Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences - EL JADIDA
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2023/24
Niveau : Algèbre 2 (MIP & IA)

Série 4

Exercice 1. On considère les matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 3 & -2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A + B$, $2A$, AC.
2. Soit $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de K^4. Calculer $\mathrm{mat}_B(e_i)^T A \,\mathrm{mat}_B(e_j)$.

Exercice 2. Soit $A = \mathrm{diag}(a_1, \dots, a_m)$ une matrice diagonale. Montrer $A^n = \mathrm{diag}(a_1^n, \dots, a_m^n)$.

Exercice 3. Soient $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) Montrer que $N^2 = 0$ et que $B - N = 2I_3$.

(ii) Déterminer B^n en remarquons que $B = 2I_3 + N$ et $N \times (2I_3) = (2I_3) \times N$.

Exercice 4. Soit A une matrice carrée d'ordre n à coefficient dans un corps K. On suppose que

$$A^m = a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I_n$$

où $a_0, \dots, a_{m-1} \in K$ avec $a_0 \neq 0$.
Montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 5. Soient f et g les deux endomorphismes de K^2 définis par

$$f(x, y) = (2x - y, x + 3y) \quad \text{et} \quad g(x, y) = (2y, x + 2y).$$

1. Déterminer les matrices de f et g dans la base canonique de K^2.
2. Déterminer les applications linéaires $f + g$, $g \circ f$, $f \circ g$ et $f \circ f$ ainsi que leurs matrices dans la base canonique de K^2.

Exercice 6. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on considère les vecteurs $u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (0, 1, 1), u_3 = (1, 1, 0), v = (-1, 3, 2)$

1. Montrer que $C = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de v dans la base canonique $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer les coordonnées de v dans la base C.

Exercice 7. Soit g l'application linéaire de $E = \mathbb{R}^3$ dans $F = \mathbb{R}^4$ définie par

$$g(x, y, z) = (-x + y, x - y, -x + z, -y + z)$$

Soient $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et $C = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ la base canonique de F.

1. Déterminer la matrice de g dans les bases B et C.
2. Déterminer $\ker(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$.
3. Montrer que $B' = (e_1 + e_2 + e_3, e_1 - e_2, e_3)$ est une base de E et $C' = (f_1, f_2, g(e_1), g(e_2))$ est une base de F.
4. Déterminer la matrice de g dans les bases B et C'.
5. Déterminer la matrice de g dans les bases B' et C.
6. Déterminer la matrice de g dans les bases B' et C'.

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ et f l'application de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$.

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 9. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et B la base canonique de E. Soit $f : E \longrightarrow E$ l'application linéaire définie par $f(P) = P(X + 1)$.

1. Déterminer $\mathrm{mat}_B(f)$.
2. Montrer que f est inversible d'inverse l'application $g : E \longrightarrow E$ définie par $g(P) = P(X - 1)$.
3. En déduire que la matrice $\mathrm{mat}_B(f)$ est inversible, et calculer son inverse.
4. Remplacer $\mathbb{R}$ par un corps quelconque K et 1 par $a \in K$.