Université Chouaïb Doukkali
Faculté des Sciences

MOHAMMED MOUÇOUF

Cours d'Algèbre 2

Année 2023-2024

Chapitre 5

Déterminants de matrices et applications

5.1 Définition récursive du déterminant

Notation . *Soit A une matrice carrée d'ordre n et soit $i, j \in \{1, \dots, n\}$. On notera $A(i, j)$ la matrice obtenue en supprimant la ligne L_i et la colonne C_j de la matrice A.*

Définition 1. *Le déterminant de matrices est une application*

$$\det : \mathcal{M}_n(K) \longrightarrow K$$

qui est défini par récurrence sur l'entier n comme suit :

- *Pour $n = 1$ on a $\det(a) = a$.*
- *Pour $n \geq 2$, on a*

$$\det(A) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} A_{1m} \det(A(1, m)) \tag{5.1}$$

Remarque 2. *La formule* (5.1) *a été obtenue en développant le déterminant de A suivant la première ligne, on peut montrer que le scalaire* $\det(A)$ *est indépendante du choix de la ligne ou de la colonne.*

- *Si on développe le déterminant de A suivant la $i$ème ligne on trouve*

$$\det(A) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} A_{im} \det(A(i, m))$$

• *Si on développe le déterminant de A suivant la ième colonne on trouve*

$$\det(A) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} A_{mi} \det(A(m,i))$$

Notation . *Si*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

On note aussi

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$$

Exemple 1. *On a* $\det(0_n) = 0$ *et* $\det(I_n) = 1$.

Exemples 1.

1. $A = (-5)$ *alors* $\det(A) = -5$.

2. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, *alors*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Par exemple ! $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = (2 \times 4) - (5 \times (-3) = 8 + 15 = 23.$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. *On développe* $\det(A)$ *suivant la* $1^{\text{ère}}$ *ligne :*

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= -8 - 10 = -18$$

la $2^{\text{ème}}$ *ligne :*

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -(-1)\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$
$$= -4 - 14 = -18$$

la $2^{\text{ème}}$ *colonne :*

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = -(0)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= -14 - 4 = -18$$

Remarques 3.

Régle de Sarrus

1. La régle de Sarrus consiste à écrire les trois colonnes du déterminant, puis à répéter les deux premières. On calcule la somme des produits des éléments des trois diagonales principales moins la somme des produits des éléments des trois diagonales non principales.

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = \left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$
$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$$

Exemple : Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. *Alors*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \left| \begin{array}{ccc|cc} 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 & 3 & 4 \end{array} \right. \\ &= (-8+0-4)-(6+0+0) \\ &= -18 \end{aligned}$$

2. La régle de Sarrus n'est valable que pour des matrices carrées d'ordre 3.

Exercice 1. *Montrer que si A est une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) d'ordre n, alors le déterminant de A est égal au produit des coefficients de la diagonale, c'est-à-dire,*

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} A_{ii}.$$

5.2 Propriétés des déterminants

Théorème 4. *Notons C_i la colonne i d'une matrice. On a alors*

$$\begin{aligned} &\det\begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_{m-1} & C_m + C'_m & C_{m+1} & \dots & C_n \end{pmatrix} = \\ &\qquad \det\begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_{m-1} & C_m & C_{m+1} & \dots & C_n \end{pmatrix} + \\ &\qquad\qquad \det\begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_{m-1} & C'_m & C_{m+1} & \dots & C_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de développer le premier déterminant suivant la colonne $C_m + C'_m$ et le deuxième et le troisième suivant les colonnes C_m et C'_m respectivement. □

Lemme 5. *Si deux lignes ou deux colonnes de A sont égales alors* $\det(A) = 0$.

Démonstration. Voir devoir N°3. □

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On considère les transformations suivantes

$$\begin{array}{lcl} A & \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} & M, \quad i \neq j \\ A & \xrightarrow{\lambda C_i \to C_i} & N, \\ A & \xrightarrow{C_i + \alpha C_j \to C_i} & P, \quad i \neq j \\ A & \xrightarrow{C_i + \sum\limits_{j \neq i} \alpha_j C_j \to C_i} & Y, \end{array}$$

Alors on a le théorème suivant

Théorème 6. *On a*

1. $\det(M) = -\det(A)$.

2. $\det(N) = \lambda \det(A)$.

3. $\det(P) = \det(A)$.

4. $\det(Y) = \det(A)$.

Démonstration.

1. On a

$$\det\Big(C_1(A) \quad \dots \quad C_i(A) + C_j(A) \quad \dots \quad C_i(A) + C_j(A) \quad \dots \quad C_n(A)\Big) = 0$$

car deux colonnes sont égales. Donc

$$\begin{aligned} 0 &= \det\Big(C_1(A) \quad \dots \quad C_i(A) + C_j(A) \quad \dots \quad C_i(A) \quad \dots \quad C_n(A)\Big) + \\ &\quad \det\Big(C_1(A) \quad \dots \quad C_i(A) + C_j(A) \quad \dots \quad C_j(A) \quad \dots \quad C_n(A)\Big) \\ &= \det\Big(C_1(A) \quad \dots \quad C_i(A) \quad \dots \quad C_i(A) \quad \dots \quad C_n(A)\Big) + \\ &\quad \det\Big(C_1(A) \quad \dots \quad C_j(A) \quad \dots \quad C_i(A) \quad \dots \quad C_n(A)\Big) + \\ &\quad \det\Big(C_1(A) \quad \dots \quad C_i(A) \quad \dots \quad C_j(A) \quad \dots \quad C_n(A)\Big) + \\ &\quad \det\Big(C_1(A) \quad \dots \quad C_j(A) \quad \dots \quad C_j(A) \quad \dots \quad C_n(A)\Big) \\ &= \det\Big(C_1(A) \quad \dots \quad C_j(A) \quad \dots \quad C_i(A) \quad \dots \quad C_n(A)\Big) + \\ &\quad \det\Big(C_1(A) \quad \dots \quad C_i(A) \quad \dots \quad C_j(A) \quad \dots \quad C_n(A)\Big) \\ &= \det(M) + \det(A) \end{aligned}$$

Donc $\det(M) = -\det(A)$.

2. On développe le déterminant suivant la ligne i, on trouve

$$\det(N) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} N_{1m} \det(N(1,m))$$

or $N_{1m} = \lambda A_{1m}$ et $N(1,m) = A(1,m)$. Donc

$$\det(N) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \lambda A_{1m} \det(A(1,m)) = \lambda \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} A_{1m} \det(A(1,m)) = \lambda \det(A).$$

3. On a

$$\begin{aligned}
\det(P) &= \det\begin{pmatrix} C_1(A) & \dots & C_{i-1}(A) & C_i(A) + \alpha C_j(A) & C_{i+1}(A) & \dots & C_n(A) \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} C_1(A) & \dots & C_{i-1}(A) & C_i(A) & C_{i+1}(A) & \dots & C_n(A) \end{pmatrix} + \\
&\quad \det\begin{pmatrix} C_1(A) & \dots & C_{i-1}(A) & \alpha C_j(A) & C_{i+1}(A) & \dots & C_n(A) \end{pmatrix} \\
&= \det\begin{pmatrix} C_1(A) & \dots & C_{i-1}(A) & C_i(A) & C_{i+1}(A) & \dots & C_n(A) \end{pmatrix} + \\
&\quad \alpha \det\begin{pmatrix} C_1(A) & \dots & C_{i-1}(A) & C_j(A) & C_{i+1}(A) & \dots & C_n(A) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le déterminant $\det\begin{pmatrix} C_1(A) & \dots & C_{i-1}(A) & C_j(A) & C_{i+1}(A) & \dots & C_n(A) \end{pmatrix}$ est nul car il a deux colonnes égales qui sont la colonne i et la colonne j. Donc

$$\det(P) = \det\begin{pmatrix} C_1(A) & \dots & C_{i-1}(A) & C_i(A) & C_{i+1}(A) & \dots & C_n(A) \end{pmatrix} = \det(A).$$

4. C'est une conséquence directe de la question 3. et du fait que l'opération

$$\xrightarrow{C_i + \sum_{j \neq i} \alpha_j C_j \to C_i}$$

est une succession d'opérations élémentaires de la forme

$$\xrightarrow{C_i + \lambda C_j \to C_i}, j \neq i.$$

□

Remarque 7. *D'après Théorème 4 et la propriété 2. du Théorème 9, on voit que l'application*

$$C_m \longmapsto \det\begin{pmatrix} C_1 & \dots & C_{m-1} & C_m & C_{m+1} & \dots & C_n \end{pmatrix}$$

est linéaire, pour tout $m \in \{1, \dots, n\}$.

On a des résultats analogue pour les opérations sur les lignes.

Théorème 8. *On a*

$$\det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{m-1} \\ L_m + L'_m \\ L_{m+1} \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{m-1} \\ L_m \\ L_{m+1} \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{m-1} \\ L'_m \\ L_{m+1} \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix}$$

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On considère les transformations suivantes

$$\begin{array}{lcl} A & \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} & H, \quad i \neq j \\ A & \xrightarrow{\lambda L_i \to L_i} & F, \\ A & \xrightarrow{L_i + \alpha L_j \to L_i} & Z, \quad i \neq j \\ A & \xrightarrow{L_i + \sum\limits_{j \neq i} \alpha_j L_j \to L_i} & S, \end{array}$$

Alors on a le théorème suivant

Théorème 9. *On a*

1. $\det(H) = -\det(A)$.

2. $\det(F) = \lambda \det(A)$.

3. $\det(Z) = \det(A)$.

4. $\det(S) = \det(A)$.

Remarque 10. *L'application*

$$L_m \longmapsto \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_{m-1} \\ L_m \\ L_{m+1} \\ \dots \\ L_n \end{pmatrix}$$

est linéaire, pour tout $m \in \{1, \dots, n\}$.

Remarque 11. *Le meilleur choix de la ligne (ou la colonne) par rapport à laquelle sera développé le calcul d'un déterminant, est celui qui contient le maximum de coefficients nuls. Il est donc commode de créer des zéros dans ce déterminant sans lui changer sa valeur.*

Exemple 2. *Dans le corps des réels on a :*

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[Facteur : 2]{\frac{1}{2}L_1 \to L_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\substack{Facteur : 1 \\ Facteur : 1}]{\substack{L_3 - 2L_1 \to L_3 \\ L_4 - L_1 \to L_4}}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[Facteur : 1]{L_3 - L_2 \to L_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \times 5 \times (-1) \times (-1) = 5$$

Donc

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 1 \times 1 \times 1 \times 5 = 10$$

5.3 Les formules de Cramer

On rappelle qu'un système d'équations linéaires (S) à n équations et n inconues est dit de Cramer si (S) est compatible et admet une seule solution.

Soit A une matrice carrée d'ordre n et Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Soit D_i la matrice obtenue en remplaçant la colonne i de A par B.

Soit (S) le système $AX = B$. Alors On a le résultat suivant

Théorème 12. *Si* $\det(A)$ *est non nul, alors le système* (S) *est de Cramer et on a*

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\det(A)}$$

où $\Delta_{x_i} = \det(D_i)$

Remarque 13. *Le système* (S) *n'est pas de Cramer si* A *n'est pas carrée ou* A *est carrée avec* $\det(A) = 0$*. Dans ce cas on peut aussi appliquer la méthode de Cramer pour résoudre* (S)*, mais on doit appliquer le théorème12 à une matrice extraite de* A *de déterminant non nul et d'ordre maximum. Pour plus de détail voir devoir N°3.*

5.4 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 14. *Soient* E *un espace vectoriel de dimension* n *et soit* B *une base de* E*. Soit* $G = (v_1, \ldots, v_n)$ *une famille quelconque de vecteurs de* E *de cardinal* n*. On appelle déterminant de* G *dans la base* B *le scalaire* $\det(Mat_B(G))$*.*

Théorème 15. *Soient* E *un espace vectoriel de dimension* n *et soit* B *une base de* E*. Soit* $G = (v_1, \ldots, v_n)$ *une famille quelconque de vecteurs de* E *de cardinal* n*. Alors* G *est une base de* E *si et seulement si* $\det(Mat_B(G)) \neq 0$*.*

Démonstration. Posons $A = \mathrm{Mat}_B(G)$ et Soit T une matrice échelonnée obtenue en effectuant des opérations élémentaires sur les colonnes de A. Puisque T est une matrice carrée d'ordre n, alors T est une matrice triangulaire et donc $\det(T) = T_{11} \times \cdots \times T_{nn}$. Donc

$$\mathrm{rg}(T) = n \Longleftrightarrow T_{ii} \neq 0,\ 1 \leq i \leq n \Longleftrightarrow \det(T) \neq 0$$

Or $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(T)$ et $\det(A) = \alpha \det(T)$ où α est un scalaire non nul. Donc

$$\begin{aligned}
\det(A) \neq 0 &\Longleftrightarrow \alpha \det(T) \neq 0 \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{rg}(T) = n \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{rg}(A) = n \\
&\Longleftrightarrow \mathrm{rg}(G) = n \\
&\Longleftrightarrow G \text{ est une base de } E
\end{aligned}$$

□

Le déterminant d'une famille de vecteurs dépend bien de la base B.

Proposition 16. *Soient E un espace vectoriel de dimension n et soit B une base de E. Soit $G = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille quelconque de vecteurs de E de cardinal n. Si B' est une autre base de E, alors*

$$\det(Mat_{B'}(G)) = \det(Mat_{B'}(B)) \times \det(Mat_B(G)).$$

Démonstration. Posons $B = (u_1, \ldots, u_n)$ et $G = ((w_1, \ldots, w_n)$ et soit f l'endomorphisme de E tel que $f(u_i) = w_i$. On alors

$$\mathrm{Mat}_B(f) = \mathrm{Mat}_B(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \mathrm{Mat}_B(w_1, \ldots, w_n) = \mathrm{Mat}_B(G).$$

Soit B' une autre base de E. On a

$$\mathrm{Mat}_{B'}(G) = \mathrm{Mat}_{B'}(f(u_1), \ldots, f(u_n)) = \mathrm{Mat}_{B,B'}(f).$$

D'après le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
(E,B) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright", shift left=3] & (E,B) \arrow[d, "\mathrm{id}_E"] \\
& (E,B')
\end{tikzcd}$$

On déduit que

$$\mathrm{Mat}_{B,B'}(f) = \mathrm{Mat}_{B'}(B) \times \mathrm{Mat}_B(f)$$

donc

$$\mathrm{Mat}_{B'}(G) = \mathrm{Mat}_{B'}(B) \times \mathrm{Mat}_B(G)$$

par suite

$$\det(\mathrm{Mat}_{B'}(G)) = \det(\mathrm{Mat}_{B'}(B)) \times \det(\mathrm{Mat}_B(G)).$$

□

5.5 Formule explicite du déterminant d'une matrice

Théorème 17. *(Formule de Leibniz) Soit A une matrice carrée d'ordre n. Alors*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{\sigma(1)1} A_{\sigma(2)2} \cdots A_{\sigma(n)n}$$

où S_n est le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$ et pour $\sigma \in S_n$, $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de σ.

Remarque 18. *On a aussi*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) A_{1\sigma(1)} A_{2\sigma(2)} \cdots A_{2\sigma(n)}$$

Exemple 3. *Soit*

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

On a $S_3 = \{1, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \sigma_1, \sigma_2\}$ où $\tau_1 = (23), \tau_2 = (12), \tau_3 = (13), \sigma_1 = (123), \sigma_2 = (132)$.
Alors

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}.$$

Le résultat suivant se démontre en utilisant la formule de Leibniz

Proposition 19. *Soient A et B deux matrices carrées d'ordre n. Alors*
1. $\det(A) = \det(A^T)$.
2. $\det(AB) = \det(A) \times \det(B)$.

Démonstration. Voir devoir N°3. □

Proposition 20. *Soit A une matrice carrée d'ordre n. Alors A est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$. *Dans ce cas on a* $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

Démonstration. Supposons que A est inversible. On a $A \times A^{-1} = I_n$, donc $\det(A \times A^{-1}) = 1$, alors $\det(A) \times \det(A^{-1}) = 1$. Par suite $\det(A) \neq 0$ et on a $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.
Réciproquement, supposons que $\det(A) \neq 0$. Soit $= (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n et Soit $f : K^n \longrightarrow K^n$ l'endomorphisme tel que $\mathrm{Mat}_B(f) = A$. Puisque $\det(A) \neq 0$, alors d'après Théorème 15, la famille $C_1(A), \dots, C_n(A)$ forment une base de K^n, c'est-à-dire $G = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de K^n. Par suite f est bijective et donc A est inversible et on a $A^{-1} = \mathrm{Mat}_B(f^{-1}) = \mathrm{Mat}_G(B)$. □

5.6 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 21. *Soient E un espace vectoriel de dimension n et soit B une base de E. Soit f un endomorphisme de E. On appelle déterminant de f dans la base B le scalaire* $\det(Mat_B(f))$.

Proposition 22. *Soient E un espace vectoriel de dimension n et soit B une base de E. Soit f un endomorphisme de E. Alors*
1. f est bijective si et seulement si $\det(Mat_B(f)) \neq 0$.
2. Le déterminant de f ne dépend pas de la base B.

Démonstration.
1. Est une conséquence directe du fait que f est bijective si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_B(f)$ est inversible.
2. On sait que $\mathrm{Mat}_{B'}(f) = \mathrm{Mat}_B(B')^{-1} \times \mathrm{Mat}_B(f) \times \mathrm{Mat}_B(B')$, donc

$$\begin{aligned}
\det(\mathrm{Mat}_{B'}(f)) &= \det(\mathrm{Mat}_B(B'))^{-1} \times \det(\mathrm{Mat}_B(f)) \times \det(\mathrm{Mat}_B(B')) \\
&= \det(\mathrm{Mat}_B(f)) \times \det(\mathrm{Mat}_B(B')) \times \det(\mathrm{Mat}_B(B'))^{-1} \\
&= \det(\mathrm{Mat}_B(f)).
\end{aligned}$$

□

5.7 Calcul de l'inverse d'une matrice

Définition 23. *Soit A une matrice carrée d'ordre n. On appelle cofacteur du coefficient A_{ij} le scalaire*

$$cof(A_{ij}) = (-1)^{i+j}\det(A(i,j)).$$

On appelle comatrice de A la matrice notée $Com(A)$, définie par

$$Com(A)_{ij} = cof(A_{ij}).$$

Exemple 4. *Considérons la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Alors

$$cof(A_{11}) = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ cof(A_{12}) = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 9,\ cof(A_{13}) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$cof(A_{21}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7,\ cof(A_{22}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1,\ cof(A_{23}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$cof(A_{31}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 18,\ cof(A_{32}) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7,\ cof(A_{33}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3$$

Par suite,

$$Com(A) = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \\ 18 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Proposition 24. *On a*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, cof(A_{ij}) \tag{5.2}$$

et

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\, cof(A_{ij})$$

Démonstration.
Si on dévelope $\det(A)$ suivant la ligne i on trouve la première égalité.
Si on dévelope $\det(A)$ suivant la colonne j on trouve la deuxième égalité. □

Théorème 25. *Soit A une matrice carrée d'ordre n. Alors*
(i) $ACom(A)^T = Com(A)^T A = \det(A)I_n$.
(ii) Si A est une matrice inversible, On a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} Com(A)^T$$

Démonstration.
(i) On a

$$(A\mathrm{Com}(A)^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(\mathrm{Com}(A)^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}(\mathrm{Com}(A))_{jk} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\mathrm{cof}(A_{jk}).$$

D'après la relation5.2, on a pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$,

$$(A\mathrm{Com}(A)^T)_{ii} = \det(A).$$

D'autre part, Soit $i,j \in \{1,\ldots,n\}$ avec $i \neq j$. Soit B la matrice obtenue en remplaçant la ligne j de A par la ligne i. On a d'une part, $\det(B) = 0$ car B a deux lignes égales. D'autre part, on a $B_{jk} = A_{ik}$ et on a aussi $\mathrm{cof}(B_{jk}) = \mathrm{cof}(A_{jk})$. On développant $\det(B)$ suivant la ligne j, on trouve

$$0 = \det(B) = \sum_{k=1}^{n} B_{jk}\mathrm{cof}(B_{jk}) = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\mathrm{cof}(A_{jk}),$$

donc $(A\mathrm{Com}(A)^T)_{ij} = 0$. En conclusion, $A\mathrm{Com}(A)^T = \det(A)I_n$.
De la même façon on montre que $\mathrm{Com}(A)^T A = \det(A)I_n$.
(ii) Si $\det(A) \neq 0$, alors $A(\frac{1}{\det(A)}\mathrm{Com}(A)^T) = I_n$, donc A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\mathrm{Com}(A)^T.$$

□

Exemple 5. *Reprenons la matrice de l'exemple 4. On a*

$$\det(A) = A_{11}\,cof(A_{11}) - A_{12}\,cof(A_{12}) + A_{13}\,cof(A_{13}) = 1 - 27 - 5 = -31.$$

On suppose que K est un corps de caractéristique différente de 31. *Dans ce cas on a* $\det(A) \neq 0$ *et donc A est inversible. On a*

$$Com(A) = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 5 \\ 7 & 1 & 4 \\ 18 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

donc

$$Com(A)^T) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 18 \\ 9 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

alors

$$A^{-1} = \frac{-1}{31}\begin{pmatrix} 1 & 7 & 18 \\ 9 & 1 & 7 \\ 5 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$