Université Chouaïb Doukkali
Faculté des Sciences

MOHAMMED MOUÇOUF

Cours d'Algèbre 2

Année 2023-2024

Chapitre 3

Les applications linéaires

Dans tous ce chapitre et dans les suivants, K désignera un corps commutatif quelconque (le plus souvent $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

3.1 Généralités

Définition 1. *Soient E et F deux K-ev et $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f linéaire (ou K-linéaire) si pour tous vecteurs $u, v \in E$ et tous scalaires $\alpha, \beta \in K$, on a :*

$$f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v).$$

Vocabulaire et notations.

• *L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$.*

• *Une application linéaire de E dans E est appelée endomorphisme de E.*

• *L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.*

• *Une application linéaire bijective de E dans F est appelée isomorphisme de E dans F.*

• *Un endomorphisme bijectif de E est appelé automorphisme de E.*

• *L'ensemble des automorphismes de E est noté $Gl(E)$ ou $Aut(E)$.*

• *Une application linéaire de E dans K est appelée forme linéaire sur E.*

Remarque 2. *Dans la définition des applications linéaires, on voit clairement que les espaces vectoriels de départ et d'arrivée E et F doivent nécessairement être définis sur le même corps K.*

Remarque 3. *Soient E et F deux K-ev et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors $f(0_E) = 0_F$. En effet, $f(0_E) = f(0_K.0_E) = 0_K.f(0_E) = 0_F$.*

Proposition 4. *Soient E et F deux K-ev et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors f est linéaire si et seulement si pour tous vecteurs $u, v \in E$ et tout scalaire $\alpha \in K$, on a :*
1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$;
2. $f(\alpha u) = \alpha f(u)$.

Démonstration.
Supposons que f est linéaire. Alors pour avoir 1. il suffit de prendre $\alpha = \beta = 1$ dans l'égalité $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$, et pour avoir 2. il suffit de prendre $\beta = 0$. Réciproquement, Supposons qu'on a 1. et 2.. Soit $u, v \in E$ et $\alpha, \beta \in K$. On a alors d'aprés 1. on a $f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + f(\beta v)$ et d'après 2. on a $\alpha f(u) + f(\beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v)$. D'où le résulta. □

Proposition 5. *Soient E et F deux K-ev et $f : E \longrightarrow F$ une application. Alors f est linéaire si et seulement si pour tous vecteurs $u, v \in E$ et tout scalaire $\alpha \in K$, on a :*

$$f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v).$$

Démonstration. Facile. □

Proposition 6. *Soient E et F deux K-ev et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ dans K et pour tous vecteurs $u_1, \ldots, u_n$ dans E, on a :*

$$f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_n f(u_n).$$

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur n. L'affirmation est vrai pour $n = 1$. Supposons lre résultat est vraie pour n. Posons $w = \alpha_1 u_1 + \cdots +$

$\alpha_n u_n$, alors $f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u_{n+1}) = f(w + \alpha_{n+1} u_{n+1}) = f(w) + \alpha_{n+1} f(u_{n+1})$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $f(w) = \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_n f(u_n)$. Par suite, $f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n + \alpha_{n+1} u_{n+1}) = \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_n f(u_n) + \alpha_{n+1} f(u_{n+1})$. Donc le résultat est vraie pour $n+1$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. □

Exemple 1. *L'application*

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ u &\longmapsto 0_F \end{aligned}$$

est linéaire. f est dite l'application nulle.

Exemple 2. *L'application*

$$\begin{aligned} id_E : E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto u \end{aligned}$$

est un endomorphisme. id_E est dite l'application identité de E.

Exemple 3. *Soit H un sev de E. L'application*

$$\begin{aligned} f : H &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto u \end{aligned}$$

est linéaire et injective. f est dite l'injection canonique.

Exemple 4. *Soit H un sev de E et soit*

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow F \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

une application linéaire.
L'application

$$\begin{aligned} f_{|H} : H &\longrightarrow F \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

est linéaire. $f_{|H}$ est dite la restriction de f à H.

Exemple 5. *Soit H un sev de E et soit G un sev de F. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*
Si $f(H) \subseteq G$, alors

$$\begin{aligned} f : H &\longrightarrow G \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

est aussi une application linéaire appelée l'application induite par f de H dans G.
***Cas particulier** : Soit $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme de E et soit H un sev de E stable par f, c'est-à-dire, $f(H) \subseteq H$. L'application*

$$\begin{aligned} f : H &\longrightarrow H \\ u &\longmapsto f(u) \end{aligned}$$

est un endomorphisme de H appelé l'endomorphisme induit par f sur H.

Exemple 6. *Soit $\lambda \in K$ un scalaire fixé. L'application*

$$\begin{aligned} h_\lambda : E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto \lambda u \end{aligned}$$

est un endomorphisme. h_λ est dite l'homothétie de rapport λ.

Exemple 7. *Soientt H et G deux sev de E tels quie $E = H \bigoplus G$.*
L'application

$$\begin{aligned} p_1 : E &\longrightarrow H \\ u = u_1 + u_2 &\longmapsto u_1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} p_2 : E &\longrightarrow G \\ u = u_1 + u_2 &\longmapsto u_2 \end{aligned}$$

$u_1 \in H$ et $u_2 \in G$, sont des applications linéaires. p_1 est appelée la projection de E sur H parallèlement à G. p_2 est la projection de E sur G parallèlement à H

Exemple 8. *Soit $K[X]$ le K-ev des polynômes. L'application*

$$\begin{aligned} D : K[X] &\longrightarrow K[X] \\ P &\longmapsto P' \end{aligned}$$

est un endomorphisme. D est dite l'application dérivée (ou de différentiation).

Voici quelques exemples d'applications non linéaires :

Exemple 9. *Soit w un vecteur non nul fixé de E et soit*

$$\begin{aligned} t_w : E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto u + w \end{aligned}$$

la translation de vecteur w. On a $t_w(0_E) = w$ donc $t_w(0_E) \neq 0_E$ et par suite t_w n'est pas linéaire.

Exemple 10. *L'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

n'est pas linéaire. En effet, on a $f(2(4,3)) = f(8,6) = 48$ et $2f(4,3) = 2 \times 12 = 24$. Donc $f(2(4,3)) \neq 2f(4,3)$.

Exemple 11. *L'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x + y + 1 \end{aligned}$$

n'est pas linéaire. En effet, on a $f(0,0) = 1 \neq 0$.

3.2 Image directe et Image réciproque d'un sous-espace vectoriel

Théorème 7. *Soient E et F deux K-ev et $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire.*
1. Si H est un sev de E, son image directe $f(H) = \{f(u)/u \in H\}$ est un sev de F.

2. Si T est un sev de F, son image réciproque $f^{-1}(T) = \{u \in E / f(u) \in T\}$ est un sev de E.

Démonstration.
1. On a $0_E \in H$, donc $f(0_E) = 0_F \in f(H)$ et par suite $f(H)$ est non vide. Soient $u, v \in f(H)$ et $\alpha \in K$. Soient $u', v' \in H$ tels que $f(u') = u$ et $f(v') = v$. On a $\alpha u + v = \alpha f(u') + f(v') = f(\alpha u' + v')$. Comme H est un sev de E, alors $\alpha u' + v' \in H$ et donc $\alpha u + v \in f(H)$. Par suite $f(H)$ est un sev de F.
2. On a $f(0_E) = 0_F \in T$, donc $0_E \in f^{-1}(T)$ et par suite $f^{-1}(T)$ est non vide. Soient $u, v \in f^{-1}(T)$ et $\alpha \in K$. On a $f(u) \in T$ et $f(v) \in T$. Comme T est un sev de F, alors $\alpha f(u) + f(v) \in T$, donc $f(\alpha u + v) \in T$, c'est-à-dire, $\alpha u + v \in f^{-1}(T)$. Par suite $f^{-1}(T)$ est un sev de E. □

En particulier on a :
- $f(E)$ est un sev de F.
- $f^{-1}(0_F)$ est un sev de E.

Définition 8.
- *Le sev $f(E)$ est appelé l'image de f et noté $Im(f)$.*
- *Le sev $f^{-1}(0_F)$ est appelé noyau de f et noté $ker(f)$.*

Remarque 9. *L'image réciproque $f^{-1}(A)$ de A est définie même si l'application f n'est pas bijective. Par suite, il ne faut pas confondre l'image réciproque $f^{-1}(A)$ de A et l'image de A par f^{-1}, car peut être f^{-1} n'existe pas. Cependant, si f^{-1} existe, c'est-à-dire si f est bijective, alors on peut faire la confusion sans problème.*

Remarque 10.
- $v \in f(H) \Longleftrightarrow \exists u \in H : f(u) = v$.
- $v \in Im(f) \Longleftrightarrow \exists u \in E : f(u) = v$.
- $u \in f^{-1}(T) \Longleftrightarrow \exists v \in T : f(u) = v \Longleftrightarrow f(u) \in T$.
- $u \in ker(f) \Longleftrightarrow f(u) = 0_F$.

Exercice 1. *Soit E un K-ev et soit F un ensemble quelconque muni d'une loi interne $\star$ et d'une loi externe $\triangle$. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application vérifiant*

$$\forall \alpha, \beta \in K, \forall u, v \in E : f(\alpha u + \beta v) = (\alpha \triangle f(u)) \star (\beta \triangle f(v)).$$

1. Montrer que $(Im(f), \star, \triangle)$ *est un* K*-ev.*

2. En déduire que si f *est surjective alors* $(F, \star, \triangle)$ *est un* K*-ev.*

Conclusion : *Si* f *est surjective, la structure d'espace vectoriel de* E *peut être transférer à* F *via* f*.*

Proposition 11. *Soient* E *et* F *deux* K*-ev et* $f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire. Alors :*

1. f *est injective si et seulement si* $ker(f) = \{0_E\}$*.*

2. f *est surjective si et seulement si* $Im(f) = F$*.*

Démonstration.

1. Supposons que f est injective. On sait que $0_E \in \ker(f)$ puisque $\ker(f)$ est un sev de E. Soit $u \in \ker(f)$, alors $f(u) = 0_F$, donc $f(u) = f(0_E)$ et comme f est injective, on a $u = 0_E$. Par suite $\ker(f) = \{0_E\}$. Réciproquement, Supposons que $\ker(f) = \{0_E\}$. Soient $u, v \in E$ tels que $f(u) = f(v)$. On a $f(u) - f(v) = 0_F$, donc $f(u-v) \in \ker(f)$ d'où $f(u-v) = 0_F$, alors $u - v = 0_E$, c'est-à-dire, $u = v$. ce qui veut dire que f est injective.

2. On a

$$\begin{aligned} f \quad \text{est surjective} \quad &\Longleftrightarrow \quad f(E) = F \\ &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) = F. \end{aligned}$$

$\square$

Exemple 12. *Soit* K *un corps de caractéristique* 0 *et soit* $D : K[X] \longrightarrow K[X]$ *l'application dérivation. On a* $ker(D) = K$ *et* $Im(D) = K[X]$*. Par suite* D *est surjective mais n'est pas injective.*

Exemple 13. *Soit* $\alpha \in K, \alpha \neq 0$*, et soit* $h_\alpha : E \longrightarrow E$ *l'homothétie de rapport* α*. On a* $ker(h_\alpha) = \{0_E\}$ *et* $Im(h_\alpha) = E$*. Par suite* h_α *est à la fois surjective et injective et donc* h_α *est un automorphisme de* E*.*

Exemple 14. *Soit* $E = F \oplus H$ *et soit* p *la projection de* E *sur* F *parallèlement à* H*. On a* $ker(p) = H$ *et* $Im(p) = F$*.*

Proposition 12. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire injective. Alors on a :*
1. Si A est une famille finie libre de E alors la famille $f(A)$ est libre dans F.
2. Si A est une famille quelconque libre de E alors la famille $f(A)$ est libre dans F.

Démonstration.
1. Supposons que $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ est une famille libre.
Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. On a

$$\begin{aligned} \alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_n f(u_n) = 0_F &\Longrightarrow f(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = 0_F \\ &\Longrightarrow \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0_E \quad \text{car} \quad f \quad \text{est injective} \\ &\Longrightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0 \quad \text{car} \quad A \quad \text{est libre} \end{aligned}$$

Par suite A est une famille libre.
2. On sait que par définition A est une famille libre veut dire que toute partie finie de A est libre. L'assertion découle donc imméditement de 1.. □

Proposition 13. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et soit A une partie de E. Alors on a :*
1. A est une famille liée de $E \Longrightarrow f(A)$ est une famille liée de F.
2. $f(A)$ est une famille libre de $F \Longrightarrow A$ est une famille libre de E.

Démonstration.
1. Si A est liée alors il existe une famille finie d'éléments $u_1, \dots, u_n$ de A et $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$ non tous nuls tels que $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n = 0_E$. Puisque $f(\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_n f(u_n)$, on a $\alpha_1 f(u_1) + \dots + \alpha_n f(u_n) = 0_F$ et donc $f(A)$ est une famille liée de F.
2. N'est autre que la contraposée de 1.. □

Proposition 14. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et soit H un sev de E. Si A est une famille génératrice de H alors la famille $f(A)$ engendre $f(H)$.*

Démonstration. On veut montrer que

$$H = \text{sev}\langle A \rangle \Longrightarrow f(H) = \text{sev}\langle f(A) \rangle.$$

On a $A \subseteq H$, donc $f(A) \subseteq f(H)$, alors $\text{sev}\langle f(A)\rangle \subseteq f(H)$.
Inversement, Soit $u \in f(H)$. Alors $u = f(v)$ avec $v \in H$. Comme H est engendré par A, il existe une famille finie d'éléments $u_1, \ldots, u_n \in A$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tels que que $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. Donc $u = f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_n f(u_n)$, ce qui veut dire que u est une combinaison linéaire finie d'éléments de $f(A)$. Par suite $u \in \text{sev}\langle f(A)\rangle$ et donc $f(H) \subseteq \text{sev}\langle f(A)\rangle$. En conclusion, $f(H) = \text{sev}\langle f(A)\rangle$. □

Corollaire 15. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et soit A une famille génératrice de E. Alors Im(f) = sev$\langle f(A)\rangle$.*

Démonstration. D'après la proposition 14 on a $f(E) = \text{sev}\langle f(A)\rangle$. Or $f(E) = \text{Im}(f)$, donc $\text{Im}(f) = \text{sev}\langle f(A)\rangle$. □

Corollaire 16. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire surjective et soit A une famille génératrice de E. Alors $f(A)$ est une famille génératrice de F.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le corollaire 15 et d'utliser le fait que f est surjective signifie que $\text{Im}(f) = F$. □

Théorème 17. *Soient $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire et B une base de E. Alors On a les équivalences suivantes :*
1. f est injective $\Longleftrightarrow$ $f(B)$ est libre dans F.
2. f est surjective $\Longleftrightarrow$ $f(B)$ engendre F.
3. f est bijective $\Longleftrightarrow$ $f(B)$ est une base de F.

Démonstration.
1. Si f est injective alors, d'après la proposition 12, $f(B)$ est libre dans F puisque B l'est dans E. Réciproquement, supposons que $f(B)$ est libre dans F. Soit $u \in E$ tel que $f(u) = 0$. Puisque B est une base de E, il existe une famille finie d'éléments $u_1, \ldots, u_n \in B$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tels que que $u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$. Donc

$$f(u) = f(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_n f(u_n),$$

alors

$$\alpha_1 f(u_1) + \cdots + \alpha_n f(u_n) = 0.$$

Comme $f(B) = \{f(u_1), \dots, f(u_n)\}$ est libre, on a $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ et donc $u = 0$. Par suite f est injective.
2. Si f est surjective alors, d'après le corollaire 16, $f(B)$ engendre F puisque B engendre E. Réciproquement, supposons que $f(B)$ est une famille génératrice de F. Alors $F = \text{sev}\langle f(B)\rangle$ et puisque $\text{Im}(f) = \text{sev}\langle f(B)\rangle$, alors $F = \text{Im}(f)$ et donc f est surjective.
3. Découle de 1. et 2.. □

3.3 Structure des endomorphismes

Proposition 18. *Soient E et F deux K-ev. Alors $\mathscr{L}(E,F)$ muni des lois : $\forall f, g \in \mathscr{L}(E,F), \forall u \in E, \forall \alpha \in K$*

$$(f+g)(u) = f(u) + g(u)$$

et

$$(\alpha f)(u) = \alpha f(u)$$

est un K-ev.

Démonstration. Soit $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble de toutes les application de E dans F. Il est clair que $\mathscr{L}(E,F)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{F}(E,F)$. Il suffit donc de montrer que $\mathscr{L}(E,F)$ est un sev de $\mathcal{F}(E,F)$.
On a $\mathscr{L}(E,F) \neq \varnothing$ car il contient l'application nulle.
Soit $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\alpha \in K$. Montrons que $h = \alpha f + g \in \mathscr{L}(E,F)$. Pour cela soit $u, v \in E$ et $\lambda \in K$. Alors

$$\begin{aligned}
h(\lambda u + v) &= (\alpha f)(\lambda u + v) + g(\lambda u + v) \\
&= \alpha f(\lambda u + v) + g(\lambda u + v) \\
&= \alpha(\lambda f(u) + f(v)) + \lambda g(u) + g(v) \\
&= \alpha\lambda f(u) + \alpha f(v) + \lambda g(u) + g(v) \\
&= \lambda(\alpha f + g)(u) + (\alpha f + g)(v) \\
&= \lambda h(u) + h(v).
\end{aligned}$$

Donc $h : E \longrightarrow F$ est une application linéaire. On a montré alors que $\forall\lambda \in K$, $\forall f, g \in \mathscr{L}(E,F) : \alpha f + g \in \mathscr{L}(E,F)$. Ceci montre bien que $\mathscr{L}(E,F)$ est un sev de $\mathcal{F}(E,F)$ et donc un espace vectoriel. □

Proposition 19. *Soient E, F et G des K-ev. Alors*
1. Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.
2. Pour tout $f, g \in \mathscr{L}(E,F)$, $h, k \in \mathscr{L}(F,G)$ et $\forall\alpha \in K$:
(i) $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$.
(ii) $(h+k) \circ f = h \circ f + k \circ f$.
(iii) $h \circ (\alpha f) = (\alpha h) \circ f = \alpha(h \circ f)$.
3. Si f est bijective alors $f^{-1} \in \mathscr{L}(F,E)$, c'est-à-dire f^{-1} est linéaire.

Démonstration.
1. Soit $\alpha \in K$ et $u, v \in E$. On a

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(\alpha u + v) &= g \circ f(\alpha u + v) \\
&= g(f(\alpha u + v)) \\
&= g(\alpha f(u) + f(v)) \quad \text{car} \quad f \quad \text{est linéaire} \\
&= \alpha g(f(u)) + g(f(v)) \quad \text{car} \quad g \quad \text{est linéaire} \\
&= \alpha(g \circ f)(u) + (g \circ f)(v).
\end{aligned}$$

Donc $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$.
2. Soient $u \in E$ et $\alpha \in K$.
(i) On a

$$\begin{aligned}
(h \circ (f+g))(u) &= h \circ (f+g)(u) \\
&= h((f+g)(u)) \\
&= h(f(u) + g(u)) \\
&= h(f(u)) + h(g(u)) \quad \text{car} \quad h \quad \text{est linéaire} \\
&= h \circ f(u) + h \circ g(u) \\
&= (h \circ f + h \circ g)(u).
\end{aligned}$$

Donc $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$.
(ii) Cette égalité est vraie même pour des applications qui ne sont pas linéaires, et

sa preuve est évidente.
(iii) On a

$$\begin{aligned}(h \circ (\alpha f))(u) &= h((\alpha f)(u)) \\ &= h(\alpha f(u)) \\ &= \alpha h(f(u)) \quad \text{car} \quad h \quad \text{est linéaire} \\ &= (\alpha h) \circ f(u) \\ &= (\alpha h \circ f)(u) \\ &= \alpha (h \circ f)(u).\end{aligned}$$

Donc $h \circ (\alpha f) = (\alpha h) \circ f = \alpha (h \circ f)$.
3. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$ une application linéaire bijective. Soient $\alpha \in K$ et $u, v \in F$. Posons $w = f^{-1}(\alpha u + v)$, $f^{-1}(u) = u'$ et $f^{-1}(v) = v'$. On a alors

$$f(w) = \alpha u + v = \alpha f(u') + f(v') = f(\alpha u' + v'),$$

comme f est injective, on a $w = \alpha u' + v' = \alpha f^{-1}(u) + f^{-1}(v)$. Par suite $f^{-1}(\alpha u + v) = \alpha f^{-1}(u) + f^{-1}(v)$. En conclusion f^{-1} est une application linéaire. □

Proposition 20. *Soit E un K-ev. On muni l'ensemble $\mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E des deux opérations :*

$$(f, g) \longrightarrow f + g$$

et

$$(f, g) \longrightarrow f \circ g$$

Alors $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau unitaire (en général n'est pas commutatif).

Démonstration. On vérifie tous les points de la définition d'un anneau unitaire.
1. Il est évident que $(\mathscr{L}(E), +)$ est un groupe abélien et que son élément neutre est l'endomorphisme nul

$$\begin{aligned}\theta_E : E &\longrightarrow E \\ u &\longmapsto 0_E\end{aligned}$$

2. On sait que $\forall f, g, h \in \mathscr{L}(E)$, on a $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$. Donc la loi $\circ$ est associative.
3. Les points 2. (i) et 2. (ii) de la proposition 19 montre bien que la loi $\circ$ est distributive par rapport à la loi $+$.
4. La loi $\circ$ possède un élément neutre, qui est l'application identité.
Ansi $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ est un anneau unitaire. $\square$

D'après ce qui précède on a le résultat suivant

Proposition 21. *Soit E un K-ev. On muni l'ensemble $\mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E des opérations :*

$$(f, g) \longrightarrow f + g$$

$$(\alpha, f) \longrightarrow \alpha.f = \alpha f$$

$$(f, g) \longrightarrow f \circ g$$

On a
- $(\mathscr{L}(E), +, .)$ *est un K-ev ;*
- $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ *est un anneau unitaire ;*
- $h \circ (\alpha f) = (\alpha h) \circ f = \alpha(h \circ f)$ *pour tous $h, f \in \mathscr{L}(E)$ et pour tout $\alpha \in K$.*

On dit que $(\mathscr{L}(E), +, ., \circ)$ est une algèbre unitaire sur K (ou une K-algèbre unitaire).

Rappelons la définition plus générale suivante

Définition 22. *Soit A un ensemble. On dit que A est une algèbre sur K (ou une K-algèbre) si A est muni de deux lois de composition internes, noté habituellement $+$ et $\times$, et d'une lois externe . sur K telle que :*
1. $(A, +, .)$ *est un K-ev ;*
2. $(A, +, \times)$ *est un anneau ;*
3. $\alpha.(a \times b) = (\alpha.a) \times b = a \times (\alpha.b)$ *pour tous $a, b \in A$ et tout $\alpha \in K$.*
On dit aussi dans ce cas que $(A, +, ., \times)$ est une algèbre sur K (ou une K-algèbre). De plus :

• *Si* $(A, +, \times)$ *est unitaire, i.e la loi* $\times$ *admet un élément neutre, on dit que* $(A, +, ., \times)$ *est une algèbre unitaire.*
• *Si la loi* $\times$ *est commutative, on dit que* $(A, +, ., \times)$ *est une algèbre commutative.*

Proposition 23. *Soit* E *un* K*-ev et soit* $Gl(E)$ *l'ensemble des automorphismes de* E*. Alors* $(Gl(E), \circ)$ *est un groupe (en général n'est pas commutatif), appelé groupe linéaire de* E*.*

Démonstration. D'après la proposition 20, $(Gl(E), \circ)$ est un monoïde et d'après le point 3. de la proposition 19, tout élément de $Gl(E)$ est inversible. En conclusion, $(Gl(E), \circ)$ est un groupe. $\square$

3.4 Applications linéaires en dimension finie

On sait que l'injectivité ou la surjectivité d'une application a une infulence sur les cardinaux de ses ensembles de départ et d'arrivée. La proposition suivante montre que dans le cas d'une application linéaire, l'injectivité ou la surjectivité de cette application a aussi une infulence sur les dimensions de ses ensembles de départ et d'arrivée.

Proposition 24. *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels de dimensions finies et soit* $f : E \longrightarrow F$ *une application linéaire. Alors :*
1. f *est injective* $\Longrightarrow \dim(E) \leq \dim(F)$.
2. f *est surjective* $\Longrightarrow \dim(F) \leq \dim(E)$.
3. f *est bijective* $\Longrightarrow \dim(E) = \dim(F)$.

Démonstration.
1. Soit B une base de E. f est injective entraine que $f(B)$ est une famille libre de F et par suite $\mathrm{card}(f(B)) \leq \dim(F)$, or $\mathrm{card}(f(B)) = \mathrm{card}(B)$ car f est injective. Donc $\dim(E) \leq \dim(F)$.
2. Soit B une base de E. f est surjective entraine que $f(B)$ est une famille génératrice de F et par suite $\mathrm{card}(f(B)) \geq \dim(F)$. Puisque $\mathrm{card}(B) \geq \mathrm{card}(f(B))$, alors $\dim(E) \geq \dim(F)$.
2. Découle de 1. et 2.. $\square$

Remarque 25. *Soient C et D deux ensembles quelconques et $f : C \longrightarrow D$ une application. Soit A une partie quelconque de C. Alors on a :*
1. card$(f(A)) \leq$ card(A).
2. Si f est injective alors card$(f(A)) =$ card(A).

Remarque 26. *Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Les contraposées des propositions* 1., 2. *et* 3. *de la proposition 24 s'écrivent :*
1. $\dim(E) > \dim(F) \Longrightarrow f$ *n'est pas injective.*
2. $\dim(E) < \dim(F) \Longrightarrow f$ *n'est pas surjective.*
3. $\dim(E) \neq \dim(F) \Longrightarrow f$ *n'est pas bijective.*

Dans le cas particulier où E et F ont même dimension, on obtient le résultat suivant :

Proposition 27. *Soient E et F deux K-ev de dimensions finies et soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. On suppose que* $\dim(E) = \dim(F)$. *Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*
1. f est injective.
2. f est surjective.
3. f est bijective.

Démonstration.
1. $\Longleftrightarrow$ 3. Supposons que f est injective et soit B une base de E. Alors $f(B)$ est une famille libre de F qui engendre $\mathrm{Im}(f)$. Ce qui signifie que $f(B)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$, donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{card}(f(B))$, or $\mathrm{card}(f(B)) = \mathrm{card}(B)$ car f est injective. Donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$, alors $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)$. Comme $\mathrm{Im}(f)$ est un sev de F, on a $\mathrm{Im}(f) = F$, c'est-à-dire, f est surjective et par suite bijective.
2. $\Longleftrightarrow$ 3. Supposons que f est surjective et soit B une base de E. Alors $f(B)$ est une famille génératrice de F, donc $\dim(F) \leq \mathrm{card}(f(B))$. Comme $\mathrm{card}(f(B)) \leq \mathrm{card}(B) = \dim(E) = \dim(F)$, alors $\mathrm{card}(f(B)) \leq \dim(F)$, il s'ensuit que $\mathrm{card}(f(B)) = \dim(F)$. Par suite $f(B)$ est une base de F et donc d'après le théorème 17, on a f est bijective. $\square$

Remarque 28. *La proposition 27 ne reste pas valable on dimension infinie. Par exemple, si K est un corps de caractéristique 0, l'endomorphisme dérivé $D : K[X] \longrightarrow K[X]$ est surjectifmais n'est pas injectif.*

On a le corollaire suivant :

Corollaire 29. *Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E. Alors*

$$f \text{ est injective} \Longleftrightarrow f \text{ est surjective} \Longleftrightarrow f \text{ est bijective}$$

Définition 30. *On appelle rang d'une application linéaire f la dimension de $Im(f)$. On écrit $rg(f) = \dim(Im(f))$.*

Remarque. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Si F est de dimension finie alors $rg(f)$ est aussi fini. Si E est dimension finie, alors on a aussi $rg(f)$ est fini, car si B est une famille génératrice finie de E alors $f(B)$ est une famille génératrice finie de $Im(f)$.*

Théorème 31. *(Théorème du rang) Soit E un K-ev de dimension finie et F un K-ev quelconque. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors*

$$\dim(E) = \dim(ker(f)) + rg(f).$$

Démonstration. Posons $\dim(E) = n$ et $\dim(\ker(f)) = p$. Considérons une base $(u_1, \ldots, u_p)$ de $\ker(f)$ et complétons la en une base $B = (u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_{n-p})$ de E. Montrons que $L = (f(v_1), \ldots, f(v_{n-p}))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$. On sait que $f(B)$ engendre $\mathrm{Im}(f)$, or $f(B) = \{0, f(v_1), \ldots, f(v_{n-p})\}$ et donc L engendre $\mathrm{Im}(f)$. Montrons que L est libre. On a $\alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_{n-p} f(v_{n-p}) = 0$ entraîne $f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-p} v_{n-p}) = 0$ et donc $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-p} v_{n-p} \in \ker(f)$. Par suite, $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-p} v_{n-p} = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_p u_p$ et donc $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-p} v_{n-p} - \beta_1 u_1 - \cdots - \beta_p u_p = 0$ et puisque B est libre, alors $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-p} = 0$. D'où L est libre et donc une base de $\mathrm{Im}(f)$. En conclusion, $\dim(\mathrm{Im(f)}) = n - p = \dim(E) - \dim(\ker(f))$ et donc $\dim(E) = \dim(\ker(f)) + \mathrm{rg}(f)$. □

Propriétés 32. *Soit E un K-ev de dimension n et F un K-ev de dimension m. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire. Alors*

1. $rg(f) \leq n$ avec égalité si et seulement si f est injective.

2. $rg(f) \leq m$ avec égalité si et seulement si f est surjective.

3. Soit $\alpha \in K, \alpha \neq 0$. On a $rg(\alpha f) = rg(f)$.

Démonstration. Voir TD. □

Propriétés 33. *Soit E un K-ev de dimension finie et soient f et g deux endomorphismes de E. Alors*

1. $|rg(f) - rg(g)| \leq rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g)$.

2. $rg(f \circ g) \leq \min(rg(f); rg(g))$

3. Si f est injectif alors $rg(f \circ g) = rg(g)$.

4. Si g est surjectif alors $rg(f \circ g) = rg(f)$.

Démonstration. Voir TD. □

Le théorème suivant montre qu'une application linéaire est complètement déterminée par les données des images des éléments d'une base.

Théorème 34. *Soient E et F deux K-ev et $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de E. Soient $v_1, \ldots, v_n$ n vecteurs quelconque de F. Alors il existe alors une unique application linéaire $f : E \longrightarrow F$ telle que*

$$f(u_1) = v_1, \ldots, f(u_n) = v_n.$$

Démonstration. Existence de f : Soit $v \in E$. Puisque B est une base de E, le vecteur v s'écrit de façon unique sous la forme $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ où $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. On pose alors $f(v) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. IL est clair que f est bien définie et ceci est dû à l'unicité des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Montrons que f est linéaire. Pour cela soit $v = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ ey $w = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_n u_n$ deux vecteurs de E et soit $\lambda \in K$. On a

$$\lambda v + w = (\lambda\alpha_1 + \beta_1)u_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n + \beta_n)u_n,$$

donc

$$\begin{aligned} f(\lambda v + w) &= (\lambda\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n + \beta_n)v_n \\ &= \lambda(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) + (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) \\ &= \lambda f(v) + f(w). \end{aligned}$$

En conclusion, f est linéaire. De plus il est clair que $f(u_1) = v_1, \dots, f(u_n) = v_n$.
Unicité de f : Soit $g : E \longrightarrow F$ une application linéaire telle que

$$g(u_1) = v_1, \dots, g(u_n) = v_n.$$

On a $(f-g)(u_1) = 0_F, \dots, (f-g)(u_n) = 0_F$, donc $(f-g)(B) = \{0_F\}$, alors $\mathrm{Im}(f-g) = \mathrm{sev}\langle\{0_F\}\rangle = \{0_F\}$, d'où $(f-g)(u) = 0_F$, $\forall u \in E$. Par suite $f = g$. $\square$

Remarque 35.
1. Le théorème précédent fournit un outil important pour construire des applications linéaires
2. Dans le théorème précédent, On peut remplacer une base de E par une famille génératrice de E. Dans ce cas, on a l'unicité si on a l'existence.
3. Le théorème précédent reste valable même si E n'est pas de dimension finie.

On a les deux corollaires suivants qui sont des conséquences immédiates du théorème 34.

Corollaire 36. *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires et $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ une base de E. Alors*

$$f = g \Longleftrightarrow f(u_1) = g(u_1), \dots, f(u_n) = g(u_n).$$

Corollaire 37. *Soient $f : E \longrightarrow F$ une applications linéaires et $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ une base de E. Alors*

$$f \quad \textit{est identiquement nulle} \Longleftrightarrow f(u_1) = \cdots = f(u_n) = 0_F.$$

Exercice 2. *Démontrer le théorème 34 en utilisant les projections $p_i : E \longrightarrow ku_i$.*

Exemple 15. *Déterminer l'unique application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que*

$$f(1,0) = (1,-1,1), f(0,1) = (1,0,1)$$

Comme $\{(1,0),(0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}_2$, le théorème 34 assure l'existence et l'unicité de l'application f. Soit $u = (x,y) \in \mathbb{R}_2$. On a $u = x(1,0) + y(0,1)$, donc $f(u) = x(1,-1,1) + y(1,0,1) = (x+y,-x,x+y)$. Par suite f est défini par

$$f(x,y) = (x+y,-x,x+y)$$

Exercice 3. *Soit K un corps commutatif quelconque et $n \in \mathbb{N}^*$.*
1. Soient $a_1, \ldots, a_n$ des éléments non tous nuls de K. En utilisant le théorème 34, montrer que l'ensemble S des solutions du système homogène

$$(S) : a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$$

est un sev de dimension $n-1$ de K^n, c'est-à-dire S est un hyperplan de K^n.
2. Réciproquement, Soit H un hyperplan quelconque de K^n.
(i) Montrer l'existence d'une application linéaire $f : K^n \longrightarrow K$ telle que $H = ker(f)$.
(ii) En déduire l'existence d'une famille d'éléments $a_1, \ldots, a_n$ non tous nuls de K tels que H est l'ensemble des solutions du système homogène

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0.$$

3.5 Isomorphismes

Rappelons qu'on dit que deux ensembles ont la même cardinalité s'il existe une bijection entre eux. Dans ce qui suit nous allons considérer des espaces vectoriels et nous allons remplacer la cardinalité par l'isomorphisme. On va voir par la suite, que l'isomorphisme joue le même rôle dans la théorie de espaces vectoriels (généralement dans la théorie des structures algébriques) que la cardinalité dans la théorie des ensembles.
On considère l'ensemble de tous les espaces vectoriels sur un corps commutatif K Donné. On définit sur cet ensemble la relation suivante :

$$E \mathcal{R} F \quad \Longleftrightarrow \quad \text{il existe un isomorphisme} \quad f : E \longrightarrow F$$

Alors $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. En effet :
• On a $\mathrm{Id}_E : E \longrightarrow E$ est un isomorphisme. Donc $E \mathcal{R} E$, c'est-à-dire, $\mathcal{R}$ est réflixive.
• Si $f : E \longrightarrow F$ est un isomorphisme, alors $f^{-1} : F \longrightarrow E$ est aussi un isomorphisme. Donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
• Si $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ sont des isomorphismes, alors $g \circ f : E \longrightarrow G$ est

aussi un isomorphisme. Donc $\mathcal{R}$ est transitive.
La relation d'équivalence $\mathcal{R}$ ainsi défini sera par la suite noté $\simeq$. Il est ainsi légitime, puisque $\simeq$ est symétrique, de dire que deux K-ev E et F sont isomorphes lorsque $E \simeq F$.
Puisque $\simeq$ est une relation d'équivalence, il est naturel de se demander quelles sont les classes d'équivalences modulo $\simeq$.

Théorème 38. *Soit E un K-espace vectoriel non nul de dimension finie. Alors on a*

$$\dim(E) = n \Longleftrightarrow E \simeq K^n$$

Démonstration.
$\Longrightarrow$) Supposons que $\dim(E) = n$ et soit $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ une base de E. Soit $C = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base quelconque de K^n. On sait d'après le théorème 34 qu'il existe une application linéaire $f : E \longrightarrow K^n$ telle que $f(u_1) = e_1, \ldots, f(u_n) = e_n$. Puisque $f(B) = C$, alors $f(B)$ est une base de K^n. Donc d'après la proposition 27, f est un isomorphisme, d'où $E \simeq K^n$.
$\Longleftarrow$) Supposons que $E \simeq K^n$. Soit B une base de E. Alors d'après la proposition 27, $f(B)$ est une base de K^n. Donc $\text{card}(f(B)) = \dim(K^n) = n$. Comme $\text{card}(B) = \text{card}(f(B))$, alors $\dim(E) = n$. $\square$

Comme conséquence, nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 39. *Soient E et F deux K-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors on a*

$$\dim(E) = \dim(F) \Longleftrightarrow E \simeq F$$

Démonstration. On suppose que E et F sont tous les deux non nuls (dans le cas contraire, le résultat est évident). Posons $n = \dim(E)$, alors d'apès le théorème 38 on a $E \simeq K^n$.
Si $\dim(E) = \dim(F)$ alors $F \simeq K^n$ et donc par transitivité $E \simeq F$. Réciproquement, Si $E \simeq F$, alors $F \simeq K^n$ et donc d'apès le théorème 38 on a $\dim(F) = n$. D'où le résultat. $\square$

Exercice 4. *Monter que l'application*

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(x, y) \longmapsto x + \mathrm{i}y$$

est un isomorphisme et en déduire que $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$.

Exercices compléments de cours

Nous admettrons le résultat suivant dont la démonstration utilise essentiellement des résultats avancés en théorie des ensembles :

Théorème 40. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension quelconque et soit B et B' deux bases de E. Alors card(B) = card(B'), c'est-à-dire, B et B' sont équipotents.*

Rappelons le lemme suivant, dit "lemme de Zorn",

Lemme 41. *Tout ensemble inductif admet au moins un élément maximal.*

Remarque. *Soit R un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$.*
1. On dit qu'une famille $\mathcal{A} = \{N_i / i \in I\}$ de parties de R est une chaîne de R si $\leq$ definit un ordre totale sur $\mathcal{A}$.
2. On dit que R est inductif (pour la relation $\leq$) si toute chaîne de R possède un majorant.

Exercice 5. *Soit E et F deux K-ev (de dimensions finies ou infinies).*
1. Soit B une famille d'éléments de E. Montrer que les propriérés suivantes sont équivalentes :
(a) B est une base de E.
(b) B est une famille libre maximale de E.
(c) B est une famille génératrice minimale de E.
2. En utilisant le lemme de Zorn, montrer que E admet au moins une base.

Exercice 6.
- *Soit I un ensemble quelconque. Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de K-ev. On note P =*

$\prod_{i\in I} E_i$ le produit cartésien (ou le produit direct) des ensembles E_i.
• Soit $x = (x_i)_{i\in I} \in P$. On appelle support de x l'ensemble

$$supp(x) = \{i \in I / x_i \neq 0_{E_i}\}.$$

• Une famille $x = (x_i)_{i\in I} \in P$ de support fini est dite presque nulle.
• On note $\coprod_{i\in I} E_i$ le sous-ensemble de P constitué des famille $(x_i)_{i\in I}$ presque nulles. L'ensemble $\coprod_{i\in I} E_i$ est appelé somme directe externe des E_i.
• Si $E_i = E$ pour tout $i \in I$, les ensembles P et $\coprod_{i\in I} E_i$ se note tout simplement E^I et $E^{(I)}$, respectivement.
• On définit sur P les lois interne et externe suiventes :

$$(x_i)_{i\in I} + (y_i)_{i\in I} = (x_i + y_i)_{i\in I}$$

et

$$\alpha(x_i)_{i\in I} = (\alpha x_i)_{i\in I}$$

1. Montrer que P est un K-espace vectoriel.
2. Montrer que $\coprod_{i\in I} E_i$ est un sous-espace vectoriel de P.
3. On suppose que I est fini.
(i) Montrer que $\prod_{i\in I} E_i = \coprod_{i\in I} E_i$.
(ii) On suppose de plus que que $E_i, i \in I$ sont des sev d'un espace vectoriel E et que la somme $\sum_{i\in I} E_i$ est directe, c'est-à-dire, $\sum_{i\in I} E_i = \bigoplus_{i\in I} E_i$ ou d'une autre façon tout élément u de $\sum_{i\in I} E_i$ s'écrit de manière unique sous la forme $u = \sum_{i\in I} u_i$ avec $u_i \in E_i$. Montrer que $\bigoplus_{i\in I} E_i \simeq \prod_{i\in I} E_i$.
Par exemple si la somme $F + G + H$ est directe, F, G et H sont des sev de E, alors $F + G + H = F \bigoplus G \bigoplus H \simeq F \times G \times H$.

Exercice 7. *Soit I un ensemble fini quelconque et soit σ une permutation de I. Soient $E_i, i \in I$ une famille de K-ev. Montrer que $\prod_{i\in I} E_i \simeq \prod_{i\in I} E_{\sigma(i)}$.*
Par exemple $E_1 \times E_2 \times E_2 \times E_2 \simeq E_2 \times E_4 \times E_3 \times E_1$.

Exercice 8. *Soient E un K-ev et I un ensemble quelconque et soit $f \in \mathcal{F}(I, E)$ une application de I dans E. On appelle support de f l'ensemble $supp(f) = \{i \in I / f(i) \neq 0\}$.*

On dit que f est à support fini si l'ensemble $supp(f)$ est fini.
On note $\mathcal{S}(I,E)$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(I,E)$ constitué des applications à support fini.
1. Montrer que $\mathcal{S}(I,E)$ est un sev de $\mathcal{F}(I,E)$.
2. Montrer que $E^I \simeq \mathcal{F}(I,E)$.
3. Montrer que $E^{(I)} \simeq \mathcal{S}(I,E)$.
4. (i) Montrer que $\mathbb{R}^{(N)}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension infinie
(ii) En déduire que l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang est un $\mathbb{R}$-ev de dimension infinie.

Exercice 9. *Montrer que $K^{(\mathbb{N})} \simeq K[X]$.*

Exercice 10. *Soit I un ensemble quelconque et $(E_i)_{i\in I}$ une famille de K-ev. Soit B_i une base de $E_i, i \in I$. Si $s \in I$, alors on pose $H_s = \prod_{i\in I} D_i$ avec*

$$\begin{cases} D_s &= B_s \\ D_i &= \{0_{E_i}\} \quad si \quad i \neq s \end{cases}$$

1. Monter que

$$(x_i)_{i\in I} \in H_s \Longleftrightarrow x_s \in B_s \quad et \quad x_i = 0_{E_i}, \forall i \in I \setminus \{s\}.$$

2. Montrer que la famille $H = \bigcup_{i\in I} H_i$ est une base du K-ev $\coprod_{i\in I} E_i$.
3. En déduire une base du K-espace vectoriel $\mathcal{S}(I,E)$.

Exercice 11. *Soit E un K-ev et soit I un ensemble quelconque.*
Soit L l'ensemble des applications f_i où $i \in I$, telles que $f_i(j) = \delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker définit par

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

1. Montrer que L est une base de $K^{(I)}$.
2. En déduire que si B est une base de E alors $E \simeq K^{(B)}$.

Exercice 12. *Soient I et J deux ensembles quelconques.*
(i) Montrer que

$$K^{(I)} \simeq K^{(J)} \iff card(I) = card(J).$$

On admettra que deux bases d'un même espace vectoriel ont la même cardinalité.
(ii) En déduire que si B est une base de E et C est une base de F alors :

$$E \simeq F \iff card(B) = card(C).$$

Exercice 13. *Soit E un K-ev.*
1. On suppose que $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ est un ensemble de cardinal n. Montrer que $K^I = K^n$.
2. Soit $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ une base de E.
(i) Montrer que $E \simeq K^n$.
(ii) En déduire que $\dim(E^m) = nm$.
(iii) Déterminer une base de E^m.
(iv) Application : Déterminer une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^4$.