Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences - EL JADIDA
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2023/24
Niveau : Algèbre 2 (MIP et IA)

Fiche d'exercices N°1 - Chapitre 1

Exercice 1. On considère les deux familles de vecteurs de $\mathbb{R}^4$ suivantes : $A = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ où

$w_1 = (1, 1, 1, 3), w_2 = (1, 2, -1, 2), w_3 = (3, 4, 1, 8), w_4 = (3, 5, -1, 7), w_5 = (1, -1, 2, -2)$

et $C = \{u_1, u_2, u_3\}$ où

$$u_1 = (2, 1, 4, 7), u_2 = (2, 2, 0, 2), u_3 = (3, 2, 2, 3), u_4 = (3, 3, -2, -2).$$

Posons $F = \text{sev}\langle A\rangle$ et $G = \text{sev}\langle C\rangle$.
1. Déterminer une base du $\text{sev}\langle A\rangle$.
2. Déterminer une base du $\text{sev}\langle A\rangle$ extraite de A.
3. Trouver une base de $F + G$ et une base de $F \cap G$.
4. En déduire que $F + G = \mathbb{R}^4$.
5. A-t-on $F \oplus G = \mathbb{R}^4$?

Exercice 2. Soit $G = \{u_1, \dots, u_n\}$ une famille génératrice d'un K-ev E et soit $L = \{v_1, \dots, v_m\}$ une famille libre de E.
1. Posons $L_m = L \setminus \{v_m\}$ et soit H une partie quelconque de E. Montrer que si $v_m \in F = \text{sev}\langle L_m \cup H\rangle$ alors $\exists u \in H$ tel que $F = \text{sev}\langle L \cup (H \setminus \{u\})\rangle$.
2. En particulier, Montrer que si $v \neq 0$ et si $v \in F = \text{sev}\langle H\rangle$ alors $\exists u \in H$ tel que $F = \text{sev}\langle \{v\} \cup (H \setminus \{u\})\rangle$.
3. On suppose que $m \geq n$. Soit S une sous-famille quelconque de L de cradinale n. Montrer que $E = \text{sev}\langle S\rangle$.
4. En déduire le résultat suivant (vu dans le cours) : soit D une famille de vecteur de E. Alors on a

$$\text{card}(D) > n \Rightarrow D \quad \text{est liée.}$$

Exercice 3. Montrer que si E et F sont deux K-ev de bases respectives $(u_1, \ldots, u_n)$ et $(v_1, \ldots, v_m)$, alors $((u_1, 0_F), \ldots, (u_n, 0_F), (0_E, v_1), \ldots, (0_E, v_m))$ est une base du K-ev $E \times F$. En déduire que $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$.

Exercice 4. Dans de $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}_4[X]$ on considère l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{C}_4[X]/P(0) = P'(0) = P'(1) = 0\}$.
1. Montrer que F est un $\mathbb{C}$-sev de $\mathbb{C}_4[X]$, et donner une base de F.
Montrer que le sev $G = \text{sev}\langle 1, X, 1 + X + X^2\rangle$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{C}_4[X]$.

Exercice 5. Soient $F_1, \ldots, F_n$ des sev d'un K-ev E. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :
1. La somme $F_1 + \cdots + F_n$ est directe.
2. $\forall p \in \{2, \ldots, n\}$, $(F_1 + \cdots + F_{p-1}) \bigcap F_p = \{0\}$.
3. $\forall u_1 \in F_1, \ldots, \forall u_n \in F_n : u_1 + \cdots + u_n = 0 \Longrightarrow u_1 = \cdots = u_n = 0$.

Exercice 6. Soient les vecteurs $u_1 = (1, -1, \mathrm{i})$, $u_2 = (-1, \mathrm{i}, 1)$ et $u_3 = (\mathrm{i}, 1, -1)$ de $\mathbb{C}^3$.
1. Montrer que $B = (u_1, u_2, u_3)$ est une base du $\mathbb{C}$-ev $\mathbb{C}^3$.
2. Déterminer les coordonnées du vecteur $u = (\mathrm{i}, 2+3\mathrm{i}, 1-\mathrm{i})$ dans la base B.

Exercice 7. On cosidèrere la famille $P = \{p \in \mathbb{N}/p\,\text{est premier}\}$ et on pose $H = \{\ln(p)/p \in P\}$.
1. Montrer que H est une famille libre du $\mathbb{Q}$-ev $\mathbb{R}$.
2. En déduire que $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{Q}$-ev de dimension infinie.

Exercice 8. Soit E un K-ev de dimension p et B une base de E. Soient $A = \{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille de vecteurs de E et $v = (m_1, \ldots, m_n)$ un vecteur quelconque de E. Considérons le système d'équations linéaires suivant

$$(A|v) : x_1 u_{1B} + \cdots + x_n u_{nB} = v_B$$

à p équations et n inconnues.
1. Montrer que

$$u \in \text{sev}\langle A\rangle \Longleftrightarrow (A|u)\,\text{est compatible}$$

2. Montrer que

$$A \,\text{est une famille libre} \iff (A|0)\,\text{admet une seule solution}$$

3. Montrer que

$$A \,\text{est une famille liée} \iff (A|0)\,\text{admet au moins deux solutions}$$

4. Montrer que

$$A \,\text{est une famille génératrice de}\, E \iff (A|v)\,\text{est compatible quelque soit}$$
$$\text{les paramètres}\, m_1, \dots, m_n$$

5. Montrer que

$$A \,\text{est une base de}\, E \iff (A|v)\,\text{admet une seule solution quelque soit}$$
$$\text{les paramètres}\, m_1, \dots, m_n$$

6. On appelle équations cartésiennes d'un sev F de E dans la base B la donné d'un système (S) d'équations linéaires (nécessairement homogène) tel que

$$F = \{v \in E / v_B \in S\},$$

c'est-à-dire :

$$v \in F \iff v_B \,\text{est une solution de (S).}$$

(i) On Suppose que $F = \text{sev}\langle A \rangle$ est un sev de E. Par la méthode de Gauss on cherche un système échelonné (T) qui est équivalent à $(A|v)$.
Soit (S) le système d'équations linéaires dont les équations sont les conditions de compatibilités du système échelonnée (T).
(i) Dire pourquoi (S) est un système d'équations cartésiennes de F dans la

base B.
(ii) Montrer qu'il existe des vecteurs $w_1, \ldots, w_d$ de E tels que

$$F = \{m_{i_1} w_1 + \cdots + m_{i_d} w_d / m_{i_1}, \ldots, m_{i_d} \in K\}$$

où les scalaires $m_{i_1}, \ldots, m_{i_d}$ sont les inconnues secondaires du système (T).
(iii) Montrer que $(w_1, \ldots, w_d)$ est une base de F. En particulier, on a $\dim F = \dim(E) - rg((T))$ qui est égal au nombre d'inconnues secondaires de (T).
(iv) Que peut-on dire si aucune inconnue n'est secondaire ?

Exercice 9. On considères les vecteurs $u = (1, 0, -1, 2)$ et $v = (2, 1, 1, 0)$ de $\mathbb{R}^4$. Déterminer des équations cartésiennes de $F = \text{sev}\langle u, v\rangle$.

Exercice 10. On considère le $\mathbb{R}$-sev F de $\mathbb{R}^4$ suivant :

$$F = \{(a + b - c, 2a + b, a - c + d, b + 3c)/a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$$

1. Déterminer une base de F.
2. En déduire que $F = \mathbb{R}^4$.

Exercice 11. On considère les $\mathbb{R}$-sev de $\mathbb{R}^3$ suivants :
$F = \text{sev}\langle u, v\rangle$ et $G = \text{sev}\langle w, z\rangle$ où

$$u = (1, 1, 1), v = (2, -1, 0), w = (1, 0, 1), z = (-1, 2, 1,)$$

Déterminer une base de $F + G$.

Exercice 12. On considère le corps $K = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ et soit $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ une base quelconque du K-ev $E = K^4$. Soit F le K-sev de E d'équations cartésiennes dans la base B le système suivant

$$\begin{cases} x - y + z + 2t = 0 \\ 2x + y + 3z - t = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer tous les vecteurs de F.
2. Déterminer une base C de F, $\dim(F)$ et le cardinal de F.
3. Compléter C par des vecteurs de B en une base de E.

Exercice 13. Dans $E = \mathbb{R}_2[X]$ on considère les vecteurs P_1, P_2 et P_3 tels que $P_1 = X^2$, $P_2 = (X-1)^2$ et $P_3(X) = (X+1)^2$.
1. Déterminer les coordonnées de P_1 et P_2 dans la base canonique $C = (1, X, X^2)$ de E.
2. Calculer $\mathrm{rg}(P_1, P_2)$ et endéduire que la famille $\{P_1, P_2\}$ est libre.
3. Montrer qu'on peut compléter la famille $\{P_1, P_2\}$ en une base de E en ajoutant le vecteur P_3.
4. Déterminer les coordonnées des vecteurs $Q(X) = -3$ et $P(X) = 3X^2 + 1$ dans la base $B = (P_1, P_2, P_3)$.

Exercice 14. Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et soit $F = \{(\alpha X^2 \beta X + \gamma)(aX^2 + bX + c)/a, b, c \in \mathbb{R}\}$ où α, β, γ sont des réels donnés.
1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-sev de E.
2. Déterminer suivant les valeurs de α, β, γ la dimension ainsi qu'une base de F.
3. On pose $H = \{(X-1)^2(aX^2+bX+c)/a, b, c \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(X+1)^2(aX^2+bX+c)/a, b, c \in \mathbb{R}\}$.
(i) Déterminer une base de H et une base de G.
(ii) Déterminer une base de $H + G$.
(iii) Déterminer une base de $H \cap G$.

Exercice 15. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et soit $F = \{(\alpha X^2+\beta X+\gamma)(aX+b)/a, b \in \mathbb{R}\}$ où α, β, γ sont des réels donnés.
1. Montrer que F est un $\mathbb{R}$-sev de E.
2. Déterminer suivant les valeurs de α, β, γ la dimension ainsi qu'une base de F.
3. On pose $H = \{(X-1)^2(aX+b)/a, b \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(X+1)^2(aX+b)/a, b \in \mathbb{R}\}$.
(i) Déterminer une base de H et une base de G.
(ii) Montrer que $E = H \oplus G$.

Exercice 16. Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:
1. la fonction $\sin(2x)$ est-t-elle une combinaison linéaire des fonction $\sin(x)$

et $\cos(x)$?
2. la fonction $\arctan(x)$ est-t-elle une combinaison linéaire des fonction e^{x^2}, e^{-x} et $\sin(x)$?

Exercice 17. Dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:
1. Étudier l'indépendance linéaire des vecteurs $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
2. Étudier l'indépendance linéaire des vecteurs x, e^x, et $\sin(x)$.
3. Étudier l'indépendance linéaire des vecteurs $\sin(x)$, $\cos(x)$ et $\sin(2x)$.
4. Montrer que la famille $A = \{e^{ax}/a \in \mathbb{R}\}$ est libre.
5. Montrer que la famille $B = \{|x - a|/a \in \mathbb{R}\}$ est libre.