

Épreuve d'algèbre 3 Session de Rattrapage
Durée 1h30'

Exercice. Soient E et F deux espaces vectoriels sur le corps \mathbb{R} . On suppose que $A = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ est une base de E , et $B = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de F . Soit $f : E \longrightarrow F$ l'application linéaire telle que

$$\text{mat}_{A,B}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une base de $\ker(f)$ et une base de $\text{Im}(f)$.
2. Soit $u \in E$ tel que $u_A = (a, b, c, d)$. Écrire $f(u)$ comme combinaison linéaire de v_1, v_2 et v_3 .
3. Soit

$$w_1 = 2v_1 + v_2, \quad w_2 = v_1 + v_2 + v_3, \quad w_3 = 3v_1 + 2v_2$$

et $C = (w_1, w_2, w_3)$.

- (i) Montrer que C est une base de F et déterminer les matrices $\text{mat}_B(C)$ et $\text{mat}_C(B)$.
- (ii) Déterminer la matrice $\text{mat}_{A,C}(f)$.