Simpson: $\displaystyle\int_{-2h}^{2h} u(x)\,dx \approx \frac{2h}{3}\cdot\left(U_{-2h}+4U_0+U_{2h}\right)$

Taylor: $u(a) = u(0) + a\,u'(0) + \frac{a^2}{2}u''(0) + \frac{a^3}{6}u'''(0) + \frac{a^4 u^{(4)}(0)}{24} + \frac{a^5 u^{(5)}(0)}{120} + \frac{a^6 u^{(6)}(0)}{720}.$

$$\int_{-2h}^{2h} u(x)\,dx = \left[x\,u(0) + \cancel{\frac{x^2}{2}u'(0)} + \frac{x^3 u^{(2)}(0)}{6} + \cancel{\frac{x^4 u^{(3)}(0)}{24}} + \frac{x^5 u^{(4)}(0)}{120} + \cancel{\frac{x^6 u^{(6)}(0)}{720}} + \frac{x^7 u^{(6)}(0)}{5040}\right]_{-2h}^{2h}$$

$$\frac{2h}{3}\cdot\left(U_{-2h}+4U_0+U_{2h}\right) = \frac{2h}{3}\Bigg(\left[u(0) - \cancel{2h\,u'(0)} + \frac{4h^2}{2}u''(0) - \cancel{\frac{8h^3}{6}u^{(3)}(0)} + \frac{16h^4}{24}u^{(4)}(0) - \cancel{\frac{32h^5}{120}u^{(5)}(0)} + \frac{64h^6}{720}u^{(6)}(0)\right].$$

$$+\,4u(0)$$

$$+\left[u(0) + \cancel{2h\,u'(0)} + \frac{4h^2}{2}u''(0) + \cancel{\frac{8h^3}{6}u^{(3)}(0)} + \frac{16h^4}{24}u^{(4)}(0) + \cancel{\frac{32h^5 u^{(5)}(0)}{120}} + \frac{64h^6}{720}u^{(6)}(0)\right]\Bigg).$$

$$= \frac{2h}{3}\cdot\left(6u(0) + 4h^2 u''(0) + \frac{16h^4}{12}u^{(4)}(0) + \frac{64h^6}{360}u^{(6)}(0)\right).$$

$$= 4h\,u(0) + \frac{8h^3}{3}u''(0) + \frac{8}{9}h^5 u^{(4)}(0) + \frac{16h^7}{135}u^{(6)}(0)$$

$$\int_{-2h}^{2h} u(x)\,dx = 4h\,u(0) + \frac{8h^3}{3}u''(0) + \frac{8}{15}h^5 u^{(4)}(0) + \frac{16}{315}h^7 u^{(6)}(0)$$

- $$|E^{2h}| = \left(\frac{8}{9} - \frac{8}{15}\right)h^5 u^{(4)}(0) + \left(\frac{16}{135} - \frac{16}{315}\right)h^7 u^{(6)}(0)$$

$$= \boxed{\frac{16}{45}h^5 u^{(4)}(0) + \frac{64}{945}h^7 u^{(6)}(0).}$$

- $$\int_{-2h}^{2h} u(x)\,dx = \int_{-2h}^{0} u(x)\,dx + \int_{0}^{2h} u(x)\,dx$$

Simpson h

$$= \frac{h}{3}\cdot\left(U_{-2h} + 4U_{-h} + U_0\right) + \frac{h}{3}\cdot\left(U_0 + 4U_h + U_{2h}\right)$$

$$= \frac{h}{3}\cdot\left(U_{-2h} + 4U_{-h} + 2U_0 + 4U_h + U_{2h}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{h}{3}\cdot\Bigg(\left[u(0) - \cancel{2h\,u'(0)} + \frac{4h^2}{2}u''(0) - \cancel{\frac{8h^3}{6}u^{(3)}(0)} + \frac{16h^4}{24}u^{(4)}(0) - \cancel{\frac{32h^5}{120}u^{(5)}(0)} + \frac{64h^6}{720}u^{(6)}(0)\right]$$

$$+\,4\cdot\left[u(0) - \cancel{h\,u'(0)} + \frac{h^2}{2}u''(0) - \cancel{\frac{h^3}{6}u^{(3)}(0)} + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(0) - \cancel{\frac{h^5}{120}u^{(5)}(0)} + \frac{h^6}{720}u^{(6)}(0)\right].$$

$$+\,2u(0)$$

$$+\,4\cdot\left[u(0) + \cancel{h\,u'(0)} + \frac{h^2}{2}u''(0) + \cancel{\frac{h^3}{6}u^{(3)}(0)} + \frac{h^4}{24}u^{(4)}(0) + \cancel{\frac{h^5}{120}u^{(5)}(0)} + \frac{h^6}{720}u^{(6)}(0)\right].$$

$$+\left[u(0) + \cancel{2h\,u'(0)} + \frac{4h^2}{2}u''(0) + \cancel{\frac{8h^3}{6}u^{(3)}(0)} + \frac{16}{24}u^{(4)}(0) + \cancel{\frac{32h^5}{120}u^{(5)}(0)} + \frac{64}{720}h^6 u^{(6)}(0)\right]\Bigg).$$

$$\Rightarrow \frac{h}{3}\cdot\left(12u(0) + 8h^2 u''(0) + \frac{5}{3}h^4 u^{(4)}(0) + \frac{17}{90}h^6 u^{(6)}(0)\right)$$

$$\Rightarrow 4h\,u(0) + \frac{8}{3}h^3 u''(0) + \frac{5}{9}h^5 u^{(4)}(0) + \frac{17}{270}h^7 u^{(6)}(0)$$

$$|E^h| = \left(\frac{5}{9} - \frac{8}{15}\right)h^5 u^{(4)}(0) + \left(\frac{17}{270} - \frac{16}{315}\right)h^7 u^{(6)}(0)$$

$$= \boxed{\frac{1}{45}h^5 u^{(4)}(0) + \frac{23}{1890}h^7 u^{(6)}(0)}$$

Boole:

$$I_B = \frac{16\, I_{S,h} - I_{S,2h}}{15}$$

$$\Rightarrow |E_B| = \frac{16|E^h| - |E^{2h}|}{15}$$

$$= \Big[16\cdot\cancel{\tfrac{1}{45}h^5 u^{(4)}(0)} + 16\cdot\frac{23}{1890}h^7 u^{(6)}(0) - \cancel{\tfrac{16}{45}h^5 u^{(4)}(0)} - \frac{64}{945}h^7 u^{(6)}(0)\Big]/15$$

$$= \left[\left(\frac{184}{945} - \frac{64}{945}\right)h^7 u^{(6)}(0)\right]/15$$

$$= \frac{8}{945}h^7 u^{(6)}(0) \qquad h = \frac{(b-a)}{4}$$

$$= (b-a)\cdot\frac{2u^{(6)}(0)}{945}\cdot h^6$$

$$= (b-a)\frac{2C_6}{945}h^6$$

ex 51.

$u'(x) = \sin(x) + u(x) \qquad x \in [0;1] \quad u(0) = 0$

- Solution homogène :

$u'(x) - u(x) = 0 \qquad y'(x) + a(x)y(x) = 0$

$y(x) = k\, e^{-\int a(x)\,dx}$

$\Rightarrow$ solution de la forme $u^h(x) = A e^x$

- Solution particulière $u^P(x) = (C\cos(x) + B\sin(x))$

$u'(x) - u(x) = \sin(x) \Leftrightarrow -C\sin(x) + B\cos(x) - C\cos(x) - B\sin(x) = \sin(x)$

$\Rightarrow \begin{cases} B - C = 0 \\ -B - C = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = -\frac{1}{2} \\ C = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow u^P(x) = -\frac{1}{2}\cdot(\cos(x) + \sin(x))$

- Solution : $u(x) = u^h(x) + u^P(x) = Ae^x - \frac{1}{2}\cdot(\cos(x) + \sin(x))$

Or $u(0) = 0 \Rightarrow A - \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

$u(x) = \frac{1}{2}\cdot(e^x - \cos(x) - \sin(x))$.

Euler explicite : $U_{i+1} = U_i + h.(\sin(x_i) + U_i)$

Euler implicite : $U_{i+1} = U_i + h.(\sin(X_{i+1}) + U_{i+1})$

$U_{i+1} = \dfrac{(U_i + h\sin(X_{i+1}))}{(1-h)} \Rightarrow$ on code U_{i+1}

Voir code python pour la convergence : les méthodes sont bien d'ordre 1 !

ex 52.

$u'(x) = 5.(x - u(x)) + 1 \qquad u(0) = 1 \qquad x \in [0; 4]$.

1. L'équation est linéaire : seulement des termes en $u(x)$ et x.
2. L'équation n'est pas homogène : $u'(x) + 5u(x) = 5x + 1$ "$\neq 0$"
3. • Solution homogène : $u'(x) + 5u(x) = 0$

   Equation caractéristique $\alpha + 5 = 0$

   $\alpha = -5$

   Solution sous la forme $u^h(x) = A e^{-5x}$

   • Solution particulière : $u^p(x) = Bx + C$

   $\Rightarrow (Bx + c)' + 5.(Bx + C) = 5x + 1$

   $$\Rightarrow \begin{cases} B + 5C = 1 \\ 5B = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ B = 1 \end{cases}$$

   $u^p(x) = x$

   • Solution $u(x) = u^h(x) + u^p(x) = A e^{-5x} + x$

   Or $u(0) = 1 \Rightarrow A = 1 \qquad u(x) = e^{-5x} + x$

4. $u'(x) = f(x, u(x)) = 5.(x - u(x)) + 1$

$$J = \frac{\partial f}{\partial u}(x, u(x)) = -5$$ le x est considéré comme une constante !

• Euler explicite $|1 + hJ| < 1$ (page 100) $\quad |1 - 5h| < 1$ $\begin{cases} 1-5h < 1 : h > 0 \\ 1-5h > -1 : h < \frac{2}{5} \end{cases}$

• Euler implicite : $\left|\frac{1}{1-hJ}\right| < 1$ (page 104) $\quad \left|\frac{1}{1+5h}\right| < 1 \Rightarrow$ toujours vrai car $1 + 5h > 1$ $(h > 0)$

• Runge-Kutta : région de stabilité de Runge-Kutta d'ordre n est la même que la région de stabilité de Taylor d'ordre n (page 102)

$$\Rightarrow \left|1 + Jh + \frac{h^2J^2}{2!} + \frac{h^3J^3}{3!} + \frac{h^4J^4}{4!}\right| < 1 \Rightarrow h < 0,557 \text{ (calculatrice)}.$$

ex 53.

$$u'(x) = -x e^{-u(x)} \qquad x \in [0,1] \quad u(0) = 0$$

• On pose $f(x) = e^{-u(x)}$

$$f'(x) = -u'(x).e^{-u(x)} = x.f(x).f(x) = x.f^2(x)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} = \int x\,dx \Rightarrow \int \frac{df}{f^2} = \int x\,dx$$

$$\frac{-1}{f(x)} = \frac{x^2}{2} + C. \Rightarrow f(x) = \frac{-2}{x^2+C}$$

$$\Rightarrow u(x) = -\ln\left(\frac{-2}{x^2+C}\right) = \ln\left(\frac{x^2+C}{-2}\right) \quad \text{or } u(0)=0 \Rightarrow C = -2$$

$$= \ln\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)$$

$$J(x) = \frac{\partial f(x,u(x))}{\partial u} = x e^{-u(x)} \qquad f(x,u) = -x e^{-u}$$

$$= \frac{-2x}{x^2-2} = \frac{x}{1-\frac{x^2}{2}} \qquad x \in [0;1].$$

On constate que le jacobien $J(x) > 0$: $x \in [0;1]$.

$\Rightarrow$ problème instable

La borne d'erreur pour Euler explicite est (après n pas) :

$$|e^h(x_n)| = a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2 a_1 e_1 + a_{n-1}a_{n-2}\cdots a_2 e_2 + \dots + a_{n-1}e_{n-1} + e_n$$

où $a_i = (1 + hJ_i)$ facteur de multiplication (page 99).

e_i l'erreur commise au pas i

On définit $J = \max_i J_i$ et $e = \max_i e_i$

$$\Rightarrow |e^h(x_n)| \leqslant (1 + (1+hJ) + (1+hJ)^2 + \dots + (1+hJ)^{n-1})\,e$$

identité $\sum_{i=0}^{n-1} a.(1+a)^i = (1+a)^n - 1$

$$\leqslant \frac{(1+hJ)^n - 1}{hJ}\,e$$

$$e \leqslant \frac{h^2}{2}\underbrace{u''(\xi_{i+1})}_{C} \quad \text{erreur locale pour Euler explicite.}$$

$$\leqslant \frac{(1+hJ)^n - 1}{hJ} \cdot \frac{h^2}{2}\,C$$

$$\leq \frac{(1+J/n)^n - 1}{J} \cdot \frac{C}{2} h \qquad \text{car} \quad h = \frac{1}{n} \qquad (x \in [0;1]).$$

Développement de Taylor de e^x d'ordre 1 autour de l'origine

$u(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad u(a) = u(0) + a\,u'(0) = 1 + a$

Si $a = \frac{J}{n} \qquad \left(1 + \frac{J}{n}\right) \leq e^{J/n}$

$$|e^h(x_n)| \leq \frac{(e^{J/n})^n - 1}{J} \cdot \frac{C}{2} h$$

$$\leq \frac{e^J - 1}{J} \cdot \frac{C}{2} h$$

Or $J = \max_i |J_i| = \max |x e^{-u(x)}| \qquad$ or $x \in [0;1]$

$= 2 \qquad$ maximum quand $x = 1$ et $u(x) = \ln(\frac{1}{2}) \qquad u(x) \in [\ln(\frac{1}{2}); 0]$

$$C = \max_{x,u} |u''(x)| = \max_{x,u} |-e^{-u} - x^2 e^{-2u}|$$

$$= 6$$

On peut alors conclure que $|e^h(x_{100})| \leq \frac{e^2 - 1}{2} \cdot \frac{6}{2} \cdot h \qquad h = \frac{1}{100}$

$\leq 0{,}09583. \qquad \square.$

Ex 54.

$$U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2} \cdot (F_i + F_{i+1})$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, u(x)) = u(x_{i+1}) - u(x_i) \qquad \text{car} \quad f(x, u(x)) = u'(x).$$

On utilise la méthode des trapèze pour approximer l'intégrale (page 48 pour la formule)

$$\int_{-h/2}^{h/2} u(x)\,dx \simeq \frac{h}{2} \cdot (U_{-h/2} + U_{h/2})$$

$$\Rightarrow \frac{h}{2} \cdot \Big(f(X_i, U_i) + f(X_{i+1}, U_{i+1}) \Big) = U_{i+1} - U_i$$

$$\Rightarrow U_{i+1} = U_i + \frac{h}{2} \cdot (F_i + F_{i+1}) \quad \square.$$