Analyse I

Abdelali Gabih
Université Chouaib Doukkali, Faculté des Scicens, El Jadida
Filère MIP et Informatique 2023-2024

Contents

1 Suites de nombres réelles

Définition 1.1. *On appelle une suite réelles ou une suite numérique, toute famille de nombres réels inexées par N. Càd, une application*

$$\begin{aligned} U: \ \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longrightarrow U(n) \end{aligned}$$

$U(0), U(1), \cdots$ *sont notées* $U_0, U_1, \cdots$*, et la suite est alors notée* $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Exemple 1.1. La suite $U_n = a + nr, \quad n \in \mathbb{N}$ pour a, r réels donnés, s'appelle suite arithmétique de raison r.

La suite $U_n = ar^n, \quad n \in \mathbb{N}$ pour a, r réels donnés, s'appelle suite géométique de raison r.

Définition 1.2. *On dit qu'une suite* $(a_n)_n$ *est convergente, si il existe un nombre réel* l *tel que*

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon.$$

Dans ce cas l *est unique, et on dit que* $(a_n)_n$ *converge vers* l*, ou* l *est la limite de* $(a_n)_n$*, et on écrit* $lim_{n\to+\infty} a_n = l$*. Lorsque* $(a_n)_n$ *n'est pas convergente, on dit qu'elle est divergente.*

Remarque 1.0.1. Toute suite $(a_n)_n$ convergente est bornée. Càd l'ensemble $\{a_n, \quad n \in \mathbb{N}\}$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$. En effet,

$$\varepsilon = 1, \ \exists N_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N_0 \Rightarrow |a_n - l| < 1.$$

Dons $|a_n| \leq \max\{|a_0|, |a_1|, \cdot |a_{N_0}|, 1 + |l|\}$

Proposition 1.1. *Soit* $(a_n)_n$ *une suite numérique qui converge vers* l*. Alors*

1) l *est unique.*

2) la suite $(|a_n|_n)$ *converge vers* $|l|$.

Proof. Preuve élémentaire. $\square$

Les opérations algébriques sur les limites des suites réelles sont compatibles avec l'addition, la soustaction, la multiplication et le quotion.

Exemple 1.2. 1) la suite $(\frac{1}{n})$ converge vers 0, d'après la propriété d'Archimède.

2 La suite $(n)_n$ est divergente, car non bornée.

3) La suit $(a_n)_n = ((-1)^n)$ est bornée, mais non convergente. Si $lim_{n\to+\infty}a_n = l$, alors $lim_{n\to+\infty}a_{n+1} = -lim_{n\to+\infty}a_n \Rightarrow l = 0$ et $lim_{n\to+\infty}|a_n| = 1$, ce qui implique que $l = 0$ et $|l| = 1$.

Remarque 1.0.2. La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente. Mais on peut rien dire sur la somme de deux suites divergente.

1.1 Suits extraites

Définition 1.3. *Une suite $(b_n)_n$ est appelée suite extraite, ou sous-suite d'une suite $(a_n)_n$, si il existe une application φ strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $b_n = a_{\varphi(n)}$.*

Exemple: Les suite a_{2n} et a_{2n+1} sont des sous-suite de $(a_n)_n$.

Remarque 1.1.1. Si $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une application strictement croissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi(n) \geq n$.

Proposition 1.2. *Soit $(b_n)_n$ une sous-suite de $(a_n)_n$. Alors*

$$lim_{n\to+\infty}a_n = l,\ lim_{n\to+\infty}b_n = l$$

Proof. Si $(a_n)_n \to l$, alors

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_0 \Rightarrow |a_n - l| < \varepsilon.$$

φ est strictement monotone, ce qui donne

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall\varphi(n) \geq \varphi N_0) \Rightarrow .|a_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon.$$

□

Remarque 1.1.2. $lim_{n\to+\infty}a_{\varphi(n)} = l \nRightarrow lim_{n\to+\infty}a_n = l$. Considérer la suite $((-1)^n)$, avec $\varphi(n) = 2n$.

Proposition 1.3. *Si $(a_n)_n$ est une suite telle que les deux sous-suits $(a_{2n})_n$ et $(a_{2n+1})_n$ convergent vers une même limite l, alors la suite $(a_n)_n$ converge vers l.*

Proof. $lim_{n\to+\infty}a_{2n} = l \Rightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_0 \Rightarrow |a_{2n} - l| < \varepsilon$.

$lim_{n\to+\infty}a_{2n+1} = l \Rightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_1 \Rightarrow |a_{2n+1} - l| < \varepsilon$. Pour $N_0 = \max(2N_1, 2N_2 + 1)$ on a $\forall n \geq N_0 \Rightarrow |a_{2n} - l| < \varepsilon, |a_{2n+1} - l| < \varepsilon$. Ce qui donne le résultat.

□

1.2 Suites tendant vers ∞

Définition 1.4. *On dit qu'une suite numérique $(a_n)_n$ tend vers$+\infty$ (resp. $-\infty$) et on note $lim_{n\to+\infty}a_n = +\infty$ (resp. $lim_{n\to+\infty}a_n = -\infty$), si*

$$\forall A > 0,\ \exists N_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N_0 \Rightarrow a_n > A \quad (\textit{resp.} a_n < -A)$$

Remarque 1.2.1. Il est clair que toute suite qui tend vers $+\infty$ n' est pas majorée, et une suite qui tend vers $-\infty$ n'est pas minorée.

Les assertions suivantes sont évidentes

Si $\alpha_n, \beta_n \to +\infty$ alors $(a_n + b_n), (a_n b_n) \to +\infty$.

Si $\alpha_n, \beta_n \to -\infty$ alors $(a_n + b_n) \to -\infty, (a_n b_n) \to +\infty$.

Si $\alpha_n \to x$ et $\beta_n \to +\infty$ (resp. $\to -\infty$), alors $(a_n + b_n) \to +\infty$ (resp. $\to -\infty$)

- $a_n b_n \to +\infty$ si $x > 0$ (resp. $-\infty$)
- $a_n b_n \to -\infty$ si $x < 0$ (resp. $+\infty$)
- Si $x = 0$ on peut rien conclure sur la convergence de $a_n b_n$

1.3 Suites monotones

Définition 1.5. *Soit $(a_n)_n$ une suite numérique.*

- *On dit que $(a_n)_n$ est croissante (resp. strictement croissante), si $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \leq a_{n+1}$ (resp. $a_n < a_{n+1}$).*
- *On dit que $(a_n)_n$ est décroissante (resp. strictement décroissante), si $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq a_{n+1}$ (resp. $a_n > a_{n+1}$).*

Dans ces cas on dit que la suite est monotone.

Proposition 1.4. *De toute suite numérique on peut extraire une suite monotone.*

Proof. Si l'ensemble $I = \{k \in \mathbb{N}, a_k \leq a_n, \forall n \geq k\}$ est infini, ils'écrit $I = \{k_1, k_2, \cdots\}$ avec $k_1 < k_2$, et dans ce cas la suite (a_{k_n}) vérifie $a_{k_n} \leq a_{k_{n+1}}$ donc décroissante.

Si I est fini, il existe un rang N tel que $\forall k > N, \exists n \geq k$ tel que $a_n < a_k$. Donc pour $k_1 = N$ $\exists k_2 > k_1$ tel que $a_{k_2} < a_{k_1}$, et par induction on peut constuie une sous suite décroissante. $\square$

Le théorème suivant est une conséquence du théorème de la borne supérieure.

Théorème 1.3.1. *Dans $\mathbb{R}$, toute suite croissante majorée est convergente, et toute suite décroissante minorée est convergente.*

Proof. L'ensemble $\{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ avec $(a_n)_n$ croissante majorée, est une parite non vide majorée, donc admet une borne supérieure l. D'après la caractérisation de la borne sup, on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, | l - \varepsilon < a_N \leq l,$$

or $(a_n)_n$ est croissante, donc $-\varepsilon < a_N - l \leq < a_n - l \leq 0 < \varepsilon \quad \forall n \geq N$. Donc on a convergence. □

1.4 Suites adjacentes

Définition 1.6. *On dit que $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ sont adjacents si*

1) $(x_n)_n$ *est croisante.*

2) $(y_n)_n$ *est décroisante.*

3) $lim_{n \to +\infty}(y_n - x_n) = 0$.

Proposition 1.5. *Soient $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ deux suites adjacentes, alors elles convergent vers la même limit l qui vérifient*

$$\forall n \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \leq l \leq y_n.$$

Proof. Posons $u_n = (y_n - x_n)$. cette suite est décroissante. De plus on a $lim_{n \to +\infty} u_n = 0 \Rightarrow u_n$ est positive $\Rightarrow x_n \leq y_n\ \forall n$. Donc $(x_n)_n$ est croissante majorée par y_0, ainsi elle converge vers l_1 tel que $l_1 \geq x_n\ \forall n$. De même $(y_n)_n$ est décroissante minorée par x_0, donc elle converge vers l_2 tel que $l_2 \leq y_n\ \forall n$. Or $y_n - x_n \to 0 = l_1 - l_2$. $l_1 = l_2$ et $x_n \leq l_1 = l_2 \leq y_n\ \forall n$. □

1.5 Suites de Cauchy, $\mathbb{R}$ est complet

Dans ce paragraphe nous allons établir une autre propriété importante vérifiée par $\mathbb{R}$ et non pas par $\mathbb{Q}$.

Définition 1.7. *Soit $(a_n)_n$ une suite numérique. On dit que $(a_n)_n$ est une suite de Cauchy si :*

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, n, m \geq N, \quad |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Proposition 1.6. • *Toute suite de Cauchy est bornée.*

- *Toute suite convergente est de Cauchy.*
- *Si uue suite de Cauchy $(a_n)_n$ admet une sous suite convergente, alrors $(a_n)_n$ est convergente.*

Proof. 1) on a pour $\varepsilon = 1$

$$\exists\, N_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n, m \geq N_0, \quad |a_n - a_m| < 1.$$

Donc $\forall n \geq N_0$ on a $|a_n| = |a_{N_0} + (a_n - a_{N_0})| \leq |a_{N_0}| + |(a_n - a_{N_0})| < |a_{N_0}| + 1$.

2) Si $a_n \to l$ alors $\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|a_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq N_0$, et par suit, on obtient $\forall n, m \geq N_0$ on a $|a_n - a_m| \leq |a_n - l| + |a_n + l| \leq \varepsilon$. Donc $(a_n)_n$ est de Cauchy.

□

On a vu que toue suite convergente est de Cauchy. Inversement,on a le théorème principal suivant, vérifié par l'ensemble $\mathbb{R}$

Théorème 1.5.1. ($\mathbb{R}$ est complet). *Dans $\mathbb{R}$ toute suite de Cauchy est convergente.*

Proof. Soit $(a_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. D'après la proposition (1.4), on peut extraire de $(a_n)_n$ un suite monotone $(a_{\varphi(n)})_n$. Puisque $(a_n)_n$ est bornée, ce qui implique que $(a_{\varphi(n)})_n$ est bornée, ainsi convergente. Donc on $(a_n)_n$ devient une suite de Cauchy qui a une sous suite convergente, et par la suite $(a_n)_n$ est convergente. □

Remarque 1.5.1. L'enesmble des nombres rationnes $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. En effet, la suite des rationnels $q_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$ est de Cauchy car elle converge dans $\mathbb{R}$, mais elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$, car sa limite n'est pas rationnelle.

1.6 Valeurs d'adhérence

Définition 1.8. *On dit que v est une valeur d'adhérence d'une suite $(a_n)_n$, si pour tout intervalle de la forme $V =]v - \varepsilon, v + \varepsilon[$, il exist une infinié d'entiers naturels $n_1, n_2, \cdots$ tels que les terms $a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots$ sont tous dans V. Ceci est équivalent à*

$$\forall \varepsilon, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n > N, \quad |a_n - v| < \varepsilon.$$

Remarque 1.6.1. Il faut faire attention au fait qu'une valeur d'adhérence v de $(a_n)_n$, ne signifie pas que tout intervalle $]v-\varepsilon, v+\varepsilon[$ contient une infinité d'éléments de l'ensemble $A = \{a_n, \alpha n \in \mathbb{N}\}$.

Exemple: $(a_n)_n$ définie par $a_{2n} = 1$ et $a_{2n+1} = \frac{1}{n}$. Pour cette suite on a :

> 0 est une valeur d'adhérence de $(a_n)_n$, et aussi $]-\varepsilon, \varepsilon[$ contient une infinité d'éléments de A (cela résulte de la propriéte d'Archimède).
>
> le réel 1 est une valeur d'adhérence de $(a_n)_n$, et pourtant l'intervalle $]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[=]1-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}[$ contient un seul élément de A.

La proposition suivante donne une caractérisation pratique des valeurs d'adhérence.

Proposition 1.7. *Un réel v est une valeur d'adhérence de $(a_n)_n$, si et seulement si, il existe une sous-suite de $(a_n)_n$ qui converge vers v.*

Proof. Soit v une valeur d'adhérence de $(a_n)_n$. Pour $\varepsilon = 1$, et pour $N = 1$, $\exists k_1 > 1$ tel que $|a_{k_1} - v| < 1$. Pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, et pour $N = k_1$, $\exists k_2 > k_1$ tel que $|a_{k_2} - v| < \frac{1}{2}$, ainsi de suite on construit par induction une suite strictement croissante d'inices $(k_n)_n$ telle que $|a_{k_n} - v| < \frac{1}{n}$ $\forall n$. Il est claire que $(k_n)_n$ est une sous suite de $(a_n)_n$ qui converge vers v.

Inversement, soit $(a_{\varphi(n)})_n$ une sous suite qui converge vers v. Donc $\forall\varepsilon > 0$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq k \Rightarrow |a_{\varphi(n)} - v| < \varepsilon$. Donc $\forall\varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $m = \varphi(\max(N, k)) > \max(N, k > k)$, et vérifie $|a_m - v| < \varepsilon$, ce qui donne que v est une valeur d'adhérence de $(a_n)_n$. □

Exemple 1.3. 1) La suite divergente $((-1)^n)$ admet deux valeurs d'adhérence 1 et -1.

2) Les suites (n) et $(-n)$ ne possèdent aucune valeur d'adhérence.

3) La suite $(a_n)_n$ définie par : $a_{2n} = \frac{1}{2n}$ et $a_{2n+1} = 2n+1$, admet 0 comme une seule valeur d'adhérence, mais n'est pas convergente.

Théorème 1.6.1. ***(Bolzano-Weirstass)****. Dans $\mathbb{R}$ toute suite bornée admet une valeur d'adhérence. Autrement dit, toute suite bornée admet une sous-suite convergente.*

Proof. Soit $(a_n)_n$ une suite bornée, et soit $(a_{\varphi(n)})_n$ une sous-suite monotone de $(a_n)_n$, alors $(a_{\varphi(n)})_n$ est convegente. □

Corollaire 1.9. *Si une suite $(a_n)_n$ admet un seule valeur d'adhérence v, alors $(a_n)_n$ converge vers v.*

Proof. Si $(a_n)_n$ ne converge pas, alors $\exists\varepsilon_0$, pour lequel on peut construire une sous suite $(a_{\varphi(n)})_n$ qui vérifie : $|a_{\varphi(n)} - v| \geq \varepsilon_0$ $\forall n$. Or $(a_{\varphi(n)})_n$ est bornée, donc d'aprés Bolzano-Weierstrass, il existe une sous suite $(a_{\varphi_{m_n}})_n$ de $(a_{\varphi(n)})_n$ qui converge vers un réel l, ce qui implique que l est une valeur d'adhérence de $(a_n)_n$, ainsi $l = v \Rightarrow |a_{\varphi_{m_n}} - l| \geq \varepsilon_0$ $\forall n$, qui est absurde avec la convergence de la sous suite $(a_{\varphi_{m_n}})_n$. □

1.7 Limite inférieure et limite supérieure

Pour certains type de suite, l'ensemble de ces valeurs d'adhérence est d'une grande importance dans l'étude de la convergence. Une suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence, donc pour toute suite bornée $(a_n)_n$, l'ensemble A de ces valeurs d'adhérence est non vide. En plus il est facile de voir que A est borné. Donc l'ensemble A des valeurs d'adhérence d'une suite bornée $(a_n)_n$ admet un borne inférieure que l'on note

$$\underline{lim}(a_n) \quad \text{ou}\alpha liminf,$$

la borne supérieure de A que l'on note

$$\overline{lim}(a_n) \quad \text{ou}\alpha limsup,$$

s'appelle limite supérieure.

Remarque 1.7.1. Il faut faire attention à ce que la limite supérieure d'une suite bornée $(a_n)_n$, n'est pas forcément égale à la borne supérieure de l'ensemble $\{a_n, \quad n \in \mathbb{N}\}$.

Exemple: $a_{2n} = 0$, $a_{2n+1} = 1$, $a_0 = 2$, $a_1 = -2$. Pour cette suite on a

$$liminf = 0, limsup = 1,$$

mais $\inf\{a_n, \quad n \in \mathbb{N}\} = -2$ et $\sup\{a_n, \quad n \in \mathbb{N}\} = 2$.

Proposition 1.8. *Une suite bornée est convergente, si et seulement si,*

$$\underline{lim}a_n = \overline{lim}a_n = lim_{n\to+\infty}a_n.$$

Proof. Si $(a_n)_n$ converge vers une limite l, alors l'ensemble des ses valeurs d'adhérence se réduit à $\{l\}$, et par suite on obtient $\underline{lim}a_n = \overline{lim}a_n = lim_{n\to+\infty}a_n$.

Inversement, si $\underline{lim}a_n = \overline{lim}a_n$, l'ensemble A des valeurs d'adhérence de $(a_n)_n = \{\underline{lim}a_n = \overline{lim}a_n\}$. Donc $(a_n)_n$ devient une suite bornée avec une seule valeur d'adhérence, et par suite elle est convergente. □

Dans ce qui suit, on présente d'autre propriétés de lim sup et de lim inf. Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites bornées. Alors on a :

1) $\forall\lambda > 0$ on a: $\overline{lim}(\lambda a_n) = \lambda\overline{lim}(a_n)$.
2) $\overline{lim}(a_n + b_n) \leq \overline{lim}(a_n) + \overline{lim}(b_n)$.
3) Si $(b_n)_n$ est convergente, alors $\overline{lim}(a_n + b_n) = \overline{lim}(a_n) + lim_{n\to+\infty}b_n$.
4) Si $b \to l > 0$, alors $\overline{lim}(a_nb_n) = \overline{lim}(a_n)lim_{n\to+\infty}b_n$.
5) $\underline{lim}(a_n) = -\overline{lim}(-a_n)$.

1.8 Comparaison des suites réelles

Définition 1.10. *Soient $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ deux suites. On dit que $(a_n)_n$ est équivalente à $(b_n)_n$ et on note $(a_n)_n \sim (b_n)_n$ si,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geq n_0 \quad |a_n - b_n| < \varepsilon |b_n|.$$

Autrement dit : $(a_n)_n \sim (b_n)_n \Leftrightarrow \exists (r_n)_n \to 1,\ a_n = r_n b_n \quad \forall n \geq n_0.$

Remarque 1.8.1. On voit que si $b_n \neq 0,\ \forall n \geq n_0$, alors $(a_n)_n \sim (b_n)_n \Leftrightarrow lim_{n\to+\infty}(\frac{a_n}{b_n}) = 1.$

Exemple 1.4. $a_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n} \to +\infty$, et on a $\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{2}{1+\sqrt{\frac{n+1}{n}}} \to 1$. Donc $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \sim 2\sqrt{n}$.

On vérifie facilement les assertions suivantes

1) La relation $(a_n)_n \sim (b_n)_n$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites numériques.

2) Si deux suites convergent vers la même limite $l \neq 0$, alors elle sont équivalentes.

3) Si $a_n \to l$, alors toute suite équivalente à $(a_n)_n$ converge vers l.

4) Si $a_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$), alors $\forall (b_n)_n \sim (a_n)_n$ on a $b_n \to +\infty$ (resp. $-\infty$).

5) Si $(a_n)_n \sim (b_n)_n$ et $(x_n)_n \sim (y_n)_n$, alors $(a_n)(x_n) \sim (b_n)(y_n)$.

   Si de plus $x_n \neq 0$ et $y_n \neq 0$ $\forall n \geq n_0$, alors $\frac{a_n}{x_n} \sim \frac{b_n}{y_n}$.

Exercice 1

Soit X une partie de $\mathbb{R}$ et M un majorant de X. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) $M = \sup X$

2) $\forall a \in \mathbb{R}$ tq $a < M,\ \exists x \in X$ tq $a < x \leq M$

Ind: M est le plus petit des majorants de X.

Application: Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}^+$ majorées.
soit $D = AB = \{z \in \mathbb{R} \ /\ \exists x \in A, \exists y \in B, \quad tq \quad z = xy\}$. Déterminer $\sup D$.

Exercice 2
Soient A et B deux parties bornées de $\mathbb{R}$

1) on suppose que $A \subset B$ Montrer que: $\sup A \leq \sup B$, et $\inf B \geq \inf A$.

2) Calculer en fonction de $\sup A$, $\sup B$, $\inf A$ et $\inf B$ les bornes suivantes:

$$\sup(A+B),\ \inf(A \cup B),\ \sup(A \cup B)$$

3) Supposons que $A \cap B \neq \varnothing$. Comparer les nombres suivants:

$$\inf(A \cap B),\ \sup(A \cap B),\ \inf(\sup A, \sup B),\ \text{et}\ \sup(\inf A, \inf B),$$

les inégalités peuvent−elles être strictes?

Exercice 3

1) Donner un exemple d' une famille $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{R}$ tel que l'intérieur de $\cap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \cap_{n \in \mathbb{N}} \dot{A}_n$

2) Donner un exemple d' une famille $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{R}$ tel que l'adhérence de $\cap_{n \in \mathbb{N}} B_n \neq \cap_{n \in \mathbb{N}} \bar{B}_n$.

Exercice 4

Soit $A = \{\frac{1}{n} \quad n \in \mathbb{N}^*\}$

1) Montrer que $\inf(A) = 0$

2) Déterminer $\overline{A}$

3) Est ce que A est un fermé de $\mathbb{R}$

Exercice 5 Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soit $(I_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'intervalles ouverts non vides de $\mathbb{R}$ tq α , $\beta \in A$ et $\alpha \neq \beta \quad \Longrightarrow \quad I_\alpha \cap I_\beta = \emptyset$

1) Montrer que A est dénombrable en construisant une application bijective de A à valeurs dans $\mathbb{Q}$. Indication: Utiliser la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

   Application: Soit θ ouvet de $\mathbb{R}$ et $a \in \theta$. On définit $A = \{x \in \mathbb{R}, \quad x \in C_{\mathbb{R}}^{\theta}\ \text{ et }\ x > a\}$ et $B = \{x \in \mathbb{R}, \quad x \in C_{\mathbb{R}}^{\theta}\ \text{ et }\ x < a\}$

2) On cherche à montrer l'existence d' un intervalle de taille maximale $]\lambda_a, \mu_a[\subset \theta$ tel que $a \in]\lambda_a, \mu_a[$.

   i) Montrer que A est minorée. Soit $\mu_a = \inf(A)$

ii) Montrer que $\mu_a \notin \theta$ (Raisonner par absurde en utilisant la carctérisation de la borne inf)

iii) Déduire que $[a, \mu_a[\in \theta$

iv) Montrer que B est majorée, soit $\lambda_a = \sup(A)$. En suivant les mêmes demarches montrer que $]\lambda_a, a] \in \theta$

v) Déduire qu il existe un un intervalle de taille maximale $]\lambda_a, \mu_a[\subset \theta$ tel que $a \in]\lambda_a, \mu_a[$.

3) Déduire que θ est réunion dénombrable d' une famile dénombrable d'intervalles ouverts.

   Indication: Utiliser la question 1) en considérant la famille des intervalles de taille maximale $I_a =]\lambda_a, \mu_a[$ associés a chaque a de θ.

Exercice 6

1) Montrer que $Fr(A)$ est un fermé.

2) Donner un exemple ou $Fr(A \cup B) \neq Fr(A) \cup Fr(B)$.

3) Montrer que $Fr(A \cup B) \subset Fr(A) \cup Fr(B)$

4) Montrer que si A et B sont de parties de $\mathbb{R}$ telles que $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ alors: $Fr(A \cup B) = Fr(A) \cup Fr(B)$.

Exercice 7
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et ϵ un réel > 0.

1) Montrer que $U_\epsilon = \{x \in \mathbb{R} \quad, \exists a \in A, |a - x| < \epsilon\}$ est un ouvert.

2) On cherche à montrer que tout fermé F de $\mathbb{R}$ est intersection d'une suite (famille indexée par $\mathbb{N}$) d'ouverts.

   Poser $U_n = \{x \in \mathbb{R} \quad, \exists a \in F, |a - x| < \frac{1}{2^n}\}$ et montrer que $F = \cap_{n \in \mathbb{N}} U_n$

Exercice 8
Soit A une partie de $\mathbb{R}$, on note par A' l'ensemble des points d'accumulation de A

1) Montrer que $A' \subset \bar{A}$ et que A' est un fermé.

2) Montrer que si A et B sont de parties de $\mathbb{R}$ alors $(A \cup B)' = A' \cup B'$.

3) Montrer que x_0 est un point d'accumulation de A ssi x_0 est la limite d'une suite réelle trictement monotone à valeurs dans A

Exercice 9
Montrer sans utiliser le logarithme que

1) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}$=1

2) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2}$=1

Exercice 10
Soit $u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{n}}}}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_{n+1} - u_n \leq \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$ et que $u_{n+1} - u_n \leq (\frac{\sqrt{2}}{2})^n$

2) en déduire que u_n est convergente.

Exercice 11
Soit (a_n) définie par $a_0 > 0$ et $a_{n+1} = \sqrt{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a $a_n \geq \sqrt{a_0}$, $a_n \geq \sqrt{a_0 + (n-1)\sqrt{a_0}}$, déduire la limite de (a_n).

2) Exprimer (a_{n+1}) en fonction de (a_n) et calculer $\lim(a_{n+1} - a_n)$

3) Trouver une valeur approximative de a_n pour n assez grand

Exercice 12

1) Soit (x_n) une suite qui converge vers un réel l, montrer que la suite $(y_n) = \frac{x_1 \cdots x_n}{n}$ est convergente.

2) Soit (x_n) une suite monotone. Montrer que si elle converge en moyenne alors elle convergente.

Exercice 13

Soient a et b deux nombres réels tels que $1 < a < b$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = a$ et $v_0 = b$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \sqrt{v_n}) \qquad v_{n+1} = \frac{1}{2}(v_n + \sqrt{u_n})$$

1) Montrer que pour tout n, on a $u_n > 1$ et $v_n > 1$ et $u_n < v_n^2$.

2) Montrer que la suite convergente.

3) Montrer que la suite (u_n) converge et que $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} v_n$. Cacluler cette limite.

Exercice 14

Soit E l´ensemble des suites (a_n) vérifiant la condition: $\forall n \in \mathbf{N}^*,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

1) Montrer que si $(a_n) \in E$ et $(b_n) \in E$, alors:

$$(a_1 = b_1, a_2 = b_2) \Longrightarrow (a_n) = (b_n).$$

2) Soit q_1 et q_2 (avec $q_1 < 0 < q_2$) les deux solutions de l'equation $x^2 = x + 1$.
Montrer que (q_1^n) et (q_2^n) sont deux éléments de E.

3) Montrer que : $(a_n) \in E \Longleftrightarrow \exists(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2,\ (a_n) = \alpha(q_1^n) + \beta(q_2^n)$

4) Soit $(a_n) \in E$ avec $a_1 = a_2 = 1$.

   a) Montrer que $a_n = \frac{(D)^n - (\frac{-1}{D})^n}{\sqrt{5}}$ où D est le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   b) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, le terme a_n est un entier naturel avec $pgcd(a_n, a_{n+1}) = 1$.

   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_{n+2} - 1$.

   d) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$.

   e) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+1}^2 = a_n a_{n+2} + (-1)^n$.

   f) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $a_n \geq n - 1$ et en déduire la limite de (a_n).

   g) Soit (b_n) la suire définie par : $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$. Montrer que $(b_{n+1} - b_n) \longrightarrow 0$.

   h) Montrer que (b_{2n}) et (b_{2n+1}) sont adjacentes, en déduire que (b_n) est convergente et calculer sa limite.

2 Continuité des fonctions

2.1 Limite

Doit D une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction numérique définie sur D. Soit $a \in \overline{D}$ et l un nombre réel.

Définition 2.1. (Limite en un point). *On dit que f tend vers l quand x tend vers a si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0,\ x \in D \textit{ et } |x-a| < r \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Le réel l lorsqu'il existe est unique, on l'appelle limite de f au point a, on le note $\lim_{x\to a} f(x)$.

Définition 2.2. (Limite à gauche, à droite en un point). *On suppose que $a \in \overline{D\cup]a,+\infty[}$ (resp. $a \in \overline{D\cup]-\infty,+0[}$) On dit que f tend vers l quand x tend à droite (resp. à gauche) vers a, et on écrit $\lim_{x\to a^+} f(x) = l$, (resp. $\lim_{x\to a^-} f(x) = l$) si :*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, 0 < x - a < r,\ \ (resp. -r < x-a < r) \Rightarrow |f(x) - l)| < \varepsilon.$$

L'étude des limites de fonctions peut se ramener à celle des limites de suites.

Proposition 2.1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, soit $a \in \overline{D}$ et l un nombre réel. ALors*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \textit{ pour tout suite } (a_n) \in D, a_n \to a,\ \textit{la suite } (f(a_n))\textit{converge vers } l.$$

Proof. $\Rightarrow$ si f tend vers l quand x tend vers a, aors

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, |x-a| < r \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Soit $x_n \to a \Rightarrow \exists N$, tel que $n \geq N \Rightarrow |a_n - a| < r \Rightarrow |f(a_n) - l| < \varepsilon|$.
$\Leftarrow$ Si $f(x) \nrightarrow l$ quand $x \to a$, alors $\exists\ \varepsilon > 0$, tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists x_n \in D$ pour lequel on a $|x_n - a| < 1/n$ et $|f(x_n) - l| \geq \varepsilon$. Absurde. □

Proposition 2.2. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$, et $g : G \to \mathbb{R}$, telles que $f(D) \subset G$. Soit $a \in \overline{D}$, $l \in \overline{G}$. Si l est la limite de f au point a, et L est la limite de g au point l, alors L est la limit de $g \circ f$ au point a.*

Démontration par les suites.

Remarque 2.1.1. Les limites des fonctions sont compatibles avec les opérations algébrique usuelles : somme, produit, quotient (quand est définie).

2.2 Comparaison locale des fonctions

La limite de certaines fonctions ayanat une structures compliquée peut être obtenue en comparant ce fonctions localement au voisinage d'un point.

Définition 2.3. *1) On dit que f est équivalente à g au voisinage d'un point a, et on écrit $f \sim_a g$, si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V_a \in \vartheta(a), \textit{ tel que } \forall x \in V_a \ |f(x) - g(x)| < \varepsilon |g(x)|.$$

2) On dit que f est dominée par g au voisinage de a, et on écrit $f = \theta(g)$, si

$$\exists k > 0, \exists V_a \in \vartheta(a), \textit{ tel que } \forall x \in V_a \ |f(x)| < k|g(x)|.$$

3) On dit que f est néglieable devant g au voisinage de a, et on écrit $f = o(g)$, si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V_a \in \vartheta(a), \textit{ tel que } \forall x \in V_a \ |f(x)| < \varepsilon |g(x)|.$$

Si g ne s'annule pas dans un voisinage de a, peut traduire les définitions précédentes comme suit

1) $f \sim_a g \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f}{g} = 1$.

2) $f = \theta(g) \Leftrightarrow \frac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.

3) $f = o(g) \Leftrightarrow \lim_{x \to a} \frac{f}{g} = 0$.

Remarque 2.2.1. La comparaison locale des fonctions reste valable au voisinage de $+, -\infty$.

Proposition 2.3. *Si f est équivalente à g au voisinage de a, et si $\lim_{x \to a} g(x) = l$, alors on a $\lim_{x \to a} f(x) = l$.*

2.3 Continuité en un point

Définition 2.4. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue en $a \in D$, si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. Càd,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0, \ x \in D \textit{ et } |x - a| < r \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

D'une facon analogue à la propositon (2.1), on caractérise la continuité des fonctions en un point par les suite. Aussi le cas pour caractériser la continuité de la composée.

Définition 2.5. *(***Prolongement par continuité***). Soit $f : D \to \mathbb{R}$, soit $a \in \overline{D}$. Si f admet une limite finie l au point a, alors l'application $\tilde{f}$ définie sur $D \cup \{a\}$ par :*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in D \\ l, & \text{si } x = a \end{cases}$$

est continue au point a (exercice simple). On l'appelle prolongement de f au point a.

Propriétés algébriques-continuité à droite et à gauche.

Soient f et g deux fonctions continues en un point a. Alors le fonctions $f+g$, fg sont continues au point a. Si de plus g ne s'annule pas dans un voisinage de a, alors le quotient $\frac{f}{g}$ est continue au poin a.

Définition 2.6. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction, et $a \in D$, tel que D contient un intervalle de la forme $[a, a+r[$ (resp. $]a-r, a]$). On dit que f est continue à doite (resp. à gauche) de a si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ (resp.$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$)*

Il n'est pas difficile de voir que la continuité au point a entraine la continuité à droite et à gauche de a, et inversement.

2.4 Continuité sur un ensemble

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue sur D, si f est continue en tout point de D. Lorsque $D = \mathbb{R}$, on peut exprimer la continuité en term topologique.

Proposition 2.4. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Alors les trois assertions suivantes sont équivalentes.*

1) f est contiue.

2) l'image réciproque par f de tout ouvert $\mathbb{R}$, est un ouvert de $\mathbb{R}$.

2) l'image réciproque par f de tout fermé $\mathbb{R}$, est un fermé de $\mathbb{R}$.

Corollaire 2.7. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout $c \in \mathbb{R}$, les deux ensembles*

$$U = \{x \in \mathbb{R}, f(x) < c\} \text{ et } V = \{x \in \mathbb{R}, f(x) < c\} \text{ sont des ouvers de } \mathbb{R}.$$

Aussi les deux ensemles

$$F = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \leq c\} \text{ et } G = \{x \in \mathbb{R}, f(x) \geq c\} \text{ sont des fermés de } \mathbb{R}$$

Exemple 2.1. 1) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a$ est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$, tous les $r > 0$ vérifient la définition de la continuité en un point x_0.

2) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ est continue sur $\mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$, on a $|x - x_0| < r = \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon$.

2.5 Continuité su les fermés bornés

Lorsqu'une fonction est défine sur un intervalle fermé borné, on a le résultat important suivant :

Théorème 2.5.1. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est bornée sur $[a,b]$ et les bornes de f sont atteints, càd, $\exists c, d \in [a,b]$ tels que*

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) = f(c), \quad \sup_{x\in[a,b]} f(x) = f(d)$$

Proof. Il suffit de démontre que $f([a,b])$ est un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}$, càd, compact de $\mathbb{R}$. Or K compact de $\mathbb{R}$ ssi tout suite de k admet une sous suite convergente. Soit donc (y_n) une suite de $f([a,b])$, alors $y_n = f(x_n)$ telle que (x_n) est une suite de $[a,b]$, et par suite il exist une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ de (x_n) convergente vers une limite $l \in [a,b]$, et puisque f est continue on obtient $\lim_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(l) \in f([a,b])$, ceci implique que $f([a,b])$ est un compact, et par suite borné. Comme conséquence $\sup f([a,b]) \in f([a,b])$ et $\inf f([a,b]) \in f([a,b])$. Ce qui démontre le théorème. □

2.6 Théorème des valeurs intérmediaires

Théorème 2.6.1. *L'image de tout intervalle par une fonction continue est un intervalle.*

Proof. un intervalle I de $\mathbb{R}$ vérifie : $\forall x, y \in I$ avec $x \neq y$, on a $]x,y[\subset$ Soit a, b deux points de $f(I)$, et soit c tel que $a < c < b$, Montrons que $c \in f(I))$, càd, $c = f(s_0)$ tel que $s_0 \in I$. On pose $a = f(\alpha)$ et $b = f(\beta)$ tel que $\alpha, \beta \in I$. Supposons que $\alpha < \beta$, et soit $J = \{x \in [\alpha, \beta],\ f(x) \leq c\}$. On a $\alpha \in J \Rightarrow J \neq$, de plus J est majoré par $c \Rightarrow J$ admet une borne sup que l'on note s_0. D'autre part, J est un ferme de $\mathbb{R}$ d'aprés le corollaire (2.7), et par suite $s_0 \in J \Rightarrow f(s_0) \leq c$. Or $s_0 \neq \beta$ (sinon aurai $f(\beta) \leq c < b = f(\beta)$). D'autre part $s_0 = \sup J \Rightarrow \forall x \in]s_0, \beta]$, $c < f(x)$, et par passage à la limite à droite de s_0, on obtient $c \leq \lim_{x\to s_0^+} f(x) = f(s_0)$. Donc $f(s_0) = c$, et par suite $c \in f(I)$. □

Corollaire 2.8. *L'image par une fonction continue d'un intervalle fermé borné $[a,b]$ est un intervale fermé borné $[\alpha, \beta]$, et pour tout valeur $v \in [\alpha, \beta]$, $\exists u \in [a,b]$ tel que $f(u) = v$.*

Proof. On applique le théorème $(2.6.1)$, ce qui donne que $f([a,b])$ est un intervalle, et par suite fermé borné de $\mathbb{R}$ de la forme $[\alpha, \beta]$. □

Corollaire 2.9. *Soit $[a,b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. si $f(a)f(b) \leq 0$, alors il exist $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = 0$.*

Proof. $f(a)f(b) \leq 0 \Rightarrow f(a) \leq 0 \leq f(b)$ ou $f(b) \leq 0 \leq f(a)$, donc il exist $c \in [a, b]$ tel que $0 = f(c)$. □

Remarque 2.6.1.
- Le corollaire (2.8) reste valable pour un intervalle qui n'est pas fermé borné.
- Le corollaire (2.9) admet plusieurs applications. On l'utilise souvent pour montrer qu'une fonction donée admet un zéro.

Exemple 2.2. Tout polynome P de degré impaire admet une racine réelle. En effet, on a $\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$ e $t \lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$, ceci implique $\exists a, b$ tels que $P(a)P(b) < 0$, et la continuité de P permet de conclure.

2.7 Continuité et monotonie

on rappelle la monotonie d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$.

- f est croissante ssi $\forall x, y \in D$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
- f est décroissante ssi $\forall x, y \in D$, $x \leq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
- f est monotone si elle est croissante ou décroissante.

Proposition 2.5. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application croissante. Alors*

1) f est bornée sur $[a, b]$

2) f admet en tout point de $[a, b]$ une limite à droite et une limite à gauche.

Remarque 2.7.1. Si f est croissante, alors $-f$ est décroissante, ce qui implique le même résultat pour les fonctions décroissantes.

Proof.
1) Soit $x \in [a, b]$, on a $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, ainsi f est bornée sur $[a, b]$.

2) Soit $c \in]a, b[$. On a $f([a, c[)$ est un ensemble non vide borné, et donc admet une borne sup que l'on note s. Montrons que $s = \lim_{x\to c^-} f(x)$. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists\ d \in [a, c[$ tel que $f(d) \leq s < f(d) + \varepsilon$, si $\forall d \in [a, c[\ f(d) + \varepsilon \leq s \Rightarrow f(d) \leq s - \varepsilon < s$, et ceci montre que s n'est plus la borne sup. Donc $\exists\ d \in [a, c[$ tel que $f(d) \leq s \leq f(d) + \varepsilon$. Or f est croissante , ce qui donne :
$$\forall x \in]d, c[, \quad \text{on a} \quad s - \varepsilon < f(d) \leq f(x) \leq s,$$
et par suite $s - \varepsilon \leq f(x) \leq s \leq s + \varepsilon\ \forall x \in]d, c[$, càd $|f(x) - s| < \varepsilon\ \ \forall x \in]d, c[$, ceci montre que $s = \lim_{x\to c^-} f(x)$.

□

Théorème 2.7.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$, une fonction continue. Si f est strictement monotone, alors f et bijective de I dans $f(I)$. De plus, l'application réciproque f^{-1} est elle aussi continue monotone (de même sens de variation que f).*

Remarque 2.7.2. Il est claire que tout fonction strictement monotone est injective, et que toute fonction contiue injective sur un intervalle est strictement monotone.

Si une application f est bijective continue d'un intervalle I dans un intervalle J, alors elle est strictement monotone, et d'après le théorème précédent l'application f^{-1} est continue.

Exemple 2.3. Pour tout entier naturel pair m, l'application $x \to x^m$ est continue, et elle est strictement monotone de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$,, et donc elle est bijective avec la réciproque $x \to x^{1/m}$ qui est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Pour m impair, on trouve que la réciproque $x \to x^{1/m}$ qui est continue sur $\mathbb{R}$.

2.8 Fonctions uniformément continues

Définition 2.10. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est uniformément continue sur D, si*

$$\forall \varepsilon,\ \exists r > 0,\ \forall x, y \in D,\ \ |x - y| < r \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Remarque 2.8.1. Il est claire que toue fonction uniformémenet continue est continue. La réciproque n'est pas toujours vraie. Exemple $x \to x^2$ est une fonction continue, mais n'est pas uniformément continue. Sinon pour $\varepsilon = 1,\ \exists r > 0$ tel que $|(x + \frac{r}{2})^2| = |\frac{r^2}{4} + rx| < 1, \forall x \in \mathbb{R}$, ce qui est impossible.

Une classe de fonctions très importante en pratique est la classe des fonctions Lipschitzienne, une classe qui appartient à la classe des fontions uniformémement continues.

Définition 2.11. *Soit K un réel strictement positive. Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est die lipschitzienne de rapport K si*

$$\forall x, y \in D,\ |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Dans le cas où $K \in]0, 1[$ on parle d'une fonction contractante.

Il claire que toute fonction lipschitzienne est uniformément continue. Soit $\varepsilon > 0$, on choisit $r = \frac{\varepsilon}{K}$ qui donne le résultat.

D'une facon similaire, on caractérise les fonctions uniformément continues par les suites.

Proposition 2.6. *Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ et uniformément continue si et seulement si, $\forall (x_n), (y_n) \in D$ vérifiant $|x_n - y_n| \to 0$ quand $n \to +\infty$, alors les deux suites $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ vérifient* $\lim_{n\to+\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0$.

Proof. Preuve élémentaire avec les techniques des suites. □

Une condition suffisante pour que une fonction soit uniformément continue est donnée par le théorème de Heine

Théorème 2.8.1. *Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Si une fonction f continue sur $[a, b]$, alors f est uniformément continue sur $[a, b]$.*

Proof. Si f n'est pas uniformément continue sur $[a, b]$, alors on peut construire deux suites (x_n) et (y_n) appartenant à $[a, b]$ telles que $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$. Or $[a, b]$ est un fermé borné, ce qui implique qu'il existe une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers une limite $l \in [a, b]$. D'autre part, on a $|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| \to 0$, et par suite $\lim y_{\varphi(n)} = l$. Puisque f est continue on a $f(x_{\varphi(n)}) \to f(l)$ et $f(y_{\varphi(n)}) \to l$, ceci montre que $|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \to 0$, ce qui est absurde avec le fait que $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$.

□

Exercice 1 Les assertions suivantes sont-elles vraies où fausses:

1) $x = o(\sqrt{x})(x \to 0^+)$, $x^2 = o(x^2 + 1)(x \to +\infty)$, $x^2 = o(x^3)(x \to +\infty)$, $\sin x = x + o(x)(x \to 0)$, $2 - x^2 + x^5 = 2\cos x + o(x^2)(x \to 0)$

2) $o(f) + o(f) = o(f)(x \to x_0)$, $\ln(1+x) - x = o(1)(x \to 0)$, $\ln(1+x) = x + o(x)(x \to 0)$, $\ln(1 + x) = x + o(x)(x \to +\infty)$

Exercice 2
Soient $f, g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions vérifiant quand $x \mapsto 0$

$$f(x) = x + \sin x + x^2 + o(x^2), g(x) = 1 - x + o(x)$$

1) Montrer que $f(x) + g(x) = 1 + \sin x + o(x)$

2) Montrer que $f(x)g(x) = x + \sin x - x\sin x + o(x^2)$

Exercice 3 Etablir les équivalentes usuelles suivantes au voisinage de 0:

1) $\sin x \sim x$, $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $\tan x \sim x$, $e^x - 1 \sim x$; $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

2) $\ln(\cos x) \sim -\frac{x^2}{2}$, $e^{\sin x} - 1 \sim x$, $\arccos(1 - x) \sim \sqrt{2x}(x \mapsto 0^+)$

Exercice 4 Calculer les limites suivantes:

a) $\lim_{x\mapsto 0} \frac{1-\cos x}{x(2-x)\tan(2x)}$, b)$\lim_{x\mapsto 0} \frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$,

c)$\lim_{x\mapsto 0} \frac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$, d)$\lim_{x\mapsto 0} \frac{a^x-b^x}{x}$ $(a, b > 0)$

e) $\lim_{x\mapsto \frac{1}{2}}(2x^2-3x+1)\tan(\pi x)$, f) $\lim_{x\mapsto \frac{\pi}{2}}(\tan x)(\tan(2x))$

Exercice 5

1) Soient I un intervalle et $h : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $h(x)$ ne prend que deux valeurs au plus -1 et 1, pour tout $x \in I$. Montrer que h es constante.

2) Soient f et g des fonctions continues sur I, ne s annulent pas et telles que, pour tout $x \in I$, on ait $|f(x)| = |g(x)|$. Montrer que $f = g$ ou $f = -g$. (on pourra considérer la fonction $\frac{f}{g}$)

Exercice 6
Soit $f : [a, b] \mapsto [a, b]$ une fonction continue.

1) En considérant la fonction $g(x)f(x) - x$, montrer que f a un point fixe, c est à dire qu' il exisste un point $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = c$.

2) Montrer que le point fixe est unique dans chacun des deux cas suivants:

   i) f est décroissante

   ii) f est lipschitzienne contractante

3) On suppose que f a la propriété suivante
pour tout $\alpha \in]0, 1[$, pour tout $x, y \in [a, b]$, on a:

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) < \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

Montrer que f a au plus deux points fixes. Indication: on utilise apres l avoir démontrer, le fait que, si $x < y < z$, il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que l on ait $z = \alpha x + (1-\alpha)y$, puis on raisonne par absurde.

Exercice 7
Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$|f(x) - f(y)| \leq e^{|x-y|} - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Montrer que f est uniformement continue.

3 Fonctions dérivables et développements limités

Dans pas mal de situations où on a un comportement dynamique, on a besoin de mesurer la vitesse de croissance d'une grandeur donnée. Par exemple, en cnématique si la variable t représente le temps, et $x(t)$ représente la distance parcourue par un mobile, alors le rapport $\frac{x(t_1)-x(t_0)}{t_1-t_0}$ indique la vitesse moyenne entre t_0 et t_1. Lorsque t_1 devient très proche de t_0, on aimerai bien approcher cette grandeur par une fonction affine. C'est cette fonction affine qui donne la vitesse instantanée au temps t_0 qui est indiquée par le compteur de la vitesse. Dans ce chapitre on traite que des fontions numériques définies sur un domaine de $\mathbb{R}$, et à valeurs réelles.

3.1 Notion de dérivée

Définition 3.1. (Dérivée en un point). *Soit f une fonction numérique définie au voisinage d'un point a. On dit que f est dérivable en a, si la limite de la fonction $x \longrightarrow \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ au point a existe. On appelle cette limite la dérivée de f au point a, et on la note $f^{'}(a)$.*

Remarque 3.1.1. Le fait qu'une fonction numérique f est dérivable en un point a, est équivalent à l'existence d'une fonction $\varepsilon(h)$ définie au voisinage de 0, telle que $\varepsilon \longrightarrow 0$ quand $h \longrightarrow 0$, et pour laquelle on a :

$$f(a+h) = f(a) + f^{'}(a)h + h\varepsilon(h), \quad \forall h \in V(0).$$

Il suffit de prendre $\varepsilon(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - f^{'}(a)$

Définition 3.2. (Dérivée en un point). *On considère une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[a, a+r[$ (resp. de la forme]a-r,a]). On dit que la fonction f es dérivable à droite (resp. à gauche) si*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad (\textit{resp.} \lim_{x\to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a})$$

existe. On appelle cette limit (quand elle existe) dérivée à droite (resp. à grauche) du point a, et on la note $f^{'}_d(a)$ (resp. $f^{'}_g(a)$).

Il est claire que f est dérivable au point a si et seulement si les deux dérivées à droite et à gauche de a existent.

Dérivabilité sur un ouvert

Définition 3.3. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. On dit que f $:\longrightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur U, si f est dérivable en tout point de U. Dans ce cas, la fonction*

$$\begin{array}{lll} f^{'} & U & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow f^{'}(x) \end{array}$$

s'appelle dérivée de f sur U.

En pratique si f est définie sur un intervalle I qui n'est pas ouvert, on procède comme suit : Si $I=[a,b]$, alors f est dérivabile sur $[a,b]$, si f est dérivable sur $]a,b[$, et si $f_g^{'}(b)$ et $f_d^{'}(a)$ existent. De même pour les autres structures de I.

Exemple 3.1. 1) $f(x)=cte \Rightarrow f^{'}(x)=0,\ \forall x.$

2) $f(x)=ax+b$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{a(x-x_0)}{x-x_0}=a$, et par la suite $f^{'}(x)=a$

3) $f(x)=\frac{1}{x}$, pour $x\neq 0$. On trouve $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x_0-x}{xx_0(x-x_0)}=-\frac{1}{xx_0}$, ainsi $f^{'}(x)=-\frac{1}{x^2}$.

3.2 Proporiétés des fonctions dérivables

Proposition 3.1. **(Dérivabilité et continuité)**. *Si f est dérivable au point a, alors f est continue au point a.*

Proof. Pour $\varepsilon=1$ on a $\exists r>0$ tel que $|x-a|<r \Rightarrow |\frac{f(x)-f(a)}{x-}-f^{'}(a)|<1 \Rightarrow |f(x)-f(a)|<(1+f^{'}(a))|x-a|\ \forall x\in]a-r,a+r[$, ce qui donne $f(x)\longrightarrow f(a)$ quand $x\longrightarrow a$. □

Proposition 3.2. **(Dérivée de la composée)**. *Soit f est définie sur un voisinage V_a de a, et soit g est définie sur un voisinage $V_{f(a)}$ de $f(a)$, avec $f(V_a)\subset V_{f(a)}$. Si f est dérivable au point a, et g est dérivable au point $f(a)$, alors la fonction $g\circ f$ est dérivable au point a, avec*

$$(g\circ f)^{'}(a)=g^{'}(f(a))f^{'}(a).$$

Dérivée de la somme et du produit et de l'inverse.

On montre facilement que si f et g sont deux fonctions dérivables en un point a alors

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f + \beta g$ est dérivable au point a, et $(\alpha f + \beta g)^{'}(a) = \alpha f^{'}(a) + \beta g^{'}(a)$.

2) la fonction fg est dérivable au point a, avec $(fg)^{'}(a) = f^{'}(a)g(a) + g^{'}(a)f(a)$.

3) Si de plus $f(a) \neq 0$. La fonction $\frac{1}{f}$ est dérivable au point a, avec $(\frac{1}{f})^{'}(a) = \frac{-f^{'}(a)}{(f(a))^2}$. Rappelons ici que $f(a) \neq 0$ et f continue, ce qui implique que f ne s'annule pas dans un voisinage de a (exercice). Si on pose $g(x) = \frac{1}{x}$, on obtient

$$(\frac{1}{f})^{'}(a) = (g \circ f)^{'}(a) = g^{'}(f(a))f^{'}(a) = \frac{-f^{'}(a)}{(f(a))^2}.$$

Dérivée de la réciproque

Soit $f : U \longrightarrow J$ bijective continue. Si f est dérivable en un point $a \in I$ telle que $f^{'}(a) \neq 0$. Alors a fonction réciproque f^{-1} est dérivable au point $f(a)$, avec

$$(f^{-1})^{'}(f(a)) = \frac{1}{f^{'}(a)}.$$

En effet: soit $b = f(a)$, on a $\forall y \neq b$ et $y \in J$

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{f^{-1}(y) - a}{y - f(a)} = S(f^{-1}(y)), \quad \text{avec } S(x) = \frac{x - a}{f(x) - f(a)}.$$

Or f est dérivable au point a, et f^{-1} est continue au point b, ce qui implique que

$$S(f^{-1}(y)) \longrightarrow S(f^{-1}(b)) = \frac{1}{f'(a)}$$

.

3.3 Théorème des accroissements finis et ses applications

On commence par un résultat très utile qui donne un premier moyen pour spécifier les extremas d'une fonction continue sur un intervalle fermé borné.

Théorème 3.3.1. *Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f atteint son minimum ou son maximum sur $]a, b[$ en un point $c \in]a, b[$, alors $f^{'}(c) = 0$.*

Proof. Si f pésente un minimum en un point $c \in]a, b[$, on obtient

$$\forall x < c \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} < 0 \Rightarrow f_g^{'}(c) \leq 0$$

et de même on trouve que $f_d^{'}(c) \geq 0$, ce qui donne $f^{'}(c) = 0$. □

Remarque 3.3.1. les points où une fonction atteint ses extremas se touvent dans la partie

$$\{a,b\} \cup \{x \in]a,b[, \quad f^{'}(x) = 0\}$$

.

Théorème 3.3.2. *(Théorème de Rolle) Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue avec* $f(a) = f(b)$*. Si* f *est dérivable sur* $]a,b[$*, alors il existe* $\in]a,b[$ *tel que* $f^{'}(c) = 0$*.*

Proof. Par continuité, la fonction atteint son minimum et son maximum en des points de $[a,b]$.

Si le min où le max sont atteint uniquement sur $\{a,b\}$, alors on aurait:

$$f(x) = f(a) = f(b) = \text{cte} \quad \forall x \in]a,b[\Rightarrow f^{'} = 0 \quad \text{sur }]a,b[.$$

Si f atteint ses extermas à l'intérieur $]a,b[$, alors d'après théorème $(3.3.1)$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{'}(c) = 0$.

□

Un outil puissant en analyse est le théorème des accroissements finis, qui est une généralisation du théorème de Rolle.

Théorème 3.3.3. (Théorème des accroissements finis). *Soit* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue et dérivable sur* $]a,b[$*. Alors il existe* $c \in]a,b[$ *tel que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f^{'}(c).$$

Proof. La fonction g définie par $g(x) = f(x) - x\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ vérifie clairement les conditions du théorème de Rolle, ainsi il existe $c \in]a,b[$ tel que $g^{'}(c) = 0 \Rightarrow f^{'}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Dans la suite on expose les diférentes applications du théorème des accroissements finis.

- Quand est ce que $f^{'}$ est nulle?

  Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$. on a

  $$f^{'} = 0 \quad \text{sur} \quad \Leftrightarrow f = cte.$$

  En effet, Soit $f^{'} = 0$ sur I, et soient $x, y \in I$ avec $x < y$, alors f est dérivable sur $]x,y[\Rightarrow f(y) - f(x) = f^{'}(c)(y - x)$. Or $f^{'}(c) = 0 \Rightarrow f(x) = f(y)$ et ceci $\forall x, y \in I$.

- Sens de variation et signe de dérivée.

  Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable. Comme conséquence du théorème des accroissements finis, on a :

  1) f est croissante $\Leftrightarrow f^{'}(x) \geq 0 \quad \forall x \in I.$

  2) f est décroissante $\Leftrightarrow f^{'}(x) \leq 0 \quad \forall x \in I.$

  3) $f^{'}(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ est strictement croissante.

  4) $f^{'}(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ est strictement décroissante.

- Les inversions locales

  Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un ouvert U. On rappelle que f est dite de classe C^1 sur U, si sa fonction dérivée $f^{'}$ est continue sur U

  Théorème 3.3.4. *Soit f une fonction de classe C^1 au voisinage d'un point a, et telle que $f^{'}(a) \neq 0$. Alors, il existe $r > 0$ tel que $f\diagup]a-r;a+r[:]a-r;a+r[\longrightarrow \mathbb{R}$ (la restriction de f sur $]a-r;a+r[$) soit bijective, avec une réciproque f^{-1} de classe C^1 sur $f(]a-r;a+r[)$.*

  Proof. $f^{'}$ est continue et $f^{'}(a) \neq 0$ impliquent que $\exists r > 0$ tel que $f^{'}$ a le même signe que $f^{'}(a)$ sur $]a-r,a+r[= J$, donc f est stictement monotone sur $]a-r,a+r[$. Ceci montre que f est bijective de J dasns $f(J)$ avec $(f^{-1})^{'}(y) = \frac{1}{f^{'}(f^{-1}(y))} \Rightarrow (f^{-1})^{'}(f(a)) = \frac{1}{f^{'}(a)}$, donc on obtient que $(f^{-1})^{'} = i \circ f^{'} \circ f^{-1}$ avec $i(t) = \frac{1}{t}$. Les foncions i, $f^{'}$ et f^{-1} étant continues sur leurs domaines de définitions, et pars suite la fonction $(f^{-1})^{'}$ est continue, càd, f^{-1} est de classe C^1 sur $f(]a-r;a+r[)$. $\square$

3.4 Dérivée d'ordre supérieur

Soit donnée une fonction f, dérivable sur un voisinage d'un point a. Si la fonction $f^{'}$ est dérivable au point a, on dit que f est deux fois dérivable au point a, et la dérivée de $f^{'}$ au point a s'appelle la dérivée seconde de f au point a, et on la note $f^{"}(a)$. Par récurrenc, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivée d'ordre n de f au point a comme suit

$$f^{(0)}(a) = f(a), \cdots, f^{(n+1)} = (f^{(n)})^{'}(a)$$

- Si $f^{(n)}(x)$ existe sur tout un ouvert V, on dit que f est n-fois dérivable sur V, et la fonction $x :\longrightarrow f^{(n)}(x)$ est applelée dérivée $n$ème de f.

- Si la dérivée $n$ème $f^{(n)}$ est continue sur V, on dit que f est de classe C^n sur V.
- Si les fonctions $f^{(n)}$ existent $\forall n \in \mathbb{N}$, on dit que f est de classe C^∞ sur V.

On a les propriétés suivantes : Si f et g sont deux fonctions n-fois dérivables, alors on a

- $(\alpha f + \beta f)^{(n)}(a) = \alpha f^{(n)}(a) + \beta g^{(n)}(a)$
- La fonction fg est n-fois dérivable au point a, et vérifie la formule de Leibniz suivante :

$$(fg)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n)}(a) g^{(n-k)}(a).$$

- Si les fonctions $\frac{f}{g}$ et $g \circ f$ sont bien définies, alors elles sont dérivables n-fois au point a.
- Si f est bijctive et de classe C^n, et si $f^{'}$ ne s'annule pas, alors f^{-1} est de classe C^n.

Exemple 3.2. La dérivée $n$ème de la fonction $x \longrightarrow e^x$ est elle même, donc de classe c^∞ sur $\mathbb{R}$, avec $e^{(n)}(0) = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

3.5 Les formules de Taylor

Proposition 3.3. (Formule de Taylor Young). *Soit* $n\mathbb{N}^*$*, soit* $f : V_a \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction définie au voisinage de* a*, telle que* $f^{(n)}(a)$ *existe. Alors il existe une fonction* $h \longrightarrow \varepsilon(h)$ *défine au voisinage de* 0*, avec* $\lim_{h_to0} \varepsilon(h) = 0$*, telle que pour* $|h|$ *assez petit on a :*

$$f(a+h) = f(a) + hf^{'}(a) + \frac{h^2}{2!} f^{(2)} + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + h^n \varepsilon(h).$$

Proof. Cela revient à montrer que la fonction

$$h \longrightarrow \varepsilon(h) = \frac{1}{h^n}\Big[f(a+h) - f(a) - hf^{'}(a) - \frac{h^2}{2!} f^{(2)} - \cdots - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a)\Big]$$

tend vers 0 quand $h \to 0$. Récurrence. □

Remarque 3.5.1. La formule de Taylor-Young est une généralisation de l'existence de la dérivée en un point.

Le théorème suivant est une généralisation du théorème des accroissements finis.

Théorème 3.5.1. (Formule de Taylor Lagrange). *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^n sur $[a,b]$, et $(n+1)$-fois dérivable sr $]a,b[$. Alors il existe un point $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b)-f(a)=(b-a)f^{'}(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f^{"}(a)+\cdots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c).$$

Proof. Soit

$$K=f(b)-f(a)-(b-a)f^{'}(a)-\frac{(b-a)^2}{2!}f^{"}(a)-\cdots+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

On définit la fonction $x \longrightarrow g(x)$ par

$$g(x)=f(b)-f(x)-(b-x)f^{'}(x)-\frac{(b-x)^2}{2!}f^{"}(x)-\cdots+\frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(a)-K\frac{(b-x)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}},$$

cette fonction satisfait les conditions du théorème de Rolle, et par suit il existe $c \in]a,b[$ pour lequel on a $g^{'}(c)=0$. Or on a

$$g^{'}(x)=\frac{(b-x)^n}{n!}\Big[\frac{K(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}-f^{(n+1)}(x)\Big].$$

Donc

$$g^{'}(c)=0 \Rightarrow K=\frac{(b-a)^{(n+1)}f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

. □

Remarque 3.5.2.
- Cas $n=0$ donne la formule du théorème des accroissements finis.
- $c \in]a,b[\Rightarrow c=\theta a+(1-\theta)b \quad \theta \in]0,1[$.
- Si $a=0$, on applique la formule de Taylor-Lagrange sur $[0,x]$ $\forall x \in]0,b[$ pour obtenir la formule suivante :

  $$f(x)-f(0)=xf^{'}(0)+\frac{x^2}{2!}f^{"}(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(tx) \quad t \in]0,1[.$$

  C'est la formule de Mac-Laurin.

Exemple 3.3. La formule de Mac-Laurin permet de comparer la croissance d'une fonction donnée à celle des polynomes. Pour la fonctin exponentielle on a :

Proposition 3.4. *1)* $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ *et* $\lim_{x\to+\infty}|x|^n e^x=0$.

1) $\forall n,m \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x))^m}{x^n}=0$ *et* $\lim_{x\to 0}|x|^n(\ln(x))^m=0$.

Appiquer la formule de Mac-Laurin pour la fonction $x \longrightarrow e^x$.

3.6 Développements limités

L'objective principale de ce cours est de pouvoir approximer une fonction ayant une structure compliquée par un polynôme, et ceci localement dans un voisinage d'un point donné. Dans la suite on introduit le polynôme appelé développement de Taylor qui va jouer par la suite un rôle très imprtant dans l'étude locale d'une fonction donnée.

Définition 3.4. (Développement de Taylor). *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point a telle que $f^{(n)}(a)$ existe. On appelle développement de Taylor de f au point a, la fonction polynomiale $x \longrightarrow T(x)$ donnée par*

$$T(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a).$$

On remarque que la formule de Taylor-Young exprime le fait que ce polynôme approxime f au voisinage de a.

Exemple 3.4. 1) Le développement de Taylor de $x \longrightarrow e^x$ au point 0 est le polynôme :

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

2) Le développement de Taylor de $x \longrightarrow \sin x$ au point 0 est le polynôme :

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

3) Le développement de Taylor de $x \longrightarrow \cos x$ au point 0 est le polynôme :

$$P(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

) Le développement de Taylor de $x \longrightarrow \frac{1}{1-x}$ au point 0 est le polynôme :

$$P(x) = 1 + xx^2 + \cdots + x^n.$$

Définition 3.5. (Développements limités). *Soit f une fonction définie au voisinage d'un point a (sauf peut être en a). Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un développement limité (polynomial) d'ordre n au point a, si il existe un polynôme P de degré inférieur ou égal à n, et un voisinage V_a de a tels que :*

$$f(x) = (x) + o((x-a)^n)$$

ou d'une facon équivalente, tels que

$$f(x) = P(x) + (x-a)^n \varepsilon(x), \quad \forall x \in V_a \setminus \{a\}$$

avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to a$.

- *Le polynôme P est dit partie régulière du développement.*
- *Le terme $(x-a)^n\varepsilon(x)$ est dit le reste du développement.*
- *Si $P(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots a_n(x-a)^n$, alors le terme $a_k(x-a)^k$ est dit le terme d'ordre k du dévéloppement.*

Remarque 3.6.1. 1) Si f admet un développement d'ordre n, alors f admet un DL d'ordre m pour tout $m \leq n$ (évident).

2) Si $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n$, alors $\forall k \in \mathbb{N}$ f admet un DL d'ordre k. Si $k \geq n$ DL(f)=f. Si $k < n$ $Dl(f) = a_0 + a_1x + \cdots a_kx^k$.

3) Si f admet un Dl au point a, alors f admet une limtie au point a, et donc prolongeable par continuité au point a par $\lim_{x\to a} f(x) = a_0$

4) Si f admet un DL d'ordre $n \geq 1$, alors f est prolongeable en une fonction dérivable au point a. En effet, au voisinage de a on a $f(x) = a_0a_1(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$. Soit $\tilde{f}$ le prolongement de f, on a alors

$$\lim_{x\to a} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}(a_1 + \varepsilon(x)) = a_1.$$

Proposition 3.5. (Unicité du développement limité). *Si f admet un développement limité en un point, ce développement est unique*

Proof. Soit $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n + (a-x)^n\varepsilon(x) = b_0 + b_1(x-a) + \cdots + b_n(x-a)^n + (a-x)^n o(x)$. On a donc

$$\begin{aligned} b_0 - a_0 &= \lim_{x\to a}(a-x)^n(\varepsilon(x) - o(x)) = 0 \\ b_1 - a_1 &= \lim_{x\to a}(a-x)^{n-1}(\varepsilon(x) - o(x)) = 0 \\ &\vdots \\ b_k - a_k &= \lim_{x\to a}(a-x)^{n-k}(\varepsilon(x) - o(x)) = 0 \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.6. *Soit f une fonction qui admet un DL au point* 0. *Alors on a :*

1) Si f est pair, alors tous les coefficients des termes impairs du DL sont nuls.

1) Si f est impair, alors tous les coefficients des termes pairs du DL sont nuls.

3.7 Détermination pratique du développement limité

La première chose à examiner quand on cherche un DL d'une fonction f, est l'existence de sa dérivée $n$ème au point a, dans ce cas on obtient le DL de f à partir de la formule de Taylor-Young. En effet, on aurait

$$f(x) = f(a) + (x-a)f^{'}(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f^{(2)} + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + (x-a)^n\varepsilon(x).$$

si $f^{(n)}(a)$ existe mais difficile à déterminer, il y a d'autre techniques pour déterminer le DL d'ordre n de f.

Proposition 3.6. (Opérations sur les DLs).

Soient f et g deux fonctions admettant des DLs d'ordre n en un point a. Alors

1) *La fonction $f+g$ admet un DL avec $DL(f+g) = DL(f) + DLg$.*

2) *$DL(fg) = DL(f)DL(g)$ et on ne garde que les terms d'ordre $\leq n$.*

3) *$DL(\frac{f}{g})$ = division euclidienne de$\frac{DL(f)}{DL(g)}$.*

4) *Si f admet un DL au point a et g admet un DL au point $b = \lim_{x\to a} f(x)$, alors $DL(g\circ F)$ existe et s'obtient en composant DL(g) par DL(f), et on ne garde que les terms d'ordre $\leq n$.*

Exemple 3.5. On sait qu'au voisinage de 0, on a $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3)$, ceci implique que

- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + o(x^3)$.
- on a $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x}\circ h(x)$ avec $h(x) = x^2 \Rightarrow \frac{1}{1-x^2} = 1+h(x)+h(x)^2+o(x^3) = 1+x^2+o(x^3)$
- $\frac{1}{1+x^2} = 1 - h(x) + h(x)^2 + o(x^3) = 1 - x^2 + o(x^3)$.

Autre technique pratique.

Proposition 3.7. *Soit $f : V_a \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable (sauf peut être en a), telle que*

$$f^{'}(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n o((x-a)^n).$$

Alors f admet un DL d'ordre $n+1$ donné par :

$$f(x) = \lim_{x\to a} f(x) + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}o((x-a)^{n+1}).$$

Exemple 3.6. $(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})$, avec la proposition précédente on obtient

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + o(x^{2n+1}).$$

Exercice 1

1) Déterminer la dérivée nième de la fonction $f(x) = x^n(1-x)^n$

2) Calculer le coefficient de x^n dans $f^n(x)$

3) Retrouver ce coefficient directement et en déduire la valeur de

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \cdots + (C_n^0)^n$$

4) Déterminer la dérivée nième de la fonction $f(x) = x^{n-1}\ln(1+x)$ pour $x > -1$ en précisant $f^n(0)$

Exercice 2 Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction deux fois dérivable.

1) Déterminer $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0) - xf'(0)}{x^2}$
(On peut appliquer la definition de la dérivée seconde au point 0).

2) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x}, \text{ si } x \neq 0 \\ f'(0), \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

   i) Montrer que g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et calculer $g'(x),\ \forall x \in \mathbf{R}$.

   ii) Montrer que g est de classe C^1.

Exercice 3

1) Montrer que quelque soit $\alpha, \beta > 0$ la fonction $h \mapsto \phi(h) = \frac{\alpha}{h} + \beta h$ atteint son minimum sur $\mathbf{R}^{*+}$ en un point x_0 qu il faut déterminer. Calculer ce minimum.

2) Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction deux fois dérivable. On suppose que f et $f"$ sont bornées et non nulles, et on pose $M = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$ et $N = \sup_{x \in \mathbf{R}} |f"(x)|$

   i) Montrer que pour tout $x \in \mathbf{R}$ et pour tout $h > 0$, on a:

$$|f'(x)| \leq \frac{2M}{h} + \frac{N}{2} h$$

   (Ind: On peut appliquer la formule de Taylor-Lagrange sur $[x, x+h]$).

ii) En déduire que: $\forall x \in \mathbf{R},\ |f'(x)| \leq 2\sqrt{MN}$.

iii) Montrer que f est lipschitzienne. (Ind: Appliquer le théorème des accroissements finis)

Exercice 4 Soient $a, \alpha \in \mathbf{R}$ avec $\alpha > 0$ et $f[a-\alpha, a+\alpha] \to \mathbf{R}$ une fonction.

1) On suppose que f est de classe C^2 et que $f"(a) \neq 0$

i) Montrer qu´il exise $\beta > 0$ avec $\beta \leq \alpha$ tel que la restricition de f' à $[a-\beta, a+\beta]$ soit injective

ii) Montrer que $\forall h \in \mathbf{R}$ tel que $|h| \leq \beta$, $\exists\, \theta(h) \in]0,1[$ uniquement déterminé verifiant

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta(h)h)$$

iii) Montrer que l´on a $\lim_{h\to 0} \theta(h) = \frac{1}{2}$

2) On suppose maintenant que f est de classe C^3 et que $f"(a) = 0$ avec $f^{(3)}(a) \neq 0$. On suppose aussi qu il existe γ, $0 < \gamma \leq \alpha$ tel que $f"$ ne s´annule pas dans $[a-\gamma, a+\gamma]$ sauf au point a.

i) Montrer que f' est injective sur $[a, a+\gamma]$ et $[a-\gamma, a]$

ii) Montrer que $\forall h \in \mathbf{R}$ tel que $|h| \leq \gamma$, $\exists\, \theta(h) \in]0,1[$ uniquement déterminé verifiant

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta(h)h)$$

iii) En écrivant la forumle Taylor à f et à f' à un ordre adèquat montrer que l´on a $\lim_{h\to 0} \theta(h) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Exercice 5
Donner le développement limité en 0 à l´ordre 2 de la fonction $x \mapsto f(x) = e^{-1}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ et calculer

$$\lim_{n\to\infty} n^2[e^{-1}(1+\frac{1}{n})^n - 1] + \frac{n}{2}$$

Exercice 6 Donner le développement limité en 0 à l´ordre n.

1. $f(x) = (cosx)^{cosx}$ $n = 5$
2. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}}{cos^3 x}$ $n = 4$
3. $f(x) = (\frac{1+e^x}{2})^5$ $n = 2$
4. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $n = 3$