Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences - EL JADIDA
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2022/23
Niveau : SMIA2
Algèbre 3

Un corrigé de l'épreuve d'algèbre 3 Session de Rattrapage
Durée 1h30'

Exercice.
1. Soit $u \in E$ et soit $u_A = (x, y, z, t)$. On a $\mathrm{mat}_B(f(u)) = \mathrm{mat}_{A,B}(f)\mathrm{mat}_A(u)$. Donc

$$f(u) = (0,0,0) \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 \\ & & y & & & + & t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 4z & + & 7t & = & 0 \end{array} \right.$$

On a

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 7 & 0 \end{array} \xrightarrow{L_3 - 2L_1 \to L_3} \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \xrightarrow{L_3 - L_2 \to L_3} \begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

On a x, y sont principales et z, t sont secondaires. De plus
$y = -t$ et $x = y - 2z - 3t = -2z - 4t$.
Donc $(x, y, z, t) = (-2z - 4t, -t, z, t) = z(-2, 0, 1, 0) + t(-4, -1, 0, 1)$, par suite

$$\ker(f) = \{u \in E / u_A = z(-2, 0, 1, 0) + t(-4, -1, 0, 1),\ z, t \in \mathbb{R}\}.$$

Soit h_1 le vecteur de E tel que $h_1 = (-2, 0, 1, 0)_A$ et h_2 le vecteur de E tel que $h_2 = (-4, -1, 0, 1)_A$, c'est-à-dire, $h_1 = -2u_1 + u_3$ et $h_2 = -4u_1 - u_2 + u_4$. On a $\{h_1, h_2\}$ est une base de $\ker(f)$.
On sait que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{sev}\langle f(u_1), f(u_2), f(u_3), f(u_4)\rangle$. De plus on a
$f(u_1)_B = (1, 0, 2)$; $f(u_2)_B = (-1, 1, -1)$; $f(u_3)_B = (2, 0, 4)$; $f(u_4)_B = (3, 1, 7)$.
On a

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_4 - 3L_1 \to L_4]{\substack{L_2 + L_1 \to L_2 \\ L_3 - 2L_1 \to L_3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_4 - L_2 \to L_4} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit g_1 et g_2 les vecteurs de F tels que $g_{1B} = (1, 0, 2)$ et $g_{2B} = (0, 1, 1)$, c'est-à-dire, $g_1 = v_1 + 2v_3$ et $g_2 = v_2 + v_3$. Alors $\{g_1, g_2\}$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

2. On a $\mathrm{mat}_B(f(u)) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-b+2c+3d \\ b+d \\ 2a-b+4c+7d \end{pmatrix}$

Donc $f(u) = (a-b+2c+3d)v_1 + (b+d)v_2 + (2a-b+4c+7d)v_3$.

3.(i) On a $w_1 = (2,1,0)_B, w_2 = (1,1,1)_B, w_3 = (3,2,0)_B$. De plus on a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - 2L_2 \to L_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $\mathrm{rg}(C) = \mathrm{card}(C) = \dim(F) = 3$, donc C est une base de F.

On a $\mathrm{mat}_B(C) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Cherchons $\mathrm{mat}_C(B) = \mathrm{mat}_B(C)^{-1}$. On a

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & + & 3z & = & a \\ x & + & y & + & 2z & = & b \\ & & y & & & = & c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x & + & 3z & = & a-c \\ x & + & 2z & = & b-c \\ & & y & = & c \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} 2a & - & 3b & + & c & = & x \\ & & & & c & = & y \\ -a & + & 2b & - & c & = & z \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Donc $\mathrm{mat}_C(B) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

(ii) On a le diagrame commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} (E,A) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & (F,B) \arrow[d, "\mathrm{id}_F"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowleft"] \\ & (F,C) \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire, $f = \mathrm{id}_F \circ f$. Donc

$$\begin{aligned} \mathrm{mat}_{A,C}(f) &= \mathrm{mat}_{B,C}(\mathrm{id}_F)\mathrm{mat}_{A,B}(f) \\ &= \mathrm{mat}_C(\mathrm{id}_F(B))\mathrm{mat}_{A,B}(f) \\ &= \mathrm{mat}_C(B)\mathrm{mat}_{A,B}(f). \end{aligned}$$

Par suite

$$\mathrm{mat}_{A,C}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 8 & 10 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \\ -3 & 4 & -6 & -8 \end{pmatrix}.$$