Université Chouaib Doukkali
Faculté des Sciences - EL JADIDA
Département de Mathématiques

Année Universitaire 2023/24
Niveau : Algèbre 2 (MIP & IA)

Série 5

Exercice 1. Calculer les déterminants suivants :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} \quad C = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 3 & -2 \\ 3 & 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} \quad D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exercice 2.

1. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, alors $\det(A) \in \mathbb{Z}$.
2. Sachant que

$$1620 = 14 \times 120,\ 2016 = 14 \times 144,\ 2184 = 14 \times 156,\ 2478 = 14 \times 177$$

Montrer, sans le calculer, que le détreminant suivant est divisible par 14 :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 6 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & -8 & 4 \\ 2 & 4 & -7 & 8 \end{vmatrix}$$

Exercice 3. Soient $x_0, \ldots, x_n \in K$ et $P(X) \in K[X]$ un polynôme unitaire de degré n. On considère la matrice suivante appelée matrice de Vandermonde :

$$V(x_0, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{pmatrix}$$

1. Montrer que

$$\det(V(x_0, \ldots, x_n)) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} & P(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & P(x_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & P(x_n) \end{vmatrix}$$

2. En déduire la valeur de $\det(V(x_0, \dots, x_n))$ (indication : considérer le polynôme $P(X) = (X - x_0) \cdots (X - x_{n-1})$).
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $V(x_0, \dots, x_n)$ soit inversible.

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{D}_n(K)$ l'espace vectoriel des matrices diagonales d'ordres n. Soit $D \in E$ une matrice dont les coefficients diagonaux sont deux-à-deux distincts. Démontrer que $B = (I_n, D, D^2, \dots, D^{n-1})$ est une base de E.

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$ une matrice inversible. Montrer que $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q})$.

Exercice 6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et soit $\overline{A}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de A. Montrer que $\det(\overline{A}) = \overline{\det(A)}$.

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\alpha \in K$. Montrer que $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

Exercice 8. Soit $C = ((4, 0, 4), (2, 5, 1), (3, 10, 2))$ une famille de vecteurs de K^3.
1. Calculer $\det_B(C)$ où B est la base canonique de K^3.
2. Doner une condition nécessaire et suffisante pour que C soit une base de K^3.

Exercice 9. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant suivant :

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{vmatrix}$$