Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences - EL JADIDA
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2023/24
Niveau : Algèbre 2 (MIP & IA)

Série 3

Exercice 1. Soit f une application de E dans F. Parmis les applications ci-dessous, trouver celles qui sont linéaires. Puis, pour ces dernières, déterminer le noyau et l'image et préciser si elles sont injectives, surjectives ou bijectives.
(1) $E = F = \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$.
(2) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ donné. $E = F = \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.
(3) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x - y, x + y, xy)$.
(4) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$, $f(x, y, z) = (x - y, x - y + z)$.
(5) $E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (2x, x + y, y)$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(P) = (P(-1), P(0), P(1))$. Montrer que f est un isomorphisme.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = (X + 1)P' + P$.
1. Montrer que f est linéaire.
2. Montrer que $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par f.
3. Montrer que l'application g induite par f à $\mathbb{R}_2[X]$ est un automorphisme et calculer g^{-1}.

Exercice 4. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :
1. $\ker(f^n) \subseteq \ker(f^{n+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{n+1}) \subseteq \mathrm{Im}(f^n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. $\ker(f) = \ker(f^2) \Longleftrightarrow \ker(f) \bigcap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$

Exercice 5.
1. Montrer qu'il existe une application linéaire unique f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1, 0, 0) = (0, 1), f(1, 1, 0) = (1, 0), f(1, 1, 1) = (1, 1).$$

2. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $f(P) = (P(0), P'(1), P''(2))$.
1. Montrer que f est linéaire et déterminer $\ker(f)$.
2. En déduire que f est un isomorphisme et déterminer son isomorphisme réciproque.

Exercice 7. Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f^2 - 3f + \mathrm{Id}_E = 0$.
1. Montrer que f est un automorphisme et déterminer son automorphisme réciproque en fonction de f et Id_E.
2. Existe-t-il $u \in E$ tel que $f(u) = 2u$?

Exercice 8. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que $f^2 = f$. Montrer que $E = \ker(f) \bigoplus \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 9. On considère les fonctions réelles f et g définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \mathrm{e}^x,\ g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par f et g.

$$E = \mathrm{sev}\langle f, g\rangle.$$

1. Déterminer une base et la dimension de E.
2. Soit $\psi : E \longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $\psi(h) = (h(0), h(1))$. Montrer que ψ est bijective.
3. Soit $\varphi : E \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'application linéaire définie par $\varphi(h) = h'$ la dérivée de h.
a) Montrer que E est stable par φ.
b) Soit $\phi : E \longrightarrow E$ l'application induite par φ à E. Calculer ϕ^2. En déduire que ϕ est un automorphisme.