$. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont **parallèles** s'ils ont même direction, i.e., si on a $\overrightarrow{\mathcal{F}} = \overrightarrow{\mathcal{G}}$. On note $\mathcal{F} \parallel \mathcal{G}$.*
*On dit que $\mathcal{F}$ est **faiblement parallèle** à $\mathcal{G}$ si $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ est contenu dans $\overrightarrow{\mathcal{G}}$.*

Proposition 8.
i) Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles, alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont confondus ou bien leur intersection est vide.
ii) Si $\mathcal{F}$ est faiblement parallèle à $\mathcal{G}$, alors $\mathcal{F}$ est contenu dans $\mathcal{G}$ ou $\mathcal{F}$ ne rencontre pas $\mathcal{G}$.

2.7 REPERES CARTESIENS

Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n. On appelle repère cartésien de $\mathcal{E}$ un $(n+1)$-uplet $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ où O est un point de $\mathcal{E}$ et $(\overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$ une base de l'espace vectoriel $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Pour tout point M de $\mathcal{E}$ il existe une unique famille $(x_1, ..., x_n)$ de réels telle que $\overrightarrow{OM} = x_1\overrightarrow{e}_1 + ... + x_n\overrightarrow{e}_n$. On appelle (x_i) la famille des coordonnées de M dans le repère cartésien $(O, \overrightarrow{e}_1, ..., \overrightarrow{e}_n)$, et on écrit $M = (x_1, ..., x_n)_{\mathcal{R}}$

Exemples 3. *Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ on considère le sous-espace affine*

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 1\}$$

1. Prenons pour origine de $\mathcal{P}$ le point $O = (0, 1, 0)$ et prenons pour base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, $\{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}\}$ où $\overrightarrow{u} = (1, 0, -1)$ et $\overrightarrow{v} = (0, 1, -1)$. Le point $M = (3, 2, -4)$ appartient à

$\mathcal{P}$ et on a $\overrightarrow{OM} = (3,1,-4) = 3\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Ainsi, dans le repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ de $\mathcal{P}$, le point $M = (3,2,-4)$ à pour coordonnées $(3,1)$, c'est à dire $M = (3,1)_{\mathcal{R}}$.

2. Prenons maintenant comme origine de $\mathcal{P}$ le point $O' = (1,1,-1)$, et pour base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$, $\{\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'}\}$ où $\overrightarrow{u'} = (1,1,-2)$ et $\overrightarrow{v'} = (2,-1,-1)$. Pour le point $M = (3,2,-4)$ (le même que celui considéré en 1.) on a $\overrightarrow{O'M} = x\overrightarrow{u'} + y\overrightarrow{v'}$, c'est à dire :

$$\begin{cases} x + 2y = 2 \\ x - y = 1 \\ -2x - y = -3 \end{cases}$$

donc $x = \dfrac{4}{3}$ et $y = \dfrac{1}{3}$.

Ainsi, dans le nouveau repère cartésien $\mathcal{R}' = (O', \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'})$ de $\mathcal{P}$, le point $M = (3,2,-4)$ à pour coordonnées $(\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3})$, c'est à dire $M = (\dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3})_{\mathcal{R}'}$.

La Proposition suivante fournie une famille d'exemples d'espaces affines :

Proposition 9. *Soit $\mathcal{E}$ un espace affine de dimension n, $\mathcal{R} = (A, \mathcal{B})$ un repère cartésien et (S) un système d'équations linéaires à p équations et n inconnues. Alors l'ensemble $\mathcal{F}$ des points $M = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{R}}$ tels que $(x_1, \ldots, x_n) \in S$ est un sous espace affine de $\mathcal{E}$ de direction $\overrightarrow{\mathcal{F}} = \{(x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}} / (x_1, \ldots, x_n) \in S_0\}$.*

2.8 Points alignés, points coplanaires

Définitions 10.

1. Un espace vectoriel est dit un plan vectoriel si sa dimension est égale à 2.

2. Un espace vectoriel est dit une droite vectorielle si sa dimension est égale à 1.

3. On appelle plan affine tout espace affine de direction un plan vectoriel.

4. On appelle droite affine tout espace affine de direction une droite vectorielle.

Remarque 11. *Soit $\mathcal{D}$ une droite affine, soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul quelconque de $\overrightarrow{\mathcal{D}}$, alors $\{\overrightarrow{v}\}$ est une base de $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ car $\dim(\overrightarrow{\mathcal{D}}) = 1$. Soit A_0 un point queconque de $\mathcal{D}$, alors $(A_0, \overrightarrow{v})$ est un repère cartésien de $\mathcal{D}$. On dit que $\overrightarrow{v}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ ou que $\mathcal{D}$ est la droite affine passant par le point A_0 est de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ et on note $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A_0, \overrightarrow{v})$.*

Définition 12. *On dit que Trois points A, B et C sont alignés, s'ils appartienent à une même droite, et on dit que quatre points A, B, C et D sont coplanaires s'ils appartienent à un même plan.*

Proposition 13.
1) les points A, B et C sont alignés si et seulement si la famille $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ est liée.
2) les points A, B, C et D sont coplanaires si et seulement si la famille $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$ est liée.

Remarque 14. *Deux points sont toujours alignés, et trois points sont toujours coplanaires.*

2.9 BARYCENTRES

Proposition et Définition 15. *Un point pondéré est un couple (A, λ) avec $A \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.*
Soit $(A_i, \lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ avec $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \neq 0$ alors il existe un unique $G \in \mathcal{E}$, appelé barycentre de $(A_i, \lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$, tel que $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.
Si $\lambda_1 = ... = \lambda_k$, on appelle G l'isobarycentre (ou centre de gravité) des A_i, et on a : $\sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0}$.

Proposition 16. *le barycentre de $(A_i, \lambda_i)_{1\leqslant i\leqslant k}$ est caractérisé par*

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i}.$$

O est un point quelconque.

Remarque 17. *l'isobarycentre de A_i est caractérisé par*

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \overrightarrow{OA_i}}{k}.$$

2.10 Droites dans un plan

Dans cette partie on considère le plan affine $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère cartésien $(O, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{f})$.

2.10.1 Représentation d'une droite dans un plan affine

Représentation paramétrique d'une droite dans le plan affine $\mathbb{R}^2$.

Soit $\overrightarrow{v} = \alpha_1 \overrightarrow{e} + \alpha_2 \overrightarrow{f}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$, (α_1, α_2) sont les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{f})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Soient A_0 et B les points de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x_0, y_0) et (x, y) dans le repère cartésien $(O, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{f})$.

On a $B \in \mathcal{D}(A_0, \overrightarrow{v})$ ssi $\overrightarrow{A_0B}$ et $\overrightarrow{v}$ sont liées, c'est-à-dire il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{A_0B} = t\overrightarrow{v}$, ce qui est équivalent au système

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & x_0 & + & t\alpha_1 \\ y & = & y_0 & + & t\alpha_2 \end{array}\right.} \text{ où } t \in \mathbb{R}$$

Ces relations constituent une **représentation paramétrique** de la droite $\mathcal{D}(A_0, \overrightarrow{v})$

Équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}(A_0, \overrightarrow{v})$

Soit $\overrightarrow{v} = \alpha_1 \overrightarrow{e} + \alpha_2 \overrightarrow{f}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$, (α_1, α_2) sont les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{e}, \overrightarrow{f})$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$. Soit A_0 le point de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées (x_0, y_0) dans le repère cartésien $(O, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{f})$.

Dans le repère $(O, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{f})$ la droite $\mathcal{D}(A_0, \overrightarrow{v})$ à pour **équation cartésienne**

$$\boxed{\alpha_2(x - x_0) - \alpha_1(y - y_0) = 0}$$

Remarque 18. *L'équation cartésienne ce n'est que*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha_1 \\ y - y_0 & \alpha_2 \end{vmatrix} = 0$$

Une autre forme de l'équation cartésienne d'une droite

On a $\alpha_2(x - x_0) - \alpha_1(y - y_0) = 0$, donc

$\alpha_2 x - \alpha_1 y - (\alpha_2 x_0 - \alpha_1 y_0) = 0$

Posant : $\alpha_2 = a$, $-\alpha_1 = b$ et $\alpha_2 x_0 - \alpha_1 y_0 = -c$ il vient :

$$\boxed{ax + by + c = 0}$$

C'est **l'équation cartésienne** de la droite $\mathcal{D}$ passant par le point $A_0(x_0, y_0)$ est de vecteur directeur $\overrightarrow{v} = (-b, a)$.

• Si $a = 0$, $b \neq 0$ cette droite est parallèle à l'axe Ox, l'équation cartésienne est

$$\boxed{y = \frac{-c}{b}}$$

• Si $a \neq 0$, $b = 0$ cette droite est parallèle à l'axe Oy, l'équation cartésienne est

$$\boxed{x = \frac{-c}{a}}$$

Équation explicite d'une droite

Si $b \neq 0$, l'équation cartésienne précédente donne : $y = \frac{-a}{b}x - \frac{-c}{b}$ ou, en posant $\alpha = \frac{-a}{b}$, $\beta = \frac{-c}{b}$

$$\boxed{y = \alpha x + \beta}$$

C'est **l'équation explicite** d'une droite.

α est appelé **coefficient directeur** ou la pente de cette droite il est égal à la tangente de l'angle orienté de l'axe Ox à la droite D ; deux droites parallèles ont le même coefficient directeur.

Droite définie par deux points distincts

Soit $A = (a_1, a_2)$ et $B = (b_1, b_2)$ deux points distincts d'une droite $\mathcal{D}$, le vecteur $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ est un vecteur directeur de cette droite et donc $\mathcal{D} = \mathcal{D}(A, \overrightarrow{AB})$.

Alors :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{lllll} x & = & a_1 & + & t(b_1 - a_1) \\ y & = & a_2 & + & t(b_2 - a_2) \end{array}\right.} \text{ où } t \in \mathbb{R},$$

est une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

L'équation cartésienne de cette droite est

$$\boxed{(b_2 - a_2)(x - a_1) - (b_1 - a_1)(y - a_2) = 0}$$

2.11 Représentation d'une droite dans un espace affine de dimension 3

$\mathbb{R}^3$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})$ où $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Représentation paramétrique d'une droite dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$.

On obtient les mêmes résultats que dans le cas de l'espace affine $\mathbb{R}^2$ il suffit de remplacer deux coordonnées par trois.

Équation cartésienne d'une droite dans
l'espace affine $\mathbb{R}^3$.

Équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}(A_0, \overrightarrow{v})$

Soient $\overrightarrow{v} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_B$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$, A_0 et M les points de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et (x, y, z) dans le repère cartésien $\mathcal{R}$. Considérons la matrice $\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overrightarrow{A_0M} & \overrightarrow{v} \end{array} \\ \begin{pmatrix} x - x_0 & \alpha_1 \\ y - y_0 & \alpha_2 \\ z - z_0 & \alpha_3 \end{pmatrix} \end{array}$. La famille $\{\overrightarrow{A_0M}, \overrightarrow{v}\}$ est liée si et seulement si les détrminants $\Delta_1 = \begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha_1 \\ y - y_0 & \alpha_2 \end{vmatrix} = 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha_1 \\ z - z_0 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0$ et $\Delta_3 = \begin{vmatrix} y - y_0 & \alpha_2 \\ z - z_0 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 0$.

C'est **l'équation cartésienne**, Dans le repère $\mathcal{R}$, de la droite $\mathcal{D}(A_0, \overrightarrow{v})$.

On peut montrer que si α_i est non nul, alors les deux déterminants qui ont en commun le coefficient α_i entrainent la troisième. Donc on a en réalité deux équations et pas trois.

Généralement, l'équation cartésienne d'une droite dans un espace affine de dimension 3 est donnée sous forme d'intersection de deux plans sécants, c'est à dire :

$$\overrightarrow{\mathcal{D}} : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 : (\mathcal{P}) \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 : (\mathcal{P}') \end{cases}$$

où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants.

Exemple : $\mathcal{D} = D(A, \overrightarrow{v})$ où $A = (1, 4, 3)$ et $\overrightarrow{v} = (0, 2, 1)$. On a la composante 2 de $\overrightarrow{v}$ est non nulle, donc l'équation cartésienne de $\mathcal{D}$ est $\begin{vmatrix} y - 4 & 2 \\ z - 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ et $\begin{vmatrix} y - 4 & 2 \\ x - 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$, ce qui donne :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} y - 2z = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

2.12 Plan affine dans un espace affine de dimension 3

Dans cette partie on considère l'espace affine $\mathbb{R}^3$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})$ où $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}, \overrightarrow{g})$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

2.12.1 Représentation d'un plan dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$

Représentation paramétrique d'un plan dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$.

Soit $\overrightarrow{u} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)_B$ et $\overrightarrow{v} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)_B$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ linéairement indépendants. Soient A_0 et B les points de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et (x, y, z) dans le repère cartésien $\mathcal{R}$.

On a $B \in \mathcal{P}(A_0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ ssi $\overrightarrow{A_0B} \in \overrightarrow{P}$, c'est-à-dire il existe $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{A_0B} = t_1\overrightarrow{u} + t_2\overrightarrow{v}$, ce qui est équivalent au système

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ccccc} x & = & x_0 & + & t_1\alpha_1 + t_2\beta_1 \\ y & = & y_0 & + & t_1\alpha_2 + t_2\beta_2 \\ z & = & z_0 & + & t_1\alpha_3 + t_2\beta_3 \end{array}\right.} \text{ où } t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

Ces relations constituent une **représentation paramétrique** du plan $\mathcal{P}(A_0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

Équation cartésienne du plan $\mathcal{P}(A_0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$

Dans le repère $\mathcal{R}$ le plan $\mathcal{P}(A_0, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ à pour **équation cartésienne**

$$\boxed{\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}(x - x_0) - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}(y - y_0) + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}(z - z_0) = 0}$$

Remarques 19.

1) L'équation cartésienne ce n'est que

$$\begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha_1 & \beta_1 \\ y - y_0 & \alpha_2 & \beta_2 \\ z - z_0 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = 0$$

.

2) Rappelons la définition du determinant d'ordre 3*. Soient* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in$

$\mathbb{R}$ *alors :*

$$\begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}\begin{vmatrix} \lambda_1 & \alpha_1 & \beta_1 \\ \lambda_2 & \alpha_2 & \beta_2 \\ \lambda_3 & \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} - \lambda_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} + \lambda_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$$

Une autre forme de l'équation cartésienne d'un plan

Posant : $a = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}$, $b = -\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix}$ et $c = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} x_0 - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 \end{vmatrix} y_0 + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} z_0 = -d$, il vient :

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$

où a, b et c ne sont pas tous nuls.

C'est **l'équation cartésienne** du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A_0(x_0, y_0, z_0)$ est de direction $\overrightarrow{\mathcal{P}} : ax + by + cz = 0$.

• Si $a = b = 0$; ce plan est parallèle au plan xoy, si $a = c = 0$; ce plan est parallèle au plan xoz et si $b = c = 0$; ce plan est parallèle au plan yoz.

Plan défini par trois points non alignés

Soit $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ $C = (c_1, c_2, c_3)$ trois points non alignés, c'est-à-dire, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont linéairement indépendants. Donc par ces trois points passe un et un seul plan, c'est la plan $\mathcal{P} = A + \text{sev}\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \rangle$.

Alors :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{lllll} x & = & a_1 & + & t_1(b_1 - a_1) + t_2(c_1 - a_1) \\ y & = & a_2 & + & t_1(b_2 - a_2) + t_2(c_2 - a_2) \\ z & = & a_3 & + & t_1(b_3 - a_3) + t_2(c_3 - a_3) \end{array} \right.} \text{ où } t_1, t_2 \in \mathbb{R},$$

est une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$.

L'équation cartésienne de ce plan est

$$\boxed{\begin{array}{c} + \\ - \\ + \end{array}\begin{vmatrix} x - x_0 & b_1 - a_1 & c_1 - a_1 \\ y - y_0 & b_2 - a_2 & c_2 - a_2 \\ z - z_0 & b_3 - a_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0}$$

2.13 Parallèlisme

2.13.1 Une droite donnée par une équation cartésienne et l'autre par un repère cartésien

Dans un plan affine (par exemple $\mathbb{R}^2$)

Considérons les deux droites suivantes :

$$\mathcal{D}: \quad ax + by + c = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{D}' = A' + \text{sev}\,\langle \overrightarrow{u'} \rangle.$$

Alors on a la proposition suivante :

Proposition 20.

Si $\overrightarrow{u'} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.
Si $\overrightarrow{u'} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$ <u>et</u> $A' \in \mathcal{D}$, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues.
Si $\overrightarrow{u'} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$ <u>et</u> $A' \notin \mathcal{D}$, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont strictement parallèles.
Si $\overrightarrow{u'} \notin \overrightarrow{\mathcal{D}}$, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes.

2.13.2 Deux droites données par des équations cartésiennes

Dans un plan affine (par exemple $\mathbb{R}^2$)

Soit deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations

$$\mathcal{D}: \; ax + by + c = 0 \; \text{ et } \; \mathcal{D}': \; a'x + b'y + c' = 0.$$

Alors on a la proposition suivante :

Proposition 21.
Si $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'}$, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles.
Si $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont confondues.
Si $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} \neq \dfrac{c}{c'}$, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont strictement parallèles.
Si $\dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b}{b'}$, alors $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes.

Remarque 22. *On ne considère pas la forme* $\dfrac{0}{0}$ *car elle n'a aucun effet..*

Exemples 4.

$\mathcal{D}_1 :\ 2x + 5y + 1 = 0,\qquad \mathcal{D}_2 :\ 3x + \dfrac{15}{2}y + \dfrac{3}{2} = 0$

$\mathcal{D}_3 :\ 2x + 5y + 2 = 0,\qquad \mathcal{D}_4 :\ 2x + 5y = 0$

$\mathcal{D}_5 :\ 3x + \frac{15}{2}y = 0,\qquad \mathcal{D}_6 :\ 5y + 1 = 0$

$\mathcal{D}_7 :\ 2y + \frac{2}{5} = 0.\qquad \mathcal{D}_8 :\ 3y + 2 = 0$

On $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_4 = \mathcal{D}_5$, $\mathcal{D}_6 = \mathcal{D}_7$, $\mathcal{D}_1 \parallel \mathcal{D}_3 \parallel \mathcal{D}_4$, $\mathcal{D}_6 \parallel \mathcal{D}_8$, $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_6$ *sont sécantes.*

Dans un espace affine de dimension 3 (par exemple $\mathbb{R}^3$)

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ les droites d'équations

$$\mathcal{D} : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

et

$$\mathcal{D}' : \begin{cases} ex + fy + gz + h = 0 \\ e'x + f'y + g'z + h' = 0 \end{cases}$$

Pour comparer $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, on cherche un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ (ou de $\overrightarrow{\mathcal{D}'}$) et un point A de $\mathcal{D}$ (ou de $\mathcal{D}'$). Pour trouver $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{D}}$, il suffit de donner à x, y et z des valeurs de telles sorte que (x, y, z) soit une solution non nulle de

$$\overrightarrow{\mathcal{D}} : \begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}$$

ou de résoudre ce système et trouver une solution non nulle, et pour trouver $A \in \mathcal{D}$, il suffit de donner à x, y et z des valeurs de telles sorte que (x, y, z) soit une solution de

$$\mathcal{D} : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

ou de résoudre ce système et trouver une solution. Dans ce cas, $\mathcal{D} = A + \text{sev}\langle \overrightarrow{u} \rangle$, et on a la Proposition suivante :

Proposition 23.

Si $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{D}'}$, *alors* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *sont parallèles.*
Si $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{D}'}$ *et* $A \in \mathcal{D}'$, *alors* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *sont confondues.*
Si $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{D}'}$ *et* $A \notin \mathcal{D}'$, *alors* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *sont strictement parallèles.*
Si $\overrightarrow{u} \notin \overrightarrow{\mathcal{D}'}$, *alors* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *ne sont pas parallèles (pas nécessairement sécantes).*

Remarque 24. *Pour montrer que* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *sont parallèles ou qu'elles sont sécantes, on cherche le vecteur* $\overrightarrow{u}$ *et ce n'est pas la peine de chercher le point* A.

2.13.3 Deux droites données par des repères cartésiens

Dans un espace affine quelconque

Considérons les deux droites suivantes :

$$\mathcal{D} = A + \text{sev}\langle \overrightarrow{u} \rangle \text{ et } \mathcal{D}' = A' + \text{sev}\langle \overrightarrow{u'} \rangle.$$

Alors on a la proposition suivante :

Proposition 25.
Si $rg(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u}) = 1$, *alors* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *sont parallèles.*
Si $rg(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u}) = rg(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{u}) = 1$, *alors* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *sont confondues.*
Si $rg(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u}) = 1$ *et* $rg(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{u}) = 2$, *alors* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *sont strictement parallèles.*
Si $rg(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u}) = 2$, *alors* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *ne sont pas parallèle, et donc si on travail dans un plan affine,* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{D}'$ *serons sécantes.*

2.13.4 Deux plans donnés par des équations cartésiennes

Dans un espace affine de dimension 3 (par exemple $\mathbb{R}^3$)

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ les plans d'équations
$\mathcal{P}: \ ax + by + cz + d = 0$ et $\mathcal{P}': \ a'x + b'y + c'z + d' = 0$.
Alors on a la proposition suivante :

Proposition 26.

Si $\dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'}$, *alors* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *sont parallèles.*

Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'}$*, alors* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *sont confondus.*
Si $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$*, alors* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *sont strictement parallèles.*
Si $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ *<u>ou</u>* $\frac{a}{a'} \neq \frac{c}{c'}$ *<u>ou</u>* $\frac{b}{b'} \neq \frac{d}{d'}$*, alors* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *sont sécants.*

Remarque 27. *On ne considère pas la forme* $\frac{0}{0}$ *car elle n'a aucun effet.*

2.13.5 Un plan donné par une équation cartésienne et l'autre par un repère cartésien

<u>Dans un espace affine de dimension 3 (par exemple $\mathbb{R}^3$)</u>

Considérons les deux plans suivants :

$$\mathcal{P}: \quad ax + by + cz + d = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}' = A' + \text{sev}\langle \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'} \rangle.$$

Alors on a la proposition suivante :

Proposition 28.

Si $\overrightarrow{u'} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ *<u>et</u>* $\overrightarrow{v'} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$*, alors* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *sont parallèles.*
Si $\overrightarrow{u'} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$*,* $\overrightarrow{v'} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ *<u>et</u>* $A' \in \mathcal{P}$*, alors* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *sont confondus.*
Si $\overrightarrow{u'} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$*,* $\overrightarrow{v'} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ *<u>et</u>* $A' \notin \mathcal{P}$*, alors* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *sont strictement parallèles.*
Si $\overrightarrow{u'} \notin \overrightarrow{\mathcal{P}}$ *<u>ou</u>* $\overrightarrow{v'} \notin \overrightarrow{\mathcal{P}}$*, alors* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *sont sécants.*

2.13.6 Deux plans donnés par des repères cartésiens

<u>Dans un espace affine quelconque</u>

Considérons les deux plans suivants :

$$\mathcal{P} = A + \text{sev}\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \text{ et } \mathcal{P}' = A' + \text{sev}\langle \overrightarrow{u'}, \overrightarrow{v'} \rangle.$$

Alors on a la proposition suivante :

Proposition 29.
Si $rg(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = rg(\overrightarrow{v'}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 2$*, alors* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *sont parallèles.*

Si $rg(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = rg(\overrightarrow{v'}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = rg(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 2$*, alors* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *sont confondus.*
Si $rg(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = rg(\overrightarrow{v'}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 2$ *<u>et</u>* $rg(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 3$*, alors* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *sont strictement parallèles.*
Si $rg(\overrightarrow{u'}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 3$ *<u>ou</u>* $rg(\overrightarrow{v'}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 3$*, alors* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *ne sont pas parallèles, et donc si on travail dans un espace affine de dimension* 3*,* $\mathcal{P}$ *et* $\mathcal{P}'$ *serons sécants.*

Remarque 30. *Le rang de* $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ *ne peut pas être égal à* 1*, car cette famille contient au moins deux vecteurs linéairement indépendants, donc il est ou bien égal à* 2 *ou bien égal à* 3*.*

2.13.7 Un plan donné par une équation cartésienne et une droite donnée par un repère cartésien

<u>Dans un espace affine de dimension 3 (par exemple $\mathbb{R}^3$)</u>

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ le plan et la droite suivants :

$$\mathcal{P}: \; ax + by + cz + d = 0 \text{ et } \mathcal{D} = A + \text{sev}\,\langle \overrightarrow{u} \rangle.$$

Alors on a la proposition suivante :

Proposition 31.

Si $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} : ax + by + cz = 0$*, alors* $\mathcal{D}$ *et faiblement parallèle à* $\mathcal{P}$*.*
Si $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ *<u>et</u>* $A \in \mathcal{P}$*, alors* $\mathcal{D}$ *et contenue dans* $\mathcal{P}$ $(\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P})$*.*
Si $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$ *<u>et</u>* $A \notin \mathcal{P}$*, alors* $\mathcal{D}$ *et strictement faiblement parallèle à* $\mathcal{P}$ $(\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \varnothing)$*.*
Si $\overrightarrow{u} \notin \overrightarrow{\mathcal{P}}$*, alors* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{P}$ *sont sécants.*

2.13.8 Un plan et une droite donnés par des équations cartésiennes

<u>Dans un espace affine de dimension 3 (par exemple $\mathbb{R}^3$)</u>

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ le plan et la droite d'équations

$$\mathcal{P}: \; ax + by + cz + d = 0 \text{ et } \mathcal{D}: \begin{cases} ex + fy + gz + h = 0 \\ e'x + f'y + g'z + h' = 0 \end{cases}$$

Pour comparer $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$, on cherche un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ et un point A de $\mathcal{D}$ et on applique la proposition précédente. Pour trouver $\overrightarrow{u}$, il suffit de donner à x, y et z des valeurs de telles sorte que (x, y, z) soit une solution <u>non nulle</u> de

$$\overrightarrow{\mathcal{D}} : \begin{cases} ex + fy + gz = 0 \\ e'x + f'y + g'z = 0 \end{cases}$$

ou de résoudre ce système et trouver une solution <u>non nulle</u>, et pour trouver A, il suffit de donner à x, y et z des valeurs de telles sorte que (x, y, z) soit une solution de

$$\mathcal{D} : \begin{cases} ex + fy + gz + h = 0 \\ e'x + f'y + g'z + h' = 0 \end{cases}$$

ou de résoudre ce système et trouver une solution.

Remarque 32. *Pour montrer que $\mathcal{D}$ et faiblement parallèle à $\mathcal{P}$ ou qu'ils sont sécants, on cherche le vecteur $\overrightarrow{u}$ et ce n'est pas la peine de chercher le point A.*

2.13.9 Un plan et une droite donnés par des repères cartésiens

<u>Dans un espace affine quelconque</u>

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ le plan et la droite suivants :

$$\mathcal{P} : = A + \text{sev}\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle \text{ et } \mathcal{D} = B + \text{sev}\langle \overrightarrow{w} \rangle.$$

Alors on a la proposition suivante :

Proposition 33.
Si $rg(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 2$, alors $\mathcal{D}$ et faiblement parallèle à $\mathcal{P}$.
Si $rg(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = rg(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 2$, alors $\mathcal{D}$ et contenue dans $\mathcal{P}$ $(\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P})$.
Si $rg(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 2$ <u>et</u> $rg(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 3$, alors $\mathcal{D}$ et strictement faiblement parallèle à $\mathcal{P}$ $(\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \varnothing)$.
Si $rg(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 3$, alors $\mathcal{D}$ n'est pas faiblement parallèle à $\mathcal{P}$, et donc si on travail dans un espace affine de dimension 3, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ serons sécants.

Remarque 34. *On peut remplacer dans la Proposition précédente rg*$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 2$ *qui veut dire* $B \in \mathcal{P}$ *par rg*$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{w}) = 1$ *qui veut dire* $A \in \mathcal{D}$*. De la même façon, On peut remplacer rg*$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 3$ *qui veut dire* $B \notin \mathcal{P}$ *par rg*$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{w}) = 2$ *qui veut dire* $A \notin \mathcal{D}$*.*

On a le résultat général suivant :

Proposition 35. *Soient* $\mathcal{H}$ *un hyperplan d'un espace affine* $\mathcal{E}$ *et* $\mathcal{F}$ *un sous espace affine quelconque de* $\mathcal{E}$*. Alors* $\mathcal{F}$ *est ou bien faiblement parallèle à* $\mathcal{H}$ *ou bien* $\mathcal{F}$ *et* $\mathcal{H}$ *sont sécants.*

Remarque 36. *Donc le fait que le sous espace affine* $\mathcal{F}$ *n'est pas faiblement prallèle au sous espace affine* $\mathcal{G}$ *n'entraine pas nécessairement qu'ils sont sécants.*

2.14 Produit scalaire

2.14.1 Produit scalaire usuel et angle dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$

On muni $\mathbb{R}^2$ du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2)$ avec $\overrightarrow{e}_1 = (1,0)$ et $\overrightarrow{e}_2 = (0,1)$. Soit $\overrightarrow{u} = (x,y)$ et $\overrightarrow{v} = (x',y')$, on appelle produit scalaire (usuel) de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ la valeur réel noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'}$$

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ avec $\overrightarrow{e}_1 = (1,0,0)$, $\overrightarrow{e}_2 = (0,1,0)$ et $\overrightarrow{e}_3 = (0,0,1)$, pour $\overrightarrow{u} = (x,y,z)$ et $\overrightarrow{v} = (x',y',z')$

$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy' + zz'}$ c'est le produit scalaire (usuel) de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

On a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = x^2 + y^2 + z^2$, on l'écrit $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^2$

Propriétés 37. *Pour tous vecteurs* $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ *et* α *un scalaire on a :*

$\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$

$(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}).\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}.\overrightarrow{u}$

$(\alpha\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$

$\overrightarrow{u}.(\alpha\overrightarrow{v}) = \alpha(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$

$\overrightarrow{0}.\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{0} = 0$

$\overrightarrow{u}^2 \geqslant 0$
$\overrightarrow{u}^2 = 0 \leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
$(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})^2 = \overrightarrow{u}^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{v}^2$
$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v})(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{u}^2 - \overrightarrow{v}^2$

• On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si leur produit scalaire est nul. On écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}}$$

Exemples 5.
1. Les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1, -2, 3)$ et $\overrightarrow{v} = (-1, 1, 1)$ sont orthogonaux.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{u} = (4, 2)$ et $\overrightarrow{v} = (-3, 6)$ sont orthogonaux.

Norme d'un vecteur

La norme de $\overrightarrow{u}$ se note $\|\overrightarrow{u}\|$. C'est un réel positif et il est égal à $\sqrt{\overrightarrow{u}^2}$.
Dans $\mathbb{R}^3$ la norme de $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ est égal à $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
Dans $\mathbb{R}^2$ la norme de $\overrightarrow{u} = (x, y)$ est égal à $\sqrt{x^2 + y^2}$.Dans $\mathbb{R}$ la norme de $\overrightarrow{u} = (x)$ est égal à $\sqrt{x^2} = |x|$.

Propriétés 38. $\|\overrightarrow{u}\| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}$ *on a* $\|\alpha \overrightarrow{u}\| = |\alpha| \|\overrightarrow{u}\|$
$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2$ ***(théorème de pythagore)***

Distance entre deux points

On appelle distance de deux points A et B la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
On la note : $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$.

Angle entre deux vecteurs

On note $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ l'angle non orienté entre les deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, c'est à dire l'angle tel que $0 \leqslant (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) \leqslant 180$. On a alors la proposition suivante :

Proposition 39. *Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs quelconques. Alors :*

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$$

Exemple 1. *$\overrightarrow{u} = (2,3)$ et $\overrightarrow{v} = (1,-1)$, on a :$-1 = \sqrt{13}\sqrt{2}\cos(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}})$. On détermine $(\widehat{\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}}) = \arccos(-\frac{1}{\sqrt{26}}) \simeq 101,31$ (en °).*

Angle entre deux droites

Par convension, on choisit toujours comme angle entre deux droites, l'angle compris entre 0 et 90. Pour trouver cet angle, on prend un vecteur directeur de chaque droite et on cherche l'angle entre les deux vecteurs. Si on trouve un angle compris entre 0 et 90, il s'agit de l'angle entre les droites ; si l'angle θ obtenu est situé entre 90 et 180, on chosit son supplément $(180-\theta)$.
On dit que deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont perpendiculaires, $\mathcal{D}_1 \perp \mathcal{D}_2$, si l'angle entre les deux droites égales à 90.

Exemple 2. *On considère les droites $\mathcal{D}_1 : y = 4x-6$ et $\mathcal{D}_2 : y = -x+8$. Cherchons l'angle formé par ces deux droites.*
Le vecteur $(1,4)$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$, tandis que $(1,-1)$ est un de $\mathcal{D}_2$. D'où $\cos(\theta) = \frac{-3}{\sqrt{17}\sqrt{2}}$.
On détermine alors θ :
$\arccos(\frac{-3}{\sqrt{17}\sqrt{2}}) \simeq 120,96$ *(en °).*
Comme θ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, l'angle φ cherché est le supplément de θ :
$\varphi = 180-\theta \simeq 59,04$ *(en °).*

2.15 Cas général

2.15.1 Produit scalaire

Définition 40. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. On appelle produit scalaire sur E toute application $. : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant les conditions suivantes :*
Pour tous vecteurs $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ de E et α un scalaire on a :
$\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$
$(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}).\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}.\overrightarrow{u}$
$\alpha\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}.\alpha\overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})$
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u}$

$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} \geqslant 0$
$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = 0 \Longleftrightarrow \overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.

Définition 41.
1) Un espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire est appelé espace euclidien.
2) Un espace affine est dit euclidien si sa direction est un espace euclidien.

Définition 42.
1) Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont dits orthogonaux si on a $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.
2) On dit que le vecteur $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à un sous espace vectoriel F si $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à chaque vecteur de F.
3) les sous espaces vectoriels F et G sont dits orthogonaux ($F \perp G$) si tout vecteur de l'un est orthogonal à l'autre, c'est à dire :

$$\overrightarrow{u} \in F \Longrightarrow \overrightarrow{u} \perp G \quad et \quad \overrightarrow{v} \in G \Longrightarrow \overrightarrow{v} \perp F.$$

Proposition 43. *Soient F et F' deux sev d'un espace vectoriel E de bases B et B'. Alors F et G sont orthogonaux si et seulement si*

$$Pour\ tout \quad \overrightarrow{u} \in F \quad et\ tout \quad \overrightarrow{v} \in F' \quad on\ a \quad \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$$

Notation . *L'ensemble des vecteurs orthogonaux à un espace vectoriel est noté $F^{\perp}$.*

Proposition 44. *Si F un sous espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E, alors $F^{\perp}$ est aussi un sous espace vectoriel de E.*

Proposition 45. *Soient E un espace vectoriel euclidien et F un sous espace vectoriel de E. Alors F et $F^{\perp}$ sont supplémentaires dans E, c'est-à-dire,*

$$F \oplus F^{\perp} = E.$$

Définition 46.
1) Une base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_n})$ d'un espace vectoriel est dite orthonormée si

$$\overrightarrow{u_i}.\overrightarrow{u_j} = \begin{cases} 0 & si \quad i \neq j \\ 1 & si \quad i = j \end{cases}$$

2) On dit qu'un repère cartésien $\mathcal{R} = (A, \mathcal{B})$ d'un espace affine est orthonormé si $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de sa direction.

Proposition 47. *Soient E un espace vectoriel euclidien muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$, $\overrightarrow{u} = (x_1, \ldots, x_n)_B$ et $\overrightarrow{v} = (y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}}$ deux vecteurs de E. Alors*

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

2.15.2 Vecteur normal

Définition 48. *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous espaces affines de $\mathcal{E}$. On dit que les sous espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont perpendiculaires si les espaces vectoriels $\overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$ et $\overrightarrow{\mathcal{G}}^{\perp}$ sont orthogonaux.*

Proposition 49. *Soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous espaces affines de $\mathcal{E}$. soient B une base de $\overrightarrow{\mathcal{F}}^{\perp}$ et B' une base de $\overrightarrow{\mathcal{G}}^{\perp}$. Alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont perpendiculaires si et seulement si*

$$\textit{Pour tout} \quad \overrightarrow{u} \in B \quad \textit{et tout} \quad \overrightarrow{v} \in B' \quad \textit{on a} \quad \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0.$$

Définition 50. *Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$. On appelle vecteur normal de $\mathcal{H}$ tout vecteur $\overrightarrow{v}$ vérifiant $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} = 0$ pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{H}}$, c'est à dire $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{\mathcal{H}}$.*

Proposition 51. *Deux vecteurs normaux d'un même hyperplan sont colinéaires (c'est à dire linéairement dépendants).*

Remarque 52. *La Proposition précédentes veut dire que $\overrightarrow{\mathcal{H}}^{\perp}$ est une droite vectoriel.*

Proposition 53. *Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ ayant $\overrightarrow{v}$ comme un vecteur normal et $\mathcal{F}$ un sous espaces affine quelconque de $\mathcal{E}$. Alors on a les assertions suivantes :*
1) $\mathcal{F}$ est faiblement parallèle à $\mathcal{H} \iff \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{\mathcal{F}}$.
2) $\mathcal{F}$ est perpendiculaire à $\mathcal{H} \iff \overrightarrow{v} \in \overrightarrow{\mathcal{F}}$.

Proposition 54. *Soit $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ deux hyperplans affine d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ ayant $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}'$ comme vecteurs normaux. Alors :*
1) $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}'$ sont colinéaires.
2) $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}'$ sont orthogonaux.
3) Deux hyperplans de $\mathcal{E}$ sont ou bien parallèles ou bien sécants.

Remarque 55. *les hyperplans d'un plan affine sont les droites, et ceux d'un espaces affine de dimension* 3 *sont les plans. Donc, dans un plan, deux droites sont ou bien parallèles ou bien sécantes, et dans un espace affine de dimension* 3*, deux plans sont ou bien parallèles ou bien sécants.*

Proposition 56. *soient $\mathcal{E}$ un espace affine euclidien, $\overrightarrow{v}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et A un point de $\mathcal{E}$. Alors l'équation $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{v} = 0$ est l'équation du hyperplan passant par A est de vecteur normal $\overrightarrow{v}$.*

Cas particuliers

Soient $\mathcal{E}$ un plan affine euclidien muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$, $\mathcal{D}$ la droite affine d'équation : $\mathcal{D} : ax + by = c$ et $\overrightarrow{v}$ le vecteur de coordonnéesn(a, b).
Si $\mathcal{R}$ est orthonormé, alors $\overrightarrow{v}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}$, en effet, on a $\overrightarrow{\mathcal{D}}$: $ax + by = 0$, et puisque $\mathcal{R}$ est orthonormé, on a $\overrightarrow{v}.(x, y) = ax + by$ pour tout vecteur (x, y) de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, et par suite $\overrightarrow{v}.(x, y) = 0$ pour tout vecteur (x, y) de $\overrightarrow{\mathcal{D}}$, c'est à dire, $\overrightarrow{v}$ est un vecteur normal de $\mathcal{D}$.
On a le même résultat pour un plan d'un espace affine de dmension 3.

Remarque 57. *On n'a plus ce résultat en général si le repère $\mathcal{R}$ n'est pas orthonormé.*

Dans un plan affine euclidien

Dans un plan affine euclidien $\mathcal{E}$, on considère une droite $\mathcal{D}$ de vecteur normal $\overrightarrow{v}$ et une droite $\mathcal{D}'$ de vecteur normal $\overrightarrow{v}'$, alors :
1) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}'$ sont colinéaires.
2) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}'$ sont orthogonaux.
Cas particulier
Supposons, maintenant que $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé, et que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$

sont les droites d'équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$. Alors :
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' = 0$.

Dans un espace affine euclidien de dimension 3

Dans un espace affine euclidien $\mathcal{E}$ de dimension 3, on considère un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\overrightarrow{v}$, un plan $\mathcal{P}'$ de vecteur normal $\overrightarrow{v}'$ et une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Alors :

1) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}'$ sont colinéaires.
2) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v}'$ sont orthogonaux.
3) $\mathcal{D}$ est faiblement parallèle à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux.
4) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.
5) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{u}$ est orthogonal à une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$.

Cas particulier

Supposons, maintenant que $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé, et que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont les plans d'équations $ax + by + cz = d$ et $a'x + b'y + c'z = d'$, et une droite $\mathcal{D}$ de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(\alpha, \beta \gamma)$. Alors :

1) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires si et seulement si $aa' + bb' + cc' = 0$.
2) $\mathcal{D}$ est faiblement parallèle à $\mathcal{P}$ si et seulement si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.
3) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\overrightarrow{P}$ est parallèle au plan $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$.
4) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\mathrm{rg}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u}) = 1$.
5) Si (u_1, u_2) est une base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ tel que u_1 à pour coordonnées (t_1, t_2, t_3) et u_2 à pour coordonnées (s_1, s_2, s_3), alors :
$\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\alpha t_1 + \beta t_2 + \gamma t_3 = 0$ et $\alpha s_1 + \beta s_2 + \gamma s_3 = 0$.