Université Chouaïb Doukkali
Faculté des Sciences

MOHAMMED MOUÇOUF

# Cours d'Algèbre 2

Année 2023-2024

Chapitre 4

# Matrices

## 4.1 Généralités

**Définition 1.** *Soient $n$ et $m$ deux entiers naturels non nuls. On appelle matrice d'ordre (ou de type, ou de taille) $n \times m$ à coefficient dans $K$ un tableau de scalaires à $n$ lignes et $m$ colonnes de la forme*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

*où les $a_{ij} \in K$ s'appellent les coefficients (ou les éléments) de la matrice $A$.*
*Si $n = m$ on dit que $A$ est une matrice carrée d'ordre $n$.*

**Notations .**
*1. On note par $\mathcal{M}_{n,m}(K)$ l'ensemble des matrices d'ordre $n \times m$ à coefficients dans $K$.*
*2. On note par $\mathcal{M}_n(K)$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$ à coefficients dans $K$.*
*3. La matrice $A$ pourra être écrite de façon abrégée :*

$$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}} \; Si\, A\, est\ une\ matrice\ d'ordre n \times m,$$

$$A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \, Si \, A \, est \; une \; matrice \; carrée \; d'ordre n,$$

*ou tout simplement*

$$A = (a_{ij})$$

*s'il n'y a pas de confusion sur l'ordre.*

*4. Pour une matrice $A = (a_{ij})$ le premier indice $i$ correspond au numéro de la ligne et le second indice $j$ au numéro de la colonne. Ainsi le coefficient $a_{ij}$ est situé à l'intersection de la ligne numéro $i$ avec la colonne numéro $j$.*

*5. Parfois on note $A_{ij}$ le coefficient $a_{ij}$ de la matrice $A$.*

*6. On note par $L_i(A)$ la ligne $i$ de $A$ et $C_j(A)$ la colonne $j$ de $A$. Avec ces notations on a*

$$A = \begin{pmatrix} L_1(A) \\ L_2(A) \\ \vdots \\ L_n(A) \end{pmatrix}$$

*et*

$$A = \begin{pmatrix} C_1(A) & C_2(A) & \dots & C_m(A) \end{pmatrix}$$

**Encore quelques définitions et notations :**

- La diagonale d'une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ est constituée des éléments situés sur la diagonale de la matrice $A$. Les éléments $a_{11}, \dots, a_{nn}$ de la diagonale de $A$ sont dits les coefficients diagonaux.

  Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & \sqrt{3} & 4 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$
  les oefficients diagonaux de $A$ sont $1, \sqrt{3}$ et $7$.

- On appelle matrice colonne toute matrice d'ordre $n \times 1$. On dit aussi que c'est un vecteur colonne et elle de la forme
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

- On appelle matrice ligne toute matrice d'ordre $1 \times n$. On dit aussi que c'est un vecteur ligne et elle de la forme

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

- On dit que la matrice carrée $A$ est diagonale si $\forall i, j$ tels que $i \neq j$ on a $A_{ij} = 0$. Par suite une matrice diagonale est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

On la note $A = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_n)$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

est une matrice diagonale d'ordre 3.

- La matrice $I_n = \mathrm{diag}(1, \dots, 1)$ d'ordre $n$ est appelée la matrice identité d'ordre $n$.

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

est la matrice identité d'ordre 4.

- La matrice carrée $\mathrm{diag}(\lambda, \dots, \lambda)$ d'ordre $n$ est appelée matrice scalaire.

$$A = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{i} \end{pmatrix},$$

est une matrice scalaire.

- La matrice d'ordre $n \times m$ dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la matrice nulle et est notée $0_{n,m}$. Donc la matrice $0_n$ est la matrice scalaire d'ordre $n$ : $0_n = \text{diag}(0, \ldots, 0)$.

$$0_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

- Une matrice triangulaire supérieure est une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que $a_{ij} = 0$ si $i > j$, donc $A$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & \sqrt{2} & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

est une matrice triangulaire supérieure.

- Une matrice triangulaire inférieure est une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ telle que $a_{ij} = 0$ si $i < j$, donc $A$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & \sqrt{2} & 0 \\ 4 & 0 & -7 \end{pmatrix},$$

est une matrice triangulaire inférieure.

**Définition 2.** *Soit $A$ une matrice d'ordre $n\times m$. La transposée de $A$ est la matrice notée $A^T$ dont les lignes sont les colonnes de $A$.*

**Remarques 3.**

*1. Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ alors $A^T = (b_{ji})_{\substack{1\leq j\leq m \\ 1\leq i\leq n}}$ avec $b_{ji} = a_{ij}$.*

*2. Si $A$ est d'ordre $n\times m$ alors $A^T$ est d'ordre $m\times n$.*

*3. Si $A$ est une matrice carrée d'ordre $n$ alors $A^T$ est aussi une matrice carrée d'ordre $n$.*

*4. On a $L_i(A) = C_i(A^T$ et $L_i(A^T) = C_i(A)$.*

*5. Le transposée d'une matrice triangulaire supérieure est une matrice triangulaire inférieure.*

*6. Le transposée d'une matrice triangulaire inférieure est une matrice triangulaire supérieure.*

**Exemples 1.**

*1.Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ alors $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.*

*2. $I_n^T = I_n$, $0_n^T = 0_n$ et $0_{n,m}^T = 0_{m,n}$.*

*3 $(\alpha A)^T = \alpha A^T$.*

*4. Si $A$ est une matrice scalaire alors $A^T = A$.*

*5. On peut avoir $A^T = A$ sans que soit une matrice scalaire. En effet, considérons la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \\ 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

*Il est clair que $A^T = A$. On dit que $A$ est une matrice symétrique.*

*6. On peut avoir $A^T = -A$. Par exemple*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

*On a*

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -6 \\ -3 & 6 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} = -A$$

*On dit que $A$ est une matrice antisymétrique.*

**Définition 4.** *Soient $A$ et $B$ deux matrices de même ordre. On dit que $A = B$ si $A_{ij} = B_{ij}$ pour tout $i$ et $j$.*

## 4.2 L'espace vectoriel $\mathbb{M}_{n,m}(K)$

L'ensemble $\mathcal{M}_{n,m}(K)$ des matrices d'ordre $n \times m$ à coefficients dans $K$ est un $K$-espace vectoriel. Les lois sont définies par :

$$(a_{i,j}) + (b_{i,j}) = (a_{i,j} + b_{i,j}) \quad \text{et} \quad \lambda(a_{i,j}) = (\lambda a_{i,j})$$

**Exemples 2.** *Soient*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix} \; et B = \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{2} & 3 \\ 1 & \frac{1}{3} & 3 \end{pmatrix}$$

*alors*

$$2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 10 & -4 & 12 \end{pmatrix} \; et A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2+\sqrt{2} & 6 \\ 6 & \frac{-5}{3} & 9 \end{pmatrix}$$

Cherchons une base et la dimension du $K$-ev $\mathbb{M}_{n,m}(K)$. Pour cela on considère le cas où $n = 2$ et $m = 3$. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Décomposans $A$ sous la forme

$$A = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$+ a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit $E_{ij}$ la matrice d'ordre $2 \times 3$ dont tous les coefficients sont des zéro sauf celui en position $(i,j)$ qui vaut 1. On a montré alors que toute matrice de $\mathbb{M}_{2,3}(K)$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des matrices $E_{ij}$. Par suite la famille

$$\{E_{ij}/1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3\}$$

est une base du $K$-ev $\mathbb{M}_{2,3}(K)$. On a alors $\dim_K(\mathbb{M}_{2,3}(K)) = 2 \times 3 = 6$.
De la même façon on montre toute matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ de $\mathbb{M}_{n,m}(K)$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des matrices $E_{ij}$. Plus pécisement on a

$$A = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}E_{ij} = \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} a_{ij}E_{ij}.$$

Donc la famille

$$\{E_{ij}/1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

est une base du $K$-ev $\mathbb{M}_{n,m}(K)$ On a alors $\dim_K(\mathbb{M}_{n,m}(K)) = nm$.

**Définition 5.** *Les matrices $E_{ij}$ défini ci-dessus constituent une base de l'espace vectoriel $\mathbb{M}_{n,m}(K)$ appelée la base canonique de l'espace vectoriel $\mathbb{M}_{n,m}(K)$.*

## 4.3 Produit matriciel

Soient $A = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{1,m}(K)$ une matrice ligne qui a $m$ colonnes et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m,1}(K)$ une matrice colonne qui a $m$ lignes. On appelle produit $AB$ la matrice $(a_1b_1 + \dots + a_mb_m) \in \mathbb{M}_{1,1}(K)$ qui est constituée par un seul coefficient. Par exemple

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-4 \times \sqrt{5}) + (2 \times 4) + (3 \times 7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 - 4\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Soient maintenant $A \in \mathbb{M}_{n,m}(K)$ et $B \in \mathbb{M}_{m,p}(K)$. On appelle produit $AB$ la matrice $C \in \mathbb{M}_{n,p}(K)$ dont les coefficients sont définis par $C_{ij} = L_i(A)C_j(B)$. Par suite

$$AB = \begin{pmatrix} L_1(A)C_1(B) & L_1(A)C_2(B) & \dots & L_1(A)C_p(B) \\ L_2(A)C_1(B) & L_2(A)C_2(B) & \dots & L_2(A)C_p(B) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ L_n(A)C_1(B) & L_n(A)C_2(B) & \dots & L_n(A)C_p(B) \end{pmatrix}$$

On utilisant les coefficients des deux matrices on obtient :

Si $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$ et $B = (B_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le p}}$, alors $C = (c_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le p}}$ avec

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{im} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix} \\ &= a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ik}b_{kj} + \cdots + a_{im}b_{mj} \\ &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}. \end{aligned}$$

**Remarques 6.**

*1. Le produit de deux matrice n'est défini que si le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la deuxième matrice et le produit d'une matrice d'ordre $n \times m$ par une matrice d'ordre $m \times p$ est une matrice d'ordre $n \times p$.*

*2. En particulier :*

- *Si $A$ est d'ordre $n \times m$ et $B$ est d'ordre $m \times n$, alors $AB$ est une matrice carrée d'ordre $n$.*
- *Si $A$ est d'ordre $n \times m$ et $B$ est une matrice colonne d'ordre $m \times 1$, alors $AB$ est une matrice colonne d'ordre $n \times 1$.*
- *Si $A$ est une matrice ligne d'ordre $1 \times m$ et $B$ est d'ordre $m \times n$, alors $AB$ est une matrice ligne d'ordre $1 \times n$.*

**Exemples 3.**

*1.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}$$

*2.*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 24 & 18 \end{pmatrix}$$

*3.*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \end{pmatrix}$$

*4.*

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 8 \\ 6 & -3 & 12 \end{pmatrix}$$

*5.*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 24 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 106 \end{pmatrix}$$

*6. Si $A$ est une matrice d'ordre $n \times m$, alors $A \times 0_{m,p} = 0_{n,p}$ et $0_{p,n} \times A = 0_{p,m}$.*
*7. Si $A$ est une matrice carrée d'ordre $n$, alors $A \times 0_n = 0_n \times A = 0_n$ et $A \times I_n = I_n \times A = A$.*

**Proposition 7.** *Pour toutes matrices $A, B$ et $C$, si les opérations indiquées existent, on a les égalités suivantes :*
*1. $A(B + C) = AB + AC$*
*2. $(B + C)A = BA + CA$*
*3. $(AB)C = A(BC)$*

*Démonstration.*
1. Soient $A \in \mathbb{M}_{n,m}(K)$ et $B, C \in \mathbb{M}_{m,p}(K)$. On a

$$B + C = (B_{ij} + C_{ij})$$

Posons $D = A(B+C)$, $U = AB$ et $V = AC$. Alors

$$U_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj}$$

$$V_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}C_{kj}$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}(B_{kj}+C_{kj}) = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj} + \sum_{k=1}^{m} A_{ik}C_{kj}$$

Il est clair que $D_{ij} = U_{ij} + V_{ij}$ et donc $A(B+C) = AB + AC$.

2. Soient $A \in \mathbb{M}_{m,n}(K)$ et $B, C \in \mathbb{M}_{n,m}(K)$. On a

$$B + C = (B_{ij} + C_{ij})$$

Posons $D = (B+C)A$, $BA = U$ et $CA = V$. Alors

$$U_{ij} = \sum_{k=1}^{m} B_{ik}A_{kj}$$

$$V_{ij} = \sum_{k=1}^{m} C_{ik}A_{kj}$$

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{m} (B_{ik}+C_{ik})A_{kj} = \sum_{k=1}^{m} B_{ik}A_{kj} + \sum_{k=1}^{m} C_{ik}A_{kj}$$

Il est clair que $D_{ij} = U_{ij} + V_{ij}$ et donc $(B+C)A = BA + CA$.

3. Soient $A \in \mathbb{M}_{n,m}(K)$ et $B \in \mathbb{M}_{m,p}(K)$ et $C \in \mathbb{M}_{p,q}(K)$.

Posons $D = AB \in \mathbb{M}_{n,p}(K)$, $U = DC \in \mathbb{M}_{n,q}(K)$, $V = BC \in \mathbb{M}_{m,q}(K)$ et $W = AV \in \mathbb{M}_{n,q}(K)$. Alors

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}B_{kj}$$

$$U_{ij} = \sum_{k=1}^{p} D_{ik}C_{kj}$$

$$V_{ij} = \sum_{k=1}^{p} B_{ik}C_{kj}$$

$$W_{ij} = \sum_{k=1}^{m} A_{ik}V_{kj}$$

On veut montrer que $U = W$. On a $D_{ik} = \sum_{s=1}^{m} A_{is}B_{sk}$, donc

$$U_{ij} = \sum_{k=1}^{p} D_{ik}C_{kj} = \sum_{k=1}^{p}(\sum_{s=1}^{m} A_{is}B_{sk})C_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{s=1}^{m} A_{is}B_{sk}C_{kj}$$

et

$$W_{ij} = \sum_{s=1}^{m} A_{is}V_{sj} = \sum_{s=1}^{m} A_{is}(\sum_{k=1}^{p} B_{sk}C_{kj}) = \sum_{k=1}^{m} A_{is}\sum_{s=1}^{p} B_{sk}C_{kj}$$

Donc

$$W_{ij} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{p} A_{is}B_{sk}C_{kj}$$

Puisque les indices $k$ et $s$ sont indépendantes, alors on peut échanger l'ordre des sommations $\sum_{k=1}^{m}$ et $\sum_{s=1}^{p}$ pour obtenir

$$W_{ij} = \sum_{s=1}^{p}\sum_{k=1}^{m} A_{is}B_{sk}C_{kj} = U_{ij}$$

En conclusion $U = W$ et donc $(AB)C = A(BC)$. □

**Théorème 8.** $(\mathbb{M}_n(K), +, ., \times)$ *est une algèbre unitaire sur $K$ (en général n'est pas commutatif).*

*Démonstration.* On a $(\mathbb{M}_n(K), +, .)$ est un $K$-ev.
D'après la proposition 7, $(\mathbb{M}_n(K), +, \times)$ est un anneau.
$\mathbb{M}_n(K)$ est unitaire et $I_n$ son unité.
Soient $\alpha \in K$ et $A, B \in \mathbb{M}_n(K)$. On vérifie facilement que $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$.
En conclusion, $(\mathbb{M}_n(K), +, ., \times)$ est une algèbre unitaire sur $K$. □

**Remarque 9.** *La loi $\times$ n'est pas commutative. En effet considérons*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \, et \, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

*On a*

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & -9 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$$

*On a alors $AB \neq BA$.*

**Remarque 10.** *Le produit de deux matrices non nulles peut être nul, c'est-à-dire,*

$$AB = 0 \nRightarrow A = 0 \, ou \, B = 0.$$

*En effet considérons*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \, et \, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

*On a*

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*On a alors* $AB = 0$.

**Remarque 11.** *Soit* $A$ *et* $B$ *deux matrices carrées de même ordre. Alors*

$$(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$$

$$(A-B)^2 = A^2 - AB - BA + B^2$$

$$(A+B)(A-B) = A^2 - AB + BA - B^2$$

En général on n'a pas $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, mais d'après la remarque précédente, si on suppose que $A$ et $B$ commutent, v'esr-à-dire, $AB = BA$, alors on a l'identité $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. D'une façon général on le Résultat suivant dit formule de binôme de Newton :

**Proposition 12.** *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$ *où* $K$ *est un corps de caractéristique* $0$. *On suppose que* $AB = BA$. *Alors pour tout* $p \in \mathbb{N}$ *on a*

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{p-k} \quad où \quad \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

*Démonstration.* Voir la fiches d'exercices N°3. ☐

**Rappels.**

*1. Soit* $R$ *un anneau commutatif unitaire d'unité* $1_R$ *et soit*

$$I_R = \{n \in \mathbb{N}^\star / n1_R = 0\} \; où \; n1_R = \underbrace{1_R + 1_R + \cdots + 1_R}_{n\,fois}.$$

*Si* $I_R \neq \emptyset$*, alors* $I_R$ *admet un plus petit élément* $q$*. L'entier* $q$ *est appelé La caractéristique de* $R$ *et se note* $car(R) = q$*.*
*Si* $I_R \neq \emptyset$*, alors on dit que La caractéristique de* $R$ *est nulle, c'est-à-dire,* $car(R) = 0$.
*2. Si* $R$ *est un anneau intègre et si* $car(R) \neq 0$*, alors on montre facilement que* $car(R) = p$ *est un nombre premier. En particulier, si* $R = K$ *est un corps, alors* $car(K) = p$ *est un nombre premier.*
***Exemples*** *:* $car(\mathbb{Z}) = car(\mathbb{Q}) = car(\mathbb{R}) = car(\mathbb{C}) = 0$ *et* $car(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}) = 5$*.*

**Exercice 1.**

*1. On sait que si* $p$ *est un nombre premier alors on a*

$$p \text{ divise } k! \Longleftrightarrow k \geq p.$$

*On suppose que* $K$ *est un corps de carctéristique* $p$ *(un nombre premier).*
*Dans ce cas si* $k \geq p$*, alors* $k!$ *est un multiple de* $p$*, donc* $k! = 0$ *et* $\frac{m!}{k!(m-k)!}$ *n'est pas défini. Cela signifie que le résultat de la proposition précédente n'est pas valide.*
*Cependant dans le cas où* $m < p$*,* $\frac{m!}{k!(m-k)!}$ *est bien défini car* $k! \neq 0$ *et* $(m-k)! \neq 0$ *puisque* $k! \leq m < p$ *et* $(m-k)! \leq m < p$*. Donc on peut dans ce cas utiliser la formule du binôme.*
*2. Montrer que le résultat de la proposition précédente reste valide dans un corps* $K$ *quelconque à condition de définir les coefficients binomiaux par la relation de récurrence suivante :*

$$\binom{m}{0} = 1, \binom{m}{m} = 1, \binom{m}{1} = m$$

*et*

$$\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k} + \binom{m-1}{k-1}$$

*dite formule de Pascal.*

**Exercice 2.**

*1. Montrer que* $(A+B)^T = A^T + B^T$ *et* $(\alpha A)^T = \alpha A^T$. *Par suite l'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{M}_{n,m}(K) &\longrightarrow \mathbb{M}_{m,n}(K) \\ A &\longmapsto A^T \end{aligned}$$

*est linéaire. En particulier, l'application*

$$\begin{aligned} g : \mathbb{M}_{n}(K) &\longrightarrow \mathbb{M}_{n}(K) \\ A &\longmapsto A^T \end{aligned}$$

*est un endomorphisme.*
*3. Montrer que* $g$ *est un automorphisme de* : $\mathbb{M}_n(K)$.
*4. Montrer que* $(A^T)^T = A$ *et en déduire que* $g^{-1} = g$.
*2. Montrer que* $(AB)^T = B^T A^T$.
*3. Montrer que* $AA^T$ *et* $A^T A$ *sont des matrice carrées.*
*4. On dit que* $A$ *est une matrice symétrique si* $A^T = A$.
*(i) Montrer que si* $A$ *est symétrique alors* $A$ *est une matrice carrée.*
*(ii) Montrer que* $AA^T$ *et* $A^T A$ *sont deux matrices symétriques.*

**Définition 13.** *(puissance d'une matrice)*
*Soit* $A$ *une matrice carrée d'ordre* $m$ *et* $n$ *un entier naturel non nul. La nième puissance de* $A$ *est donné par*

$$A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n\, fois}$$

**Remarque 14.** *Par convention on pose* $A^0 = I_m$ *si* $A$ *est une matrice carrée quelconque d'ordre* $m$.

**Exercice 3.** *Montrer que* $(A^n)^m = A^{nm}$ *et* $A^n A^m = A^{n+m}$.

**Exercice 4.**
*1. Montrer que* $(A^n)^T = (A^T)^n$.
*2. Montrer que si* $A$ *est une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) à diagonale nulle d'ordre* $m$ *alors* $A^m = 0$.

*3. Soit* $A = diag(a_1, \dots, a_m)$ *une matrice diagonale. Montrer* $A^n = diag(a_1^n, \dots, a_m^n)$.

*4. Soit* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$. *Montrer par récurrence que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2-2^n & 2^n-1 \\ 2-2^{n+1} & 2^{n+1}-1 \end{pmatrix}.$$

*5. Soient* $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

*(i) Montrer que* $N^2 = 0$ *et que* $B - N = 2I_3$.

*(ii) Déterminer* $B^n$ *en remarquons que* $B = 2I_3 + N$ *et* $N \times (2I_3) = (2I_3) \times N$.

**Définition 15.** *Une matrice carrée* $A$ *de* $\mathcal{M}_n(K)$ *est dite inversible, s'il existe une matrice* $B \in \mathcal{M}_n(K)$ *telle que*

$$AB = I_n \, et BA = I_n.$$

*On dit que* $B$ *est l'inverse de* $A$ *et on la note* $A^{-1}$.

*L'ensemble des matrices inversibles de* $\mathcal{M}_n(K)$ *est noté* $GL_n(K)$.

**Remarque 16.** *Une matrice carrée non inversible est dite singulière.*

**Propriétés 17.** *Soient* $A, B \in \mathcal{M}_n(K)$. *Alors on a les*

*1. Montrer que l'inverse de* $A$ *s'il existe elle est unique.*

*2. Montrer que* $(A^{-1})^{-1} = A$ *et que* $I_n^{-1} = I_n$.

*2. Montrer que* $AB = I_n \Longleftrightarrow BA = I_n$.

*3. Montrer que si* $A$ *et* $B$ *sont inversible alors la matrice* $AB$ *est inversible et on a* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

*4. Montrer que si* $A$ *est inversible alors la matrice* $A^T$ *est inversible et on a* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

*5. Montrer que si* $A$ *est inversible alors la matrice* $A^m$ *est inversible pour tout* $m \in \mathbb{N}$ *et on a* $(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m$.

*Démonstration.* Voir la fiche d'exercices N°3. □

**Proposition 18.** *L'ensemble $GL_n(K)$ muni de la multiplication est un groupe appelé le groupe linéaire des matrices d'ordre $n$.*

*Démonstration.*
$I_n$ est l'élément neutre de $\mathrm{GL}_n(K)$ car $AI_n = I_nA = A$.
On a $A(BC) = (AB)C$ donc $\times$ est associative.
tout élément $A$ de $\mathrm{GL}_n(K)$ est inversible. Par suite $(\mathrm{GL}_n(K), \times)$ est un groupe. □

## 4.4 Écriture matricielle d'un système d'équations linéaires

Considérons le système d'équations linéaires suivant

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ . & & . & & . & & . \\ . & & . & & . & & . \\ . & & . & & . & & . \\ a_{p,1}x_1 & + & \cdots & + & a_{p,n}x_n & = & b_p \end{array}\right.$$

On vérifie facilement que que le système $(S)$ peut être présenté sous la forme matricielle suivante

$$AX = B$$

où

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{p,1} & a_{p,2} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_b \end{pmatrix}.$$

On remarque que $A$ est la matrice des coefficients du système $(S)$ et $B$ son second membre.

Par exemple, considérons le système suivant

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & 3y & + & 5z & = & 1 \\ 3x & & & + & 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

Posons

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On a

$$AX == \begin{pmatrix} 2x - 3y + 5z \\ 3x + 2z \end{pmatrix}$$

et donc

$$AX = B \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccccc} 2x & - & 3y & + & 5z & = & 1 \\ 3x & & & + & 2z & = & 4 \end{array} \right. \Longleftrightarrow (x, y, z) \in S.$$

### 4.4.1 Calcul de l'inverse

Si $A$ est une matrice inversible, alors l'équation $AX = B$ admet une unique solution $X = A^{-1}B$. En effet, on a $AX = A(A^{-1}B) = AA^{-1}B = I_nB = B$. Donc $X = A^{-1}B$ est une solution de l'équation $AX = B$. Supposons maintenat que $X$ et $X'$ sont des solutions de l'équation $AX = B$. Alors $AX = AX'$, donc $A - 1(AX) = A^{-1}(AX')$, d'où $A^{-1}AX = A^{-1}AX'$, par suite $I_nX = I_nX'$ et donc $X = X'$.

Supposons maintenant que $A$ est d'ordre $n$ et soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. Soit $(S)$ le système d'équation dont l'écriture matricielle est $AX = Y$ et le système $(H)$ d'équation dont l'écriture matricielle $A^{-1}Y = X$. On a évidemment

$$AX = Y \Longleftrightarrow X = A^{-1}Y$$

et donc

$$(x_1, \dots, x_n) \in S \Longleftrightarrow (y_1, \dots, y_n) \in H.$$

Comme application de ces résultats on a la proposition suivante

**Proposition 19.** *Soit $A$ une matrice inversible d'ordre $n$ et soit $(S)$ le système d'équation dont l'écriture matricielle est $AX = Y$. La resolution du système $(S)$ donne naissance à une matrice carrée $B$ d'ordre $n$ telle que $BY = X$. La matrice $B$ ainsi obtenue est l'inverse de $A$, c'est-à-dire $B = A^{-1}$.*

**Exemple 1.** *Soit la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

*Montrer que $A$ est inversible et calculer son inverse.*
*Soient*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad et \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

*On a*

$$AX = Y \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow (S) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & -2x_3 & = & y_1 \\ -x_1 & + & 3x_2 & & = & y_2 \\ & & -2x_2 & +x_3 & = & y_3 \end{array} \right.$$

*On résout le système $(S)$, on obtient que $(S)$ est un système de Cramer et donc $A$ est une matrice inversible. On trouve $x_1 = 3y_1 + 2y_2 + 6y_3$, $x_2 = y_1 + y_2 + 2y_3$ et $x_3 = 2y_1 + 2y_2 + 5y_3$. On obtient alors le nouveau système suivant*

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} 3y_1 & + & 2y_2 & + & 6y_3 & = & x_1 \\ y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 & = & x_2 \\ 2y_1 & + & 2y_2 & + & 5y_3 & = & x_3 \end{array} \right.$$

*Ce dernier système peut s'écrire matriciellement*

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

*La matrice inverse de $A$ est donc*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

## 4.5 Matrices d'applications linéaires

### 4.5.1 Matrice d'une famille de vecteurs

Soit $E$ une espace vectoriel et soit $B = (u_1, \ldots, u_n)$ une base de $E$. Soit $v$ un vecteur de $E$ et considérons les coordonnées de $v$ dans la base $B$, $v_B = (a_1, \ldots, a_n)$. On appelle matrice du vecteur $v$ dans la base $B$, la matrice colonne $\mathrm{Mat}_B(v) = v_B^T$, c'est-à-dire,

$$\mathrm{Mat}_B(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Soit $H = (v_1, \ldots, v_m)$ une famille de vecteurs de $E$. On appelle matrice de $H$ dans la base $B$, la matrice colonne $\mathrm{Mat}_B(H)$ dont les colonnes sont $C_i(\mathrm{Mat}_B(H)) = \mathrm{Mat}_B(v_i)$. Donc si $v_{iB} = (a_{1i}, \ldots, a_{ni})$, alors

$$\mathrm{Mat}_B(H) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

**Exemple 2.** *Soit $B$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.*
*Soient* $P_1 = 6X^2 - 1, P_2 = (X+1)^2, P_3 = 4 - X, P_4 = 3X^2 + 5X, P_5 = 0$. *Alors*

$$Mat_B(P_1, P_2) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad Mat_B(P_2, P_1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \quad Mat_B(P_1, P_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$Mat_B(P_1, P_5, P_3, P_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

### 4.5.2 Matrice d'une application linéaire

Dans ce qui suit

- $E$ et $F$ désignent deux $K$-ev de dimensions finies, supposés non nuls.

• $B = (u_1, \dots, u_n)$ désigne une base de $E$ et $B' = (v_1, \dots, v_m)$ une base de $F$.
• $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.

**Définition 20.** *La matrice de $f$ dans les bases $B$ et $B'$ est la matrice de la famille $(f(u_1), \dots, f(u_n))$ dans la base $B'$. Cette matrice est notée*

$$Mat_{B,B'}(f) \in \mathcal{M}_{m,n}(K).$$

*Par suite,*

$$Mat_{B,B'}(f) = Mat_{B'}(f(u_1), \dots, f(u_n)).$$

**Notation .** *Si $E = F$ et $B = B'$, la matrice $Mat_{B,B}(f)$ est notée tout simplement $Mat_B(f)$.*

**Proposition 21.** *Soit $w$ un vecteur quelconque de $E$. Alors*

$$Mat_{B'}(f(w)) = Mat_{B,B'}(f) Mat_B(w).$$

*Donc la connaissance de la matrice $Mat_{B,B'}(f)$ permet de de calculer $f(w)$ pour tout $w \in E$, c'est-à-dire, de retrouver $f$.*

*Démonstration.* Posons

$$w_B = (a_1, \dots, a_n), \quad \text{c'est-à-dire,} \quad w = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$$

$$f(w)_{B'} = (b_1, \dots, b_m), \quad \text{c'est-à-dire,} \quad f(w) = b_1 v_1 + \cdots + b_m v_m$$

$$\mathrm{Mat}_{B,B'}(f) = (c_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

On a alors

$$\mathrm{Mat}_{B,B'}(f)\mathrm{Mat}_B(w) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_{1j} a_j \\ \sum_{j=1}^{n} c_{2j} a_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} c_{mj} a_j \end{pmatrix}.$$

D'autre part, par défintion de la matrice $\mathrm{Mat}_{B,B'}(f)$, on a

$$f(u_1) = \sum_{i=1}^{m} c_{i1} v_i, \quad f(u_2) = \sum_{i=1}^{m} c_{i2} v_i, \quad \dots, \quad f(u_n) = \sum_{i=1}^{m} c_{in} v_i.$$

Puisque $w = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$, alors

$$\begin{aligned}
f(w) =& a_1f(u_1) + a_2f(u_2) + \cdots + a_nf(u_n)\\
=& a_1\sum_{i=1}^{m} c_{i1}v_i + a_2\sum_{i=1}^{m} c_{i2}v_i + \cdots + a_n\sum_{i=1}^{m} c_{in}v_i\\
=& \sum_{i=1}^{m} c_{i1}a_1v_i + \sum_{i=1}^{m} c_{i2}a_2v_i + \cdots + \sum_{i=1}^{m} c_{in}a_nv_i\\
=& (c_{11}a_1v_1 + c_{12}a_2v_1 + \cdots + c_{1n}a_nv_1) + (c_{21}a_1v_2 + c_{22}a_2v_2 + \cdots + c_{2n}a_nv_2) +\\
& \cdots\cdots + (c_{m1}a_1v_m + c_{m2}a_2v_m + \cdots + c_{mn}a_nv_m)\\
=& (c_{11}a_1 + c_{12}a_2 + \cdots + c_{1n}a_n)v_1 + (c_{21}a_1 + c_{22}a_2 + \cdots + c_{2n}a_n)v_2 +\\
& \cdots\cdots + (c_{m1}a_1 + c_{m2}a_2 + \cdots + c_{mn}a_n)v_m\\
=& (\sum_{j=1}^{n} c_{1j}a_j)v_1 + (\sum_{j=1}^{n} c_{2j}a_j)v_2 + \cdots + (\sum_{j=1}^{n} c_{mj}a_j)v_m
\end{aligned}$$

Par suite

$$f(w)_{B'} = (\sum_{j=1}^{n} c_{1j}a_j, \sum_{j=1}^{n} c_{2j}a_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} c_{mj}a_j)$$

En conclusion,

$$\mathrm{Mat}_{B'}(f(w)) = \mathrm{Mat}_{B,B'}(f)\mathrm{Mat}_B(w)$$

. □

**Remarque 22.**
*1. Soit $C_i(Mat_{B,B'}(f))$ la i-ième colonne de la matrice $Mat_{B,B'}(f)$.*
*On a $C_i(Mat_{B,B'}(f)) = Mat_{B'}(f(u_i))$. Puisque $Mat_{B'}(f(u_i)) = Mat_{B,B'}(f)Mat_B(u_i)$, alors*

$$Mat_{B,B'}(f)Mat_B(u_i) = C_i(Mat_{B,B'}(f)).$$

*2. On a $u_1 = 1 \times u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_0$, $u_2 = 0u_1 + 1 \times u_2 + \cdots + 0u_n, \ldots$.*
*Donc $u_{1B} = (1, 0, \ldots, 0), u_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, u_{nB} = (0, \ldots, 0, 1)$.*

*Par suite*

$$\begin{aligned}Mat_{B'}(f(u_1)) =& Mat_{B,B'}(f)Mat_B(u_1)\\ =& \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix} = C_1(Mat_{B,B'}(f))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Mat_{B'}(f(u_2)) =& Mat_{B,B'}(f)Mat_B(u_2)\\ =& \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{pmatrix} = C_2(Mat_{B,B'}(f))\end{aligned}$$

*Plus généralement on a*

$$\begin{aligned}Mat_{B'}(f(u_i)) =& Mat_{B,B'}(f)Mat_B(u_i)\\ =& \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{mi} \end{pmatrix} = C_i(Mat_{B,B'}(f))\end{aligned}$$

*On retrouve alors le résultat de* 1.

**Exemple 3.**

*1. On considère l'application identique de $E$. On a*

$$id_E(u_1)_B = (1,0\ldots,0), id_E(u_2)_B = (0,1,0\ldots,0),\ldots, id_E(u_n)_B = (0,\ldots,0,1).$$

*Donc* $Mat_B(id_E) = I_n$.

*2. si $f = 0$ est l'application nulle, alors $Mat_B(f) = 0_{m,n}$.*
*3. Soient $E = K^3$, $F = K^2$ et soient $B$ et $B'$ les bases canoniques de $E$ et de $F$. Soit $f : E \longrightarrow F$ l'application linéaire définie par $f(x,y,z) = (x-2y, x+y-3z)$.*
*on a $f(1,0,0) = (1,1), f(0,1,0) = (-2,1)$ et $f(0,0,1) = (0,-3)$, alors*

$$Mat_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

*On a* $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y \\ x+y-3z \end{pmatrix}$.
*Pousons $u = (x,y)$, alors $Mat_{B'}(f(u)) = Mat_{B,B'}(f)Mat_B(u)$.*
*3. Soient $E = K_4[X]$ et $F = K_2[X]$ et soient $B$ et $B'$ les bases canoniques de $E$ et de $F$. Soit $f : E \longrightarrow F$ l'application linéaire définie par $(f(P) = P''$.*
*on a $f(1) = 0, f(X) = 0, f(X^2) = 2, f(X^3) = 6X, f(X^4) = 12X^2$,*
*donc $f(1)_{B'} = (0,0,0), f(X)_{B'} = (0,0,0), f(X^2)_{B'} = (2,0,0), f(X^3)_{B'} = (0,6,0)$, $f(X^4)_{B'} = (0,0,12)$.*

$$Mat_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

*Considérons $P = 2X^4 + X^3 - X^2 + 3X + 5$ Déterminer $P''$.*
*On a $P_B = (5,3,-1,1,2)$. Alors*

$$Mat_{B'}(P") = Mat_{B'}(f(P)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 24 \end{pmatrix}$$

*Donc $P''(X) = -2 + 6X + 24X^2$.*
*4. Soient $E = F = K^3$ et soit $B = (e_1, e_2, e_3)$ sa base canonique. Posons $B' = (v_1, v_2, v_3)$ où $v_1 = (1,1,1), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,0,0)$. Il est clair que $B'$ est une famille échelonnée qui ne contient pas $(0,0,0)$, donc $B'$ est libre. Comme card$(B') = 3 = \dim(E)$, alors $B'$ est une base de $E$. Soit $f : E \longrightarrow F$ l'application*

*linéaire définie par* $f(x,y,z) = (x-2y+z, y-3z, 2x+y+z)$.
*on a* $f(e_1) = (1,0,2), f(e_2) = (-2,1,1)$ *et* $f(e_3) = (1,-3,1)$, *alors*

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*On a*
$v_1 = e_1 + e_2 + e_3$, *donc*

$$f(v_1) = f(e_1) + f(e_2) + f(e_3) = (1,0,2) + (-2,1,1) + (1,-3,1) = (0,-2,4)$$

$v_2 = e_1 + e_2$, *donc* $f(v_1) = f(e_1) + f(e_2) = (1,0,2) + (-2,1,1) = (-1,1,3)$
$v_3 = e_1$, *donc* $f(v_3) = (1,0,2)$, *alors*

$$Mat_{B',B}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

*On a*

$$\begin{aligned} (0,-2,4) = av_1 + bv_2 + cv_3 &\Longleftrightarrow (a+b+c, a+b, a) = (0,-2,4) \\ &\Longleftrightarrow a = 4, b = -6, c = 2 \\ &\Longleftrightarrow f(v_1)_{B'} = (4,-6,2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (-1,1,3) = av_1 + bv_2 + cv_3 &\Longleftrightarrow (a+b+c, a+b, a) = (-1,1,3) \\ &\Longleftrightarrow a = 3, b = -2, c = -2 \\ &\Longleftrightarrow f(v_1)_{B'} = (3,-2,-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1,0,2) = av_1 + bv_2 + cv_3 &\Longleftrightarrow (a+b+c, a+b, a) = (1,0,2) \\ &\Longleftrightarrow a = 2, b = -2, c = 1 \\ &\Longleftrightarrow f(v_1)_{B'} = (2,-2,1) \end{aligned}$$

*Donc*

$$Mat_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -6 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*On a* $e_1 = v_3$*, donc* $f(e_1)_{B'} = f(v_3)_{B'} = (2, -2, 1)$

$$\begin{aligned}(-2,1,1) = av_1 + bv_2 + cv_3 &\Longleftrightarrow (a+b+c, a+b, a) = (-2,1,1)\\ &\Longleftrightarrow a = 1, b = 0, c = -3\\ &\Longleftrightarrow f(e_2)_{B'} = (1,0,-3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1,-3,1) = av_1 + bv_2 + cv_3 &\Longleftrightarrow (a+b+c, a+b, a) = (1,-3,1)\\ &\Longleftrightarrow a = 1, b = -4, c = 4\\ &\Longleftrightarrow f(e_3)_{B'} = (1,-4,4)\end{aligned}$$

*Donc*

$$Mat_{B,B'}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

**Proposition 23.** *L'application*

$$\begin{aligned} Mat : \mathscr{L}(E,F) &\longrightarrow \mathbb{M}_{m,n}(K)\\ f &\longmapsto Mat_{B,B'}(f)\end{aligned}$$

*est un isomorphisme de* $K$*-espaces vectoriels. En particulier,* $\dim(\mathbb{M}_{m,n}(K)) = mn$.

*Démonstration.* Voir TD □

**Remarque 24.** *Prenons* $E = K^n$ *et* $F = K^m$ *et* $B$ *et* $B'$ *les bases canoniques de* $E$ *et* $F$*. Alors pour toute matrice* $A \in \mathbb{M}_{m,n}(K)$ *il existe une unique application lineaire* $f : K^n \longrightarrow K^m$ *telle que* $Mat_{B,B'}(f) = A$*. On dit que* $f$ *est canoniquement associée à la matrice* $A$*.*

**Remarque 25.** *Soit* $g$ *un endomorphisme de* $E$*. Alors*

*1.*

$$Mat_{B,B'}(f) = 0_{m,n} \Longleftrightarrow f = 0 \text{ } l'application\ nulle$$

*2.*

$$Mat_B(g) = I_n \Longleftrightarrow g = id_E$$

**Remarque 26.** *On a* $\dim(\mathbb{M}_{m,n}(K)) = mn$ *et* $\dim(\mathbb{M}_{n,m}(K)) = nm$*, donc* $\dim(\mathbb{M}_{m,n}(K)) = \dim(\mathbb{M}_{nm}(K))$*, alors* $\mathbb{M}_{m,n}(K) \simeq \mathbb{M}_{m,n}(K)$*.*
*Il est facile de montrer que l'application*

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_{m,n}(K) &\longrightarrow \mathbb{M}_{n,m}(K) \\ M &\longmapsto M^T \end{aligned}$$

*est un isomorphisme de* $K$*-espaces vectoriels.*

**Proposition 27.** *Soient* $G$ *un* $K$*-ev et* $B'' = (w_1, \dots, w_q)$ *une base de* $G$*. Soit* $g : F \longrightarrow G$ *une application linéaire. Alors*

$$Mat_{B,B''}(g \circ f) = Mat_{B',B''}(g) \times Mat_{B,B'}(f)$$

*Démonstration.* Posons $A = \mathrm{Mat}_{B',B''}(g) \times \mathrm{Mat}_{B,B'}(f)$ et $B = \mathrm{Mat}_{B,B''}(g \circ f)$ et montrons que $C_j(A) = C_j(B)\ \forall j \in \{1, \dots, n\}$. On a

$$\begin{aligned} C_j(A) =& \mathrm{Mat}_{B',B''}(g) \times \mathrm{Mat}_{B,B'}(f) \times \mathrm{Mat}_B(u_j) \\ =& \mathrm{Mat}_{B',B''}(g) \times \mathrm{Mat}_{B'}(f(u_j)) \\ =& \mathrm{Mat}_{B''}(g(f(u_j))) \\ =& \mathrm{Mat}_{B''}((g \circ f)(u_j)) \\ =& C_j(B) \end{aligned}$$

En conclusion, les matrices $A$ et $B$ ont les mêmes colonnes, donc $A = B$. $\square$

**Proposition 28.** *On suppose que* $n = m$*, c'est-à-dire,* $\dim(E) = \dim(F)$*. Alors L'application* $f$ *est bijective si et seulement si* $Mat_{B,B'}(f)$ *est inversible. Dans ce cas on*

$$Mat_{B,B'}(f^{-1}) = Mat_{B,B'}(f)^{-1}.$$

*Démonstration.* Si $f$ est bijective, alors on a $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$, donc $\mathrm{Mat}_{B'}(f \circ f^{-1}) = I_n$ et $\mathrm{Mat}_B(f^{-1} \circ f) = I_n$. Par suite $\mathrm{Mat}_{B,B'}(f) \times \mathrm{Mat}_{B',B}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{B',B}(f^{-1}) \times \mathrm{Mat}_{B,B'}(f) = I_n$. Donc $\mathrm{Mat}_{B,B'}(f)$ est inversible et on a $\mathrm{Mat}_{B',B}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_{B,B'}(f)^{-1}$.
Réciproquement, supposons que la matrice $\mathrm{Mat}_{B,B'}(f)$ est inversible. Puisque $\mathrm{Mat}_{B,B'}(f)^{-1} \in \mathbb{M}_{n,m}(K)$, alors d'après la proposition 23, $\exists g \in \mathscr{L}(F, E)$ telle que $\mathrm{Mat}_{B',B}(g) = \mathrm{Mat}_{B,B'}(f)^{-1}$. On a

$$\mathrm{Mat}_{B',B}(g) \times \mathrm{Mat}_{B,B'}(f) = \mathrm{Mat}_{B,B'}(f)^{-1} \times \mathrm{Mat}_{B,B'}(f) = I_n$$

donc

$$\mathrm{Mat}_B(g \circ f) = I_n$$

alors $g \circ f = \mathrm{id}_E$. De la même façon on montre que $f \circ g = \mathrm{id}_F$. En conclusion, $g = f^{-1}$ et donc $f$ est inversible. □

**Corollaire 29.** *Soient $g$ et $f$ deux endomorphismes de $E$. Alors*

*1.*

$$Mat_B(g \circ f) = Mat_B(g) \times Mat_B(f)$$

*2. $g$ est bijective si et seulement si $Mat_B(g)$ est inversible. Dans ce cas on a*

$$Mat_B(g^{-1}) = Mat_B(g)^{-1}$$

## 4.6 Changement de bases

### 4.6.1 Matrices de passage

Soient $B = (u_1, \ldots, u_n)$ et $B' = (v_1, \ldots, v_n)$ deux bases de $E$.

**Définition 30.** *On appelle matrice de passage de $B$ à $B'$ la matrice $Mat_B(B')$ de la famille $B'$ dans la base $B$.*

**Exemple 4.** *Si $B = (u_1, u_2)$ et $B' = (2u_1 - u_2, u_1 + u_2)$, alors*

$$Mat_B(B') = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Théorème 31.** *On a les résultats suivants :*
*1.* $Mat_B(B')$ *est une matrice carrée d'ordre* $n$.
*2.* $Mat_B(B') = Mat_{B',B}(id_E)$.
*3.* $Mat_B(B')$ *est inversible et on a* $Mat_B(B')^{-1} = Mat_{B'}(B)$.

*Démonstration.*
1. On sait que $\mathrm{Mat}_B(B')$ est une matrice d'ordre $s \times t$ où $s = \mathrm{card}(B)$ et $t = \mathrm{card}(B')$. Puisque $\mathrm{card}(B) = \mathrm{card}(B') = n$, alors $\mathrm{Mat}_B(B')$ est une matrice carrée d'ordre $n$.
2. On considère $\mathrm{id}_E$ de $E$ muni de $B'$ dans $E$ muni de $B$ :

$$\mathrm{id}_E : (E, B') \longrightarrow (E, B)$$

Pour tout $v_j \in B'$ on a $\mathrm{id}_E(v_j) = v_j$, donc la $j$ième colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_{B',B}(\mathrm{id}_E)$ est la même que la $j$ième colonne de la matrice $\mathrm{Mat}_B(B')$. Par suite, $\mathrm{Mat}_B(B') = \mathrm{Mat}_{B',B}(\mathrm{id}_E)$.
3. L'application

$$\mathrm{id}_E : (E, B') \longrightarrow (E, B)$$

est bijective et on a

$$\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E : (E, B) \longrightarrow (E, B').$$

Donc $\mathrm{Mat}_{B',B}(\mathrm{id}_E)$ est inversible et on a $\mathrm{Mat}_{B',B}(\mathrm{id}_E)^{-1} = \mathrm{Mat}_{B,B'}(\mathrm{id}_E^{-1}) = \mathrm{Mat}_{B,B'}(\mathrm{id}_E)$.
D'où le résultat. □

**Proposition 32.** *Soit* $w \in E$. *Soient* $Mat_B(w)$ *la matrice colonne des coordonnées de* $w$ *dans la base* $B$ *et* $Mat_{B'}(w)$ *la matrice colonne des coordonnées de* $w$ *dans la base* $B'$. *Alors*

$$Mat_{B'}(w) = Mat_{B'}(B)Mat_B(w).$$

*Démonstration.* Considérons l'application

$$\mathrm{id}_E : (E, B) \longrightarrow (E, B')$$

On a

$$\mathrm{Mat}_{B,B'}(\mathrm{id}_E)\mathrm{Mat}_B(w) = \mathrm{Mat}_{B'}(\mathrm{id}_E(w)).$$

Donc

$$\mathrm{Mat}_{B'}(B)\mathrm{Mat}_B(w) = \mathrm{Mat}_{B'}(w).$$

$\square$

**Exemple 5.** *Dans $E = \mathbb{R}^2$ soit $B = (e_1, e_2)$ la base canonique. Considérons la base $B' = (v_1, v_2)$ où $v_1 = e_1 - 2e_2, v_2 = 3e_1 + e_2$.*

*1. On a*

$$Mat_B(B') = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*2. On a $e_1 = \frac{1}{7}v_1 + \frac{2}{7}v_2$ et $e_2 = \frac{-3}{7}v_1 + \frac{1}{7}v_2$. Donc*

$$Mat_{B'}(B) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*3. Soit $W = (3, 5)$. On a $Mat_B(w) = (3, 5)^T$. On a*

$$Mat_{B'}(w) = Mat_{B'}(B)Mat_B(w).$$

*Alors*

$$Mat_{B'}(w) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -12 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

*Par suite, $w = \frac{-12}{7}v_1 + \frac{11}{7}v_2$.*

**Théorème 33.** *Soient $E$ et $F$ deux $K$-ev de dimensions finies et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Soient $B, C$ deux bases de $E$ et $B', C'$ deux bases de $F$. Alors*

$$Mat_{C,C'}(f) = Mat_{B'}(C')^{-1} \times Mat_{B,B'}(f) \times Mat_B(C).$$

*Démonstration.* Cosidérons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} (E,B) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_E"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (F,B') \arrow[d, "\mathrm{id}_F"'] \\ (E,C) \arrow[r, "f"] & (F,C') \end{tikzcd}$$

Ce diagramme est commutatif car $f \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_F \circ f$. On a

$$\mathrm{Mat}_{B,C'}(f \circ \mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{C,C'}(f) \times \mathrm{Mat}_{B,C}(\mathrm{id}_E) = \mathrm{Mat}_{C,C'}(f) \times \mathrm{Mat}_C(B)$$

et

$$\mathrm{Mat}_{B,C'}(\mathrm{id}_F \circ f) = \mathrm{Mat}_{B',C'}(\mathrm{id}_F) \times \mathrm{Mat}_{B,B'}(f) = \mathrm{Mat}_{C'}(B') \times \mathrm{Mat}_{B,B'}(f).$$

Donc

$$\mathrm{Mat}_{C,C'}(f) \times \mathrm{Mat}_C(B) = \mathrm{Mat}_{C'}(B') \times \mathrm{Mat}_{B,B'}(f)$$

alors

$$\mathrm{Mat}_{C,C'}(f) = \mathrm{Mat}_{C'}(B') \times \mathrm{Mat}_{B,B'}(f) \times \mathrm{Mat}_C(B)^{-1}$$

ou

$$\mathrm{Mat}_{C,C'}(f) = \mathrm{Mat}_{B'}(C')^{-1} \times \mathrm{Mat}_{B,B'}(f) \times \mathrm{Mat}_B(C).$$

□

**Corollaire 34.** *Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de $E$, $B$ et $B'$ deux bases de $E$. Alors*

$$Mat_{B'}(f) = Mat_B(B')^{-1} \times Mat_B(f) \times Mat_B(B').$$

*Démonstration.* Dans le théorème 33, on remplace $C$ et $C'$ par $B'$ et on remplace $B$ et $B'$ par $B$. □

**Exemple 6.** *Soit $B = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et soit $B' = (v_1, v_2)$ où $v_1 = e_1 - 2e_2, v_2 = 3e_1 + e_2$. $B'$ est une base de $\mathbb{R}^2$.*
*Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire telle que*

$$Mat_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

*On a*

$$Mat_B(B') = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

*et*

$$Mat_{B'}(B) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

*On a*

$$Mat_{B'}(f) = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

### 4.6.2 Rang d'une matrice

**Définition 35.** *Soit* $A = \begin{pmatrix} C_1(A) & \dots & C_m(A) \end{pmatrix}$ *une matrice de* $Mat_{n,m}(K)$*. On appelle rang de A, noté rg(A), le rang de la famille constituée par les vecteurs colonnes* $C_1(A), \dots, C_m(A)$*. On écrit*

$$rg(A) = rg(C_1(A), \dots, C_m(A)).$$

**Proposition 36.** *Soient* $E$ *de dimension* $n$ *et de base* $B$ *et* $F$ *de dimension* $m$ *et de base* $B'$*. Soit* $f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire. Posons* $A = Mat_{B,B'}(f) \in Mat_{m,n}(K)$*. Alors* $rg(A) = rg(f)$*.*

*Démonstration.* L'application

$$\begin{aligned} \mathrm{Mat}_{B'} : F &\longrightarrow \mathrm{Mat}_{m,1}(K) \\ w &\longmapsto \mathrm{Mat}_{B'}(w) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Donc $\mathrm{rg}(w_1, \dots, w_q) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{B'}(w_1), \dots, \mathrm{Mat}_{B'}(w_q))$.
Posons $B = (u_1, \dots, u_n)$. On a $\mathrm{Mat}_{B'}(f(u_i)) = C_i(A)$. Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) =& \mathrm{rg}(C_1(A), \dots, C_n(A)) \\ =& \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{B'}(f(u_1)), \dots, \mathrm{Mat}_{B'}(f(u_n))) \\ =& \mathrm{rg}(f(u_1), \dots, f(u_n)) \\ =& \mathrm{rg}(f) \end{aligned}$$

car $\mathrm{sev}\langle f(u_1), \dots, f(u_n)\rangle = \mathrm{Im}(f)$. □

**Proposition 37.** *Le rang d'une matrice A est égal à celui du système homogène associé.*

*Démonstration.* Voir la fiche d'exercices N°3. □

**Remarque 38.** *La proposition37 montre que le rang d'une matrice peut être calculer en utilisant la méthode de Gauss utilisée pour la résolution des systèmes d'équations linéaires.*

**Corollaire 39.** *Soit* $A \in Mat_{n,m}(K)$. *Alors*

$$rg(A) = rg(L_1(A), \dots, L(n)(A)),$$

*c'est-à-dire,* $rg(A) = rg(A^T)$.

*Démonstration.* Voir la fiche d'exercices N°4. □