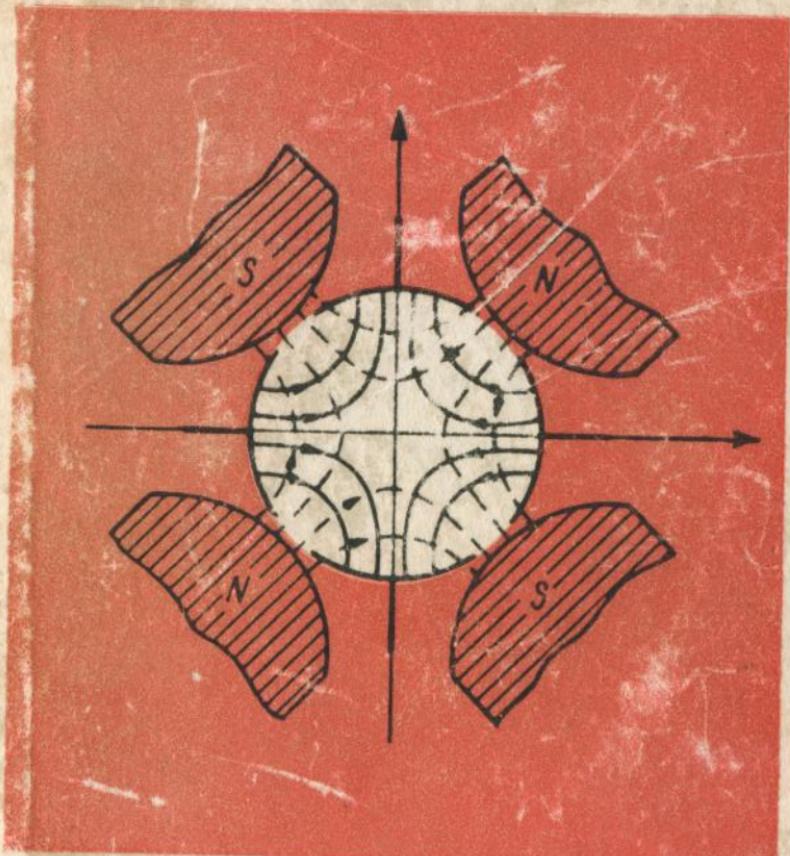


355

С. Я. ЯВОР

- 224 -

# ФОКУСИРОВКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ КВАДРУПОЛЬНЫМИ ЛИНЗАМИ



## ВВЕДЕНИЕ

**Фокусировка заряженных частиц квадрупольными линзами.** С. Я. Явор. М., Атомиздат, 1968 г.

Книга посвящена изложению результатов теоретического и экспериментального исследования поведения заряженных частиц в квадрупольных линзах. Рассмотрены поля электрических и магнитных квадрупольных линз, их электронно-оптические свойства в приосевой области, а также геометрические и хроматические aberrации. Самостоятельный раздел посвящен вопросам построения систем из квадрупольных линз. Описаны конструктивные особенности электрических и магнитных линз и методы их экспериментального исследования. Рассмотрено применение квадрупольных линз в различных устройствах.

Книга рассчитана на научных работников и инженеров, занятых расчетом и конструированием электрофизической аппаратуры. Она может быть также полезна студентам и аспирантам соответствующих специальностей.

Таблиц — 7, иллюстраций — 69, библиографии — 200.

Квадрупольная, или четырехполюсная линза — это электронно-оптический элемент, поле которого (электрическое или магнитное) имеет две плоскости симметрии и две антисимметрии. В симметрично расположенных относительно этих плоскостей точках скалярные потенциалы электрического или магнитного полей равны по абсолютной величине, но в первом случае они равны также по знаку, а во втором — противоположны.

Наиболее распространены квадрупольные линзы, об разованные четырьмя одинаковыми, симметрично расположеннымми электродами (электрическая линза) или полюсами (магнитная линза). При этом полярность соседних электродов (полюсов) противоположна, а накрест лежащих — одинакова. Однако существуют и другие типы квадрупольных линз, например неявнополюсные.

На рис. 1, а, б дано схематическое изображение электрической и магнитной квадрупольных линз. Электроды первой линзы изоляторами скреплены с каркасом. Полюса магнитной линзы, на которые надеты подмагничивающие обмотки, соединены железным ярмом. Форма электродов и полюсов может быть разной. Линзы имеют четыре плоскости геометрической симметрии (см. рис. 1): две, проходящие через середины электродов (полюсов), и две — через середины зазоров между ними. Пересечение этих плоскостей образует ось линзы.

На рис. 2 изображена картина поля в перпендикулярном оси сечении электрической квадрупольной линзы. Если рассматривать заштрихованные участки не как электроды, а как наконечники магнитных полюсов, и обозначения  $\pm V$  заменить  $N$  и  $S$ , то рисунок будет соответствовать поперечному сечению магнитной линзы.

Как видно из рис. 2, горизонтальная и вертикальная плоскости — это плоскости симметрии поля. Силовые ли-

ний лежат в них, а эквипотенциальные перпендикулярны к ним. Плоскости, повернутые к ним на угол  $45^\circ$  представляют собой плоскости антисимметрии. Силовые линии перпендикулярны к этим плоскостям, а эквипотенциальные лежат в них. Поле на оси линзы равно нулю.

Если в электрическом поле начальная скорость частицы лежит в плоскости симметрии, то и вся траектория будет

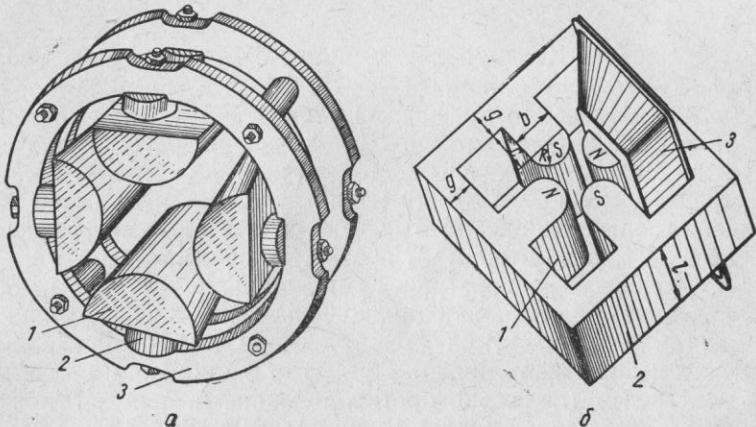


Рис. 1. Квадрупольные линзы с электродами и полюсами в форме частей круглых цилиндров:  
а) электрическая линза: 1 — электрод; 2 — изолятор; 3 — каркас;  
б) магнитная линза: 1 — полюс; 2 — ярмо; 3 — обмотка. На рисунке показана только одна из четырех обмоток.

лежать в ней, так как нет сил, способных вывести частицу из этой плоскости. В магнитном поле траектории будут плоские для частиц, начальная скорость которых лежит в плоскости антисимметрии, так как не имеется сил, перпендикулярных ей. Все траектории с другими направлениями начальных скоростей не будут плоскими кривыми. Плоскость, в которой лежит траектория, обычно называется средней. Для электрического поля — это плоскость симметрии, для магнитного — антисимметрии.

Главная особенность квадрупольных линз по сравнению с осесимметричными состоит в том, что в основной их части (исключая края) силовые линии поля направлены поперек фокусируемого пучка заряженных частиц. Такие

электронно-оптические элементы называются поперечными.

В осесимметричных линзах напряженность поля в рабочей (приосевой) области составляет малые углы с направлением скорости частиц, силовые линии идут в основном вдоль пучка заряженных частиц. Такого рода электронно-оптические элементы называются продольными.

Поперечные поля сильнее действуют на изменение направления частиц. В продольных элементах основная часть поля не оказывает прямого фокусирующего действия. Фокусировка, происходящая за счет малых радиальных составляющих поля и скорости частиц, называется фокусировкой второго порядка. В поперечных системах почти все поле создает поперечно направленные силы. Фокусировка в таких системах — первого порядка. Эти системы особенно пригодны для воздействия на частицы с большой энергией. Поэтому квадрупольные линзы иногда называют линзами с сильной фокусировкой.

Чтобы качественно выяснить действие квадрупольной линзы на пучок заряженных частиц, рассмотрим движение положительно заряженного иона, входящего в это поле со скоростью, параллельной оси линзы. Положим для простоты, что линза электрическая. На ион, движущийся по оси, никакие силы не действуют. Его траектория прямолинейна и совпадает с осью линзы. Назовем ее осевой траекторией пучка. Если ион вступает в поле в точке  $P_1$  (см. рис. 2), то на него действует сила, совпадающая по направлению с напряженностью электрического поля и отклоняющая его к оси. Ион, попадающий в поле в точке  $P_2$ , отклоняется от оси. Следовательно, в горизонтальной плоскости симметрии поле собирает положительно заряженные частицы, а в вертикальной — рассеивает их. Если ион находится в

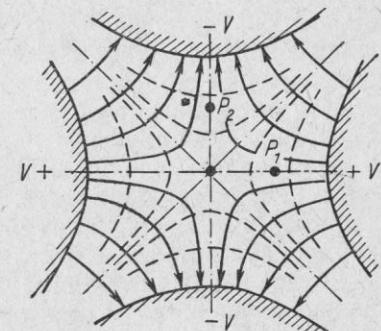


Рис. 2. Поле квадрупольной электрической линзы с электродами в форме гиперболических цилиндров. Силовые линии — сплошные, эквидистантные линии — штриховые.

точке, не лежащей в этих плоскостях, то на него, как видно из рис. 2, действует сила, отклоняющая его от горизонтальной плоскости и приближающая к вертикальной. Если знак заряда у частицы отрицательный, то действие поля противоположное.

Таким образом, если в электрическую квадрупольную линзу входит ионный пучок с круглым поперечным сечением, то он постепенно деформируется, превращается в эллипс, а затем сжимается в вертикальную линию.

Аналогичное воздействие испытывает пучок заряженных частиц в поле магнитной квадрупольной линзы. Однако так как сила, действующая на него в этой линзе, направлена не параллельно напряженности поля, а перпендикулярно ей и направлению скорости, то пучок сжимается в отрезок прямой, наклоненной под углом  $45^\circ$  к горизонтали. По какой из двух прямых, составляющих с горизонтом угол в  $45^\circ$ , будет направлена линия — зависит от знака зарядов и направления осевой траектории частицы по отношению к полю линзы.

В отличие от осесимметричных линз, сжимающих пучок заряженных частиц равномерно со всех сторон и создающих в первом приближении точечное изображение параллельного пучка, а также пучка, выходящего из точки, квадрупольные линзы создают линейное изображение его. Если с осесимметричными линзами сопоставить круглые оптические линзы, то квадрупольные аналогичны цилиндрическим. Они также создают астигматический пучок.

Обычно требуется собрать пучок во всех направлениях, а иногда и сфокусировать выходящие из точечного источника частицы в точку. Поэтому в основном применяются не отдельные квадруполи, а сочетание нескольких из них. Простейшая система, которая может собирать пучок во всех направлениях, — это две последовательно расположенные на одной оси квадрупольные линзы, причем полярность их такова, что за собирающей плоскостью первой линзы следует рассеивающая плоскость второй. Такую систему называют дублетом. Линзы, составляющие дублет, оказывают на пучок заряженных частиц попеременно фокусирующее и дефокусирующее воздействие. При определенных условиях дублет в целом служит собирающей системой. Это связано с тем, что независимо от порядка следования линз частицы пучка проходят собирающую плоскость на большем расстоянии от оси, чем рассеиваю-

щую (рис. 3). С увеличением же расстояния от оси поле линз растет, а следовательно, увеличиваются силы, действующие на частицу. Для фокусировки частиц используют и более сложные системы, состоящие из большего числа квадрупольей.

На четырехполюсные электронно-оптические системы было обращено внимание уже в 1947 г. в работе [1]. Широкую известность они приобрели в 1952 г., после работ Кристофилоса, Куранта, Ливингстона и Снайдера [2, 3],

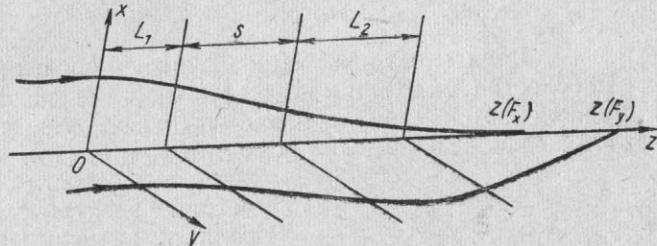


Рис. 3. Фокусировка параллельного пучка заряженных частиц дублетом из квадрупольных линз.  $L_1$  — длина поля первой линзы;  $L_2$  — второй;  $s$  — расстояние между ними. В плоскости  $xOz$  первая линза собирает, вторая — рассеивает; в плоскости  $yOz$  первая линза рассеивает, вторая — собирает.

в которых был предложен принцип «сильной фокусировки» заряженных частиц применительно к циклическому ускорителю. В статье [3] рассмотрено применение этого принципа к фокусировке пучка заряженных частиц с прямолинейной осью. В ней указано на возможность суммарного фокусирующего действия системы из последовательно расположенных фокусирующих и дефокусирующих полей, как, например, в дублете из квадрупольных линз. Фокусировка электрическими квадрупольными линзами и применение их для компенсации расталкивающих сил в линейном ускорителе рассмотрены в работе [4]. Квадрупольные линзы нашли широкое применение для формирования пучков заряженных частиц в многочисленных приборах и установках. Вопросы, связанные с квадрупольными линзами, рассмотрены в обзорах и книгах [5]—[22].

Целью данной книги является по возможности полное рассмотрение свойств квадрупольных линз и методов их исследования с использованием последних данных в этой области.

## ПОЛЯ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ

Поля электрической и магнитной линз имеют по две плоскости симметрии и по две плоскости антисимметрии. Расположим систему координат (рис. 4) таким образом, чтобы ось  $z$  совпадала с осью линзы, а оси  $x$  и  $y$  лежали в плоскости симметрии электрического поля и антисимметрии магнитного (на рисунке поля линз пространственно совмещены). При этом координатные плоскости  $xOz$  и  $yOz$  в обоих случаях совпадают со средними плоскостями линз.

Представим распределения электрического  $\Phi$  и магнитного  $\omega$  скалярных потенциалов квадрупольных линз в окрестности их осей в виде ряда по степеням  $x$  и  $y$ , причем коэффициенты этого ряда будут функциями  $z$ .

Рис. 4. Схема комбинированной квадрупольной линзы с наложенными электрическим (силовые линии сплошные) и магнитным (силовые линии штриховые) полями:  
1 — магнитный полюс; 2 — электрод.

Если на электроды электрической линзы поданы чередующиеся потенциалы  $\pm V$ , то потенциал в пространстве  $xOz$  и  $yOz$ . Следовательно, потенциальная функция не должна изменяться в результате замены  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$ , и в ее разложении будут отсутствовать нечетные степени  $x$  и  $y$ . Кроме того, потенциальная функция должна менять

знак при одновременной замене  $x$  на  $y$  и  $y$  на  $x$ . Поэтому распределение электрического потенциала имеет следующий вид:

$$\frac{\Phi(x, y, z)}{V} = \alpha_2 \frac{x^2 - y^2}{r_E^2} + \alpha_4 \frac{x^4 - y^4}{r_E^4} + \alpha_6 \frac{x^6 - y^6}{r_E^6} + \beta_6 \frac{x^2 y^2 (x^2 - y^2)}{r_E^6} \dots, \quad (1.1)$$

где  $r_E$  — расстояние от оси до электрода;  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  — некоторые функции  $z$ .

Распределение потенциала в области, не имеющей зарядов, описывается уравнением Лапласа. Для определения  $\alpha_i$  и  $\beta_i$  подставим выражение (1.1) в уравнение Лапласа, записанное в декартовой системе координат:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0, \quad (1.2)$$

и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях  $x$  и  $y$ . В результате получим

$$\alpha_4 = -\frac{r_E^2}{12} \frac{d^2 \alpha_2}{dz^2}, \quad \beta_6 = -15\alpha_6 + \frac{r_E^4}{24} \frac{d^4 \alpha_2}{dz^4}. \quad (1.3)$$

Таким образом,

$$\frac{\Phi(x, y, z)}{V} = \frac{k_2(z)}{r_E^2} (x^2 - y^2) - \frac{1}{12r_E^2} \frac{d^2 k_2(z)}{dz^2} (x^4 - y^4) + \frac{k_6(z)}{r_E^6} (x^6 - y^6) - \frac{1}{r_E^6} \times \left[ 15k_6(z) - \frac{r_E^4}{24} \frac{d^4 k_2(z)}{dz^4} \right] \times x^2 y^2 (x^2 - y^2) + \dots \quad (1.4)$$

Здесь  $k_2(z)$  и  $k_6(z)$  — функции, зависящие от формы электродов. Они должны иметь такую величину, чтобы на электродах потенциал  $\Phi$  принимал значения  $\pm V$ .

В случае несимметричной по отношению к земле подачи напряжения на электроды линзы, когда один электрод заземлен, а потенциал другого равен  $\pm 2V$ , потенциал на оси линзы отличается от нуля и для середины линзы к правой части выражения (1.4) нужно прибавить постоянную  $\pm V$  соответственно. Кроме того, на концах линзы симметрия

поля искажается, так как там появляется продольная составляющая напряженности поля на оси.

Если длина электродов линзы  $l$  в несколько раз превышает расстояние между ними  $2r_E$ , то внутри линзы на достаточноном расстоянии от ее концов поле практически не меняется с изменением  $z$ . В этой области коэффициенты ряда (1.4) не зависят от  $z$  ( $k_2(z) = K_2$ ,  $k_6(z) = K_6$ , где  $K_2$  и  $K_6$  — некоторые постоянные), и выражение для разложения потенциала значительно упростится:

$$\frac{\phi(x, y)}{V} = \frac{K_2}{r_E^2} (x^2 - y^2) + \frac{K_6}{r_E^6} (x^2 - y^2) (x^4 + y^4 - 14x^2y^2) + \dots \quad (1.5)$$

Аналогичным образом найдем в виде ряда распределение магнитного скалярного потенциала. Для указанного расположения осей потенциал меняет знак с изменением  $x$  на  $-x$  и  $y$  на  $-y$ , т. е. в разложении отсутствуют четные степени  $x$  и  $y$ . При одновременной замене  $x$  на  $y$  и  $y$  на  $x$  потенциальная функция не меняет знака. Принимая во внимание такую симметрию поля и используя для определения коэффициентов ряда уравнение Лапласа (действительное для области, в которой отсутствуют токи), найдем

$$\begin{aligned} \frac{\omega(x, y, z)}{2W} &= \frac{n_2(z)}{r_M^2} xy - \frac{1}{12r_M^2} xy \frac{d^2 n_2(z)}{dz^2} (x^2 + y^2) + \\ &+ \frac{n_6(z)}{r_M^6} xy (x^4 + y^4) - \frac{1}{3r_M^6} \times \\ &\times \left[ 10n_6(z) - \frac{r_M^4}{24} \frac{d^4 n_2(z)}{dz^4} \right] x^3 y^3 + \dots, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $r_M$  — расстояние от оси до полюса; функции  $n_2(z)$  и  $n_6(z)$  зависят от формы полюсов и нормируются таким образом, чтобы скалярный магнитный потенциал  $\omega$  принимал на полюсах заданные значения  $\pm W$ . Предполагается, что поверхности полюсов эквипотенциальны (на них  $W = \text{const}$ ). Последнее осуществляется достаточно точно при большой магнитной проницаемости материала полюсов.

Связем значения магнитного потенциала на полюсе с такой легко измеряемой величиной, как сила тока в обмот-

ках линзы. Разность магнитных потенциалов между двумя полюсами противоположной полярности равна

$$2W = \int_A^B H_l dl. \quad (1.7)$$

Здесь в правой части уравнения — криволинейный интеграл, который берется между точками  $A$  и  $B$ , лежащими на этих полюсах (см. рис. 4);  $H_l$  — проекция напряженности поля на элемент длины контура интегрирования  $dl$ . По закону полного тока интеграл от  $H_l dl$  по замкнутому контуру равен

$$\oint H_l dl = 2 \cdot 0,4 \pi wI, \quad (1.8)$$

где  $wI$  — число ампервитков, приходящееся на один полюс. Интеграл берется по замкнутому контуру, проходящему через два полюса с противоположной полярностью и охватывающему витки двух подмагничивающих обмоток. Таким образом,  $w$  соответствует той части ампервитков катушки возбуждения, которая идет на проведение магнитного потока через воздушный промежуток. Длина пути в воздушном зазоре между полюсами сравнима по величине с длиной пути в железе полюсов и ярма. Поэтому, принимая во внимание большую магнитную проницаемость железа, можно с известным приближением считать, что падение потенциала в основном сосредоточено в зазоре. Тогда

Рядов магнитных полюсов  $\rightarrow W = 0,4 \pi wI. \quad (1.9)$

Если магнитным сопротивлением железа нельзя пренебречь, то в правую часть этого выражения следует ввести коэффициент, величина которого меньше единицы:

$$W = 0,4 \pi \sigma wI, \quad \sigma < 1. \quad (1.10)$$

Для области линзы, в которой поле не зависит от координаты  $z$ , распределение магнитного потенциала имеет вид

$$\frac{\omega(x, y)}{2W} = \frac{N_2}{r_M^2} xy + \frac{N_6}{r_M^6} xy \left( x^4 + y^4 - \frac{10}{3} x^2 y^2 \right) + \dots, \quad (1.11)$$

где  $N_2$  и  $N_6$  — постоянные, определяемые формой полюсов.

Используя соотношения (1.4) и (1.6), напишем распределение потенциалов в приосевой области линз, ограничившись первыми членами ряда:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= k_2(z) \frac{V}{r_E^2} (x^2 - y^2); \\ \omega &= n_2(z) \frac{2W}{r_M^2} xy. \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

(1.13)

Как видно из выражений (1.12) и (1.13), эквипотенциальные линии обоих полей вблизи оси  $z$  в плоскостях, перпендикулярных ей, имеют форму равнобочных гипербол, независимо от конфигурации создающих поле электродов и полюсов. Проекции на эти плоскости силовых линий также гиперболы.

Выражения для напряженности полей в приосевой области имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2k_2(z) \frac{V}{r_E^2} x; \\ E_y &= -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2k_2(z) \frac{V}{r_E^2} y; \\ E_z &= -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -k_2'(z) \frac{V}{r_E^2} (x^2 - y^2) \end{aligned} \right\} \quad (1.14)$$

и

$$\left. \begin{aligned} H_x &= -\frac{\partial \omega}{\partial x} = -2n_2(z) \frac{W}{r_M^2} y; \\ H_y &= -\frac{\partial \omega}{\partial y} = -2n_2(z) \frac{W}{r_M^2} x; \\ H_z &= -\frac{\partial \omega}{\partial z} = -2n_2'(z) \frac{W}{r_M^2} xy. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Из уравнений (1.14) и (1.15) следует, что поперечные составляющие напряженностей полей зависят линейно от координат  $x$  и  $y$ , а продольные составляющие имеют следующий порядок малости по сравнению с поперечными. В поле, не зависящем от координаты  $z$  (двумерное поле), продольные составляющие равны нулю. В приосевой области такого поля

$$\left. \begin{aligned} \text{grad } E_x &= \mathbf{i} \frac{\partial E_x}{\partial x} = -\mathbf{i} 2K_2 \frac{V}{r_E^2} = -\mathbf{i} G_E; \\ \text{grad } E_y &= \mathbf{j} \frac{\partial E_y}{\partial y} = \mathbf{j} 2K_2 \frac{V}{r_E^2} = \mathbf{j} G_E, \end{aligned} \right\} \quad (1.16)$$

т. е. градиенты компонент напряженности электрического поля взаимно перпендикулярны и равны по абсолютной величине. Градиенты составляющих напряженности магнитного поля в приосевой области имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \text{grad } H_x &= \mathbf{j} \frac{\partial H_x}{\partial y} = -\mathbf{j} 2N_2 \frac{W}{r_M^2} = -\mathbf{j} G_M; \\ \text{grad } H_y &= \mathbf{i} \frac{\partial H_y}{\partial x} = -\mathbf{i} 2N_2 \frac{W}{r_M^2} = -\mathbf{i} G_M. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Для них также верно предыдущее утверждение.

Распределение потенциалов квадрупольных линз можно представить в ином виде, разложив их в ряд по расстоянию от оси линзы  $r$ . В цилиндрической системе координат  $r$ ,  $\psi$ ,  $z$  уравнение Лапласа для некоторой потенциальной функции  $\chi$  имеет вид

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \psi^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.18)$$

Общее решение уравнения (1.18), принимающее в нуле конечное значение, записывается так [23]:

$$\chi(r, \psi, z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{\mu!}{4^v v! (\mu+v)!} r^{\mu+2v} \times [\Phi_{\mu}^{(2v)} \cos \mu \psi + \Omega_{\mu}^{(2v)} \sin \mu \psi], \quad (1.19)$$

где  $\Phi_{\mu}$  и  $\Omega_{\mu}$  — некоторые функции, зависящие от  $z$ .

Если поля имеют две плоскости симметрии, то распределение потенциала должно удовлетворять следующим условиям периодичности:

$$\left. \begin{aligned} \chi(\psi \pm k\pi) &= \chi(\psi); \\ \chi[\psi \pm (k + 1/2)\pi] &= -\chi(\psi); \end{aligned} \right\} \quad (1.20)$$

Отсюда следует, что отношение  $\mu/2$  — величина нечетная, т. е.

$$\mu = 2(2n - 1), \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.21)$$

В связи с различным расположением электрического и магнитного полей относительно системы координат можно написать (отсчет угла  $\psi$  начнем от оси  $x$ )

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\psi) &= \varphi(-\psi); \\ \omega(\psi) &= -\omega(-\psi). \end{aligned} \right\} \quad (1.22)$$

Учитывая это, получим из решения (1.19) выражения для распределений электрического и магнитного потенциалов квадрупольных линз:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \psi, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{[2(2n-1)]!}{4^v v! [2(2n-1)+v]!} \times \\ &\times \Phi_2^{(2v)}(z) r^{2(2n-1+v)} \cos 2(2n-1)\psi = \Phi_2(z) r^2 \cos 2\psi - \\ &- \frac{1}{12} \Phi_2''(z) r^4 \cos 2\psi + \left[ \frac{1}{384} \Phi_2^{IV}(z) \cos 2\psi + \right. \\ &\left. + \Phi_6(z) \cos 6\psi \right] r^6 - \dots; \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} \omega(r, \psi, z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{[2(2n-1)]!}{4^v v! [2(2n-1)+v]!} \times \\ &\times \Omega_2^{(2v)}(z) r^{2(2n-1+v)} \sin 2(2n-1)\psi = \Omega_2(z) r^2 \sin 2\psi - \\ &- \frac{1}{12} \Omega_2''(z) r^4 \sin 2\psi + \left[ \frac{1}{384} \Omega_2^{IV}(z) \sin 2\psi + \Omega_6(z) \sin 6\psi \right] r^6 - \dots \end{aligned} \quad (1.24)$$

Оба ряда содержат только четные гармоники и четные степени  $r$ .

Соотношения между коэффициентами разложений в ряд электрического потенциала (1.4) и (1.23) можно найти по формуле Муавра, привавяя члены с одинаковыми степенями  $x$  и  $y$ . Аналогичным образом из уравнений (1.6) и (1.24) можно получить связь между  $\Omega_i$  и  $n_i$  для магнитного скалярного потенциала. Например:

$$\Phi_2(z) = \frac{V}{r_E^2} k_2(z); \quad (1.25a)$$

$$\Omega_2(z) = \frac{W}{r_M^2} n_2(z). \quad (1.25b)$$

Для области, в которой поле не меняется с изменением координаты  $z$ , выражения для скалярных потенциалов упрощаются:

$$\varphi = \Phi_2 r^2 \cos 2\psi + \Phi_6 r^6 \cos 6\psi + \Phi_{10} r^{10} \cos 10\psi + \dots; \quad (1.26a)$$

$$\omega = \Omega_2 r^2 \sin 2\psi + \Omega_6 r^6 \sin 6\psi + \Omega_{10} r^{10} \sin 10\psi + \dots \quad (1.26b)$$

Вблизи оси линзы распределения потенциалов и поперечные составляющие напряженностей полей имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \Phi_2(z) r^2 \cos 2\psi; \\ E_r &= -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -2\Phi_2(z) r \cos 2\psi; \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

$$\left. \begin{aligned} E_\psi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \psi} = -2\Phi_2(z) r \sin 2\psi; \\ \omega &= \Omega_2(z) r^2 \sin 2\psi; \\ H_r &= -\frac{\partial \omega}{\partial r} = -2\Omega_2(z) r \sin 2\psi; \\ H_\psi &= -\frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \psi} = -2\Omega_2(z) r \cos 2\psi. \end{aligned} \right\} \quad (1.28)$$

Из выражений (1.27) и (1.28) видно, что поперечные составляющие напряженностей полей растут пропорционально расстоянию от оси. В параксиальной области двумерных полей абсолютная величина напряженности поля не зависит от угла  $\psi$ :

$$\left. \begin{aligned} |E| &= \sqrt{E_r^2 + E_\psi^2} = 2\Phi_2 r = G_E r; \\ |H| &= \sqrt{H_r^2 + H_\psi^2} = 2\Omega_2 r = G_M r. \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

Градиент ее — величина постоянная.

Расчет распределения поля квадрупольной линзы в аналитическом виде или нахождение коэффициентов в его разложении в зависимости от формы электродов и полюсов значительно упрощается, если рассматривать поле как двумерное.

Наиболее простой случай — поле, напряженность которого линейно растет с увеличением радиуса во всем пространстве. Эквипотенциальные поверхности такого двумерного поля — гиперболические цилиндры (см. рис. 2). Следовательно, если придать электродам или полюсам форму гиперболических цилиндров и совместить их с соответствующими эквипотенциальными поверхностями, то получим поле с постоянным градиентом.

Гиперболы — это идущие в бесконечность кривые, лежащие рядом ветви которых асимптотически сближаются,

поэтому практически выполнить электроды или полюса такой формы невозможно. Необходимо где-то оборвать гиперболические поверхности. Это диктуется конструктивными соображениями, (например, допустимыми габаритами линзы и ее весом). Кроме того, в электрической линзе точки обрыва определяются возможностью электрического пробоя между электродами, а в магнитной — необходимостью разместить подмагничивающую обмотку. Обрыв гиперболы приводит к относительному ослаблению поля на краях рабочей области. Для его компенсации необходимо изменить форму профиля, добавив участки, выступающие за гиперболу в сторону рабочей области. Все сказанное, с учетом трудности изготовления профиля гиперболической формы, приводит зачастую к замене его профилями другой конфигурации.

Более просты в изготовлении электроды и полюсные наконечники в виде круглых цилиндров или их частей. Можно показать, что замена отрезка гиперболы, ограничивающей электрод или полюсной наконечник дугой окружности некоторого оптимального радиуса  $R$ , не вызовет больших искажений поля линзы. Для нахождения оптимального радиуса и оценки вносимых искажений воспользуемся методами теории функций комплексного переменного. Эти методы очень плодотворны для расчета двумерных полей. Исследуемое поле, которое ввиду сложности очертания его границ не поддается непосредственному расчету, с помощью конформного преобразования заменяют полем с простой формой границ, распределение потенциала которого известно. Задача заключается в нахождении функции, осуществляющей это конформное отображение [24].

Скалярный потенциал электрического или магнитного двумерного поля можно рассматривать как мнимую (или действительную) часть некоторого комплексного потенциала  $w$ , действительная (или мнимая) часть которого — функция потока  $v$ . Если ввести обозначение плоскости  $\zeta = x + iy$ , то из выражения (1.24) (будем говорить для определенности о магнитном поле) в случае двумерного поля получим

$$\omega(x, y) = \operatorname{Im} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2(2n-1)} \zeta^{2(2n-1)}. \quad (1.30)$$

Тогда

$$w(x, y) = v(x, y) + i\omega(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{2(2n-1)} \zeta^{2(2n-1)}. \quad (1.31)$$

Напряженность комплексного поля  $H = H_y + iH_x$  определяется выражением

$$H = -\frac{dw}{d\zeta} = -\left(\frac{\partial \omega}{\partial y} + i \frac{\partial \omega}{\partial x}\right). \quad (1.32)$$

Искомое поле можно определить, если найти функцию, конформно отображающую область на плоскости  $\zeta$ , ограниченную полуосами и образующей полюса, на единичную полосу плоскости  $w$  так, чтобы полуоси перешли в нижнюю граничную прямую со значением  $w = 0$ , а образующая — в верхнюю граничную прямую  $w = 1$ . Конформное преобразование

$$w = \zeta^2 \quad (1.33)$$

переводит область, ограниченную полуосами  $Ox$  и  $Oy$  и гиперболической кривой на полосу с прямолинейными границами [25].

Заменим центральную часть гиперболы, соответствующую реальному профилю полюсного наконечника, близкой к ней дугой окружности с радиусом  $R$ , которая за пределами полюса продолжена отрезками гипербол. Этот прием, удобный с точки зрения нахождения решения, соответствует предположению, что искажения поля, обусловленные конечными размерами полюсов, в обоих случаях одинаковы. В результате конформного преобразования (1.33) ограниченной таким образом области верхняя граница полосы становится криволинейной. Уравнение кривой линии на плоскости определяется формулами

$$v = x^2 - y^2; \quad \omega = 2xy, \quad (1.34a)$$

причем  $x$  и  $y$  связаны уравнением окружности

$$y = \frac{1+\gamma}{\sqrt{2}} - \left[ \gamma^2 - \left( x - \frac{1+\gamma}{\sqrt{2}} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (1.34b)$$

Здесь  $\gamma = R/r_M$  и все линейные размеры даны в единицах  $r_M$ .

Ввиду малого отклонения окружности от гиперболы на длине полюсного наконечника форма верхней границы полосы мало отличается от прямой. Функция, приближенно

отображающая эту область на полосу с прямолинейными границами, может быть найдена вариационными методами теории конформных отображений [24] и имеет вид

$$\tilde{w} = w + \frac{1}{2} \int_{v_A}^{v_B} [1 - \omega(v, \gamma)] \operatorname{th} \frac{\pi}{2} (w - v) dv \quad (1.35)$$

$A$  и  $B$  — точки, соответствующие местам обрыва окружности.

В случае гиперболических полюсов  $\omega(v, \gamma) = 1$ , и интеграл в правой части уравнения (1.35) равен нулю.

Дифференцируя уравнение (1.35) по  $\zeta$  с учетом преобразования (1.33), найдем напряженность поля линзы с круглыми полюсами и его относительную нелинейность.

Выражение для  $h_y = \frac{\delta H_y}{H_y}$  на оси  $x$  имеет вид

$$h_y = \frac{\pi}{4} \int_{v_A}^{v_B} \frac{1 - \omega(v, \gamma)}{\operatorname{ch}^2 \frac{\pi}{2} (x^2 - v)} dv. \quad (1.36)$$

Интеграл в выражении (1.36) вычислен для ряда значений  $\gamma$  [25]. Как показал расчет, оптимальные величины радиуса окружности  $R$  слабо зависят от координат точек обрыва профиля и лежат в пределах  $R = 1, 10 \div 1,15 r_M$ . Эти значения  $R$  несколько больше радиуса кривизны гиперболического электрода в его вершине, равного  $r_M$ . Поэтому оптимальная окружность, касающаяся гиперболы в вершине, пересекает ее затем в двух симметрично расположенных точках. При этом относительная нелинейность поля  $\delta H_y/H_y$  на оси  $x$ , обусловленная отклонением формы профиля от гиперболической, меньше  $2 \cdot 10^{-3}$  при  $x < 0,8$ .

Экспериментальное исследование линз, профиль полюсов которых имеет форму окружности [26] (см. гл. 6), дает оптимальное значение  $R = 1,15 r_M$ .

С помощью последовательных конформных отображений рассчитано поле линзы, профили полюсов (электролов) которой ограничены дугами гипербол и прямыми, идущими из точек обрыва под углом  $\alpha\pi$  к соответствующей оси (рис. 5) [27, 28].

Отображение области на плоскости  $\zeta = x + iy$ , ограниченной образующей полюса и координатными полуосами  $Ox$  и  $Oy$ , на полосу на плоскости  $w$  выполняется тремя эта-

пами. Функция  $\xi_1 = \zeta^2$  переводит часть профильной кривой, соответствующей гиперболе, в отрезок прямой. Прямые, ограничивающие полюс, переходят в кривые второго порядка. Для дальнейшего расчета полученную форму границы приходится упрощать, заменяя кривые второго порядка прямыми, касательными к ним в точках излома образующей. Угол касательной с продолжением отрезка прямой  $\alpha_1\pi$  равен

$$\alpha_1\pi = \alpha\pi + \frac{1}{2} x_0^{-2}. \quad (1.37)$$

Затем используют отображение при помощи функции  $\xi_2 = x_2 + iy_2$ , такой, что

$$\xi_1 = C_1 \int_0^{\xi_2} (\xi_2^2 - C_2^2)^{\alpha_1} (\xi_2^2 - 1)^{-(\alpha_1+1)} d\xi_2, \quad (1.38)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные, определяемые из системы уравнений

$$-1 = C_1 \int_0^{\infty} (y_2^2 + C_2^2)^{\alpha_1} (y_2^2 - 1)^{-(\alpha_1+1)} dy_2; \quad (1.39a)$$

$$x_0^2 - \frac{1}{4} x_0^{-2} = C_1 \int_{C_2}^{\infty} (x_2^2 - C_2^2)^{\alpha_1} (x_2^2 - 1)^{-(\alpha_1+1)} \times dx_2. \quad (1.39b)$$

И окончательно, функция

$$w = -\left(\frac{2}{\pi}\right) \operatorname{Arth} \xi_2 \quad (1.40)$$

переводит полуплоскость  $\xi_2$  в полосу на плоскости  $w$ .

Интегралы (1.38) и (1.39) в элементарных функциях не выражаются. Поэтому был проведен численный расчет на электронно-вычислительной машине, результаты которого представлены на рис. 6 (кривые 1—9). При некоторых упрощающих предположениях интегралы (1.38) и (1.39) могут быть сведены к эллиптическим, что значительно облегчит расчет.

На рис. 6 дана величина относительной нелинейности поля  $\delta H_y/H_y$  на оси  $x$  для различных значений координат точек обрыва  $x_0$  и углов  $\alpha\pi$ . Как следует из рисунка, относительная нелинейность поля сильно зависит от  $x_0$ ,

уменьшаясь с его увеличением. Угол наклона прямых слабо влияет на искажения поля.

Можно уменьшить нелинейность поля, применив полюса, профиль которых состоит из отрезков прямых, — так называемые плоские полюса (*II* и *III* на рис. 5). Их поля рассчитывают методом конформных отображений по теореме Кристоффеля — Шварца [24]. Однако интегралы, определяющие преобразования, в этих случаях также нельзя выразить в элементарных функциях, и для их нахождения используют численные методы.

Условие уменьшения нелинейности поля — равенство нулю коэффициента при втором члене разложения поля ( $N_6 = 0$ ). Тогда получим, что для полюса *II* размер  $L_1 = 0,3202 \text{ m}$ . Для полюса *III* более сложной конфигурации (при подавленной шестой гармонике и заданном размере  $L_3 = 0,6364 \text{ m}$ )  $L_2 = 0,4010 \text{ m}$ . Надо отметить, что никакие варианты размеров плоского полюса не дали возможности одновременно обратить в нуль коэффициент  $N_{10}$  при следующем члене разложения поля.

Из сравнения кривых 10, 11 (см. рис. 6), характеризующих нелинейность этих полей на оси  $x$ , с кривыми, характеризующими нелинейность поля с гиперболическим профилем полюсов, следует, что для координаты точки обрыва гиперболы  $x_0 < 1,1$  нелинейность поля последних всегда больше. Максимальная нелинейность поля рассмотренных линз с плоскими полюсами при  $x \leq 0,9$  равна 5 %. Поэтому ввиду большей простоты изготовления и других конструктивных преимуществ их выгодно применять, когда допустимая нелинейность поля имеет такую величину. При более жестких требованиях к линейности поля необходимо применять линзу с гиперболическими полюсами и большим значением  $x_0$  (см. кривые 7—9 рис. 6) или использовать только часть апертуры линзы с плоскими полюсами.

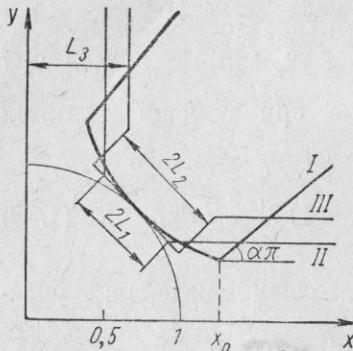


Рис. 5. Полосные наконечники квадрупольных линз:  
I — полюс, ограниченный гиперболической поверхностью и плоскостями; II и III — плоские полюса.

данном размере  $L_3 = 0,6364 \text{ m}$ )  $L_2 = 0,4010 \text{ m}$ . Надо отметить, что никакие варианты размеров плоского полюса не дали возможности одновременно обратить в нуль коэффициент  $N_{10}$  при следующем члене разложения поля.

Измерения полей магнитных квадрупольных линз с плоскими полюсами и подавленной шестой гармоникой поля [29] показали хорошее соответствие с расчетом. Было проведено сравнение поля, создаваемого квадрупольной линзой, имеющей плоские полюса (см. рис. 5, *II*), с полем линзы, полюсные наконечники которой имели форму, изображенную на рис. 7, *a*. Линзы с такими полюсами используют в линейном ускорителе (инжекторе синхротрона в ЦЕРНе). Измерения показали, что у линзы с подавленной шестой гармоникой в плоскости  $xOz$  нелинейность поля  $\delta H/H$  равна 0,5 % на расстоянии 0,66  $r_m$ . У линзы, изображенной на рис. 7, *a*, такая нелинейность возникает на расстоянии 0,53  $r_m$  от центра. Если принять величину 0,5 % за максимально допустимое отклонение поля от линейного, то используемая часть апертуры второй линзы должна быть на 20 % меньше, чем первой. Нелинейность поля второй линзы при  $x = 0,66 \text{ m}$  достигает 1,8 %. Изменение градиента напряженности поля по сравнению с его значением в центре линзы соответственно всюду больше.

При расчетах полюсов более сложной формы, предназначенных для дальнейшего улучшения линейности поля, необходимо учитывать, что в магнитных линзах может иметь место насыщение железа, искажающее поле в реальном случае. Это насыщение различно для разных участков полюса. Особенно велико оно в местах концентрации поля на выступах полюсных наконечников. Кроме того, на распределение поля оказывают влияние обмотки линзы.

Если необходима большая апертура, а требования к линейности поля невелики, удобно применять электроды

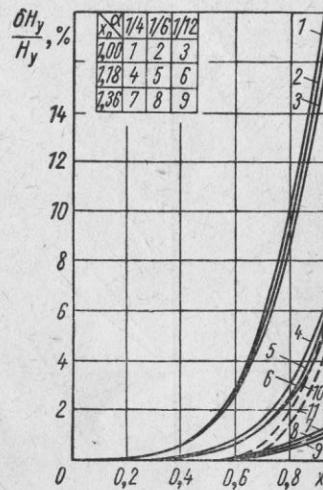


Рис. 6. Относительная нелинейность магнитного поля при различной форме полюсных наконечников. (Параметры кривых 1—9, соответствующих полюсу *I*, приведены в таблице. Штриховые кривые 10 и 11 относятся к полюсам *II* и *III* соответственно.)

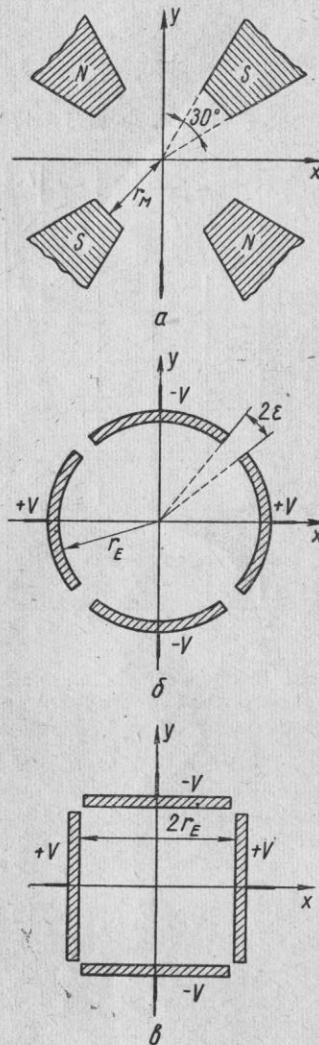


Рис. 7.

*a* — полюсные наконечники трапецидальной формы; *б* — вогнутые электроды; *в* — плоские.

(или полюса) вогнутой формы (см. рис. 7, б). Расчет поля такой линзы можно провести, предположив, что в зазорах между электродами потенциал меняется линейно [30, 31]. Это предположение выполняется тем точнее, чем меньше зазор и толще электроды.

Задачу можно решить методом Фурье [32] — одним из самых общих методов математической физики. Он основан на возможности применения принципа суперпозиции к линейным задачам, вследствие чего любая линейная комбинация решений однородного линейного дифференциального уравнения в частных производных представляет собой решение этого уравнения. Поэтому полное решение уравнения строится как суперпозиция частных решений. Последние имеют вид произведения множителей, каждый из которых — функция только одной переменной, и удовлетворяют однородным условиям задачи. Выполнение неоднородных условий, наложенных на искомую функцию, осуществляется надлежащим выбором входящих в решение параметров.

Распределение потенциала линзы должно удовлетворять уравнению Лапласа и заданным граничным условиям. В данном случае  $\phi(r_E, \psi)$

$= \pm V$  на электродах и линейно меняется от  $+V$  до  $-V$  между ними.

Во внутренней области распределение потенциала имеет вид [см. выражение (1.23) при  $v = 0$ ].

$$\varphi(r, \psi) = \sum_{n=1}^{\infty} C_{2(2n-1)} \left(\frac{r}{r_E}\right)^{2(2n-1)} \cos 2(2n-1)\psi. \quad (1.41)$$

Чтобы удовлетворить граничному условию, коэффициенты  $C_{2(2n-1)}$  должны совпадать с коэффициентами разложения в ряд по косинусам значения потенциала  $\varphi(r_E, \psi)$  на границе. Отсюда получим

$$C_{2(2n-1)} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} \varphi(r_E, \psi) \cos 2(2n-1)\psi d\psi. \quad (1.42)$$

Выполнив интегрирование в выражении (1.42) и подставив результат в (1.41), найдем распределение поля линзы с вогнутыми электродами:

$$\begin{aligned} \varphi(r, \psi) = & \frac{8V}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin 2(2n-1)\varepsilon}{4(2n-1)^2\varepsilon} \times \\ & \times \left(\frac{r}{r_E}\right)^{2(2n-1)} \times \cos 2(2n-1)\psi. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Перейдем в выражении (1.43) от переменных  $r$  и  $\psi$  к  $x$  и  $y$  и вычислим коэффициенты ряда:

$$K_2 = \frac{4}{\pi} \frac{\sin 2\varepsilon}{2\varepsilon}; \quad K_6 = -\frac{4}{3\pi} \frac{\sin 6\varepsilon}{6\varepsilon}. \quad (1.44)$$

Отсюда для линзы с очень малыми зазорами между электродами получаем  $K_2 = 1,273$ ;  $K_6 = -0,424$ . Для угла  $2\varepsilon = 10^\circ$   $K_2 = 1,267$ ;  $K_6 = -0,405$ .

Коэффициент  $K_2$ , определенный на основе измерения параксиальных фокусирующих свойств линзы с вогнутыми электродами на электронно-оптической скамье при  $2\varepsilon = 13^\circ$ , равен 1,30 [33]. В пределах точности измерений это хорошо согласуется с расчетом. Поле такой линзы было также промерено на сетке сопротивлений [34]. Для угла, равного  $2\varepsilon = 2^\circ 20'$ , получены  $K_2 = 1,27$  и  $K_6 = -0,43$ .

Методом Фурье можно найти также поле квадрупольной линзы с плоскими электродами (см. рис. 7, в). При бесконечно малом зазоре между ними оно имеет вид [31, 32]

$$\varphi(x, y) = -V + \frac{8V}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) \operatorname{ch} \frac{2n+1}{2} \pi} \times \\ \times \operatorname{ch} \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{r_E} x \cos \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{r_E} y. \quad (1.45)$$

Отсюда значения коэффициентов  $K_2$  и  $K_6$  при разложении потенциала в ряд по степеням  $x$  и  $y$  равны

$$K_2 = \pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{\operatorname{ch} \frac{2n+1}{2} \pi} \approx 1,094; \quad (1.46a)$$

$$K_6 = \frac{\pi^5}{5760} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)^5}{\operatorname{ch} \frac{2n+1}{2} \pi} \approx -0,108. \quad (1.46b)$$

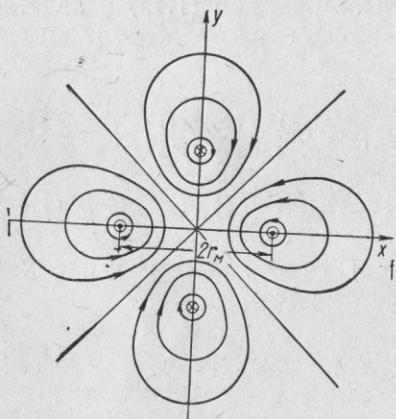


Рис. 8. Силовые линии магнитного поля линзы, составленной из четырех линейных бесконечных проводников с током.

Однако они непригодны для фокусировки частиц больших энергий в стационарном режиме.

Расчет поля двумерных квадрупольных линз, образованных бесконечными линейными проводниками с током, не представляет больших затруднений. Наиболее простой вариант такой линзы — четыре параллельных линейных проводника с током, расположенных по углам квадрата, при-

чем токи в соседних проводниках направлены в противоположные стороны (рис. 8).

Вектор-потенциал магнитного поля  $\mathbf{A}$  в случае линейного бесконечного проводника с током имеет только одну составляющую, параллельную направлению тока и равную [35]

$$A = A_z(x, y) = -0,2I \ln r, \quad (1.47)$$

где  $r$  — расстояние от проводника до точки, в которой определяется поле;  $I$  — сила тока,  $a$ . Используя принцип суперпозиции, найдем вектор-потенциал поля четырех токов:

$$A = A_z(x, y) = 0,2I \ln \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4}. \quad (1.48)$$

Проводники 1 и 3 расположены на оси  $y$ .

Выразим  $r_i$  через  $x$ ,  $y$  и  $r_M$  и, воспользовавшись соотношением  $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ , найдем

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -0,2I \left[ \frac{y}{y^2 + (x+r_M)^2} + \frac{y}{y^2 + (x-r_M)^2} - \right. \\ \left. - \frac{y+r_M}{x^2 + (y+r_M)^2} - \frac{y-r_M}{x^2 + (y-r_M)^2} \right]. \quad (1.49)$$

Выражение для  $H_y$  можно получить из уравнения (1.49) заменой  $x \leftrightarrow y$ . На осях  $x$  и  $y$  выражение для напряженности поля упрощается. При  $x = 0$

$$H_x = -\frac{0,8I}{r_M^2} y \left[ 1 - \left( \frac{y}{r_M} \right)^4 \right]^{-1}; \\ H_y = 0. \quad (1.50)$$

Разлагая в ряд  $H_x$ , из соотношения (1.50) получим

$$H_x = -\frac{0,8I}{r_M^2} y \left[ 1 + \left( \frac{y}{r_M} \right)^4 + \left( \frac{y}{r_M} \right)^8 + \dots \right]. \quad (1.51)$$

Отсюда видно, что с удалением от центра поле возрастает довольно быстро. На расстоянии  $0,25 r_M$  относительная нелинейность поля на оси  $y$  равна  $0,39\%$  и при  $y = 0,5 r_M$  достигает  $6,7\%$ . Относительное изменение градиента напряженности поля в этих точках  $2,0$  и  $35\%$  соответственно. По диагонали  $x = y$  поле меняется менее резко.

Линейность напряженности магнитного поля можно значительно улучшить, подбирая определенным образом распределение проводников с током [36]. Градиент напряженности поля практически остается постоянным, если поле создано слоями тока однородной плотности, расположенных

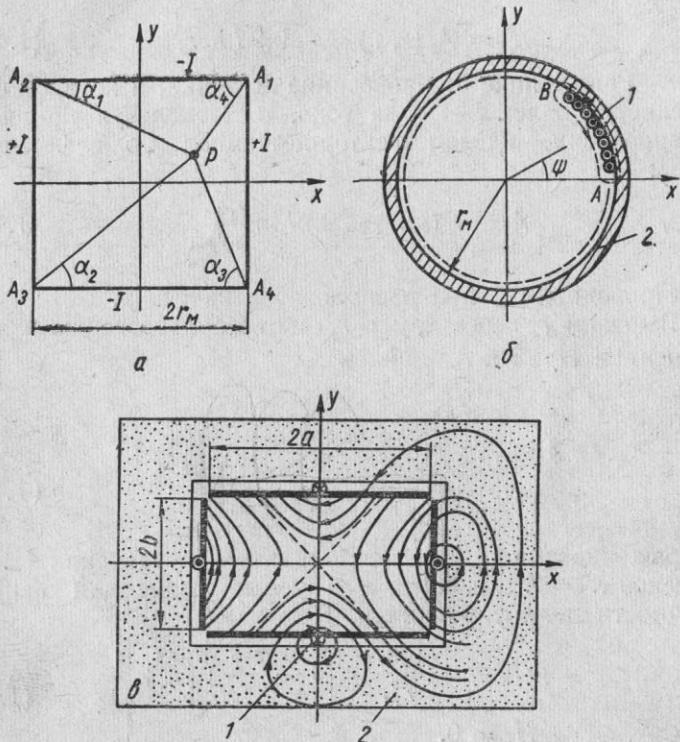


Рис. 9. Схематическое изображение поперечных сечений неявно-полюсных магнитных квадрупольных линз из четырех слоев с током (а), с цилиндрическим железным ярмом (б) и с прямоугольной апертурой (в) (линии со стрелками — силовые линии магнитной индукции  $\mathbf{B}$ ):  
1 — обмотка с током; 2 — железное ярмо.

ными по сторонам квадрата (рис. 9, а), причем токи по соседним сторонам квадрата текут в противоположные стороны. Если длина стороны квадрата равна  $2r_M$ , а сила тока в такой полоске  $I$ , то в каждом элементе длиной  $dl$  течет ток  $Idl/2r_M$ . Будем считать слои тока бесконечно длинными и

тонкими. Вектор-потенциал такого элемента равен [см. выражение (1.47)]

$$A = A_z(x, y) = -0,1 \frac{I}{r_M} dl \ln r, \quad (1.52)$$

где  $r$  — расстояние от элемента тока до точки, в которой определяется поле. Вектор-потенциал верхнего слоя выражается интегралом

$$A_z(x, y) = -0,1 \frac{I}{r_M} \int_{A_1}^{A_2} \frac{A_2}{A_1} \ln r dl. \quad (1.53)$$

Суммируя вектор-потенциалы всех слоев, найдем распределение поля линзы. Для произвольной точки  $P$  можно написать:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} = 0,1 \frac{I}{r_M} \left[ (\alpha_1 + \alpha_4) - (\alpha_3 + \alpha_2) + \right. \\ &\quad \left. + \ln \frac{\overline{PA}_1}{\overline{PA}_3} \cdot \frac{\overline{PA}_2}{\overline{PA}_4} \right]; \\ H_y &= -\frac{\partial A_z}{\partial x} = 0,1 \frac{I}{r_M} \left[ (\alpha_2 + \alpha_1) - (\alpha_3 + \alpha_4) + \right. \\ &\quad \left. + \ln \frac{\overline{PA}_1}{\overline{PA}_3} \cdot \frac{\overline{PA}_4}{\overline{PA}_2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

Отсюда на оси  $x$  составляющие напряженности поля имеют вид

$$\left. \begin{aligned} H_x &= 0; \\ H_y &= -0,2 \frac{I}{r_M} \left[ \arctg \frac{2 \frac{x}{r_M}}{2 - \left( \frac{x}{r_M} \right)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Arth} \frac{2 \frac{x}{r_M}}{2 + \left( \frac{x}{r_M} \right)^2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (1.55)$$

и градиент напряженности поля в этом направлении равен

$$\frac{dH_y}{dx} = -0,4 \frac{I}{r_M^2} \left[ 1 + \frac{1}{4} \left( \frac{x}{r_M} \right)^4 \right]^{-1}. \quad (1.56)$$

Из уравнения (1.55) получим распределение напряженности поля на оси  $x$  вблизи центра линзы:

$$\left\{ \begin{array}{l} H_y = -0,4 \frac{I}{r_M^2} x \left[ 1 - \frac{1}{20} \left( \frac{x}{r_M} \right)^4 + \frac{1}{144} \left( \frac{x}{r_M} \right)^8 - \dots \right]. \\ \text{На диагонали } x = y \text{ имеем} \end{array} \right. \quad (1.57)$$

$$H_x = H_y = -0,2 \frac{I}{r_M} \left( \operatorname{arctg} \frac{x}{r_M} + \operatorname{Arth} \frac{x}{r_M} \right). \quad (1.58)$$

Относительная нелинейность поля на оси  $x$  при  $x = 0,25 r_M$  равна 0,02% и при  $x = 0,5 r_M$  0,31%. Относительное изменение градиента в этих точках — 0,10 и 1,5% соответственно.

Дальнейшего уменьшения нелинейности поля квадрупольной линзы можно достигнуть, уменьшая ширину слоя тока по сравнению с длиной стороны квадрата  $2r_M$  (слои не доходят до углов квадрата) или применяя толстые слои. Если при ширине слоя  $2l / l/r_M = 0,92$ , а толщина его равна половине  $r_M$ , то изменение градиента напряженности поля меньше  $10^{-3}$  в области до  $x/r_M = 0,9$  [36].

Схематическое изображение неявнополюсной линзы с железным ярмом приведено на рис. 9, б. Ферромагнитный цилиндр служит ярмом для токовой обмотки, расположенной на внутренней поверхности цилиндра параллельно его оси. Расчет такой линзы можно провести в случае, когда цилиндр и обмотка имеют достаточную длину, так что допустимо считать поле двумерным. Предполагается также, что магнитная проницаемость  $\mu$  ферромагнетика бесконечно велика, а толщиной обмотки можно пренебречь по сравнению с  $r_M$ . Задаваясь распределением магнитного поля внутри цилиндра, можно найти плотность тока или ампервитков обмотки, которые создают это поле [37].

Закон полного тока для контура, охватывающего участок от точки  $A$  до  $B$  и проходящего частью в вакууме, а частью в ярме (см. рис. 9, б), имеет вид

$$\oint \mathbf{H} dl = 0,4 \pi r_M \int_A^B j(\psi) d\psi, \quad (1.59)$$

$j(\psi)$  — плотность тока на единицу длины дуги,  $a$ . Так как длина пути в воздушном зазоре близка к длине пути в ярме, а магнитная проницаемость последнего

очень велика, то можно пренебречь интегралом от  $\mathbf{H} dl$  по части контура, проходящей внутри ярма. Тогда

$$\oint \mathbf{H} dl = \omega(r_M, \psi_B) - \omega(r_M, \psi_A) = 0,4 \pi r_M \int_{\psi_A}^{\psi_B} j(\psi) d\psi. \quad (1.60)$$

Если начать отсчет угла  $\psi$  от точки  $A$  и положить, что  $\omega(r_M, \psi_A) = 0$ , то получим

$$\omega(r_M, \psi) = 0,4 \pi r_M \int_0^\psi j(\psi) d\psi. \quad (1.61)$$

Скалярный потенциал квадрупольной линзы с постоянным градиентом должен иметь следующий вид [см. уравнение (1.28)]:

$$\omega = \Omega_2 r^2 \sin 2\psi. \quad (1.62)$$

Подставляя уравнение (1.62) при  $r = r_M$  в выражение (1.61) и дифференцируя его по  $\psi$ , получаем закон распределения плотности тока:

$$j(\psi) = \frac{\Omega_2 r_M}{0,2 \pi} \cos 2\psi. \quad (1.63)$$

Такое распределение плотности тока можно создать витками, плотность которых пропорциональна  $|\cos 2\psi|$ . Ток, текущий по ним, постоянен по величине, но меняет направление с изменением знака у  $\cos 2\psi$ . Однако необходимо учесть, что обмотка при расчете предполагалась бесконечно тонкой и увеличение на определенных участках ее толщины вносит искажения в рассчитываемое поле.

Было проведено сравнение расчета и измерений на специально изготовленных образцах линз [38]. На внутренней стороне ярма (в качестве которых использовались статоры электродвигателей) в 36 пазах разместили обмотку. Все проводники были соединены последовательно, а их количество в пазу соответствовало требуемой плотности ампервитков для данного угла  $\psi$ , умноженной на угловой интервал  $\Delta\psi$  между пазами. В результате измерений, проведенных гармонической катушкой, получено удовлетворительное согласие с расчетными данными.

Вопрос о форме полюсов и катушек, необходимой для создания поля с постоянным градиентом напряженности в круговой области в случае протекания по обмотке тока с

однородной плотностью, рассмотрен в работе [39]. Катушки для достижения возможно большего градиента напряженности поля при возможно меньшей силе тока в них, так же как и полюсные наконечники, вплотную примыкают к круговой апертуре. При этом со стороны апертуры профиль катушки имеет форму части окружности.

Если предположить, что магнитная проницаемость железа бесконечна, то граница между полюсом и обмоткой должна описываться следующим уравнением:

$$\frac{dr}{d\psi} = \frac{G_M r^2 \sin 2\psi - 0,8 \pi^2 j (r^2 - r_M^2)}{G_M r \cos 2\psi}, \quad (1.64)$$

где  $j$  — плотность тока в обмотке,  $A/cm^2$ .

Выражение (1.64) можно численно проинтегрировать. Форма катушек получается близкой к треугольной, а профиль полюсных наконечников значительно отклоняется от гиперболы.

Изготовить катушки сложной формы с большой точностью практически трудно, поэтому их заменили узкими и длинными катушками прямоугольной формы. Более подробно конструкция таких линз, предназначенных для фокусировки частиц сверхвысоких энергий, описана в гл. 6.

Так как квадрупольная линза оказывает собирающее воздействие на заряженные частицы в одной плоскости и рассеивающее в другой, то, как уже указывалось, круглое первоначально сечение пучка вытягивается в эллипс. Чтобы полнее использовать внутреннее пространство линзы и предотвратить потери частиц в стенки, зачастую бывает удобнее применить квадрупольные линзы с увеличенной в одном направлении апертурой.

Пример такой линзы — неявнополюсная магнитная линза с прямоугольной апертурой, описанная в работе [40] (см. рис. 9, в). Внутри прямоугольного железного ярма расположена обмотка с током, текущим параллельно оси  $z$ . Распределение поля линзы можно найти, предположив, что ярмо и витки имеют значительную длину в направлении этой оси. Магнитную проницаемость железа считаем бесконечно большой. Рассмотрим случай, когда плотность ампервитков вдоль каждой стороны прямоугольника постоянна, полное число ампервитков на всех сторонах одинаково, а направление тока на соседних сторонах противоположно. Тогда, применив к контуру, охватывающему группу

витков, закон полного тока (1.8), как это делалось в случае цилиндрического ярма, получим, что скалярный потенциал у внутренней поверхности ярма меняется линейно, возрастаая вдоль одной стороны и уменьшаясь вдоль соседней. При этом величина его в противоположных углах прямоугольника одинакова. Таким краевым условиям удовлетворяет поле вида (1.13) (при  $n_2(z) = N_2$ ) с постоянным во всем внутреннем пространстве градиентом напряженности.

Сравним величины градиентов в обычной квадрупольной линзе с гиперболическими полюсами и в линзе с прямоугольной апертурой. Вершины прямоугольника, ограничивающего апертуру второй линзы, должны лежать на образующей полюсов первой  $r_M = \sqrt{2ab}$ . Градиент напряженности поля линзы с гиперболическими полюсами определяется выражением [см. формулы (1.17) и (1.9)]

$$G_M = \frac{0,8 \pi wI}{r_M^2}, \quad (1.65)$$

где  $wI$  — число ампервитков на один полюс, а полное число ампервитков будет у линзы равно  $4wI$ . Такое же полное число ампервитков будет у линзы с прямоугольной апертурой, если на каждой ее стороне расположено  $2wI$  ампервитка, так как на две соседние стороны прямоугольника укладываются одни и те же витки. Градиент напряженности ее поля  $G_{M1}$  равен

$$G_{M1} = \frac{0,4 \pi wI}{ab}. \quad (1.66)$$

Из сравнения выражений (1.65) и (1.66) следует, что отношение градиентов обеих линз при  $r_M = \sqrt{2ab}$  равно единице.

Если учесть, что обмотка в линзе с прямоугольной апертурой имеет конечные размеры, то  $G_{M1}$  уменьшится и будет равен

$$G_{M1} = \frac{0,4 \pi wI}{ab + \Delta/8}, \quad (1.67)$$

где  $\Delta$  — величина площади, занимаемая обмоткой. Поэтому при равных градиентах и размерах прямоугольной апертуры требуемое число ампервитков в линзе с гипер-

бологическими полюсами меньше и она выгоднее в отношении потребляемой мощности. Результаты измерений, проведенных на линзе с прямоугольной апертурой, хорошо согласуются с расчетом.

Расчет поля квадрупольных линз конечной длины, как правило, более сложен, чем расчет поля линз с двумерными полями, и выполнен лишь для немногих случаев.

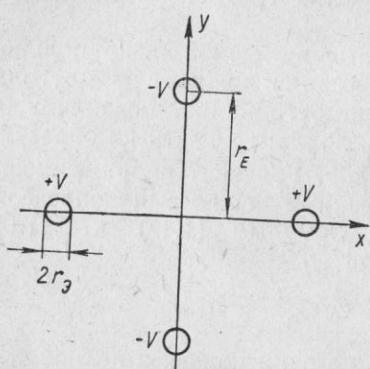


Рис. 10. Электрическая квадрупольная линза с электродами в форме шариков.

распределение потенциала в любой точке поля имеет вид [6]

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & Vr_s \{ [(r_s - x)^2 + y^2 + z^2]^{-1/2} + \\ & + [(r_s + x)^2 + y^2 + z^2]^{-1/2} - [x^2 + (r_s - y)^2 + z^2]^{-1/2} - \\ & - [x^2 + (r_s + y)^2 + z^2]^{-1/2} \}. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Разлагая выражение (1.68) в ряд по степеням  $x$  и  $y$  и ограничиваясь первым членом ряда, получаем

$$\varphi(x, y, z) = 3V \frac{r_s}{r_E^3} \left[ 1 + \left( \frac{z}{r_E} \right)^2 \right]^{-5/2} (x^2 - y^2). \quad (1.69)$$

Отсюда, согласно равенству (1.12),  $k_2(z)$  можно выразить следующим образом:

$$k_2(z) = 3 \frac{r_s}{r_E} \left[ 1 + \left( \frac{z}{r_E} \right)^2 \right]^{-5/2}. \quad (1.70)$$

Распределение поля таких квадрупольных линз, расположенных последовательно, дано в работе [6].

Поле электрической квадрупольной линзы конечной длины с вогнутыми электродами (см. рис. 7, б) рассмотрено в работе [31]. Зависимость  $k_2(z)$ , рассчитанная в предположении, что зазор между электродами мал, представлена на рис. 11, откуда видно, что при длине электродов  $l = 5 r_E$  распределение потенциала в середине линзы практически не зависит от  $z$  и довольно резко падает на краях.

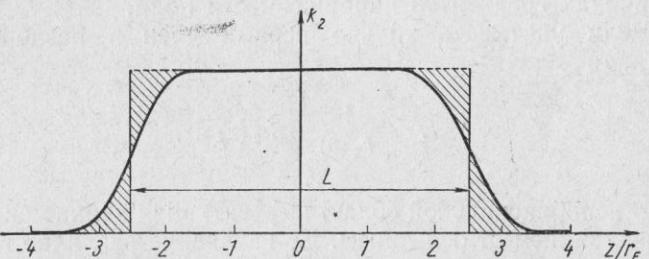


Рис. 11. Зависимость от координаты  $z$  распределения поля в приосевой области линзы конечной длины с вогнутыми электродами. Длина электродов  $l = 5 r_E$ .

Для  $z = \pm l/2k_2(z)$  уменьшается в два раза. С ростом  $l/r_E$  прямолинейный участок  $k_2(z)$  увеличивается, с уменьшением  $l/r_E$  — уменьшается и практически исчезает, если  $l/r_E = 2$ .

На основе полученной зависимости распределения поля от координаты  $z$  можно вычислить эффективную длину поля линзы  $L$  в направлении оси  $z$ . Эффективная длина поля — длина прямоугольника, которым заменяется кривая распределения поперечного поля вдоль оси  $z$  так, что значения кривых в центре линзы и площади, ими ограниченные, совпадают (см. рис. 11). Согласно такому определению,

$$L = \frac{1}{E_r(r, \psi, 0)} \int_{-\infty}^{+\infty} E_r(r, \psi, z) dz, \quad (1.71)$$

где  $E_r$  — поперечная составляющая поля на некоторой прямой  $r = \text{const}$ ,  $\psi = \text{const}$ . Интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} E_r dz$  характер-

ризует действие отклоняющего поля в системах с поперечными полями (например, в электрических конденсаторах).

Соответствующий интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} H_z dz$  определяет отклоняющее действие поперечных магнитных полей (например, различного рода магнитных призм). Поэтому в первом приближении можно считать, что квадрупольные линзы, у которых величины  $L$  равны, оказывают одинаковое фокусирующее воздействие на заряженную частицу при равных величинах градиентов напряженности поля.

Если учитывать только первый член в разложении поля, то

$$L = \frac{1}{k_2(0)} \int_{-\infty}^{+\infty} k_2(z) dz. \quad (1.72)$$

В непараксиальной области эффективная длина меняется с расстоянием от оси линзы. Ее изменение различно в разных плоскостях и, следовательно, значение эффективной длины, определенное для одной плоскости, не совпадает с ее значением в другой.

Можно ввести понятие эффективной длины для градиента напряженности поля  $G = \frac{\partial E_r}{\partial r}$ :

$$L_G = \frac{1}{G(r, \psi, 0)} \int_{-\infty}^{+\infty} G(r, \psi, z) dz. \quad (1.73)$$

Как следует из равенств (1.71) и (1.73), между величинами  $L_G$  и  $L$  существует следующее соотношение:

$$L_G = L + \frac{E_r(r, \psi, 0)}{G(r, \psi, 0)} \cdot \frac{\partial L(r)}{\partial r}. \quad (1.74)$$

В параксиальной области оба значения эффективных длин совпадают. Аналогичное определение эффективной длины поля введено также для магнитной линзы.

Понятие эффективной длины весьма полезно для расчета фокусирующих свойств квадрупольных линз. Использование его значительно упрощает расчеты и дает хорошую точность, в особенности для линз, распределение потенциала которых мало меняется в пределах линзы и круто падает вблизи ее концов.

Для электрической линзы с вогнутыми электродами (см. рис. 11) с большой точностью можно показать, что эффективная длина  $L$  равна длине электродов  $l$ .

Если магнитная квадрупольная безжелезная линза образована обмотками конечной длины, имеющими форму прямоугольных рамок, то для определения напряженности ее поля нужно просуммировать поля, создаваемые каждым прямолинейным участком в отдельности. В работе [41] описана такая линза, составленная из прямоугольных рамок с отогнутыми краями (рис. 12). Части обмотки, параллельные оси  $z$ , располагаются на равном расстоянии от нее, угол  $\alpha = 90^\circ$ ,  $E = 1,5 r_M$ .

Выбор рамок с отогнутыми краями вызван стремлением уменьшить в окрестности оси линзы составляющую напряженности поля  $H_z$  и сделать поле более круто падающим на краях.

Из расчета распределения поля был получен коэффициент формы  $n_2(z)$ . В точке  $z = 0$  он равен  $N_2$ :

$$\begin{aligned} N_2 \frac{W}{0,1 w I u} &= \frac{2}{\sqrt{1+u^2}} \left[ \frac{1}{1+u^2} + 2 \right] + \\ &+ \frac{1}{(0,5+u^2)^2} \left\{ \frac{3}{\sqrt{2,75+u^2}} \left[ \sqrt{2} + \frac{0,5+u^2}{\sqrt{2}(2,75+u^2)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \left[ 1 + \frac{0,5+u^2}{2(1+u^2)} \right] \right\} + \\ &+ \frac{1}{(2,25+u^2)^2 \sqrt{2,75+u^2}} \left( 3 \sqrt{2} + \frac{2,25+u^2}{2,75+u^2} \right). \end{aligned} \quad (1.75)$$

Здесь  $u = l/2r_M$  ( $l$  — длина линзы), а  $wI$  — число ампервитков в каждой части обмотки, параллельной оси  $z$ .

На основе полученной зависимости распределения поля от координаты  $z$  вычислена эффективная длина линзы  $L$ . Для значений  $4 < l/r_M < 8$  эффективная длина  $L$  совпа-

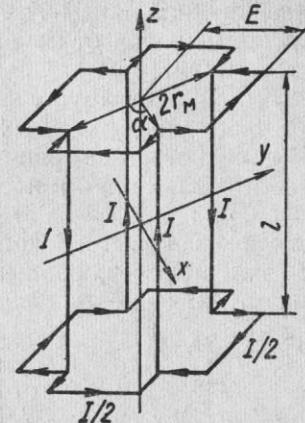


Рис. 12. Безжелезная квадрупольная линза из прямоугольных рамок с отогнутыми краями.

дает с длиной линзы  $l$  с точностью  $\pm 3\%$ . Поле вдоль оси  $z$  плавно меняется от максимального значения в центре линзы до нуля.

Для ряда квадрупольных линз (в особенности для наиболее часто употребляемых магнитных линз, полюсные наконечники которых ограничены частями гипербол или близких к ним кривых) проведены различные измерения их полей.

Как показал опыт и некоторые расчеты, при длинах электродов или полюсов, равных или меньших радиуса апертуры линзы, зависимость распределения потенциала от коорди-

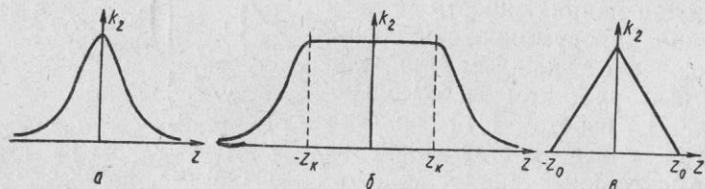


Рис. 13. Зависимость распределения потенциалов от координаты  $z$  в приосевой области квадрупольных линз разных типов:  
а — колоколообразная кривая; б — составной колокол; в — треугольник.

наты  $z$  в приосевой области имеет колоколообразный характер. Ее можно аппроксимировать выражением

$$k_2(z)/K_2 = n_2(z)/N_2 = \left[ 1 + \left( \frac{z - z_k}{d} \right)^2 \right]^{-2}, \quad (1.76)$$

где  $K_2$  и  $N_2$  — постоянные, определяемые геометрией линзы;  $z_k$  — координата центра поля;  $d$  — постоянная величина, характеризующая протяженность поля (рис. 13, а).

Эффективная длина  $L$  такого поля равна

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ 1 + \left( \frac{z - z_k}{d} \right)^2 \right]^{-2} dz = \frac{1}{2} \pi d. \quad (1.77)$$

При длинах электродов или полюсов, в несколько раз больших радиуса апертуры, распределения потенциала имеют вид плато с довольно резким спадом на краях. С большой точностью его можно аппроксимировать кривой, составленной из трех частей [42]: центральной — прямой, параллельной оси  $z$ , и боковых частей, соответствующих спадающему краевому полю, аппроксимируемых полови-

ными колоколами (1.76) (см. рис. 13, б). Зависимость  $k_2(z)$  или  $n_2(z)$  выглядит следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} k_2(z) &= K_2 \left[ 1 + \left( \frac{z + z_k}{d} \right)^2 \right]^{-2}; & -\infty < z \leq -z_k; \\ k_2(z) &= K_2; & -z_k < z < z_k; \\ k_2(z) &= K_2 \left[ 1 + \left( \frac{z - z_k}{d} \right)^2 \right]^{-2}; & z_k \leq z < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (1.78)$$

Значения координат  $\pm z_k$  и постоянных  $K_2$  и  $d$  выбирают так, чтобы обеспечить возможно лучшее совпадение кривых экспериментальной и описываемой выражением (1.78). Эффективная длина такого поля равна

$$L = 2z_k + \frac{1}{2} \pi d. \quad (1.79)$$

При некоторых условиях (определенной форме торцов линзы, дополнительных пластинах на краях, на которые замыкается поле) распределение краевого поля вдоль оси  $z$  можно линеаризовать. Если длина электродов или полюсов примерно равна радиусу апертуры или меньше его, то зависимость потенциала от координаты  $z$  можно с определенной точностью аппроксимировать двумя наклонными прямыми (см. рис. 13, в). Если длины электродов или полюсов достаточно велики по сравнению с апертурой, то в распределении поля появляется участок, на котором оно не меняется с изменением  $z$ .

Интересно отметить, что для линейной формы спада краевого поля в распределении потенциалов (1.4) и (1.6) исчезают члены с  $k_2''(z)$  и  $n_2''(z)$ , пропорциональные четвертым степеням координат. Эффективная длина  $L$  таких полей слагается из длины не зависящего от  $z$  участка поля и полу суммы длин краевых полей.

Рассмотренные здесь аналитические выражения для зависимости распределения потенциалов в приосевой области линз от координаты  $z$  интересны потому, что параксиальные уравнения траекторий в таких полях могут быть строго проинтегрированы. Траектории получаются в аналитическом виде (этот вопрос будет подробно рассмотрен во второй главе).

Описание экспериментального исследования полей квадрупольных линз непосредственно связано с описанием

их конструкции (см. гл. 6). Здесь мы остановимся еще на одном из наиболее распространенных численных методов решения краевых задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Он называется методом конечных разностей и широко применяется при нахождении распределения потенциала сложных систем, в которых другими, не численными методами найти решение оказывается невозможно [10, 43].

Ограничимся рассмотрением двумерных полей без пространственного заряда. Они описываются уравнением Лапласа для некоторой потенциальной функции, которую будем обозначать  $\chi$ :

$$\Delta \chi = \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = 0. \quad (1.80)$$

Этот метод применим и к более сложному случаю трехмерных полей, а также при наличии пространственного заряда. Суть метода заключается в замене дифференциального уравнения разностным: производные, входящие в уравнение, заменяют их приближенными значениями, выраженнымими через разности значений функций в отдельных, дискретных точках. Такая замена основана на применении разложения функции в ряд Тейлора.

Предположим, что дана некоторая ограниченная контуром  $l$  область  $S$ , в которой нужно найти распределение удовлетворяющего уравнению (1.80) потенциала  $\chi$  по заданным его значениям на границе (рис. 14). Для этого данную область делим сеткой на мелкие участки, предполагая для простоты, что на области  $S$  построена квадратная сетка из взаимно перпендикулярных и параллельных прямых линий. Применяя разложение в ряд Тейлора, можно показать, что для каждой узловой точки (точка пересечения двух линий сетки) внутри контура имеет место выражение

$$\Delta_l \chi = 0 \approx \frac{\chi_{1i} + \chi_{2i} + \chi_{3i} + \chi_{4i} - 4\chi_{0i}}{h^2}, \quad (1.81)$$

где  $\chi_0$  — значение функции в рассматриваемом  $i$ -м узле сетки;  $\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4$  — значения ее в четырех наиболее близких узлах, расположенных на концах креста;  $h$  — длина стороны квадрата (рис. 14).

Погрешность формулы (1.81) порядка  $h^2$ . Для сетки с неравными шагами формула несколько усложняется, и погрешность ее порядка  $h$ . Так как значения функции на гра-

нице известны, то число неизвестных равняется числу внутренних узловых точек, т. е. числу уравнений. Таким образом, решение краевой задачи сводится к решению системы обыкновенных линейных алгебраических уравнений.

При большом числе уравнений имеет смысл решать систему методом последовательных приближений. Зададимся какими-то произвольными значениями  $\chi_i$  во всех внутренних точках. Совокупность  $\chi_i$  называется приближением. Приближение, которым мы задались, называется нулевым и обозначается  $\chi_i^{(0)}$ . По нулевому найдем первое приближение. Для этого перепишем выражение (1.81) в виде

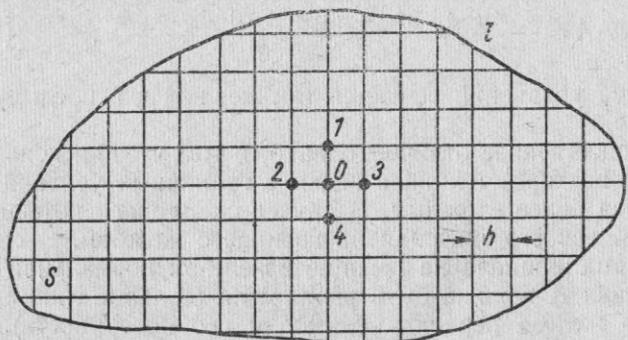


Рис. 14. К методу конечных разностей.

$$\chi_{0,i} = \frac{\chi_{1i} + \chi_{2i} + \chi_{3i} + \chi_{4i}}{4}. \quad (1.82)$$

В правую часть каждого уравнения (1.82) подставим значения  $\chi_i$  в нулевом приближении  $\chi_i^{(0)}$ . Тогда в левой получим значения  $\chi_i$  в первом приближении  $\chi_i^{(1)}$ . Найденные значения первого приближения снова подставим в правые части уравнения (1.82). Тогда левая часть даст значение второго приближения и т. д. Расчет производим до тех пор, пока разность между последовательными приближениями не станет меньше допустимой ошибки.

Когда граничный контур  $l$  имеет криволинейную форму, встает вопрос о задании граничных условий в близлежащих узлах сетки. Если граница проходит между двумя узлами сетки, определение потенциала в узле из-за неравенства шагов приводит к погрешности порядка  $h$ . Поэтому здесь

также требуется решать задачу методом последовательных приближений.

В областях магнитного поля с токонесущими проводниками нельзя пользоваться уравнением Лапласа для скалярного магнитного потенциала. В этих случаях необходимо решать уравнение для векторного потенциала магнитного поля  $\mathbf{A}$ , который в двумерном поле имеет только одну составляющую, параллельную току. При этом следует решать уравнение  $\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} j$ , где  $j$  — плотность тока. Применяя метод конечных разностей, получим для  $i$ -го узла сетки

$$\Delta A = -\frac{4\pi}{c} j \approx \frac{A_{1i} + A_{2i} + A_{3i} + A_{4i} - 4A_{0i}}{h^2}. \quad (1.83)$$

Система уравнений решается так же, как и в предыдущем случае.

Существенное отличие, однако, в том, что при использовании вектор-потенциала задание граничных условий становится более сложным. В случае скалярного потенциала задавались его значения на границе с железом. В случае вектор-потенциала на границе с железом нормальная производная  $A$  должна быть равна нулю (силовые линии входят в железо перпендикулярно к его поверхности). Эти граничные условия используются таким образом: сетку продолжают за граничный контур на длину шага, тогда в области, занятой железом, возникают дополнительные узлы сетки. Значения вектор-потенциала в этих дополнительных узлах приравнивают значениям  $A$  в точках исследуемой области (в воздушном зазоре), представляющих собой зеркальное отражение первых от поверхности железа.

## ГЛАВА 2

### ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Уравнение движения заряженных частиц в электромагнитных полях в векторной форме имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{p}}{dt} = e \mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}], \quad (2.1)$$

~~$m \mathbf{a}_2 = \mathbf{F} + \mathbf{F}_1$~~

где  $\mathbf{p}$  — импульс заряженной частицы;  $e$  и  $\mathbf{v}$  — ее заряд и скорость;  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  — напряженности электрического и магнитного полей.

Выражение (2.1) написано в гауссовой системе единиц, которая будет применяться и в дальнейшем, если не будет оговорено особо использование другой системы единиц. В этой системе электрические величины измеряются в абсолютной электростатической системе единиц CGSE, а магнитные — в абсолютной магнитной системе единиц CGSM. Вследствие этого в выражении (2.1) появляется константа  $c$ , численно равная скорости света в пустоте. Правая часть уравнения (2.1) выражает силу Лоренца.

Импульс заряженной частицы  $\mathbf{p}$  равен

$$\mathbf{p} = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (2.2)$$

где  $m$  — масса покоя частицы.

В нерелятивистском случае, когда скорость частицы много меньше скорости света, уравнение (2.1) приобретает более простой вид:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e \mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v} \mathbf{H}]. \quad (2.3)$$

Для определения траекторий заряженных частиц в квадрупольных линзах удобно записать уравнение движения (2.1) в декартовой системе координат

$$\left. \begin{aligned} \frac{dp_x}{dt} &= eE_x + \frac{e}{c}(v_y H_z - v_z H_y); \\ \frac{dp_y}{dt} &= eE_y + \frac{e}{c}(v_z H_x - v_x H_z) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

и вместо выражения для проекции движения на ось  $z$  воспользоваться уравнением сохранения энергии

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 = -e(\Phi - \Phi_0). \quad (2.5)$$

Здесь  $\Phi_0$  — потенциал в том месте пространства, где скорость частицы равна нулю. Разность в левой части — кинетическая энергия движения. Очевидно, что  $-e(\Phi - \Phi_0) > 0$ . Если скорости движения малы, то уравнение сохранения энергии принимает вид

$$\frac{mv^2}{2} = -e(\Phi - \Phi_0). \quad (2.6)$$

В общем случае скорость частицы связана с ускоряющим потенциалом  $\Phi = \varphi - \Phi_0$  соотношением, полученным из формулы (2.5),

$$v = \sqrt{-\frac{2e\Phi}{m}} \cdot \sqrt{1 - \frac{e\Phi}{2mc^2}} \left(1 - \frac{e\Phi}{mc^2}\right)^{-1}. \quad (2.7)$$

Рассмотрим вначале параксиальное приближение, соответствующее движению заряженных частиц вблизи оси линзы под малыми углами к ней. Так как величины  $x$  и  $y$ , а также углы наклона  $x' = dx/dz$  и  $y' = dy/dz$  малы, будем пренебречь в уравнениях (2.4) и (2.5) членами, содержащими эти величины в степени выше первой. Тогда  $\varphi(x, y, z) = \varphi(z) = 0$ , а следовательно, ускоряющий потенциал  $\Phi$  и скорость  $v$  можно считать постоянными. Вследствие малости  $x'$  и  $y'$  имеем (здесь и в дальнейшем штрихи будут обозначать дифференцирование по  $z$ , а точки — по  $t$ ):

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = v_z \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \approx v_z,$$

т. е. скорость продольного движения приближенно равна полной скорости, и

$$dt = \frac{dz}{z} \approx \frac{dz}{v}. \quad (2.7a)$$

Перейдем в уравнениях движения (2.4) от дифференцирования по времени к дифференцированию по продольной координате  $z$  с помощью соотношения (2.7a). Подставляя в уравнения (2.4) выражение для скорости через ускоряющий потенциал (2.7), а также значения напряженностей полей в параксиальной области (1.14), (1.15), получим уравнения для параксиальных траекторий:

$$\left. \begin{aligned} x'' &+ \left[ \frac{2eV k_2(z)}{r_E^2(-e\Phi)} \cdot \frac{mc^2 - e\Phi}{2mc^2 - e\Phi} \mp \frac{2eW n_2(z)}{r_M^2 V(-e\Phi)(2mc^2 - e\Phi)} \right] x = 0; \\ y'' &- \left[ \frac{2eV k_2(z)}{r_E^2(-e\Phi)} \cdot \frac{mc^2 - e\Phi}{2mc^2 - e\Phi} \mp \frac{2eW n_2(z)}{r_M^2 V(-e\Phi)(2mc^2 - e\Phi)} \right] y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

Первый член в квадратных скобках характеризует действие электрического поля, второй — магнитного. Для указанной на рис. 4 полярности электродов и полюсов знак минус в квадратных скобках уравнений (2.8) соответствует движению положительно заряженной частицы по направлению оси  $z$ , знак плюс — движению в противоположном направлении. В дальнейшем в большинстве случаев будем предполагать, что при совместном действии электрического и магнитного полей их зависимость от координаты  $z$  однаакова. Тогда, введя обозначения

$$\left. \begin{aligned} u(z) &= \frac{k_2(z)}{K_2} = \frac{n_2(z)}{N_2}; \quad K_2 = k_{2\max}(z); \\ N_2 &= n_{2\max}(z), \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

получим

$$\left. \begin{aligned} x'' + \beta^2 u(z) x &= 0; \\ y'' - \beta^2 u(z) y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

Здесь  $\beta^2$  — не зависящая от  $z$  величина, равная

$$\begin{aligned} \beta^2 &= \frac{2eVK_2}{r_E^2(-e\Phi)} \cdot \frac{mc^2 - e\Phi}{2mc^2 - e\Phi} \mp \frac{2eWN_2}{r_M^2 V(-e\Phi)(2mc^2 - e\Phi)} = \\ &= \beta_E^2 - \beta_M^2. \end{aligned} \quad (2.11)$$

При малых скоростях ( $-e\Phi \ll mc^2$ )

$$\beta^2 = \frac{eVK_2}{r_E^2(-e\Phi)} \mp \frac{\sqrt{2}eWN_2}{r_M^2 c V(-e\Phi m)} = \beta_E^2 - \beta_M^2. \quad (2.12)$$

Представляет интерес выражение для  $\beta^2$ , записанное не через ускоряющий потенциал, а через скорость заряженной частицы. В релятивистском случае

$$\beta^2 = \frac{2eVK_2}{r_E^2 mc} \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{v^2} - \frac{2eWN_2}{r_M^2 mc^2} \frac{\sqrt{c^2 - v^2}}{v}. \quad (2.13)$$

Для малых скоростей

$$\beta^2 = \frac{2eVK_2}{r_E^2 mv^2} - \frac{2eWN_2}{r_M^2 mcv}. \quad (2.13a)$$

Уравнения для параксиальных траекторий в квадрупольной линзе можно найти более просто, используя параксиальные уравнения для произвольных распределений электрических и магнитных полей, которые получены Г. А. Гринбергом на основе развитой им общей теории фокусировки [12, 44]. Для этого необходимо только подставить в уравнения Г. А. Гринберга параметры осевой траектории пучка, а также значения полей и их производных на ней. В данном случае задача значительно упрощается ввиду прямолинейности осевой траектории и отсутствия на ней полей.

Из выражений (2.10) и (2.11) следует, что вид уравнений не зависит от того, какое поле используется: электрическое или магнитное.

Электронно-оптические характеристики первого порядка электрической и магнитной квадрупольных линз а также комбинированной линзы с обоями полями при одинаковой величине  $\beta^2$  одинаковы. Поэтому результаты анализа системы (2.10) относятся ко всем этим линзам.

Уравнения (2.10) — линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка. Переменные  $x$  и  $y$  в них разделены. Пусть  $x_\alpha(z)$ ,  $x_\beta(z)$ ,  $y_\alpha(z)$ ,  $y_\beta(z)$  — две пары частных, линейно независимых решений уравнений (2.10). Ввиду отсутствия первой производной, определитель Вронского для них постоянен, и линейно независимые решения связаны соотношениями

$$x_\beta x'_\alpha - x_\alpha x'_\beta = \text{const}; \quad y_\beta y'_\alpha - y_\alpha y'_\beta = \text{const}. \quad (2.14)$$

Любая траектория пучка описывается линейной комбинацией первой пары (проекция траектории на плоскость  $xOz$ ) и второй пары (проекция на  $yOz$ ):

$$\left. \begin{aligned} x(z) &= C_1 x_\alpha(z) + C_2 x_\beta(z); \\ y(z) &= D_1 y_\alpha(z) + D_2 y_\beta(z), \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

где  $C$  и  $D$  — постоянные, зависящие от начальных условий. Положим для определенности, что в точке  $z = 0$  линейно независимые решения имеют значения

$$\left. \begin{aligned} x_\alpha(0) &= y_\alpha(0) = 0; & x_\beta(0) &= y_\beta(0) = 1; \\ x'_\alpha(0) &= y'_\alpha(0) = 1; & x'_\beta(0) &= y'_\beta(0) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Тогда постоянные в соотношениях (2.14) равны единице:

$$x_\beta x'_\alpha - x_\alpha x'_\beta = 1; \quad y_\beta y'_\alpha - y_\alpha y'_\beta = 1. \quad (2.16a)$$

Пучок траекторий, выходящих из точки  $x = x_0$ ;  $y = y_0$ ;  $z = 0$  и имеющих произвольные углы наклона  $x_0$  и  $y_0$ , описывается следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} x(z) &= x_0 x_\alpha(z) + x_0 x_\beta(z); \\ y(z) &= y_0 y_\alpha(z) + y_0 y_\beta(z). \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Предположим, что  $x_\alpha$  равно нулю еще в некоторой плоскости  $z = z_1$ , а  $y_\alpha$  — в плоскости  $z = z_2$ . Тогда в первой из этих плоскостей

$$\left. \begin{aligned} x(z_1) &= x_0 x_\beta(z_1); \\ y(z_1) &= y_0 y_\alpha(z_1) + y_0 y_\beta(z_1). \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Значение  $x(z_1)$  не зависит от углов наклона траекторий пучка.

Для данной точки выхода пучка оно постоянно. Значение  $y(z_1)$  меняется с изменением  $y_0$ . Следовательно, в плоскости  $z = z_1$  пучок заряженных частиц, выходящих из точки, образует линейное изображение, параллельное оси  $y$  и находящееся на расстоянии  $x = x_0 x_\beta(z_1)$  от оси  $z$ .

Во второй плоскости,  $z = z_2$ ,

$$\left. \begin{aligned} x(z_2) &= x_0 x_\alpha(z_2) + x_0 x_\beta(z_2); \\ y(z_2) &= y_0 y_\beta(z_2), \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

т. е. изображение будет отрезком линии, параллельной оси  $x$  и отстоящей на расстоянии  $y = y_0 y_\beta(z_2)$  от оси  $z$ . Таким образом, пучок заряженных частиц, выходящих из

точечного источника, после прохождения линзы делается астигматичным.

Если точечный источник расположен на оси системы ( $x_0 = y_0 = 0$ ), то изображения пересекают эту ось.

Линейные изображения могут быть действительными и мнимыми. Мнимое изображение создается обратными продолжениями траекторий, когда пучок, выходящий из линзы, расходится хотя бы в одной из средних плоскостей. Каждое из двух изображений имеет свое увеличение. Для первого оно равно [учитывая соотношения (2.16а)]

$$M_x = \frac{x(z_1)}{x_0} = x_\beta(z_1) = \frac{1}{x'_\alpha(z_1)}; \quad (2.20)$$

а для второго —

$$M_y = \frac{y(z_2)}{y_0} = y_\beta(z_2) = \frac{1}{y'_\alpha(z_2)}. \quad (2.21)$$

Если в результате фокусировки пучка заряженных частиц системой из квадрупольных линз  $x_\alpha$  и  $y_\alpha$  обращаются в нуль при одинаковом значении  $z(z_1 = z_2)$ , то изображение точечного предмета будет точечным. Увеличения  $M_x$  и  $M_y$  не всегда равны между собой (поэтому изображение кружка будет иметь форму эллипса).

Для квадрупольных линз, так же как и для осесимметричных, можно ввести понятия фокусных расстояний, главных плоскостей и т. д. Однако величины фокусных расстояний и положение кардиальных элементов в общем случае будут разными для плоскостей  $xOz$  и  $yOz$ .

Для нахождения фокусных расстояний и положения кардиальных элементов в квадрупольной линзе рассмотрим траекторию частицы, движущейся в предметном пространстве параллельно оси (рис. 15). Положение фокусов определяется точками пересечений с осью линзы направлений проекций этой траектории на плоскости  $xOz$  и  $yOz$  в пространстве изображения. Положение главных плоскостей определяется пересечениями этих направлений с первоначальными направлениями проекций. Если линза так сильна, что проекция траектории пересекается с осью внутри нее, то положение фокуса не совпадает с этой точкой.

Обозначим  $f_x$  фокусное расстояние для линейного фокуса пространства изображений, расположенного парал-

лельно оси  $y$ , а  $f_y$  — расположенного параллельно оси  $x$ . Если  $z = z_0$  — координата плоскости входа частицы в поле, а  $z = z_i$  — координата плоскости выхода, то (см. рис. 15)

$$f_x = -\frac{x_0}{x'(z_i)}; \quad f_y = -\frac{y_0}{y'(z_i)}. \quad (2.22)$$

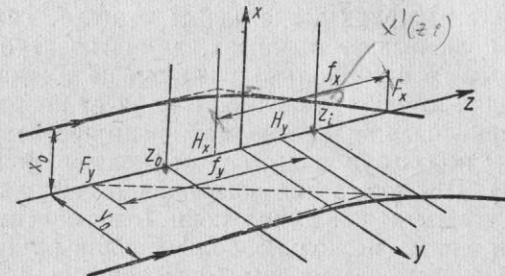


Рис. 15. Кардиальные элементы квадрупольной линзы.

Положение фокусов в пространстве изображений определяется формулами

$$z(F_x) = z_i - \frac{x(z_i)}{x'(z_i)}; \quad z(F_y) = z_i - \frac{y(z_i)}{y'(z_i)}. \quad (2.23)$$

Для координат главных плоскостей выполняются соотношения

$$z(H_x) = z(F_x) - f_x; \quad z(H_y) = z(F_y) - f_y. \quad (2.24)$$

Кардиальные точки в предметном пространстве расположены симметрично (относительно центра линзы) кардиальным точкам в пространстве изображений. Фокусные расстояния со стороны предмета и изображения равны между собой.

Используя кардиальные элементы, напишем соотношение между положениями предмета и изображения в квадрупольных линзах:

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}. \quad (2.25)$$

Здесь  $u$  и  $v$  — расстояния от предмета и изображения до соответствующих главных плоскостей. Выражение (2.25)

верно для обеих средних плоскостей линз. Оно имеет такой же вид, как и соответствующая формула, дающая связь положений предмета и изображения в осесимметричных линзах.

Решим систему дифференциальных уравнений (2.10) для одного из наиболее простых и вместе с тем распространенных случаев, когда поле внутри линзы практически не зависит от  $z$ , а на краях резко падает до нуля. Такое распределение поля бывает в линзах, длина электродов или полюсов которых в несколько раз больше их апертуры. В этих случаях кривую зависимости поля от координаты  $z$  в первом приближении можно аппроксимировать прямоугольником, используя понятие эффективной длины (см. рис. 11). Для учета краевого поля рассеяния принимается, что эффективная длина поля  $L$  в зависимости от конструкции линзы несколько больше длины линзы или равна ей. Некоторые примеры определения  $L$  даны в гл. 1 и 6.

На участке длиной  $L$   $k_2(z) = K_2$ ;  $n_2(z) = N_2$ , а вне его  $k_2(z) = n_2(z) = 0$ . Траектории заряженных частиц в таком поле описываются системой уравнений (2.10) с постоянными коэффициентами, а вне линзы — это прямые.

Решение уравнений (2.10) при  $u(z) = 1$  имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x &= A_1 \sin \beta z + A_2 \cos \beta z; \\ y &= B_1 \operatorname{sh} \beta z + B_2 \operatorname{ch} \beta z. \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

Здесь  $A$  и  $B$  — постоянные, определяемые начальными условиями. Если на входе в линзу  $z = z_0$ ;  $x = x_0$ ;  $x' = x_0$ ;  $y = y_0$  и  $y' = y_0$ , то

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \frac{1}{\beta} \sin \beta (z - z_0) + x_0 \cos \beta (z - z_0); \\ y &= y_0 \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta (z - z_0) + y_0 \operatorname{ch} \beta (z - z_0). \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

Как видно из системы уравнений (2.27),  $x$  — проекция траектории, которая имеет осциллирующий характер и может обращаться в нуль при определенных значениях  $z$ ;  $y$  — проекция, монотонно возрастающая с увеличением  $z$ .

Траектория, параллельная оси в предметном пространстве ( $x'_0 = y'_0 = 0$ ), имеет вид

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 \cos \beta (z - z_0); \\ y &= y_0 \operatorname{ch} \beta (z - z_0). \end{aligned} \right\} \quad (2.28)$$

Подставляя значения  $x$  и  $y$  (2.28) в выражения (2.22) — (2.24) и учитывая, что  $z_i - z_0 = L$ , получаем фокусные расстояния и положения кардинальных элементов

$$f_x = \frac{1}{\beta \sin \beta L}; \quad f_y = -\frac{1}{\beta \operatorname{sh} \beta L}. \quad (2.29)$$

В плоскости  $xOz$  фокусное расстояние при  $0 < \beta L < \pi$  положительно и линза собирает. В плоскости  $yOz$  фокусное расстояние всегда отрицательно (мнимый фокус), что соответствует рассеивающей линзе.

Оптический аналог квадрупольной линзы — стеклянная линза с седлообразными поверхностями (рис. 16).

Положение кардинальных элементов в пространстве изображений таково (начало координат расположено в центре линзы):

$$\left. \begin{aligned} z(F_x) &= \frac{L}{2} + \frac{1}{\beta} \operatorname{ctg} \beta L; & z(F_y) &= \frac{L}{2} - \frac{1}{\beta} \operatorname{cth} \beta L; \\ z(H_x) &= \frac{L}{2} - \frac{1}{\beta} \operatorname{tg} \frac{\beta L}{2}; & z(H_y) &= \frac{L}{2} - \frac{1}{\beta} \operatorname{th} \frac{\beta L}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.30)$$

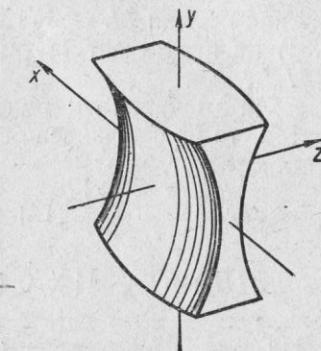


Рис. 16. Оптический аналог квадрупольной линзы.

При значениях  $\beta L$ , лежащих в пределах от нуля до  $\pi/2$ ,  $\operatorname{ctg} \beta L$  положителен и фокус в собирающей плоскости расположен в пространстве изображений вне линзы. Если  $\beta L$  принимает значения от  $\pi/2$  до  $\pi$ ,  $\operatorname{ctg} \beta L$  становится отрицательным, фокус погружается в линзу, и из нее выходит расходящийся пучок. Затем  $\operatorname{ctg} \beta L$  снова становится положительным, возникает второе пересечение траектории с осью. Величина  $\operatorname{cth} \beta L$  всегда положительна и меняется от бесконечности (при  $\beta L$ , равном нулю) до единицы (при  $\beta L$ , стремящемся к бесконечности). Поэтому в рассеивающей плоскости фокус всегда расположен перед выходным краем линзы в области, занятой полем линзы, или в

предметном пространстве. Пучок, параллельный на входе в линзу, выходит из нее всегда расходящимся в плоскости  $yOz$ .

Весьма полезно при расчетах довольно точное соотношение между  $f_x$  и  $f_y$ , которое следует из уравнений (2.29) [14.45]:

$$f_x + f_y \approx \frac{1}{3} L \left[ 1 + (\beta L)^4 \left( \frac{1}{90} + \frac{1}{840} \right) \right]. \quad (2.31)$$

Так как обычно  $\beta L < 1$ , то поправочный член в выражении (2.31) не превышает 1%, и можно принять, что  $f_x + f_y \approx \frac{1}{3} L$ .

Если отсчитывать положение главных плоскостей от центра, то из соотношений (2.30) с большой степенью точности следует, что

$$\left. \begin{aligned} z(H_x) &= -\frac{\beta^2 L^3}{24} [1 + 0,1 (\beta L)^2 + 0,01 (\beta L)^4]; \\ z(H_y) &= \frac{\beta^2 L^3}{24} [1 - 0,1 (\beta L)^2 + 0,01 (\beta L)^4]. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

На рис. 17 приведены графики абсолютных величин  $z(H_x)$  и  $z(H_y)$ , а также номограмма, связывающая фокусное расстояние  $f_x$  с параметром  $\beta L$ .

В случаях, когда линзу с прямоугольным распределением поля можно рассматривать как слабую ( $\beta L \ll 1$ ), выражения для кардинальных элементов упрощаются:

$$f_x = -f_y = \frac{1}{\beta^2 L}; \quad z(H_x) = z(H_y) = 0. \quad (2.33)$$

Абсолютные значения фокусных расстояний слабой линзы равны между собой, а главные плоскости предметного пространства и пространства изображения сливаются и располагаются в центре линзы.

С увеличением  $\beta L$  оптическая сила линзы в рассеивающей плоскости становится больше, чем в собирающей, вследствие того, что  $\sinh \beta L$  растет быстрее, чем  $\sin \beta L$ . Так, для  $\beta L < 0,2$  отношение  $f_x/f_y \approx 1$ , а когда  $\beta L = 1$ ,  $f_x/f_y \approx 1,4$ . Одновременно расходятся в противоположные стороны главные плоскости. Приближение слабой линзы дает незначительную ошибку, если  $\beta L$  не больше 0,5—0,6.

Для определения увеличения линзы с прямоугольной моделью поля необходимо найти углы наклона траектории

в пространстве изображения, если известны ее углы наклона в предметном пространстве.

Рассмотрим траекторию, уравнение которой в предметном пространстве имеет следующий вид:

$$x_a = z - z_0 + a; \quad y_a = z - z_0 + a, \quad (2.34)$$

где  $a$  — расстояние от предмета до входа в линзу.

В области, занимаемой полем, траектория описывается выражениями (2.27). Из условия равенства на границе поля

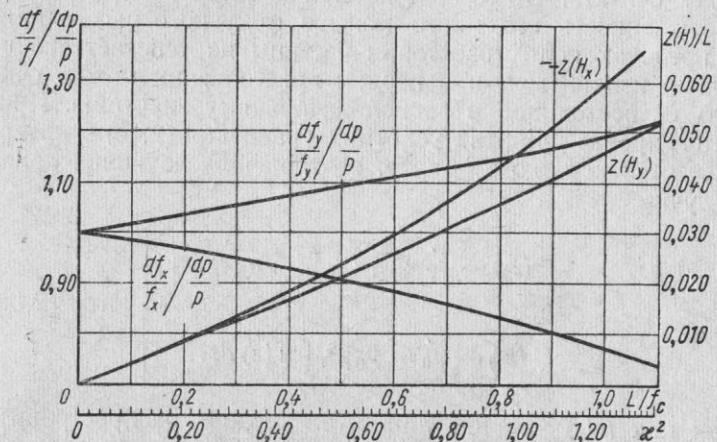


Рис. 17. Графики зависимости положений главных плоскостей, а также величины  $df/f/dp/p$  от  $L/f_c$  для прямоугольной модели поля. Параметр  $\kappa = \beta L$

координат траектории и ее углов наклона получим  $x'_0 = y'_0 = 1$ ;  $x_0 = y_0 = a$ . Тогда в пределах поля линзы

$$\left. \begin{aligned} x_a &= \frac{1}{\beta} \sin \beta (z - z_0) + a \cos \beta (z - z_0); \\ y_a &= \frac{1}{\beta} \sinh \beta (z - z_0) + a \cosh \beta (z - z_0). \end{aligned} \right\} \quad (2.35)$$

Значения углов наклона на выходе из линзы, а следовательно, и в пространстве изображений равны

$$\left. \begin{aligned} x_a &= \cos \beta L - \beta a \sin \beta L; \\ y_a &= \sinh \beta L + \beta a \cosh \beta L. \end{aligned} \right\} \quad (2.36)$$

Отсюда, согласно выражениям (2.20) и (2.21), увеличения равны

$$M_x = (\cos \beta L - \beta a \sin \beta L)^{-1}; \quad M_y = (\operatorname{ch} \beta L + \beta a \operatorname{sh} \beta L)^{-1}. \quad (2.37)$$

Рассмотрим другой вариант квадрупольной линзы — тонкую линзу с произвольным распределением поля вдоль оси  $z$  [46]. Как это обычно принято для тонкой линзы, будем считать, что ее поле настолько слабо и коротко, что протяженность его много меньше фокусного расстояния. В пределах поля траектория частицы не успевает значительно измениться, и в первом приближении можно считать ее постоянной и равной начальному значению. Принтегрировав при этих условиях уравнения (2.10) в интервале от  $z = z_0$  до  $z = z_i$ , т. е. от начала до конца поля, получим

$$\left. \begin{aligned} x'(z_i) - x'_0 &= -x_0 \beta^2 \int_{z_0}^{z_i} u(z) dz; \\ y'(z_i) - y'_0 &= y_0 \beta^2 \int_{z_0}^{z_i} u(z) dz. \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

Так как  $u(z) = 0$  вне линзы, то можно распространить пределы интегрирования от  $z = -\infty$  до  $z = +\infty$ .

Для определения фокусных расстояний используем траекторию, параллельную в предметном пространстве оси линзы ( $x'_0 = y'_0 = 0$ ), и подставим выражения (2.38) в уравнения (2.22):

$$\frac{1}{f_x} = -\frac{1}{f_y} = \beta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u(z) dz = \frac{1}{f}. \quad (2.39)$$

Фокусные расстояния тонкой линзы в собирающей и рассеивающей плоскостях равны по величине и противоположны по знаку.

Из соотношений (2.23) и (2.24) следует, что если пренебречь протяженностью поля линзы по сравнению с фокусным расстоянием, то главные плоскости ее совпадут и будут расположены в пределах линзы.

Длина линейного изображения  $\Delta$ , которое образуется при фокусировке тонкой квадрупольной линзой пучка траек-

торий, выходящих в виде круглого конуса из точки на оси, равна

$$\Delta = \frac{4a^2 \operatorname{tg} \alpha}{a - f}, \quad (2.40)$$

где  $a$  — расстояние от источника до линзы;  $2\alpha$  — угол раствора пучка.

Если зависимость поля от координаты  $z$  в тонкой линзе можно аппроксимировать выражением (1.70), соответствующим линзе, составленной из четырех точечных зарядов, то в нерелятивистском случае

$$\frac{1}{f} = -\frac{4V}{\Phi} \frac{r_\Theta}{r_E^2}. \quad (2.41)$$

Для тонкой линзы, поле которой аппроксимировано прямоугольником, формулы, определяющие ее фокусное расстояние, которые получаются из выражений (2.39), совпадают с формулами (2.33).

Параксиальные уравнения траектории заряженной частицы (2.10) можно строго проинтегрировать в случае колоколообразной формы кривой  $u(z)$ , задаваемой функцией (1.76) (см. рис. 13, а),

$$u(z) = \left[ 1 + \left( \frac{z - z_k}{d} \right)^2 \right]^{-2}.$$

При такой форме спада поля траектория получается в аналитическом виде. Выражение (1.76) для  $u(z)$  хорошо аппроксимирует распределение поля квадрупольной линзы, длина которой равна радиусу апертуры или меньше его. Отличие функции (1.76) от распределения поля (1.70) для приосевой области линзы, образованной четырьмя точечными зарядами, заключается в том, что в последнем показатель степени у квадратной скобки в 1,25 раза больше, чем в первом.

Фокусировка первого порядка в квадрупольной линзе с колоколообразным полем, описываемым выражением (1.76), рассмотрена в работе [5]. Параксиальные дифференциальные уравнения траектории имеют такой же вид, как параксиальное уравнение для осесимметричной магнитной линзы с распределением поля вдоль оси  $z$ , пропорциональным  $H_z \sim [1 + (\frac{z - z_k}{d})^2]^{-1}$ . Решение последнего уравнения возможно в аналитическом виде [47].

Заменой переменных

$$\operatorname{ctg} \psi = \frac{z - z_k}{d}; \quad (2.42)$$

$$w = \frac{x}{d} \sin \psi; \quad v = \frac{y}{d} \sin \psi \quad (2.43)$$

можно свести уравнения (2.10) с  $u(z)$ , задаваемым функцией (1.76), к дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 w}{d\psi^2} + \omega_c^2 w = 0; \\ \frac{d^2 v}{d\psi^2} + \omega_d^2 v = 0, \end{array} \right\} \quad (2.44)$$

где

$$\omega_c^2 = 1 + \beta^2 d^2; \quad \omega_d^2 = 1 - \beta^2 d^2. \quad (2.45)$$

Линейно независимые решения уравнений (2.10), удовлетворяющие начальным условиям (2.16), имеют следующий вид:

$$\left. \begin{array}{l} x_\alpha = \frac{d}{\omega_c \sin \psi_0} \cdot \frac{\sin \omega_c (\psi_0 - \psi)}{\sin \psi}; \\ x_\beta = -\frac{1}{\omega_c \sin \psi} [\omega_c \sin \psi_0 \cos \omega_c (\psi_0 - \psi) - \\ \quad - \cos \psi_0 \sin \omega_c (\psi_0 - \psi)]; \\ y_\alpha = \frac{d}{\omega_d \sin \psi_0} \cdot \frac{\sin \omega_d (\psi_0 - \psi)}{\sin \psi}; \\ y_\beta = -\frac{1}{\omega_d \sin \psi} [\omega_d \sin \psi_0 \cos \omega_d (\psi_0 - \psi) - \\ \quad - \cos \psi_0 \sin \omega_d (\psi_0 - \psi)], \end{array} \right\} \quad (2.46)$$

где  $\psi_0$  — значение координаты  $\psi$  в начальной точке. Если  $\beta^2 d^2 > 1$ , то  $\omega_d^2$  становится отрицательной. Тогда  $\omega_d = i|\omega_d|$  и тригонометрические функции в выражениях для  $y(\psi)$  переходят в гиперболические.

Изображение находится в точке  $\psi = \psi_1$ , где  $x_\alpha = 0$ . Отсюда следует связь между положениями предмета и изображения:

$$\psi_0 - \psi_1 = \frac{\pi}{\omega_c}. \quad (2.47)$$

Если поле достаточно сильное, то траектория может пересечь ось несколько раз. Для определения координат точек пересечения нужно числитель в формуле (2.47) умножить на некоторое целое число  $k$ .

Из уравнений (2.46) можно получить выражение для кардинальных элементов линзы. Однако необходимо учесть, что понятие начала и конца линзы с колоколообразным распределением поля несколько неопределенно. Предметным пространством и пространством изображений можно считать области, где поле достаточно слабо. Траектории частиц в этих областях с большой степенью точности можно считать прямолинейными. Положения фокусов и фокусные расстояния определяются, как уже говорилось ранее, не реальным пересечением траектории с осью, а пересечением касательных к траекториям, проведенных из предметного пространства и пространства изображений.

Используя соотношения (2.22) и (2.23), найдем:

$$f_x = -\frac{\omega_c d}{\sin \omega_c \pi}; \quad f_y = -\frac{\omega_d d}{\sin \omega_d \pi}; \quad (2.48)$$

$$\left. \begin{array}{l} z(F_x) = z_k + \omega_c d \operatorname{ctg} \omega_c \pi; \\ z(F_y) = z_k + \omega_d d \operatorname{ctg} \omega_d \pi. \end{array} \right\} \quad (2.49)$$

Увеличения линзы с колоколообразной моделью поля таковы:

$$\left. \begin{array}{l} M_x = \sin \psi_0 / \sin \psi_1; \\ M_y = \omega_d \sin \psi_0 \left[ \omega_d \sin \psi_1 \cos \pi \frac{\omega_d}{\omega_c} + \cos \psi_1 \sin \pi \frac{\omega_d}{\omega_c} \right]^{-1}. \end{array} \right\} \quad (2.50)$$

Когда длина линзы  $l$  больше ее апертуры, реальное распределение поля можно с большей точностью, чем прямоугольником, аппроксимировать кривой (см. рис. 13, б), составленной из трех частей, описываемых выражением (1.78). При такой аппроксимации траектория заряженной частицы в линзе также может быть получена в аналитической форме.

Траектория в центральной области имеет вид соотношения (2.27), а в краевых может быть получена из уравнений (2.46). Начальные значения на границе каждой последующей области подбираются таким образом, чтобы обеспечить непрерывность траектории и угла ее наклона.

Рассмотрим в качестве примера фокусные расстояния такой линзы [42]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{f_x} &= \beta \sin 2\beta z_k \left( \frac{\sin^2 \omega_c \pi/2}{\omega_c^2} + \frac{\cos^2 \omega_c \pi/2}{1 - \omega_c^2} \right) - \\ &\quad - \frac{\sin \omega_c \pi}{\omega_c d} \cos 2\beta z_k; \\ \frac{1}{f_y} &= -\beta \operatorname{sh} 2\beta z_k \left( \frac{\sin^2 \omega_d \pi/2}{\omega_d^2} + \frac{\cos^2 \omega_d \pi/2}{1 - \omega_d^2} \right) - \\ &\quad - \frac{\sin \omega_d \pi}{\omega_d d} \operatorname{ch} 2\beta z_k. \end{aligned} \right\} \quad (2.51)$$

Если  $z_k = 0$  (распределение поля — колоколообразная кривая), выражения (2.51) переходят в выражения (2.48), для  $d = 0$  (распределение поля имеет вид прямоугольника) формулы (2.51) переходят в соотношения (2.29).

Как видно из формул (2.51), выражения для фокусных расстояний имеют весьма громоздкий вид. Так же сложно записываются формулы для  $z(F)$ . Вместе с тем, как показано в работе [42], в двух предельных случаях прямоугольника и колокола с равными эффективными длинами положения фокусов и фокусные расстояния отличаются не более чем на 1,5%. Следовательно, в расчетах электронно-оптических свойств первого порядка, если достаточна точность в несколько процентов, не имеет большого смысла пользоваться громоздкими выражениями для кардинальных элементов, которые получаются в случае аппроксимации распределения поля колоколом или сложным колоколом. Прямоугольная модель с хорошо подобранный эффективной длиной в большинстве случаев обеспечивает достаточную точность в определении элементов параксиальной оптики квадрупольных линз.

В электрических квадрупольных линзах, вблизи концов которых расположены заземленные пластины, распределение потенциала при  $l \leq r_E$  уменьшается от центра вдоль оси  $z$  практически линейно. Зависимость поля от координаты  $z$  в таких линзах может быть с определенной точностью аппроксимирована треугольником (см. рис. 13, в) [48]. В этом случае

$$\left. \begin{aligned} u(z) &= (z/z_0 + 1); & -z_0 \leq z \leq 0; \\ u(z) &= -(z/z_0 - 1); & 0 \leq z \leq z_0, \end{aligned} \right\} \quad (2.52)$$

где  $z_0$  — некоторая постоянная. Вне области  $-z_0 \leq z \leq z_0$   $u(z)$  равно нулю.

Уравнение параксиальных траекторий в таком поле можно строго проинтегрировать и получить траектории в аналитическом виде. Для этого поле разобьем на две части, справа и слева от нуля. Подставив в соотношения (2.10) значения  $u(z)$  из выражения (2.52) по очереди для каждой части, получим две пары уравнений, описывающих траекторию заряженной частицы слева и справа от центра. В первой области  $-z_0 \leq z \leq 0$  произведем замену переменных

$$\zeta = z/z_0 + 1; \quad 0 \leq \zeta \leq 1. \quad (2.53)$$

Тогда получим

$$\frac{d^2 x}{d\zeta^2} - t^3 \zeta x = 0; \quad \frac{d^2 y}{d\zeta^2} + t^3 \zeta y = 0, \quad (2.54)$$

где в нерелятивистском случае

$$t^3 = \frac{V K_2 z_0^2}{r_E^2 \Phi}.$$

Оба дифференциальных уравнения (2.54) имеют решения в виде интегралов Эйри, обозначаемых  $A_i$  и  $B_i$

$$\left. \begin{aligned} x(\zeta) &= C_1 A_i(t\zeta) + C_2 B_i(t\zeta); \\ y(\zeta) &= C_3 A_i(-t\zeta) + C_4 B_i(-t\zeta). \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

Здесь  $C_i$  — постоянные, связанные с начальными условиями.

Аналогичный вид имеет траектория в правой половине линзы. Описывающие ее постоянные определяются из условия равенства координат траектории и углов ее наклона на границе между обеими половинами.

Полученные зависимости для фокусных расстояний и положений фокусов от параметра  $t$  представлены на рис. 18. На рис. 18, а параметр  $t$  меняется от нуля до единицы. В этой области линзу можно рассматривать как тонкую. Главные плоскости практически совпадают с центром линзы. На рис. 18, б ( $t > 1$ ) дано фокусное расстояние и положение фокуса в собирающей плоскости линзы. Линзу уже нельзя рассматривать как тонкую. Кардинальные элементы сильно меняются с изменением  $t$ .

В гл. 3 приведен расчет систем из квадрупольных линз, поскольку, как правило, квадрупольные линзы используются не поодиночке, а группами. Кроме того, они приме-

няются обычно совместно с отклоняющими магнитами. Поэтому важно использовать методику расчета, которая существенно упрощала бы проведение громоздких вычислений, связанных с большим количеством электронно-оптических элементов.

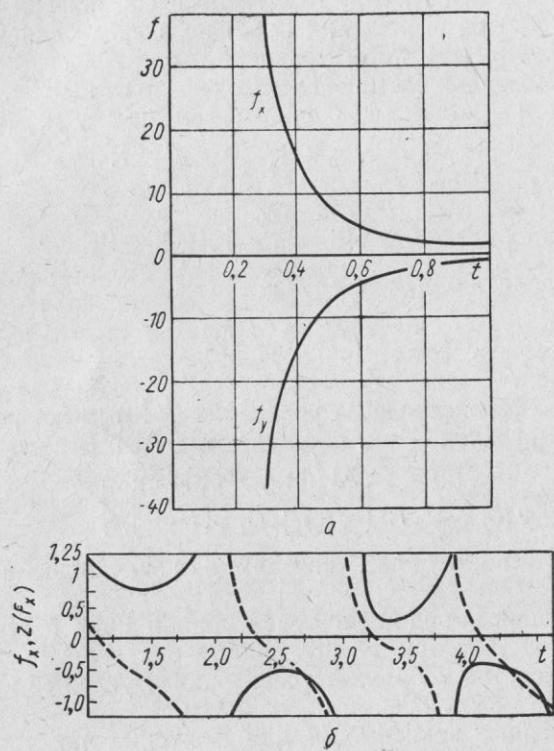


Рис. 18. Фокусные расстояния и положения фокуса (штриховая кривая) в зависимости от параметра  $t$  в линзе, распределение потенциала вдоль оси  $z$  которой аппроксимировано треугольником. Длины даны в единицах  $z_0$ .

Таким удобным математическим аппаратом является матричная алгебра [49]. Это объясняется тем, что отдельную квадрупольную линзу можно рассматривать как элемент, осуществляющий (в параксиальном приближении) линейное преобразование некоторых исходных значений поперечных смещений и углов отклонений траектории в ко-

нечные их значения. Последовательный ряд линз и разделяющих их свободных от поля промежутков можно рассматривать как ряд последовательных линейных преобразований. Затраты труда при расчете системы существенно уменьшаются, если каждому линейному преобразованию сопоставить матрицу, а их последовательности — произведение матриц. Тогда расчет становится более компактным. Матричный метод нашел широкое применение для расчета сложных систем в оптике [50]. Использование его в электронной оптике описано в литературе [51]. В работах [52, 53, 8, 11] и т. д. дано применение матриц для определения траекторий и кардиальных элементов в квадрупольных линзах.

Рассмотрим вначале свойства матриц и их использование на примере одной квадрупольной линзы. Согласно формулам (2.17), напишем две пары уравнений для проекций траектории и углов ее наклона в линзе:

$$\left. \begin{array}{l} x(z) = x_0 x_\beta(z) + x'_0 x_\alpha(z); \quad y(z) = y_0 y_\beta(z) + y'_0 y_\alpha(z); \\ x'(z) = x_0 x'_\beta(z) + x'_0 x'_\alpha(z); \quad y'(z) = y_0 y'_\beta(z) + y'_0 y'_\alpha(z). \end{array} \right\} \quad (2.56)$$

Таким образом, значения  $x$  и  $x'$  (аналогично  $y$  и  $y'$ ) для любого  $z$  связаны с их начальными значениями  $x_0$  и  $x'(y_0$  и  $y'_0)$  линейными уравнениями (2.56). При помощи матриц можно записать эти линейные уравнения следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \begin{vmatrix} x(z) \\ x'(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_\beta(z) & x_\alpha(z) \\ x'_\beta(z) & x'_\alpha(z) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} y(z) \\ y'(z) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_\beta(z) & y_\alpha(z) \\ y'_\beta(z) & y'_\alpha(z) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{vmatrix}; \end{array} \right\} \quad (2.57)$$

Выражения

$$Q_c = \begin{vmatrix} x_\beta(z) & x_\alpha(z) \\ x'_\beta(z) & x'_\alpha(z) \end{vmatrix}; \quad Q_d = \begin{vmatrix} y_\beta(z) & y_\alpha(z) \\ y'_\beta(z) & y'_\alpha(z) \end{vmatrix} \quad (2.58)$$

матрицы квадрупольной линзы в собирающей и рассеивающей плоскостях. Их можно записать единым образом в следующем виде:

$$Q = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}. \quad (2.59)$$

В зависимости от индекса при  $Q$   $q_{ik}$  принимают соответствующие значения.

Для получения  $x(z)$  или  $y(z)$  нужно почленно перемножить верхнюю строчку матрицы на столбец  $\begin{vmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{vmatrix}$  или  $\begin{vmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{vmatrix}$  и затем сложить, а для нахождения  $x'(z)$  или  $y'(z)$  сделать то же самое с нижней строчкой.

Если распределение потенциала вдоль оси  $z$  в квадрупольной линзе аппроксимировано прямоугольником, то, как следует из выражений (2.27) и (2.58), матрицы  $Q$  в собирающей и рассеивающей плоскостях на выходе из линзы имеют вид

$$Q_c = \begin{vmatrix} \cos \beta L & \frac{1}{\beta} \sin \beta L \\ -\beta \sin \beta L & \cos \beta L \end{vmatrix}; \quad Q_d = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} \beta L & \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta L \\ \beta \operatorname{sh} \beta L & \operatorname{ch} \beta L \end{vmatrix}. \quad (2.60)$$

В пространстве, свободном от поля, траектория — прямая, преобразуемая следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x_0 + x'_0 s; \quad y_1 = y_0 + y'_0 s; \\ x'_1 = x'_0; \quad y'_1 = y'_0, \end{array} \right\} \quad (2.61)$$

где  $s$  — протяженность свободной от поля области. Отсюда матрица свободного пространства имеет вид

$$S = \begin{vmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.62)$$

Если линза тонкая, то, как уже говорилось, она не меняет координаты траектории, а только углы ее наклона. Тогда, согласно выражениям (2.38) и (2.39), получаем

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x_0; \quad y_1 = y_0; \\ x'_1 = -x_0 \frac{1}{f} + x'_0; \quad y'_1 = y_0 \frac{1}{f} + y'_0, \end{array} \right\} \quad (2.63)$$

и, следовательно, матрицы тонкой линзы для собирающей и рассеивающей плоскостей таковы:

$$Q_c = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{vmatrix}; \quad Q_d = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f} & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.64)$$

В дальнейшем нам понадобится использовать некоторые свойства матриц. Перечислим основные из них [49]. Если

элементы (числа, составляющие матрицу, называются ее элементами) снабжены двумя индексами, то первый всегда указывает номер строки, а второй — номер столбца, на пересечении которых стоит данный элемент. Если число элементов в строке и столбце одинаково и равно  $n$ , то матрица называется квадратной, а число  $n$  — ее порядком. В общем случае матрица называется прямоугольной. Матрицы квадрупольной линзы и свободного пространства — квадратные, второго порядка.

Так как два последовательно примененных линейных преобразования записываются через матрицы как произведение двух соответствующих матриц, то существенным является правило умножения матриц. Произведением матрицы  $A$  (с элементами  $a_{ik}$ ) и матрицы  $B$  (с элементами  $b_{ik}$ ) называется матрица  $C = AB$ , каждый элемент которой  $c_{ij}$  равен «произведению»  $i$ -й строки первой матрицы  $A$  на  $j$ -й столбец второй матрицы  $B$ . При этом под «произведением» двух рядов чисел  $a_{ik}$  и  $b_{kj}$  мы понимаем сумму парных произведений соответствующих чисел этих рядов:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}. \quad (2.65)$$

Соответствие этого правила умножения матриц двум последовательно примененным линейным преобразованиям легко проверить непосредственно.

Операция умножения двух прямоугольных матриц выполняется лишь в том случае, когда число столбцов в первом сомножителе равно числу строк во втором. Умножение матриц не обладает переместительным свойством, и в общем случае

$$AB \neq BA. \quad (2.66)$$

Сочетательное свойство умножения матриц записывается так:

$$(AB)C = A(BC). \quad (2.67)$$

Квадратная матрица  $n$ -го порядка, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю, называется единичной матрицей. Будем обозначать ее  $E$ . Применение единичной матрицы к траекториям не изменяет их. Умножение на нее любой прямоугольной матрицы  $A$  не меняет последнюю:

$$EA = AE = A. \quad (2.68)$$

Матрица  $A^{-1}$  называется обратной данной матрице  $A$ , если их произведение — единичная матрица  $E$ . Последовательное применение прямой и обратной матриц к траектории не изменяет ее.

Согласно выражению (2.16а)  $x_\beta x'_\alpha - x_\alpha x'_\beta = 1$ ;  $y_\beta y'_\alpha - y_\alpha y'_\beta = 1$ . Следовательно, определители матриц квадрупольной линзы (2.58) равны единице. Это свойство определителей можно непосредственно проверить на матрицах (2.60) и (2.64). Оно верно также для матрицы свободного пространства (2.62) и может служить критерием правильности вычислений матрицы. В силу соотношения (2.16 а) только три из четырех элементов рассматриваемых матриц независимы.

В квадрупольных линзах обратная матрица  $A^{-1}$  равна

$$A^{-1} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}^{-1} = \begin{vmatrix} a_{22} - a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{vmatrix}. \quad (2.69)$$

Нетрудно убедиться, что произведение  $A^{-1}$  из выражения (2.69) на  $A$  равно  $E$ .

Предположим, что имеется система из квадрупольных линз, характеризуемая некоторым значением  $u(z_{1k} - z)$ , где  $z_{1k}$  — координата конца системы. Траектория в ней описывается матрицей

$$T = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix}. \quad (2.70)$$

Можно написать выражение для матрицы  $T_r$ , соответствующей системе, которая является зеркальным отражением первой и характеризуется функцией  $u(z_{2n} + z) = u(z_{1k} - z)$ , где  $z_{2n}$  — координата начала второй системы. Так как траектория во второй системе, выходящая из симметричной точки и направленная в противоположную сторону подальным по величине углом, симметрична траектории в первой системе, то можно написать

$$\begin{vmatrix} x(z_{1k}) \\ x'(z_{1k}) \end{vmatrix} = T \begin{vmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} x(z_{2n}) \\ x'(z_{2n}) \end{vmatrix} = T_r^{-1} \begin{vmatrix} x_0 \\ -x'_0 \end{vmatrix}, \quad (2.71)$$

где  $x(z_{2n}) = x(z_{1k})$ ;  $x'(z_{2n}) = -x'(z_{1k})$ . Вычисления для  $y$  — проекции вполне аналогичны и поэтому проводить их не будем. Так как

$$\begin{vmatrix} x_0 \\ -x'_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{vmatrix}. \quad (2.72)$$

и аналогично можно написать для  $x(z_{2n})$ , то в результате имеем

$$T = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} T_r^{-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (2.73)$$

Отсюда, используя выражение (2.69), получим

$$T_r = \begin{vmatrix} t_{22} & t_{12} \\ t_{21} & t_{11} \end{vmatrix}. \quad (2.74)$$

Матрицы двух симметричных систем различаются только перестановкой элементов главной диагонали.

Матрица суммарной системы, симметричная относительно своего центра, имеет одинаковые элементы главной диагонали

$$t_{11} = t_{22}. \quad (2.74a)$$

При этом в ней независимы только два из четырех элементов.

Чтобы траектория в магнитной системе не менялась при изменении ее направления скорости на обратное, необходимо изменить направление поля.

Рассмотрим применение матричного метода расчета для вычисления кардинальных элементов квадрупольной линзы. Проделаем это сначала в общем виде, не конкретизируя выражения для  $Q$ . Полученные формулы для кардинальных элементов имеют общий характер и могут быть использованы для расчетов дублетов и более сложных систем. В каждом случае необходимо только в полученные формулы подставить соответствующие значения матричных элементов системы.

До сих пор мы считали, что в квадрупольной линзе плоскость  $xOz$  собирающая, а плоскость  $yOz$  — рассеивающая. В системах из квадрупольных линз в каждой плоскости происходит как фокусировка, так и дефокусировка, поэтому перейдем в отдельных линзах от индексов  $x$  и  $y$  к индексам  $c$  и  $d$ ; первый соответствует собирающему действию линзы, второй — рассеивающему.

Рассмотрим вначале кардинальные элементы пространства изображения. Проекция на плоскость  $xOz$  траек-

тории в области свободного от поля пространства за линзой имеет вид [см. матрицы (2.59) и (2.62)]:

$$\begin{vmatrix} x \\ x' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}_c \begin{vmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{vmatrix}. \quad (2.75)$$

Проекция на плоскость  $yOz$  получается из выражения (2.75) заменой всех букв  $x$  на  $y$  и индекса  $c$  на  $d$ .

Воспользовавшись правилом умножения матриц (2.65), получим

$$\begin{vmatrix} x \\ x' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q_{11} + sq_{21} & q_{12} + sq_{22} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}_c \begin{vmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{vmatrix}. \quad (2.76)$$

Для определения положения фокуса и фокусного расстояния следует рассмотреть траекторию, параллельную оси  $z$  в предметном пространстве ( $x'_0 = y'_0 = 0$ ). Если обозначить координаты положения фокусов, отсчитываемые от выходного края линзы,  $z^*(F_c)$  и  $z^*(F_d)$  и учесть, что в этих точках соответствующие значения  $x$  и  $y$  равны нулю, то получим следующие уравнения:

$$0 = x_0[(q_{11})_c + z^*(F_c)(q_{21})_c]; \quad x' = x_0(q_{21})_c; \quad (2.77)$$

$$0 = y_0[(q_{11})_d + z^*(F_d)(q_{21})_d]; \quad y' = y_0(q_{21})_d. \quad (2.78)$$

Отсюда, используя уравнения (2.22), получим

$$f_c = -\frac{1}{(q_{21})_c}; \quad f_d = -\frac{1}{(q_{21})_d}; \quad (2.79)$$

$$z^*(F_c) = -\frac{(q_{11})_c}{(q_{21})_c} = f_c(q_{11})_c; \quad z^*(F_d) = -\frac{(q_{11})_d}{(q_{21})_d} = f_d(q_{11})_d. \quad (2.80)$$

По формулам (2.24) с учетом выражений (2.79) и (2.80) можно найти положение главных плоскостей пространства изображений, отсчитываемое от выхода из линзы:

$$z^*(H_c) = [(q_{11})_c - 1]f_c; \quad z^*(H_d) = [(q_{11})_d - 1]f_d. \quad (2.81)$$

Сравним результаты, получаемые из соотношений (2.79)–(2.81) для прямоугольной модели поля, с полученными ранее по расчетам траектории. Используя выражение для матриц квадрупольной линзы с прямоугольным распределением поля (2.60), имеем:

$$\left. \begin{aligned} f_c &= \frac{1}{\beta \sin \beta L}; & f_d &= -\frac{1}{\beta \sinh \beta L}; \\ z^*(F_c) &= \frac{1}{\beta} \operatorname{ctg} \beta L; & z^*(F_d) &= -\frac{1}{\beta} \operatorname{cth} \beta L; \\ z^*(H_c) &= -\frac{1}{\beta} \operatorname{tg} \frac{\beta L}{2}; & z^*(H_d) &= -\frac{1}{\beta} \operatorname{th} \frac{\beta L}{2}. \end{aligned} \right\} (2.82)$$

Эти результаты полностью совпадают с вычислениями по формулам (2.29) и (2.30), если учесть, что в последних отсчет координаты  $z$  ведется от центра линзы.

Чтобы полностью охарактеризовать квадрупольную линзу, необходимо еще определить ее кардиальные элементы в предметном пространстве. Это можно сделать, рассмотрев траекторию, параллельную оси в пространстве изображений. При этом нужно учесть, что для частицы, движущейся от пространства изображений к предметному пространству, линза будет как бы зеркальным отражением линзы, в которой частицы движутся в противоположном направлении. Следовательно, ее матрицы равны  $Q_r$  [см. выражение (2.74)] и отличаются от матриц  $Q$  только перестановкой элементов главной диагонали:

$$(q_{11})_r = q_{22}; \quad (q_{22})_r = q_{11}. \quad (2.83)$$

Отсюда следует, что фокусные расстояния предметного пространства, определяемые величиной  $(q_{21})_r$ , равны фокусным расстояниям пространства изображений. Если отмечать кардиальные элементы, относящиеся к предметному пространству штрихами, то

$$f'_c = f_c; \quad f'_d = f_d. \quad (2.84)$$

Положения фокусов зависят от элементов главной диагонали матриц линзы. Поэтому в предметном пространстве в общем случае они имеют иной вид, чем в пространстве изображений:

$$z^*(F'_c) = f'_c(q_{22})_c; \quad z^*(F'_d) = f'_d(q_{22})_d. \quad (2.85)$$

Здесь положения фокусов отсчитываются от входной плоскости линзы в направлении, противоположном оси  $z$ .

Так как поле отдельной квадрупольной линзы симметрично относительно своего центра, то, согласно выражению (2.74a),

$$q_{22} = q_{11} \quad (2.86)$$

$$z^*(F'_c) = z^*(F_c); \quad z^*(F'_d) = z^*(F_d). \quad (2.87)$$

Матрица линзы  $Q$  связывает положение предмета и его изображений. Обозначим расстояние от предмета до входного края линзы  $a$  ( $a > 0$ , если предмет расположен слева от линзы, т. е. в предметном пространстве). Расстояние от изображений до выходного края линзы обозначим  $g_c$  и  $g_d$  соответственно ( $g > 0$ , если изображения расположены справа от линзы, т. е. в пространстве изображений). Тогда связь между положением предмета и его изображениями будет иметь вид

$$\left. \begin{array}{l} \left| \begin{array}{c} x' \\ x_0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & g_c \\ 0 & 1 \end{array} \right| Q_c \left| \begin{array}{cc} 1 & a \\ 0 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 0 \\ x'_0 \end{array} \right|; \\ \left| \begin{array}{c} y' \\ y_0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & g_d \\ 0 & 1 \end{array} \right| Q_d \left| \begin{array}{cc} 1 & a \\ 0 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 0 \\ y'_0 \end{array} \right|, \end{array} \right\} \quad (2.88)$$

Здесь  $x_0 = y_0 = 0$ . В точке с координатой  $g_c$   $x=0$ , в точке с координатой  $g_d$   $y=0$ .

Перемножив матрицы с учетом, что  $M_c = \frac{x'_0}{x'}$ , а  $M_d = \frac{y'_0}{y'}$ , получим:

$$g = -\frac{aq_{11} + q_{12}}{aq_{21} + q_{22}}, \quad (2.89)$$

$$M = \frac{1}{aq_{21} + q_{22}} = gq_{21} + q_{11}. \quad (2.90)$$

Для собирающей плоскости при  $g$ ,  $M$  и  $q$  в формулах (2.89) и (2.90) нужно поставить индекс  $c$ , для рассеивающей  $d$ .

Если на линзу падает астигматический пучок, то имеются две линии пересечения лучей в предметном пространстве (действительные или мнимые). Им соответствуют две проекции в виде точки: одна на плоскости  $c$ , другая на плоскости  $d$ . Если обозначить расстояние от точки в плоскости  $c$  до входа в линзу  $a_c$ , а соответствующее расстояние в плоскости  $d$   $a_d$ , то эти индексы при  $a$  должны быть поставлены также в выражениях (2.88)–(2.90).

Из формул (2.89) и (2.90) легко найти выражения для положений изображений и увеличений тонкой квадрупольной линзы. В этом случае элементы матрицы  $Q$  имеют вид матриц (2.64), а  $1/f = \beta^2 L$ . Тогда получим

$$g_c = \frac{a}{\beta^2 La - 1}; \quad g_d = -\frac{a}{\beta^2 La + 1}; \quad (2.91)$$

$$M_c = -\frac{1}{\beta^2 La - 1}; \quad M_d = \frac{1}{\beta^2 La + 1}. \quad (2.92)$$

В некоторых случаях представляют интерес длины получающихся линейных изображений. Кроме параметров линзы и положения предмета они определяются еще максимальной величиной расходности пучка, т. е. максимальными значениями начальных углов  $y_{\max}$ . Обозначим длину линейного изображения, лежащего в плоскости  $yOz$ ,  $2y_{\max}$ . Ее можно также найти при помощи матрицы линзы

$$\left| \begin{array}{c} y_{\max} \\ y' \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & g_c \\ 0 & 1 \end{array} \right| Q_d \left| \begin{array}{cc} 1 & a \\ 0 & 1 \end{array} \right| \left| \begin{array}{c} 0 \\ y'_{\max} \end{array} \right|. \quad (2.93)$$

В матрице (2.93) значение  $y_{\max}$  определяется в точке  $g_c$ , где расположено линейное изображение  $x=0$  [предварительно нужно найти  $g_c$  из выражения (2.89)].

В гл. 3 на основании приведенных здесь соотношений определены кардинальные элементы систем, а также положения изображений и их увеличения.

Иногда полезно представить матрицу квадрупольной линзы в виде произведения трех матриц. Обычную квадрупольную линзу можно рассматривать как «толстую». Главные плоскости ее раздвинуты друг относительно друга. Действие такой линзы на заряженную частицу эквивалентно действию тонкой линзы, окруженнной с обеих сторон пространством, свободным от поля. Протяженность такого пространства зависит от параметров линзы. Покажем это, представив матрицу толстой линзы как произведение двух матриц свободного пространства и матрицы тонкой линзы. Из выражений (2.59), (2.62) и (2.64) следует:

$$\left| \begin{array}{cc} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} 1 & s_2 \\ 0 & 1 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} 1 & s_1 \\ 0 & 1 \end{array} \right|. \quad (2.94)$$

Это верно для обеих плоскостей линзы, если учесть, что в тонкой линзе  $1/f_d = -1/f_c = -1/f$ .

Перемножив матрицы в правой части соотношения (2.94), получим

$$\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{s_2}{f} & s_1 + s_2 - \frac{s_1 s_2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{s_1}{f} \end{vmatrix}. \quad (2.95)$$

Приравнивая каждый элемент полученной матрицы элементу матрицы, стоящей слева, найдем

$$\frac{1}{f} = -q_{21}; \quad s_2 = (1 - q_{11})f; \quad s_1 = (1 - q_{22})f. \quad (2.96)$$

Так как поле отдельной квадрупольной линзы симметрично относительно своего центра, то  $q_{22} = q_{11}$  и

$$s_2 = (1 - q_{11})f = s_1. \quad (2.97)$$

Из выражений (2.96), (2.79) и (2.81) следует, что фокусные расстояния тонкой линзы совпадают с фокусными расстояниями толстой. Длины областей, свободных от поля, совпадают с расстояниями от главных плоскостей в пространствах изображения и предмета до соответствующего края линзы, причем за положительные при отсчете  $s$  принимаются направления от краев внутрь линзы.

Для прямоугольной модели

$$s_{1c} = s_{2c} = \frac{1}{\beta} \operatorname{tg} \frac{\beta L}{2}; \quad s_{1d} = s_{2d} = \frac{1}{\beta} \operatorname{th} \frac{\beta L}{2}, \quad (2.98)$$

при  $\beta L \ll 1$   $s_c = s_d = L/2$ .

Обычно квадрупольные линзы в системах разделены промежутками, в которых поле отсутствует. Поэтому в представлении толстой линзы через тонкую полезно написать результирующую матрицу свободного пространства. Если имеется два последовательно расположенных, свободных от поля участка длиной  $s_1$  и  $s_2$ , то матрица свободного пространства имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1 & s_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & s_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & s_2 + s_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.99)$$

Произведение матриц свободного пространства дает также матрицу свободного пространства, длина которого равна сумме длин всех свободных от поля областей.

До сих пор мы рассматривали поведение отдельных заряженных частиц в электрических и магнитных полях, предполагая пучок такой совокупностью частиц, что каж-

дому значению их поперечных координат соответствует определенное значение импульса (угла наклона) частиц. Однако это идеализированное представление. В действительности из-за несовершенств методов создания пучка вследствие тепловых скоростей каждой данной точке в его поперечном сечении соответствует некоторый интервал значений импульсов частиц (их углов наклона). Поэтому пучок заряженных частиц, вообще говоря, нельзя собрать в точку, его минимальное поперечное сечение имеет конечную величину. Также нельзя создать идеально параллельный пучок. Частицы всегда имеют некоторое конечное распределение по углам наклона. Например, на плоскости с координатами  $x$  и  $x'$  одна частица представляется точкой, а вся совокупность частиц пучка займет некоторую область. На плоскости с координатами  $y$ ,  $y'$  картина аналогична, хотя форма и расположение области могут быть иными. Наличие такой довольно значительной по площади области, называемой фазовым объемом, характерно для выходящих из ускорителя пучков.

Пучки с большим фазовым объемом удобно анализировать при помощи понятий фазового пространства. Понятие фазового пространства, т. е. пространства шести измерений с тремя осями обобщенных координат и тремя осями обобщенных импульсов, дает наглядную геометрическую интерпретацию многих явлений [54]. При движении частицы изображающая ее точка описывает в фазовом пространстве некоторую кривую — фазовую траекторию.

Согласно теореме Лиувилля, плотность точек фазового пространства является инвариантом движения для системы, подчиняющейся уравнениям Гамильтона. При этом каждая точка соответствует частице в пучке, и фазовый объем, в котором они заключены, может меняться по форме, сохраняя величину неизменной. Если переменные в уравнениях движения разделяются, то теорема Лиувилля оказывается справедливой для каждой пары: координата и соответствующая ей проекция обобщенного импульса

$$\int_V dx dp_x = \text{const}; \quad \int_V dy dp_y = \text{const}. \quad (2.100)$$

Интегралы берут по всему фазовому объему  $V$ , занятому точками пучка на соответствующей плоскости, считая, что импульс заряженной частицы совпадает с ее обобщенным

импульсом. В декартовой системе координат обобщенный импульс  $\mathbf{P}$  связан с импульсом частицы  $\mathbf{p} = mv$  и вектором потенциалом  $\mathbf{A}$  следующим образом:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}. \quad (2.101)$$

Следовательно,  $P_x = p_x$  и  $P_y = p_y$  при  $A_x = A_y = 0$ , и уравнения (2.100) верны для  $H_z = 0$ . Это условия сохранения фазового объема в переменных  $x$ ,  $p_x$  и  $y$ ,  $p_y$ .

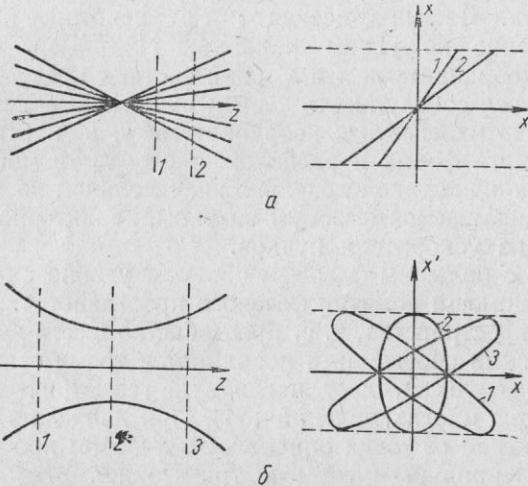


Рис. 19. Гомоцентрический пучок заряженных частиц с равным нулю фазовым объемом (а) и пучок с конечным фазовым объемом (б).

Часто в качестве меры фазового объема пучка принимают деленную на  $\pi$  площадь, занятую представляющими точками пучка на плоскости  $x$ ,  $x'$  (или  $y$ ,  $y'$ ):

$$E = \frac{1}{\pi} \int dx dx'. \quad (2.102)$$

Эта величина, постоянная при условии неизменности энергии частиц, называется эмиттансом пучка. С увеличением энергии эмиттанс пучка уменьшается.

Применение квадрупольных линз не меняет энергии заряженных частиц, поэтому можно пользоваться как выражением (2.100), так и (2.102).

Рассмотрим распространение гомоцентрического пучка заряженных частиц в области, свободной от поля. В каждом сечении пучка перпендикулярной оси плоскостью поперечные скорости частиц пропорциональны величине их смещения от оси. Поэтому на фазовой плоскости  $x$ ,  $x'$  (для определенности рассмотрим эту плоскость) верно для плоскости  $y$ ,  $y'$ ) все представляющие точки различных заряженных частиц лежат на прямолинейном отрезке, проходящем через начало координат (рис. 19, а). Фазовый объем такого пучка равен нулю. Проекция отрезка на ось  $x$  равна диаметру пучка, проекция на ось  $x'$  соответствует максимальной скорости. Если пучок расходящийся — угол наклона прямой положителен, если сходящийся — отрицателен. При движении частиц пучок расширяется, но максимальная скорость его остается постоянной. Поэтому представляющий его отрезок на фазовой плоскости удлиняется таким образом, что конец его скользит по прямой, параллельной оси  $x$ , и весь отрезок поворачивается по часовой стрелке. Воздействие линз на такой пучок не может изменить его нулевой фазовый объем.

Рассмотрим пучок с фазовым объемом, не равным нулю. В таком пучке частица, находящаяся на определенном расстоянии от оси, может обладать скоростью, лежащей в некотором интервале величин. Предположим, что фазовый объем такого пучка на плоскости  $x$ ,  $x'$  ограничен эллипсом (рис. 19, б). Тогда, согласно формуле (2.102), площадь этого эллипса, пропорциональная произведению его полуосей, есть величина постоянная

$$\bar{S} = \pi ab = \text{const}, \quad (2.103)$$

где  $a$  и  $b$  — длины полуосей эллипса. Проекция эллипса на ось  $x$ , построенная как функция  $z$ , соответствует огибающей пучка в плоскости  $xOz$ .

При прохождении пучка с конечной величиной фазового объема через линзы или области, свободные от поля, эллипс на фазовой плоскости может вытягиваться, сплющиваться и поворачиваться, но его площадь остается неизменной. В то время как представление траектории в пучке с помощью матриц определяется тремя независимыми величинами, эллипс характеризуется только двумя независимыми параметрами: длиной одной из полуосей и углом ее наклона. Длину другой полуоси можно получить из выражения (2.103).

Уравнение эллипса на плоскости  $x, x'$  с центром в начале координат имеет вид

$$\gamma x^2 + 2\alpha x x' + \delta x'^2 = \varepsilon, \quad (2.104)$$

где  $\varepsilon$  связано с площадью эллипса  $S$  соотношением  $S = \pi \varepsilon$ . Его деформация при движении частиц пучка определяется изменением  $x$  и  $x'$ , которое задается матрицей  $Q$  [14]:

$$\begin{vmatrix} x \\ x' \end{vmatrix} = Q_c \begin{vmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{vmatrix}; \quad Q_c = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix}_c. \quad (2.105)$$

Значение элементов матрицы  $q_{ik}$  дано в выражении (2.58). Чтобы связать коэффициенты  $\gamma$ ,  $\alpha$ ,  $\delta$  с их начальными значениями  $\gamma_0$ ,  $\alpha_0$ ,  $\delta_0$ , нужно подставить в уравнения эллипса на входе в систему ( $\gamma_0 x_0^2 + 2\alpha_0 x_0 x'_0 + \delta_0 x'_0^2 = \varepsilon$ ) значения  $x_0$  и  $x'_0$  через  $x$  и  $x'$

$$\begin{vmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{vmatrix} = Q_c^{-1} \begin{vmatrix} x \\ x' \end{vmatrix}. \quad (2.106)$$

Элементы обратной матрицы  $Q_c^{-1}$  определяются через элементы матрицы  $Q_c$ , как это показано в формуле (2.69). Тогда получим

$$\begin{vmatrix} \gamma & q_{22}^2 - 2q_{21}q_{22} & q_{21}^2 & \gamma_0 \\ \alpha & -q_{12}q_{22} & q_{11}q_{22} + q_{12}q_{21} & -q_{11}q_{21} & \alpha_0 \\ \delta & q_{12}^2 & -2q_{11}q_{12} & q_{11}^2 & \delta_0 \end{vmatrix}.$$

$$(2.107)$$

Из уравнения (2.107) следует

$$\delta\gamma - \alpha^2 = \delta_0\gamma_0 - \alpha_0^2 = \text{const}. \quad (2.108)$$

При нашем условии  $\varepsilon = ab$ ,  $\text{const} = 1$ . Параметр  $\delta$  определяет максимальную величину  $x$ :  $x_{\max} = \sqrt{\varepsilon\delta}$ ; параметр  $\gamma$  — наибольшую величину  $x'$ :  $x'_{\max} = \sqrt{\varepsilon\gamma}$ .

Изменение фазового объема пучка во время прохождения им свободного от поля пространства показано на рис. 20, а. Максимальная величина  $x'$  остается неизменной. Не перемещаются также точки  $A$  и  $B$ , так как они соответствуют частицам, движущимся параллельно оси  $(x' = 0)$ . Если большая ось эллипса 1 вертикальная, то величина проекции на ось  $x$  минимальна. Это соответствует изобра-

жению, или, как говорят в таких случаях, кроссоверу пучка. Эллипс 2 определяет расходящийся пучок, его зеркальное отражение относительно оси  $x'$  соответствует сходящемуся пучку. При свободном дрейфе частиц фазовый объем вращается по часовой стрелке. Все параметры эллипса для этого случая можно определить на основании выражения (2.107), подставив туда значения  $q_{ik}$  из формулы (2.62). Если длина большой оси эллипса 1 равна  $2b$ , то пос-

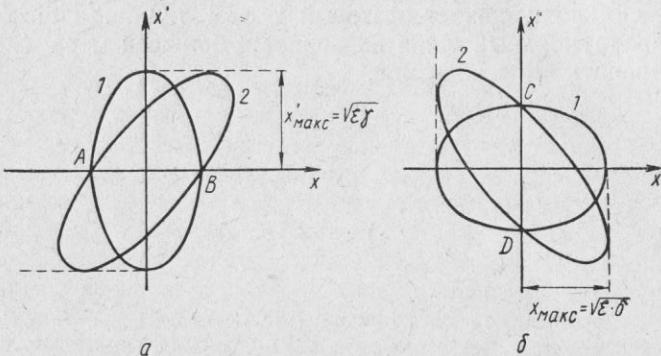


Рис. 20. Изменение формы фазового объема при прохождении пучка через свободное от поля пространство (а) и через тонкую квадрупольную линзу (б).

ле прохождения свободного пространства длиной  $s$  угол  $\varphi$  между большой осью эллипса и осью  $x$  равен [16]

$$\varphi = 0,5 \arctg \left\{ \frac{2b^2 s}{[a^2 + b^2(s^2 - 1)]} \right\}. \quad (2.109)$$

Если  $a \rightarrow 0$ ,  $\operatorname{tg} \varphi \rightarrow s^{-1}$ . На рис. 20, б показано изменение фазового объема при прохождении пучка заряженных частиц через тонкую квадрупольную линзу без изменения координат частиц. Эллипс поворачивается, касаясь все время прямых, проходящих через точки  $|x_{\max}|$  и параллельных оси  $x'$ . Точки  $C$  и  $D$  остаются фиксированными, так как они соответствуют частицам с нулевым смещением, на которые линза не действует. Эллипс 1 на рис. 20, б имеет наименьшее возможное значение  $x_{\max}$ . Поэтому он соответствует «параллельному» пучку. Эллипс 2 соответствует сходящемуся пучку. Параметры эллипса при фо-

кусировке пучка тонкой квадрупольной линзой можно получить, подставив значения  $q_{ik}$  из выражения (2.64) в соотношение (2.107).

Возможность преобразования квадрупольными линзами фазового объема пучка используют, например, для уменьшения потерь, связанных с переходом пучка заряженных частиц из одного ускорителя в другой. Последнее особенно существенно, так как пучок должен пройти свободное от поля пространство, которое, как это было показано, сильно искажает фазовый объем пучка. Применение квадрупольных линз позволяет в большей мере скомпенсировать это искажение.

## ГЛАВА 3

### СИСТЕМЫ ИЗ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ

Отдельная квадрупольная линза может создать только линейное изображение точечного предмета. Оказывая на пучок заряженных частиц собирающее действие в одном направлении, она рассеивает его в другом, перпендикулярном первому. Длина линейного изображения получается значительно большей, чем в случае прямолинейного распространения пучка, как это имеет место, например, в средней плоскости цилиндрической (двумерной) электрической линзы. Если необходимо сконцентрировать пучок заряженных частиц во всех направлениях, то часто применяют системы из квадрупольных линз. Простейшая система такого типа — дублет из квадрупольных линз — получил наибольшее распространение. Дублет — это две соосно расположенные квадрупольные линзы, полярность полюсов или электродов которых такова, что собирающая плоскость одной из них совмещена с рассеивающей плоскостью другой (см. рис. 3). Как будет показано ниже, при определенной геометрии системы и возбуждениях линз дублет может собирать пучок во всех направлениях, оставаясь в общем случае астигматичным, так как он создает два линейных, лежащих в плоскостях  $xOz$  и  $yOz$  перпендикулярных оси  $z$  изображения точечного предмета. В некоторых случаях эти изображения могут быть мнимыми (рассеивающий дублет).

При определенных условиях оба действительных линейных изображения сливаются в одно точечное. Такой дублет называют стигматичным.

Плоскость, в которой первая (ближайшая к предмету) линза дублета собирает, а вторая рассеивает, будем отмечать индексом  $cd$ , а перпендикулярную ей плоскость — индексом  $dc$ .

Запишем связь между параметрами траектории на выходе из дублета и ее параметрами на входе при помощи матриц дублета  $T$ :

$$\begin{vmatrix} x \\ x' \end{vmatrix} = T_{cd} \begin{vmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} y \\ y' \end{vmatrix} = T_{dc} \begin{vmatrix} y_0 \\ y'_0 \end{vmatrix}. \quad (3.1)$$

Матрицы дублета  $T$  представляют собой произведение матриц  $Q$  образующих его линз (2.59) и матрицы свободного пространства между ними  $S$  (2.62):

$$\left. \begin{aligned} T_{cd} &= Q_{2d} S Q_{1c}; \\ T_{dc} &= Q_{2c} S Q_{1d}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Индекс «1» относится к первой линзе, индекс «2» — ко второй. Элементы матрицы  $T$  в плоскости  $cd$  равны

$$\left. \begin{aligned} t_{11} &= (q_{11})_{1c} (q_{11})_{2d} + s (q_{21})_{1c} (q_{11})_{2d} + (q_{21})_{1c} (q_{12})_{2d}; \\ t_{12} &= (q_{12})_{1c} (q_{11})_{2d} + s (q_{22})_{1c} (q_{11})_{2d} + (q_{22})_{1c} (q_{12})_{2d}; \\ t_{21} &= (q_{11})_{1c} (q_{21})_{2d} + s (q_{21})_{1c} (q_{21})_{2d} + (q_{21})_{1c} (q_{22})_{2d}; \\ t_{22} &= (q_{12})_{1c} (q_{21})_{2d} + s (q_{22})_{1c} (q_{21})_{2d} + (q_{22})_{1c} (q_{22})_{2d}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Элементы матрицы  $T_{dc}$  можно получить из выражений (3.3) заменой индексов  $c \leftrightarrow d$ .

Выражения для кардинальных элементов дублета в общем виде мы получим из соотношений (2.79)–(2.81), (2.84) и (2.85), заменив в них элементы матриц  $Q$  элементами матриц  $T$  из формул (3.2). Координаты  $z^*$  для пространства изображений отчитываются теперь от плоскости выхода из дублета, а для предметного пространства — от плоскости входа в дублет. Таким же образом из уравнений (2.89) и (2.90) получаются выражения для положения изображений и увеличений системы. Так как дублет несимметричен относительно своего центра, то  $t_{11} \neq t_{22}$  и  $z^*(F'_{cd}) \neq z^*(F_{cd})$ , а  $z^*(F'_{dc}) \neq z^*(F_{dc})$ . В дублете расстояние от фокусов предметного пространства до входа в дублет не равно расстоянию от фокусов пространства изображений до выхода из него. Фокусные расстояния предметного пространства остаются по-прежнему равными фокусным расстояниям пространства изображений в соответствующих плоскостях:

$$f'_{cd} = f_{cd}; \quad f'_{dc} = f_{dc}. \quad (3.4)$$

Они не зависят от порядка следования линз в дублете.

Положение кардинальных элементов дублета дано на рис. 21. Если дублет составлен из одинаковых линз с равными возбуждениями, то

$$Q_{1c} = Q_{2c}; \quad Q_{1d} = Q_{2d}. \quad (3.5)$$

Отсюда, используя формулы (2.86) и (3.3), получим

$$\left. \begin{aligned} (t_{21})_{cd} &= (t_{21})_{dc}; \quad (t_{11})_{cd} = (t_{22})_{dc}; \\ (t_{22})_{cd} &= (t_{11})_{dc}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

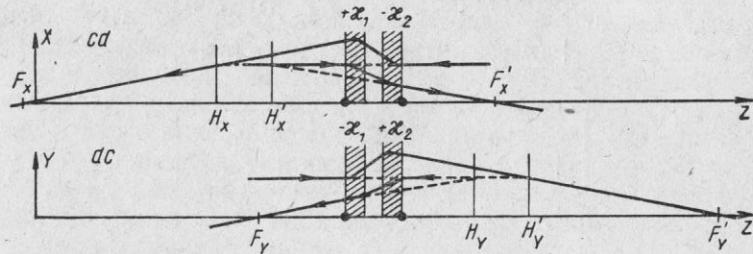


Рис. 21. Положение кардинальных элементов дублета.

Тогда из выражений (3.4) и (2.85) следует:

$$f_{cd} = f'_{cd} = f_{dc} = f'_{dc} \quad (3.7)$$

и

$$z^*(F_{cd}) = z^*(F'_{dc}); \quad z^*(F_{dc}) = z^*(F'_{cd}). \quad (3.8)$$

Все фокусные расстояния дублета, составленного из одинаковых линз с равными возбуждениями, равны. Расстояние от фокуса пространства изображений до выходного края дублета равно расстоянию от расположенного в перпендикулярной плоскости фокуса предметного пространства до входного края дублета.

Напишем формулу для фокусного расстояния дублета через фокусные расстояния входящих в него линз. Из уравнений (2.79) имеем

$$\begin{aligned} -\frac{1}{f_{cd}} &= (t_{21})_{cd} = (q_{11})_{1c} (q_{21})_{2d} + \\ &+ s (q_{21})_{1c} (q_{21})_{2d} + (q_{21})_{1c} (q_{22})_{2d}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Обозначим  $d$  расстояние между главной плоскостью пространства изображений  $H_1$  первой линзы и главной пло-

скостью предметного пространства  $H'_2$  второй (рис. 22). Из рисунка видно, что

$$d = s - z^*(H_{1c}) - z^*(H'_{2d}). \quad (3.10)$$

Подставив в равенство (3.10) значения  $z^*(H_{1c})$  и  $z^*(H'_{2d})$  из выражений (2.81), (2.24), (2.84) и (2.87) и разделив на фокусные расстояния линз  $f_{1c}$ ,  $f_{2d}$  из соотношений (2.79), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{f_{1c} f_{2d}} &= s (q_{21})_{1c} (q_{21})_{2d} + (q_{11})_{1c} (q_{21})_{2d} + \\ &+ (q_{21})_{1c} (q_{11})_{2d} - (q_{21})_{1c} - (q_{21})_{2d}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

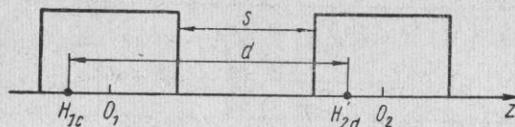


Рис. 22. К определению расстояния между главными плоскостями линз в дублете.

Сравнивая формулы (3.11) и (3.9), имеем

$$\frac{1}{f_{cd}} = \frac{1}{f_{1c}} + \frac{1}{f_{2d}} - \frac{d}{f_{1c} f_{2d}}. \quad (3.12)$$

Аналогичную формулу можно написать и для другой плоскости дублета.

Из уравнения (3.12) видно, что фокусные расстояния  $f_{1c}$  и  $f_{2d}$  входят в  $f_{cd}$  одинаковым образом.

Выражение (3.12) представляет собой известную из оптики формулу фокусного расстояния системы из двух линз. Из него непосредственно получается, что при  $f_{1c} = -f_{2d}$  (или  $f_{1d} = -f_{2c}$ ) в плоскости, где это условие выполняется, фокусное расстояние дублета положительно, в этой плоскости дублет собирающий.

Отметим, что условия  $f_{1c} = -f_{2d}$  и  $f_{1d} = -f_{2c}$  могут одновременно выполняться в плоскостях  $cd$  и  $dc$  только для тонких линз. При этом  $f_{1c} = -f_{1d} = f$  и фокусное расстояние дублета в обеих плоскостях одинаково и равно

$$f_{cd} = f_{dc} = \frac{f^2}{s}. \quad (3.13)$$

Фокусировка в дублете из тонких линз обусловливается наличием свободной от поля области между линзами. Благодаря ей частицы успевают приблизиться к оси системы после собирающего воздействия или отойти от нее после рассеивающего действия первой линзы. В этих случаях частицы проходят фокусирующие поля на большем расстоянии от оси (т. е. там, где они сильнее), чем дефокусирующие. Этим объясняется фокусирующий эффект дублета в целом.

В дублете из сильных линз с прямоугольным расположением поля для выполнения равенства абсолютных величин фокусных расстояний необходимо, чтобы величина  $\kappa = \beta L$  рассеивающей линзы была меньше собирающей, так как для равных величин  $\kappa \sin \kappa > \sin \kappa$ . Это не может быть выполнено в плоскостях  $cd$  и  $dc$  одновременно, так как одна и та же линза в одной плоскости фокусирующая, а в другой — дефокусирующая. Несомненно, дублет в целом может быть фокусирующим в одной или в обеих плоскостях и при неравенстве абсолютных величин фокусных расстояний входящих в него линз.

Как следует из формулы (2.89), в общем случае положения изображений, создаваемых дублетом,  $g_{cd}$  и  $g_{dc}$  не должны совпадать. Возможно падение на дублет астигматического пучка. В этом случае в выражении (2.89) вместо  $a$  следует подставлять  $a_{cd}$  для плоскости  $cd$  и  $a_{dc}$  для плоскости  $dc$ .

Дублет, фокусирующий в обеих плоскостях различно, может представлять интерес, когда необходимо преобразовать астигматический пучок на входе в стигматический на выходе или наоборот превратить стигматический пучок в астигматический. Первый вариант встречается при фокусировке пучка заряженных частиц, выходящего из ускорителя или отклоняющего магнита, а второй — когда необходимо дальнейшее разделение заряженных частиц по энергии или массе. В этих случаях зачастую удобны пучки специальной клиновидной формы.

Значительный интерес для концентрации пучка и получения электронно-оптического изображения представляет случай, когда заряженные частицы, выходящие из точечного источника, снова собираются в точку. Такая фокусировка может быть осуществлена дублетом с определенным подбором параметров. Траектории в таком дублете приведены на рис. 23.

Условие стигматичности дублета таково: если  $a_{cd} = a_{dc} = a$ , то должно быть  $g_{cd} = g_{dc} = g$ . Из выражений (2.89) имеем

$$\left| \frac{at_{11} + t_{12}}{at_{21} + t_{22}} \right|_{cd} = \left| \frac{at_{11} + t_{12}}{at_{21} + t_{22}} \right|_{dc}. \quad (3.14)$$

Для каждого положения предмета точечное изображение получается при строго определенных параметрах дублета.

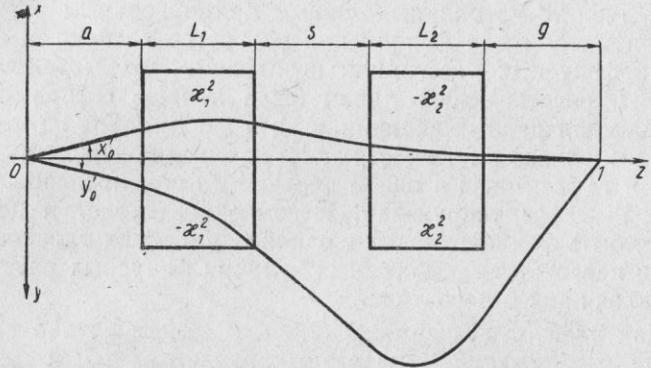


Рис. 23. Траектория в стигматическом дублете ( $a = g = s = L_1 = L_2$ )

дублета. Если дублет составлен из одинаковых линз с равными возбуждениями, то  $g = a$ . В общем случае увеличения стигматического дублета не равны ( $M_{cd} \neq M_{dc}$ ). Предмет, имеющий форму круга, переходит в плоскости изображения в эллипс. Этим рассматриваемое изображение отличается от изображения, создаваемого осесимметричной линзой. Существует и еще одно отличие. Фиксированным параметрам стигматического дублета соответствуют только две сопряженные точки предмета и изображения. Смещение предмета вдоль оси системы приводит не просто к смещению изображения, как это происходит в осесимметричных линзах, а вызывает раздвоение точечного изображения на два линейных, взаимно перпендикулярных. При неподвижном предмете к такому раздвоению приводят изменение возбуждений входящих в дублет линз или расстояния между ними.

Рассмотрим дублет, в котором распределения поперечных полей вдоль оси  $z$  у обеих линз аппроксимированы

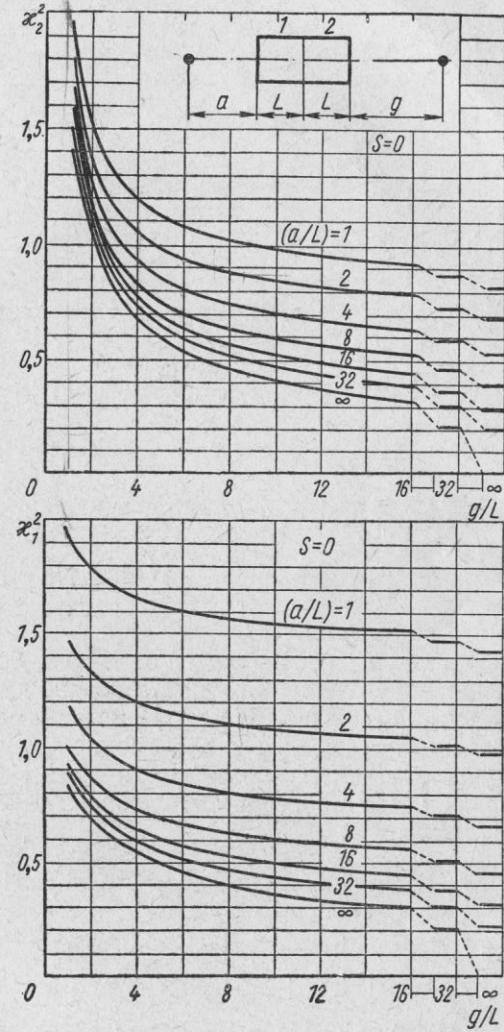


Рис. 24. Зависимость параметров линз  $x_1$  и  $x_2$  стигматического дублета от положения изображения при разных положениях предмета.

прямоугольниками. Элементы матриц такого дублета получим из выражений (3.3) и (2.60). В плоскости  $cd$  они равны

$$\left. \begin{array}{l} t_{11} = \cos \kappa_1 \operatorname{ch} \kappa_2 - \beta_1 s \sin \kappa_1 \operatorname{ch} \kappa_2 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \sin \kappa_1 \operatorname{sh} \kappa_2; \\ t_{12} = s \cos \kappa_1 \operatorname{ch} \kappa_2 + \frac{1}{\beta_1} \sin \kappa_1 \operatorname{ch} \kappa_2 + \frac{1}{\beta_2} \cos \kappa_1 \operatorname{sh} \kappa_2; \\ t_{21} = \beta_2 \cos \kappa_1 \operatorname{sh} \kappa_2 - \beta_1 \sin \kappa_1 \operatorname{ch} \kappa_2 - \beta_1 \beta_2 s \sin \kappa_1 \operatorname{sh} \kappa_2; \\ t_{22} = \cos \kappa_1 \operatorname{ch} \kappa_2 + \beta_2 s \cos \kappa_1 \operatorname{sh} \kappa_2 + \frac{\beta_2}{\beta_1} \sin \kappa_1 \operatorname{sh} \kappa_2 \end{array} \right\} \quad (3.15)$$

В плоскости  $dc$  элементы матрицы имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} t_{11} = \operatorname{ch} \kappa_1 \cos \kappa_2 + \beta_1 s \operatorname{sh} \kappa_1 \cos \kappa_2 + \frac{\beta_1}{\beta_2} \operatorname{sh} \kappa_1 \sin \kappa_2; \\ t_{12} = s \operatorname{ch} \kappa_1 \cos \kappa_2 + \frac{1}{\beta_1} \operatorname{sh} \kappa_1 \cos \kappa_2 + \frac{1}{\beta_2} \operatorname{ch} \kappa_1 \sin \kappa_2; \\ t_{21} = -\beta_2 \operatorname{ch} \kappa_1 \sin \kappa_2 + \beta_1 \operatorname{sh} \kappa_1 \cos \kappa_2 - \beta_1 \beta_2 s \operatorname{sh} \kappa_1 \sin \kappa_2; \\ t_{22} = \operatorname{ch} \kappa_1 \cos \kappa_2 - \beta_2 s \operatorname{ch} \kappa_1 \sin \kappa_2 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \operatorname{sh} \kappa_1 \sin \kappa_2. \end{array} \right\} \quad (3.16)$$

Здесь принято обозначение  $\beta L = \kappa$ .

Выражения для  $t_{ik}$  несколько упрощаются, если эффективные длины и возбуждения составляющих дублет линз равны ( $L_1 = L_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ ). Зная матричные элементы (3.15) и (3.16), можно определить все электронно-оптические параметры дублета через возбуждения и длины входящих в него линз. Так, для пространства изображения при  $L_1 = L_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$  имеем

$$\frac{L}{f_{cd}} = \frac{L}{f_{dc}} = \kappa (\sin \kappa \operatorname{ch} \kappa - \cos \kappa \operatorname{sh} \kappa + \beta s \sin \kappa \operatorname{sh} \kappa); \quad (3.17)$$

$$z^*(F_{cd}) = f_{cd} (\cos \kappa \operatorname{ch} \kappa - \sin \kappa \operatorname{sh} \kappa - \beta s \sin \kappa \operatorname{ch} \kappa); \quad (3.18)$$

$$z^*(F_{dc}) = f_{dc} (\cos \kappa \operatorname{ch} \kappa + \sin \kappa \operatorname{sh} \kappa + \beta s \cos \kappa \operatorname{sh} \kappa). \quad (3.19)$$

В формулах (3.18) и (3.19) координаты  $z^*$  отсчитываются от плоскости выхода из дублета.

Кардинальные элементы предметного пространства связаны для данного случая с кардинальными элементами пространства изображений выражениями (3.7) и (3.8).

На рис. 24 и 25 представлены результаты вычисления значений  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  в стигматическом дублете для различных положений точечных предмета и изображения для прямо-

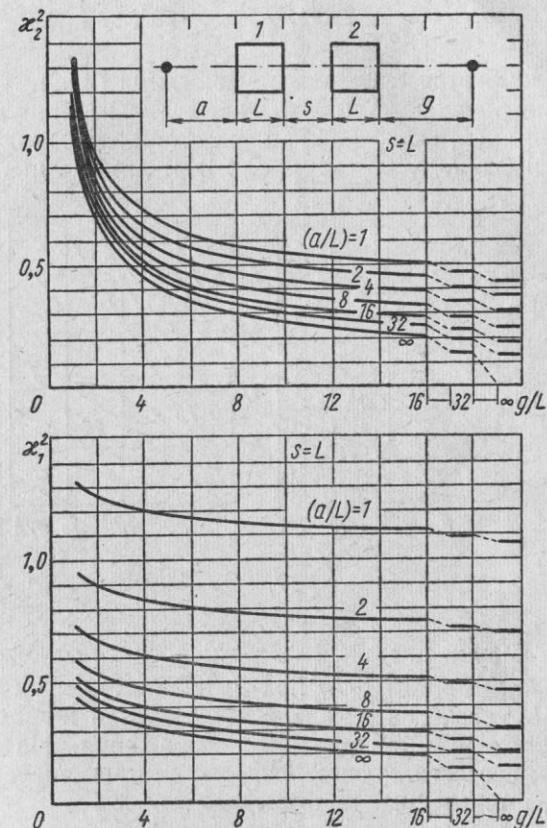


Рис. 25. Зависимость  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  в стигматическом дублете от положения изображения при разных положениях предмета.

угольной модели распределения поля вдоль оси, рассмотренной в работе [55]. Приведенные данные получены совместным решением двух уравнений

$$\left. \begin{array}{l} g + \frac{1}{\beta_2} \operatorname{th} z_2 = \frac{a + \frac{1}{\beta_1} \operatorname{tg} z_1}{\beta_1 a \operatorname{tg} z_1 - 1} - s; \\ g + \frac{1}{\beta_2} \operatorname{tg} z_2 = \frac{a + \frac{1}{\beta_1} \operatorname{th} z_1}{\beta_1 a \operatorname{th} z_1 + 1} + s, \end{array} \right\} \quad (3.20)$$

которые являются следствием выражения (2.89).

Рассматривались дублеты, состоящие из линз одинаковой длины ( $L_1 = L_2 = L$ ) с расстоянием между ними, равным нулю ( $s = 0$ , см. рис. 24) и длине линз ( $s = L$ ,

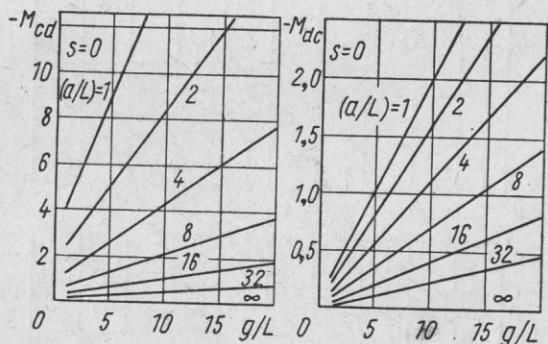


Рис. 26. Увеличения дублета.

см. рис. 25). На рисунках по осям абсцисс отложены безразмерные величины  $g/L$ , по оси ординат —  $\chi_1^2$  и  $\chi_2^2$ . Значения  $a/L$  указаны на кривых. Исследован широкий диапазон положений предмета и изображения. На рис. 26 и 27 даны соответствующие этим параметрам значения увеличений, вычисленные по формулам

$$M_{cd} = \frac{\operatorname{ch} z_2 + \beta_2 g \operatorname{sh} z_2}{\cos z_1 - \beta_1 a \sin z_1}; \quad M_{dc} = \frac{\cos z_2 - \beta_2 g \sin z_2}{\operatorname{ch} z_1 + \beta_1 a \operatorname{sh} z_1}, \quad (3.21)$$

которые получены после некоторых преобразований уравнения (2.90).

Пользуясь кривыми рис. 24—27, можно определить значения возбуждений линз и увеличений дублета при заданной геометрии дублета, а также положениях предмета и изображения.

В табл. 1 приведены некоторые дополнительные данные, относящиеся к стигматичному дублету, который состоит из линз одинаковой и разной длины [56].

Таблица 1

$\frac{s}{L_1}$	$\frac{a}{L_1}$	$\frac{g}{L_1}$	$L_2/L_1=1$				$L_2/L_1=2$	
			$\chi_1$	$\chi_2$	$M_{cd}$	$M_{dc}$	$\chi_1$	$\chi_2$
0	1	1	1,41	1,41	-4,0	-0,25	1,28	1,79
0	1	2	1,35	1,22	-5,2	-0,43	1,24	1,56
0	1	4	1,30	1,09	-7,6	-0,82	1,20	1,39
0	0,5	1	1,62	1,47	-6,2	-0,29	1,49	1,85
0	0	1	2,18	1,55	-10,4	-0,33	2,02	1,94
0,5	1	1	1,23	1,23	-4,6	-0,22	1,17	1,62
1	1	1	1,15	1,15	-5,3	-0,19	1,11	1,53

Продолжение

$\frac{s}{L_1}$	$\frac{a}{L_1}$	$\frac{g}{L_1}$	$L_2/L_1=2$		$L_2/L_1=4$			
			$M_{cd}$	$M_{dc}$	$\chi_1$	$\chi_2$	$M_{cd}$	$M_{dc}$
0	1	1	-6,1	-0,27	1,16	2,19	-10,5	-0,30
0	1	2	-7,2	-0,41	1,11	1,96	-12,0	-0,40
0	1	4	-9,8	-0,70	1,10	1,72	-14,0	-0,59
0	0,5	1	-9,4	-0,30	1,37	2,25	-16,0	-0,32
0	0	1	-15,8	-0,33	1,87	2,33	-27,0	-0,34
0,5	1	1	-6,7	-0,25	1,10	2,03	-11,1	-0,29
1	1	1	-7,5	-0,23	1,06	1,94	-12,0	-0,27

Возможность практического осуществления случая  $s = 0$  связана с тем, что обычно эффективная длина поля несолько больше длины полюсов или электродов  $l$ . Однако чрезмерное сближение линз дублета изменяет расположение их полей, что приводит к неконтролируемому изменению эффективных длин.

Анализ данных, приведенных для стигматичного дублета показывает, что возбуждения линз  $\beta_1$  и  $\beta_2$  уменьшаются с увеличением  $s$ . Как будет показано далее, в приближении тонких линз при  $a \gg s$  и  $g \gg s f \propto \sqrt{s}$ . С ростом  $L_2/L_1$  возбуждения обеих линз также уменьшаются, величина  $\chi_1$  падает, а  $\chi_2$  — растет. Величина  $\chi_1$  сильно за-

висит от  $a$  и слабо от  $g$ ;  $\kappa_2$ , наоборот, мало зависит от  $a$  и сильно от  $g$ .

Как видно из рис. 26 и 27,  $M_{cd} \gg M_{dc}$ . Это связано с тем, что траектория в плоскости  $cd$  подходит к изображению под меньшим углом (см. рис. 23). Увеличение  $s$  приводит к росту (по абсолютной величине)  $M_{cd}$  и уменьшению  $M_{dc}$ .

Апертура стигматического дублета в плоскости  $cd$  определяется апертурой первой линзы (см. рис. 44). В плоскости  $dc$  она равна уменьшенной в  $a_{d2}/g_{d1}$  раз апертуре второй

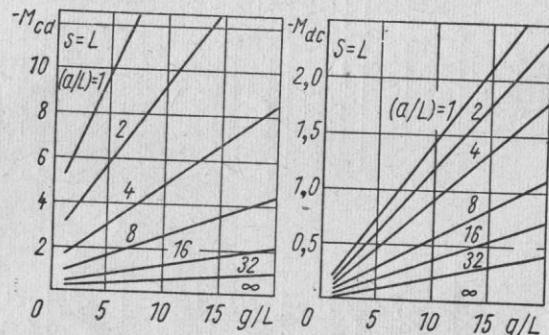


Рис. 27. Увеличения дублета.

линзы (если апертура первой линзы больше этой величины). Для предмета, расположенного на оси дублета и имеющего малые размеры по сравнению с апертурами линз, апертура дублета — величина практически постоянная.

Рассмотрим еще вопрос о возможности создания дублета, полностью аналогичного по своим электронно-оптическим свойствам первого порядка осесимметричной линзе [57]. Для этого необходимо, чтобы в плоскостях  $cd$  и  $dc$  дублета были одинаковы фокусные расстояния и положения фокусов, а следовательно, и главных плоскостей.

Равенство фокусных расстояний можно обеспечить в дублете, составленном из одинаковых линз с одинаковой величиной возбуждения. Условие совпадения фокальных плоскостей  $z^*(F_{cd}) = z^*(F_{dc})$  получим из формул (2.80):

$$(t_{11})_{cd} = (t_{11})_{dc}. \quad (3.22)$$

При аппроксимации распределений полей прямоугольниками, принимая во внимание, что  $\kappa_1 = \kappa_2$ ,  $\beta_1 = \beta_2$ , и учитывая выражения (3.15) и (3.16), имеем

$$\beta s = -\frac{2}{\operatorname{ctg} \kappa + \operatorname{cth} \kappa}. \quad (3.23)$$

Так как  $\kappa > 0$ , то из уравнения (3.23) следует условие:

$$\operatorname{ctg} \kappa + \operatorname{cth} \kappa < 0. \quad (3.24)$$

Это неравенство выполняется для  $\kappa$ , лежащих в области

$$\alpha_0 + n\pi < \kappa < (n+1)\pi, \quad (3.25)$$

где  $\alpha_0 \approx 3/4\pi$ ;  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

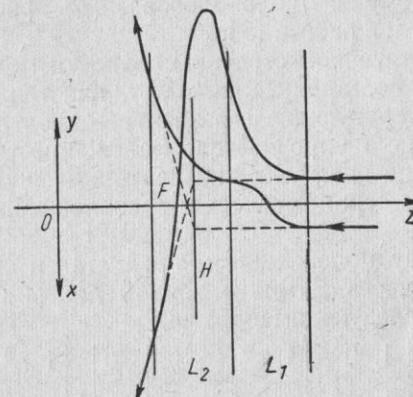


Рис. 28. Траектории и кардиальные элементы дублета, аналогичного осесимметричной линзе.

При выполнении условия (3.23) из соотношений (2.79), (2.80) и (3.15) получим

$$\left. \begin{aligned} f &= -\frac{1}{\beta} \frac{\sin \kappa \operatorname{ch} \kappa + \cos \kappa \operatorname{sh} \kappa}{\operatorname{sh}^2 \kappa - \sin^2 \kappa} > 0; \\ z^*(F) &= -\frac{1}{\beta} \frac{\sin \kappa \cos \kappa + \operatorname{sh} \kappa \operatorname{ch} \kappa}{\operatorname{sh}^2 \kappa - \sin^2 \kappa} < 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.26)$$

Как видно из выражений (3.26), дублет собирающий, но его фокусы всегда погружены в область поля. На рис. 28 показан ход траекторий в таком дублете и его кардиальные элементы. Параллельный пучок, падающий на дублет, будет выходить из него расходящимся. Выражение (3.26) дает положения фокусов, определяемых касательными к траекториям в пространстве изображений. В отличие от

осесимметричных линз действительные пересечения траекторий с осью внутри линзы происходят не в одной точке (см. рис. 28) и реальных совпадающих фокусов дублета не существует. Поэтому данная система не может быть применена для создания действительного изображения реального предмета. Возможно ее использование в качестве проекционной линзы микроскопа, когда на нее падает сходящийся пучок лучей.

Выражения для расстояния между линзами, фокусного расстояния и положения фокусов в дублете, аналогичном осесимметричному с колоколообразным распределением поля, приведены в работе [5].

Если с достаточной степенью точности можно рассматривать линзы, составляющие дублет, как тонкие, то выражения, характеризующие его электронно-оптические свойства, значительно упрощаются. Более простым становится определение возбуждений составляющих его линз по данной геометрии дублета и расположению предмета и изображения.

Связь между положениями предмета и изображения записывается через матрицы тонкой линзы и свободного пространства следующим образом:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 \\ x' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & g_{cd}^* \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_2} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & s^* \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a^* \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ x_0 \end{vmatrix}; \\ \begin{vmatrix} 0 \\ y' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & g_{dc}^* \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & s^* \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_1} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a^* \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ y_0 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Здесь  $a^*$  — расстояние от предмета до центра первой линзы;  $g^*$  — расстояние от изображения до центра второй;  $s^*$  — расстояние между центрами линз. Эти определения  $a^*$ ,  $g^*$  и  $s^*$  отличаются от принятых ранее  $a$ ,  $g$  и  $s$  тем, что в  $a^*$  и  $g^*$  включены  $L_1/2$  и  $L_2/2$  соответственно, а  $s^* = s + (L_1 + L_2)/2$ . Если пренебречь длинами линз по сравнению с остальными расстояниями, то значения величин со звездочкой и без нее совпадают.

Из выражения (3.27) для стигматического дублета получим [14]

$$p = \frac{a^* s^* g^*}{f_1 f_2}; \quad \frac{a^* n}{f_1} = \frac{g^* m}{f_2}, \quad (3.28)$$

где  $p = a^* + s^* + g^*$ ;  $n = s^* + g^*$ ;  $m = a^* + s^*$ , и окончательно

$$f_1 = a^* \sqrt{s^* n / mp}; \quad f_2 = g^* \sqrt{s^* m / np}. \quad (3.29)$$

Если на линзу падает параллельный пучок ( $a = \infty$ ), то [16]

$$f_1 = \sqrt{s^* n}; \quad f_2 = g^* \sqrt{s^* / n}. \quad (3.30)$$

Из уравнений (3.30) следует, что возбуждение второй линзы должно быть больше первого;  $f_2/f_1 = g^*/(s^* + g^*)$ .

Градиенты магнитного поля, рассчитанные по точным (2.89) и приближенным (3.30) формулам, показаны для сравнения на рис. 29. Они получены для параллельного пучка частиц с импульсом, равным 7,88 Гэв/с (здесь  $c = 3 \times 10^{10}$  см/сек — скорость света). Длина линз дублета  $L_1 = L_2 = 1,524$  м, расстояние между ними 0,610 м.

Из рисунка видно, что формулы (3.30) занижают требуемые величины возбуждений, т. е. дают завышенные значения  $f$ .

Графики, связывающие параметры дублета, составленного из тонких линз, приведены в работе [58].

Большую точность можно получить, считая по-прежнему, что главные плоскости каждой линзы расположены в ее центре, но, пользуясь для фокусных расстояний более точным выражением (2.31), в котором учтены члены разложения более высокого порядка. Тогда получим [45]:

$$\begin{aligned} f_1 &= a \sqrt{\frac{sn}{np}} \left[ 1 - c_1 \frac{(mn+ps)}{4asn} - c_2 \frac{(mn-ps)}{4sgn} \right] + \frac{c_1}{2}; \\ f_2 &= g \sqrt{\frac{sm}{np}} \left[ 1 - c_2 \frac{(mn+ps)}{4sgm} - c_1 \frac{(mn-ps)}{4asn} \right] + \frac{c_2}{2}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Здесь введены обозначения  $c_1 = L_1/3$  и  $c_2 = L_2/3$  и учтены первые степени  $c_1$  и  $c_2$ . Фокусные расстояния определяются выражениями (3.31) с точностью до 1% при  $L/f \lesssim 1$ , и точность еще улучшается при увеличении  $f$ .

Звездочки здесь и в дальнейшем опущены. Большой интерес для систем представляет непосредственная связь между положением предмета и изображением. Вычисление кардинальных элементов полезно, когда необходимо определить положения изображений для целого набора положений предмета. Однако когда положение пред-

мета фиксировано, как это часто бывает на практике, удобнее пользоваться выражениями, непосредственно связывающими  $a$  и  $g$ .

В дублете из тонких линз связь между положением изображения и предметом можно получить из выражения (3.27):

$$\left. \begin{aligned} g_{cd} &= \frac{a - s(\beta_1^2 L_1 a - 1)}{(\beta_1^2 L_1 a - 1) - \beta_2^2 L_2 [a - s(\beta_1^2 L_1 a - 1)]}; \\ g_{dc} &= \frac{a + s(\beta_1^2 L_1 a + 1)}{-(\beta_1^2 L_1 a + 1) + \beta_2^2 L_2 [a + s(\beta_1^2 L_1 a + 1)]}. \end{aligned} \right\} (3.32)$$

В стигматическом дублете  $g_{cd} = g_{dc}$  и из уравнений (3.32) можно получить требуемую связь между возбуждениями линз [59]:

$$-\beta_2^2 L_2 = \frac{\beta_1^2 L_1 a^2}{\beta_1^4 L_1^2 a^2 s^2 - (a + s)^2}. \quad (3.33)$$

Из соотношений (3.32) и (3.33) выразим положение изображения следующим образом:

$$g = -\frac{\beta_1^4 L_1^2 a^2 s^2 - (a + s)^2}{\beta_1^4 L_1^2 a^2 s - (a + s)}. \quad (3.34)$$

Чтобы система была собирающей ( $g > 0$ ), необходимо выполнение следующего условия для возбуждения первой линзы:

$$\frac{a+s}{a^2 s} \ll \beta_1^4 L_1^2 \ll \frac{(a+s)^2}{a^2 s^2}. \quad (3.35)$$

При заданных возбуждениях обеих линз дублет переводит точечный предмет в точечное изображение в том случае, когда предмет находится от него на расстоянии [60]

$$a = s \left[ \sqrt{(s\beta_1^2 L_1)^2 + \frac{\beta_1^2 L_1}{\beta_2^2 L_2}} - 1 \right]^{-1}. \quad (3.36)$$

Тогда положение изображения определяется выражением

$$g = s \left[ \sqrt{(s\beta_2^2 L_2)^2 + \frac{\beta_2^2 L_2}{\beta_1^2 L_1}} - 1 \right]^{-1}. \quad (3.37)$$

Положения предмета и изображения по-прежнему отчитываются от входа и выхода из системы соответственно.

Увеличение дублета из тонких линз дается выражениями

$$\left. \begin{aligned} M_{cd} &= -\{(\beta_1^2 L_1 a - 1) - \beta_2^2 L_2 [a - s(\beta_1^2 L_1 a - 1)]\}^{-1}; \\ M_{dc} &= \{(\beta_1^2 L_1 a + 1) - \beta_2^2 L_2 [a + s(\beta_1^2 L_1 a + 1)]\}^{-1}. \end{aligned} \right\} (3.38)$$

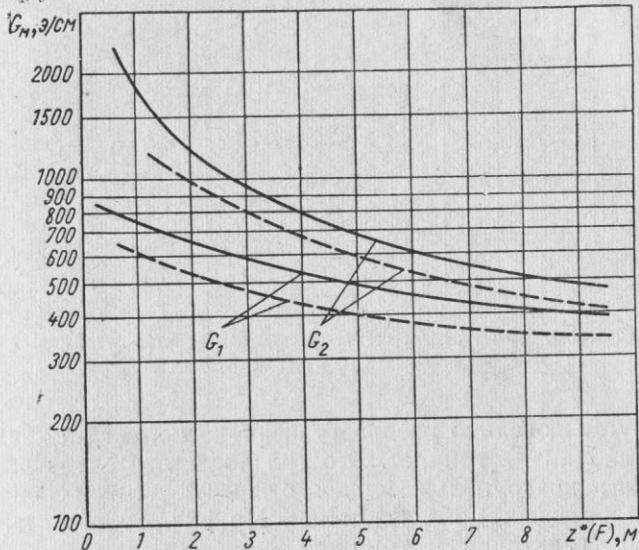


Рис. 29. Сравнение градиентов полей в стигматическом дублете из магнитных линз, рассчитанных по точным формулам (сплошные кривые) и в приближении тонких линз (штриховые кривые). По оси абсцисс отложено расстояние  $z^*(F)$  от выходного края дублета до фокуса.

С учетом формул (3.33) и (3.34) можно выразить увеличение стигматического дублета через геометрические параметры системы:

$$\left. \begin{aligned} M_{cd} &= -\frac{s+g}{a} \left[ 1 + \sqrt{\frac{s(a+s+g)}{(a+s)(s+g)}} \right], \\ M_{dc} &= -\frac{s+g}{a} \left[ 1 - \sqrt{\frac{s(a+s+g)}{(a+s)(s+g)}} \right]. \end{aligned} \right\} (3.39)$$

Из выражения (3.39) отчетливо видно неравенство увеличений в стигматичном дублете. По абсолютной величине  $M_{cd}$  всегда больше  $M_{dc}$ .

Если все геометрические размеры системы заданы, то можно определить возбуждения линз дублета. Из уравнения (3.34) имеем [согласно с выражениями (3.29)]

$$\beta_1^4 L_1^2 = \frac{(a+s)(a+s+g)}{a^2 s(s+g)}. \quad (3.40)$$

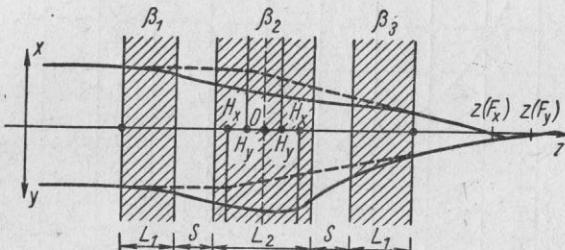


Рис. 30. Траектории и кардиальные элементы симметричного триплета.

Другая довольно распространенная система из квадрупольных линз — триплет. Это три последовательно расположенные квадрупольные линзы с чередующимися собирающим и рассеивающим действием. На рис. 30 представлен пример траекторий в триплете, плоскость  $xOz$  которого для крайних линз собирающая, а для средней — рассеивающая (плоскость  $dcd$ ). В плоскости  $yOz$  ( $dcd$ ) действие линз противоположное.

Если две крайние линзы триплета, имеющие одинаковую длину и возбуждение, расположены на равном расстоянии от средней, то триплет называют симметричным. Главные и фокальные точки предметного пространства и пространства изображений расположены в нем симметрично относительно центра. В симметричном триплете среднюю линзу делают обычно в два раза длиннее крайних.

Триплет, как и дублет, в общем случае создает два линейных взаимно перпендикулярных изображения точечного источника. Он является астигматической системой. Однако при определенном соотношении параметров триплет может создавать точечное изображение точечного предмета.

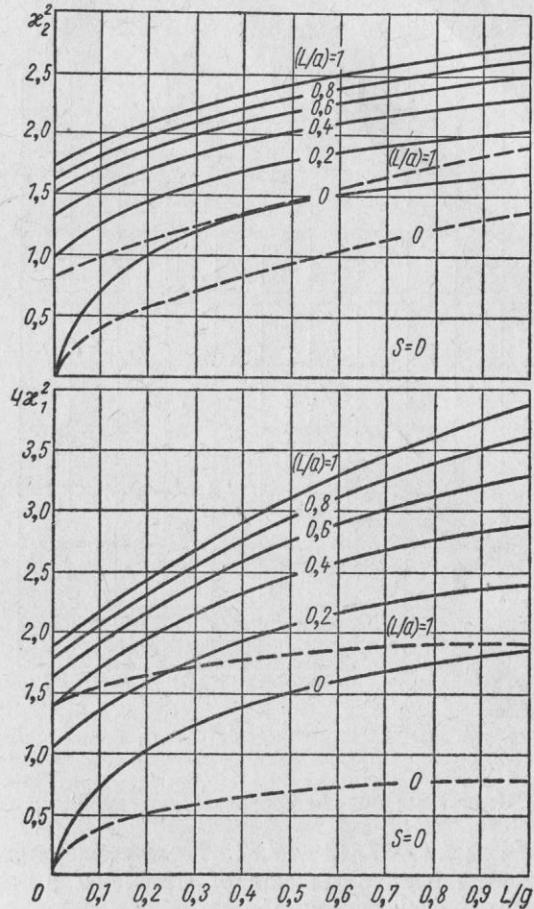


Рис. 31. Зависимость параметров  $x_1$  и  $x_2$  линз симметричного триплета от положения изображения при разных положениях предмета. Штриховые кривые соответствуют дублету с равной длиной линз.

На рис. 31 и 32 представлены графически зависимости оптических сил линз симметричного триплета от положения предмета и изображения при стигматическом режиме [61]. В расчетах была использована прямоугольная модель поля. Длина крайних линз триплета равна половине длины

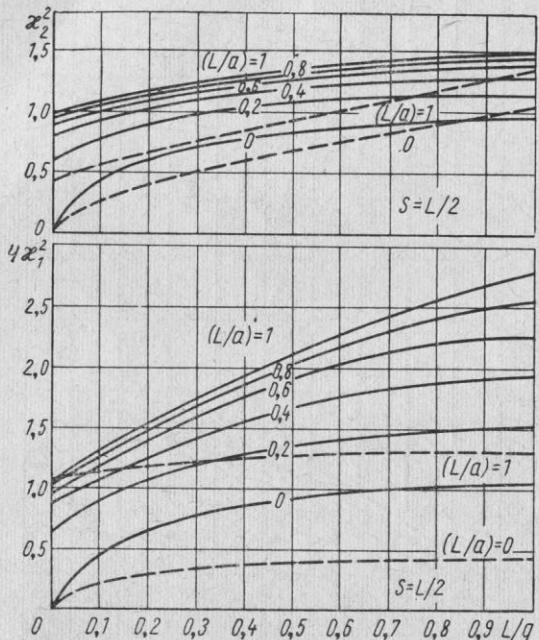


Рис. 32. Зависимость параметров  $x_1$  и  $x_2$  в симметричном триплете от положения изображения при разных положениях предмета.

Штриховые кривые соответствуют дублету.

средней:  $L_1 = L_3 = L_2/2 = L/2$ . Положение предмета  $a$  и изображения  $g$  отсчитывают от входного и выходного краев системы соответственно.

Рис. 31 соответствует отсутствию расстояний между линзами ( $s = 0$ ), рис. 32 — системе, в которой расстояние между линзами равно длине крайней линзы ( $s = L/2$ ). По осям абсцисс отложены величины  $L/g$ , по осям ординат — величины, пропорциональные оптическим силам линз  $x_2^2 = (\beta_2 L)^2$  и  $(2x_1)^2 = (\beta_1 L)^2$ . Величина  $L/a$  служит параметром. На рис. 33 и 34 даны увеличения триплета в

плоскости  $dcd$  ( $M_{dcd}$ ) и перпендикулярной ей ( $M_{cdc}$ ) при  $s = 0$  и  $s = L/2$ .

Сравнивая результаты расчетов триплета и дублета с одинаковой полной длиной их линз (в дублете  $L_1 = L_2 = L$  и  $s$  дублета равно  $2s$  триплета), можно сделать вывод, что фокусирующая сила триплета меньше фокусирующей силы дублета (см. рис. 31 и 32). Чтобы величины  $a$  и  $g$  в них были равны, необходимо увеличить возбуждение линз

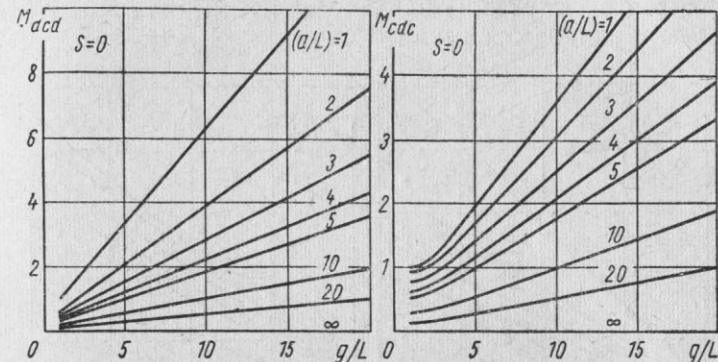


Рис. 33. Увеличения симметричного триплета.

триплета по сравнению с дублетом. Благодаря большей симметрии системы увеличения триплета в плоскостях  $cdc$  и  $dcd$  близки по величине (см. рис. 33, 34). Поэтому дисторсия изображения в триплете меньше, чем в дублете.

Наличие трех линз делает триплет более громоздкой системой, чем дублет. Усложняется также его расчет. Однако по сравнению с дублетом он обладает большей степенью свободы. В стигматическом дублете задание геометрии всей системы (длин линз, расстояний между ними, положения предмета и изображения) жестко определяет остальные параметры: возбуждение линз и создаваемые увеличения. В триплете же при заданной геометрии можно варьировать возбуждения трех его линз, меняя таким образом увеличения.

Если заменить дублет двумя эквивалентными тонкими линзами (одной в плоскости  $cd$  и другой в плоскости  $dc$ ), то с изменением возбуждений линз будет значительно меняться не только фокусное расстояние эквивалентной лин-

зы, но и ее положение, так как положение главных плоскостей дублета сильно зависит от возбуждений. В противоположность этому главные плоскости симметричного триплета, которые расположены по обе стороны от центра на равном расстоянии, смещаются не так значительно с изменением возбуждения линз. Симметричный триплет можно заменить эквивалентной линзой, расположенной в его центре. Изменение возбуждений меняет в первом приближении только ее фокусное расстояние. Это облегчает работу с триплетом в случае необходимости изменения параметров предмета или изображения.

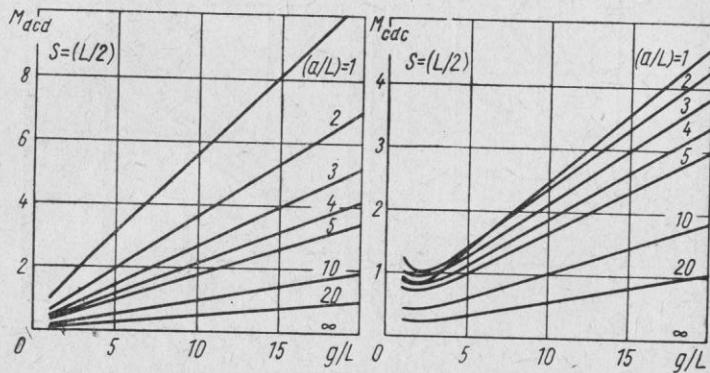


Рис. 34. Увеличения симметричного триплета.

Связь между смещением траектории от оси и значением угла ее наклона на входе и выходе триплета можно, как и для дублета, выразить матрицей, элементы которой, естественно, более сложны, чем у дублета. Матрица триплета представляет собой произведение трех матриц квадрупольных линз на две матрицы свободного пространства между ними. При помощи матриц тонких линз ее можно представить следующим образом:

$$R = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_3} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & s_2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{f_2} & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & s_1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{vmatrix}, \quad (3.41)$$

где  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  — фокусные расстояния первой, второй и третьей линз в рассматриваемой плоскости триплета, определяемые для прямоугольной модели выражениями (2.82).

Величины  $s_1$  и  $s_2$  — длины свободных пространств между тонкими линзами. Каждая из длин — сумма расстояния между соответствующими линзами и расстояний от главных плоскостей этих линз до их краев, определяемых выражениями (2.98). В симметричном триплете  $f_1 = f_3$  и  $s_1 = s_2$ .

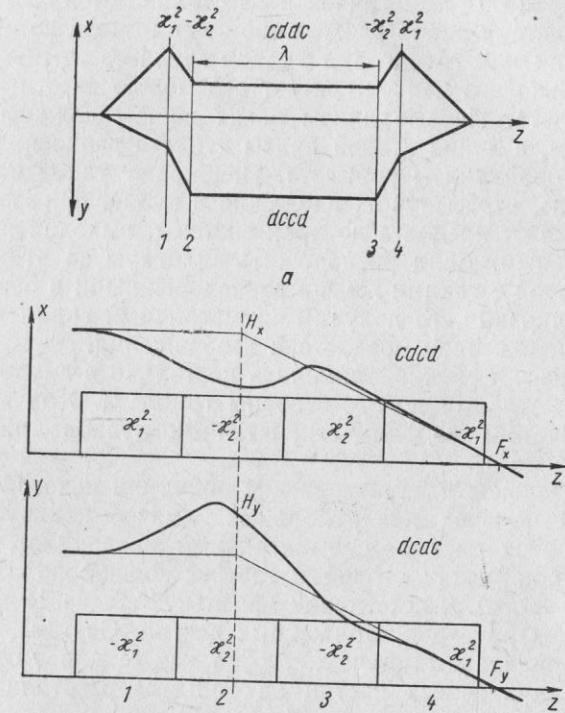


Рис. 35. Схемы расположения линз в симметричном квадруплете (а) и в квадруплете, аналогичном осесимметричной линзе (б) и траектории заряженных частиц в них.

Кардинальные элементы триплета и связь между положением предмета и изображением определяются элементами матрицы триплета так, как и в дублете [см. формулы (2.79)–(2.81), (2.83)–(2.85), (2.89), (2.90)]. Учитывая выражение (3.41), можно найти фокусное расстояние триплета  $F$ :

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} + \frac{s_1}{f_1} \left( \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_3} \right) + \\ + \frac{s_2}{f_3} \left( \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} - \frac{s_1}{f_1 f_2} \right). \quad (3.42)$$

Определение возбуждений триплета значительно упрощается, если он симметричен и расстояние от предмета до входа в систему равно расстоянию от ее выхода до изображения. Так как траектории в таком триплете симметричны относительно его центра, расчет его можно свести к расчету дублета. Первые линзы обеих систем должны быть одинаковы, а длина второй линзы дублета равна половине длины второй линзы триплета. Подбирают такие возбуждения линз, чтобы пучок, входящий в дублет при заданном расстоянии от предмета до края системы, выходил из него параллельным. Если расположить вплотную за этим дублетом второй с такими же, но расположенными в обратном порядке линзами, то получим симметричный триплет с заданным положением предмета и изображения.

Этот расчет можно применять не только в случае пучков, стигматичных по обе стороны триплета. Ход расчета остается таким же для астигматичных пучков при  $a_x = g_x$  и  $a_y = g_y$ .

Значительное распространение получили некоторые системы из четырех квадрупольных линз — квадруплеты. Одна из этих систем — симметричный квадруплет, в котором пучок между второй и третьей линзой параллелен оси (рис. 35, a). Такие пучки используются часто в бета-и масс-спектрометрах заряженных частиц. Система, создающая параллельный пучок, удобна также для транспортировки заряженных частиц на большие расстояния без создания промежуточных изображений.

Квадруплет, изображенный на рис. 35, a, составлен из двух одинаковых дублетов, отличающихся только порядком следования линз. Первый дублет создает параллельный пучок, а второй собирает его в симметрично расположенную точку. Увеличение системы в целом отрицательно и равно единице. Сближением дублетов до соприкосновения средних линз получим симметричный триплет.

Возможны иные сочетания квадрупольных линз, передающие расходящийся из точечного источника пучок в параллельный, а затем снова фокусирующие его в точку. Так как зачастую применяют не одну, а несколько групп

линз, создающих периодическую систему, то мы проанализируем такую систему подробнее в конце этой главы.

Большой интерес представляет создание системы из квадрупольных линз, аналогичной осесимметричной линзе по своим свойствам первого порядка. Такая система должна давать правильное электронно-оптическое изображение предмета. При постоянных параметрах системы перемещение предмета приводит к соответствующему перемещению изображения без его искажения, что невозможно для двух или трех квадрупольных линз. Однако, как показано в работах [62, 63], такую систему можно создать из четырех квадрупольных линз. Квадруплет, аналогичный осесимметричной линзе, состоит из двух одинаковых дублетов (рис. 35, б), причем порядок чередования линз второго дублета обратен первому, а поля в одинаковых линзах обоих дублетов повернуты друг относительно друга на  $90^\circ$ . Поворот полей в одинаковых линзах — отличие данного квадруплета от описанного выше симметричного.

Найдем вид матрицы  $R$  квадруплета, аналогичного осесимметричной линзе. Матрицу первого дублета обозначим, как и раньше,  $T_{cd}$  для плоскости  $cdcd$  и  $T_{dc}$  для плоскости  $dcdc$ . Тогда матрица второго дублета в плоскости  $cdcd$  будет иметь вид  $T_{dcr}$ , так как второй дублет — зеркальное отражение первого, повернутого на  $90^\circ$ , т. е. дублета, у которого плоскости  $cd$  и  $dc$  поменялись местами. Матрица  $T$ , определяется выражением (2.74). В плоскости  $dcdc$  матрица второго дублета имеет вид  $T_{cdr}$ . Если обозначить расстояние между дублетами  $\lambda$ , то

$$\begin{aligned} R_{cdcd} &= T_{dcr} \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} T_{cd}; \\ R_{dcdc} &= T_{cdr} \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix} T_{dc}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Как следует из рис. 35, б и формул (3.43), плоскость  $dcdc$  квадруплета является зеркальным отражением плоскости  $cdcd$  и

$$R_{dcdc} = R_{cdcd}. \quad (3.44)$$

Отсюда матрицы можно записать так:

$$R_{cdcd} = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}; \quad R_{dcdc} = \begin{vmatrix} R_{22} & R_{12} \\ R_{21} & R_{11} \end{vmatrix}. \quad (3.45)$$

Элементы матриц  $R$  имеют, согласно выражениям (3.43), следующий вид:

$$\left. \begin{array}{l} R_{11} = (t_{11})_{cd}(t_{22})_{dc} + (t_{21})_{cd}(t_{12})_{dc} + \lambda(t_{21})_{cd}(t_{22})_{dc}; \\ R_{12} = (t_{12})_{cd}(t_{22})_{dc} + (t_{22})_{cd}(t_{12})_{dc} + \lambda(t_{22})_{cd}(t_{22})_{dc}; \\ R_{21} = (t_{11})_{cd}(t_{21})_{dc} + (t_{21})_{cd}(t_{11})_{dc} + \lambda(t_{21})_{cd}(t_{21})_{dc}; \\ R_{22} = (t_{12})_{cd}(t_{21})_{dc} + (t_{22})_{cd}(t_{11})_{dc} + \lambda(t_{22})_{cd}(t_{21})_{dc}. \end{array} \right\} \quad (3.46)$$

Из формул (2.79) и (3.45) следует, что фокусные расстояния системы, определяемые в обеих плоскостях элементом  $R_{21}$ , равны. Положение фокальной точки в пространстве изображения в плоскости  $c d c d$  определяется элементом матрицы  $R_{11}$ , а в плоскости  $d c d c$  — элементом матрицы  $R_{22}$  [см. уравнения (2.80)]. Для совпадения фокальных точек необходимо, чтобы

$$R_{11} = R_{22}. \quad (3.47)$$

Отсюда, используя выражения (3.46), получим величину расстояния между дублетами  $\lambda$ , которая не может быть отрицательной:

$$\lambda = \frac{(t_{11})_{cd}(t_{22})_{dc} + (t_{21})_{cd}(t_{12})_{dc} - (t_{12})_{cd}(t_{21})_{dc} - (t_{22})_{cd}(t_{11})_{dc}}{(t_{22})_{cd}(t_{21})_{dc} - (t_{21})_{cd}(t_{22})_{dc}} \geq 0. \quad (3.48)$$

Неравенство (3.48) дает условие существования системы из четырех квадрупольных линз, аналогичной осесимметричной. Фокусные расстояния  $f$  и положения фокальных точек в пространстве изображений  $z^*(F)$ , отсчитываемые от выходного края системы, примут вид

$$\left. \begin{array}{l} f = \frac{(t_{22})_{cd}(t_{21})_{dc} - (t_{21})_{cd}(t_{22})_{dc}}{(t_{21})_{cd}^2 - (t_{21})_{dc}^2}; \\ z^*(F) = \frac{(t_{21})_{dc}(t_{22})_{dc} - (t_{21})_{cd}(t_{22})_{cd}}{(t_{21})_{cd}^2 - (t_{21})_{dc}^2}. \end{array} \right\} \quad (3.49)$$

Фокусные расстояния квадруплета в предметном пространстве равны фокусным расстояниям в пространстве изображений, а фокальные плоскости предметного пространства расположены симметрично (относительно середины квадруплета) фокальным плоскостям пространства изображений.

Для тонких линз формулы (3.48) и (3.49) значительно упрощаются. Обозначим индексом 1 параметры первой линзы, а индексом 2 параметры второй и будем считать, что  $\kappa_1 = \beta_1 L_1 \ll 1$ ;  $\kappa_2 = \beta_2 L_2 \ll 1$ ;  $\beta_{1s} \ll 1$ ;  $\beta_{2s} \ll 1$ . Последние два условия показывают, что возбуждение линз должно быть малым. Из формул (3.48) и (3.49) получим

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\lambda}{L_1} = \frac{L_2}{L_1} \frac{\kappa_1^2 [1 + 2(L_2/L_1 + s/L_1)] - \kappa_2^2}{\kappa_2^2 - \kappa_1^2 L_2/L_1}; \\ \frac{f}{L_1} = \frac{z^*(F)}{L_1} = \left[ \kappa_1^2 \kappa_2^2 (1 + L_1/L_2 + 2s/L_2) - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} (\kappa_1^4 + \kappa_2^4 L_1/L_2) \right]^{-1}. \end{array} \right\} \quad (3.50)$$

Отсюда видно, что для тонких линз положение главной плоскости пространства изображений совпадает с выходным краем системы.

Условие (3.48) выполнимо при

$$\frac{L_2}{L_1} < \left( \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)^2 \leqslant 1 + \frac{2(L_2 + s)}{L_1}. \quad (3.51)$$

Как следует из соотношений (3.50),  $f = z^*(F) > 0$ , т. е. квадруплет из тонких линз, аналогичный осесимметричной линзе, собирающий. В частном случае, когда длины всех линз равны ( $L_1 = L_2 = L$ ), оптическая сила второй линзы больше оптической силы первой:

$$1 < \left( \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)^2 \leqslant 3 + \frac{2s}{L}. \quad (3.52)$$

Если же оптические силы линз равны ( $\kappa_1 = \kappa_2$ ), то

$$L_2/L_1 < 1, \quad (3.53)$$

т. е. длина второй линзы меньше длины первой.

На рис. 36 приведены связь между оптическими силами линз квадруплета, для которой выполняется условие (3.48), а также фокусное расстояние и положение фокуса, вычисленные по формулам (3.49). Графики построены для случая равных длин всех линз при  $s = 0$  и двух значениях  $\lambda : \lambda = L$  и  $\lambda = 5L$ . Расчеты проделаны с аппроксимацией распределения поля вдоль оси каждой линзы прямоугольником [64].

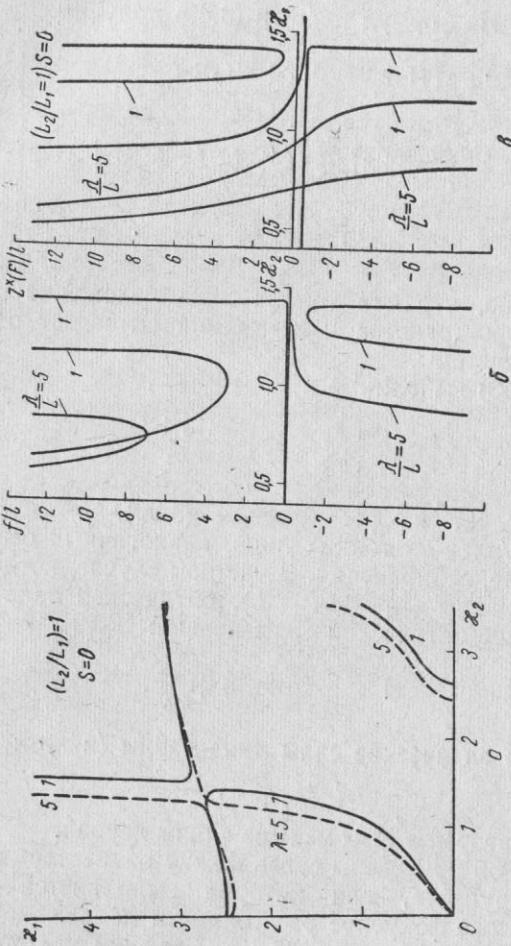


Рис. 36. Связь между оптическими силами линз в системе (а), фокусное расстояние (б) и положение фокуса (в) квадруплета, аналогичного осесимметричной линзе.

Из рис. 36, а видно, что в случае малых возбуждений связь между  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  линейна. В приближении тонких линз

$$\kappa_1 = \kappa_2 \left[ \frac{1 + \lambda/L_2}{1 + \frac{\lambda + 2(s + L_2)}{L_1}} \right]^{1/2}. \quad (3.54)$$

Зависимость кардинальных элементов от оптической силы линзы имеет сложный характер. Если увеличиваются возбуждения от нуля, то фокусное расстояние положительно и с ростом  $\kappa_2$  проходит через минимум, а  $z^*(F)$  меняется от  $+\infty$  до  $-\infty$ . С дальнейшим ростом возбуждений  $f$  становится отрицательным. В этой области имеется промежуточное пересечение траектории с осью. Главные плоскости расположены вне системы, и возможно получение действительного увеличенного изображения, если предмет находится между главной плоскостью и фокальной. В этом нетрудно убедиться, построив оптическую схему системы через ее кардинальные элементы.

Результаты исследования квадруплета, аналогичного осесимметричной линзе, в широком диапазоне изменения его параметров приведены в работах [64, 65], откуда следует, что электронно-оптические свойства этой системы можно менять в широких пределах. Она может быть собирающей и рассеивающей. С ее помощью возможно получение весьма малых фокусных расстояний, т. е. больших увеличений.

Система из квадрупольных линз, аналогичная осесимметричной, создана в двух вариантах: из электрических линз [66, 67] и из безжелезных магнитных [41]. В обоих случаях получено хорошее качество изображения при значениях параметров, близких к расчетным.

Имеются некоторые сведения по исследованию систем, состоящих из большого количества квадрупольных линз. Например, в работах [68, 69] описана система из пяти линз, предназначенная для объектива электронного микроскопа.

Как уже отмечалось, расчет системы из большого числа квадрупольных линз весьма громоздок. Обычно квадрупольные линзы применяют в сочетании с другими электронно-оптическими элементами. Например, при транспортировке заряженных пучков на большие расстояния наряду с линзами используются отклоняющие магниты. Матрицы подобных многоэлементных систем имеют очень сложный вид, что крайне затрудняет расчеты.

Аналогичное положение существует и в световой оптике, где удовлетворение большого количества требований, предъявляемых к фокусирующей системе, заставляет использовать многолинзовые системы. Для упрощения расчетов в световой оптике применяют аппарат скобок Гаусса [50], с помощью которого можно более компактно записать связь между различными параметрами многоэлементной системы, а некоторые свойства скобок облегчают ее анализ. Этот метод применим также для расчета ортогональных систем в электронной оптике. К таким системам относятся электронно-оптические системы, описываемые линейными однородными дифференциальными уравнениями (в частности, квадрупольные линзы). Поэтому имеет смысл вкратце описать этот метод. Он является дальнейшим развитием матричного метода и позволяет более легко находить элементы сложной матрицы по элементам матриц ее составляющих и оперировать ими.

Матрицу системы из квадрупольных линз, как уже было показано, можно представить произведением чередующихся матриц тонких линз и свободного пространства. Связь матриц одной толстой квадрупольной линзы и тонкой линзы, окруженной пространством, свободным от поля, дана выражениями (2.94)–(2.98) (последние написаны для случая, когда распределение поля вдоль оси линзы аппроксимировано прямоугольником). Если обозначить буквой  $c$  взятую с обратным знаком оптическую силу линзы  $c = -1/f$ , то можно записать единым образом для обеих плоскостей связь элементов матрицы  $t_{ik}$  с  $s$  и  $c$ :

$$\left. \begin{aligned} t_{11} &= s_2 c + 1; & t_{12} &= s_2 c s_1 + s_2 + s_1; \\ t_{21} &= c; & t_{22} &= c s_1 + 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.55)$$

Назовем скобкой Гаусса (обозначаемой символом  $[a_1 a_2 \dots a_n]$ ) такую операцию над упорядоченной совокупностью величин (вещественных чисел или функций)  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , при которой

$$\left. \begin{aligned} [ ] &= 1; & [a_1] &= a_1; & [a_1 a_2] &= a_1 a_2 + 1; \\ [a_1 a_2 \dots a_n] &= [a_1 a_2 \dots a_{n-1}] a_n + [a_1 a_2 \dots a_{n-2}]. \end{aligned} \right\} \quad (3.56)$$

Из выражений (3.55) следует, что матричные элементы одной линзы можно записать через скобки Гаусса следующим образом:

$$t_{11} = [s_2 c]; \quad t_{12} = [s_2 c s_1]; \quad t_{21} = [c]; \quad t_{22} = [c s_1]. \quad (3.57)$$

Представим матрицу системы так:

$$R = \left| \begin{array}{c|cc|cc|cc|cc|cc} 1 & s_{n+1} & 1 & 0 & 1 & s_n & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & c_n & 1 & 0 & 1 & c_{n-1} & 1 & \cdots & c_1 & 1 \\ \end{array} \right| \quad (3.58)$$

Здесь  $c_i$  — взятая с обратным знаком оптическая сила  $i$ -й линзы, а  $s_i$  — длина свободного пространства между  $i-1$  и  $i$ -й линзами, т. е. сумма расстояния между соответствующими линзами и расстояний от главных плоскостей этих линз до их краев. В приближении прямоугольной модели  $c_i$  и  $s_i$  можно найти из выражений (2.82) и (2.98). Значение  $s_1$  равно расстоянию от главной плоскости первой линзы до ее входного края, а  $s_{n+1}$  — расстоянию от главной плоскости последней линзы до ее выходного края.

Элементы матрицы  $R$  выражаются через скобки Гаусса следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} R_{11} &= [s_{n+1} c_n s_n \dots s_2 c_1]; \\ R_{12} &= [s_{n+1} c_n s_n \dots c_1 s_1]; \\ R_{21} &= [c_n s_n \dots s_2 c_1]; \\ R_{22} &= [c_n s_n \dots c_1 s_1]. \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

Это дает возможность представить кардинальные элементы системы также через скобки Гаусса.

Отметим некоторые наиболее интересные свойства скобок. Гауссова скобка обратима (симметрична)

$$[a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n] = [a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1] \quad (3.60)$$

и является линейной функцией любого из своих элементов

$$\begin{aligned} [a_1 \dots a_n] &= [a_1 \dots a_{i-1}] [a_{i+1} \dots a_n] a_i + \\ &+ [a_1 \dots (a_{i-1} + a_{i+1}) \dots a_n]. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Отсюда получаем простое и очень полезное правило для дифференцирования скобок:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} [a_1 \dots a_n] = [a_1 \dots a_{i-1}] [a_{i+1} \dots a_n]. \quad (3.62)$$

Непрерывную дробь удобно записать как частное двух скобок Гаусса. Более подробно свойства скобок описаны в работе [50].

Связь между положениями изображения и предмета, а также увеличение системы можно записать с помощью скобок Гаусса следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} g &= -\frac{[s_{n+1} c_n \dots s_2 c_1 (s_1 + a)]}{[c_n s_n \dots s_2 c_1 (s_1 + a)]}; \\ M &= [c_n s_n \dots s_2 c_1 (s_1 + a)]^{-1} = \\ &= [(s_{n+1} + g) c_n \dots c_1 s_1]. \end{aligned} \right\} \quad (3.63)$$

Эти выражения можно получить из соотношений (2.89) и (2.90), используя рекуррентные формулы (3.56) для скобок.

Численное определение параметров фокусирующей системы, которая удовлетворяет заданным условиям, можно свести к задаче отыскания нулевого минимума некоторой функции. Например, если требуется сфокусировать квадрупольными линзами параллельный пучок на данном расстоянии  $s$  от выхода из системы, то это соответствует условию равенства нулю для обеих плоскостей некоторых функций  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$ :

$$\Phi_{1,2} = R_{11} + sR_{21} = 0 \quad (3.64)$$

[см. формулы (2.79) и (2.80)]. Здесь  $R_{11}$  и  $R_{21}$  принимают определенные значения в каждой из двух плоскостей.

Если необходимо сфокусировать параллельный пучок в одной плоскости, оставив его параллельным в другой, то для первой плоскости остается условие (3.64)  $\Phi_1 = 0$ , а для второй можно записать

$$\Phi_2 = R_{21} = 0. \quad (3.65)$$

Как следует из уравнения (2.79), выражение (3.65) соответствует требованию равенства бесконечности фокусного расстояния в этой плоскости.

Численное решение системы в обоих случаях сводится к отысканию нулевого минимума функции  $\Phi_1^2 + \Phi_2^2$ . Условия получения в системе стигматического изображения, находящегося на расстоянии  $g$  от выхода, если предмет расположен на расстоянии  $a$  от входа, даны выражением (2.89). Его можно переписать следующим образом:

$$\Phi_{1,2} = g + \frac{aR_{11} + R_{12}}{aR_{21} + R_{22}} = 0, \quad (3.66)$$

где элементы матрицы  $R$  имеют определенные значения для каждой из двух плоскостей системы. В этом случае также необходимо для численного определения параметров системы найти нулевой минимум  $\Phi_1^2 + \Phi_2^2$ .

В сложных случаях расчет производят, как правило, на электронно-вычислительных машинах. Вопрос сводится к решению систем алгебраических уравнений [70].

Численные методы нахождения минимальных значений функции можно разбить на три группы. Остановимся кратко на их описании [71, 72].

1. *Метод слепого поиска.* Если задана некоторая область изменения параметров, характеризующих функцию, то просматривается ряд их значений и отбираются те, в которых величина функции минимальна. Можно просматривать в определенном порядке все точки пространства рабочих параметров (сканирование) или выбирать точки случайным образом (принцип гомеостата). Поиски ведут до тех пор, пока сумма  $\Phi_1^2 + \Phi_2^2$  не станет достаточно малой. Общая черта метода заключается в том, что эксперименты по подбору нужных значений параметров независимы друг от друга. При непрерывном поиске значения функции от эксперимента к эксперименту не улучшаются.

2. *Методы локального поиска.* Эти методы предусматривают анализ результатов каждого численного эксперимента и получение из них исходных данных для следующего эксперимента. Сюда относятся градиентный метод, метод наискорейшего спуска, релаксационный и др. Наиболее часто применяют два первых метода.

Градиентный метод состоит в том, что для данной точки области параметров  $A_0$  рассчитывают изменение функции при небольшом изменении каждого из ее параметров, т. е. из этой точки производят малые шаги  $\Delta q_i$  по каждому из  $q_i$  параметров в отдельности и определяют составляющие  $d\Phi/dq_i$  градиента функции  $\Phi$  и вычисляют ее градиент. Затем делается шаг в направлении, противоположном градиенту, т. е. в направлении наискорейшего убывания функции. В полученной точке  $A_1$  всю процедуру повторяют. Этим способом подходят к минимуму функции.

Метод наискорейшего спуска заключается в том, что после определения градиента функции в данной точке  $A_0$  движение в противоположном ему направлении производят до тех пор, пока не достигают значения функции, минималь-

ного на данном направлении, и в этой точке определяют градиент функции, и снова в противоположном направлении ищут точку, в которой значение функции минимально. Процедуру повторяют до тех пор, пока величина суммы  $\Phi_1^2 + \Phi_2^2$  не станет меньше заданной. Быстрота сходимости этого метода больше быстроты сходимости метода градиентного спуска. Поэтому его лучше применять при больших отклонениях значения функции от минимальной величины. Однако с малыми отклонениями от минимума лучше работать по методу градиентного спуска. Он дает меньшее уставновившееся среднее отклонение от минимума.

Общая черта этих методов — их локальность. Рабочая точка непрерывно движется по пространству параметров. Использование локальных методов непрерывно улучшает значение функции в процессе поиска, что обеспечивает преимущество этих методов по сравнению с методами слепого поиска. Однако при небольшом градиенте локальный метод малоэффективен. Необходимо многократное изменение величины рабочего шага в направлении движения, что значительно замедляет скорость поиска. Существует опасность «зацикливания» поиска на какой-нибудь второстепенной «мелкой впадине».

3. *Методы нелокального поиска.* Характерная черта их состоит в том, что кривая перемещения рабочей точки по пространству параметров не непрерывна, резко растет объем просматриваемой в единицу времени области и процесс оптимизации значительно ускоряется. Фактически эти методы представляют собой сочетание локальных методов и методов слепого поиска. Одним из видов этого сочетания является метод оврагов [72]. Из произвольной точки  $A_0$  в пространстве параметров спускаются (по одному из локальных методов) в точку  $B_0$ , причем спуск нужно выполнять грубо до тех пор, пока изменение функции значительно. Затем в окрестности точки  $A_0$  выбирают произвольно вторую точку  $A_1$ , на расстоянии, существенно превышающем шаг спуска. Из точки  $A_1$  также спускаются в некоторую точку  $B_1$ . Третью точку  $A_2$  выбирают уже не произвольно, а на прямой, соединяющей точки  $B_0$  и  $B_1$  в направлении уменьшения функции. Расстояние  $A_2$  от  $B_1$  называют длиной овражного шага. Оно больше длины шага при спуске. Из точки  $A_2$  опять спускаются в точку  $B_2$ . Новая точка  $A_3$  находится на продолжении прямой, соединяющей  $B_2$  и  $B_1$ , и процедуру продолжают.

Метод нелокального поиска существенно ускоряет задачу при большом числе переменных параметров. Он дает возможность устранить зацикливание, возникающее иногда при использовании метода локального поиска.

В лабораториях, занимающихся расчетом и конструированием сложных электронно-оптических систем, имеются разработанные на основе какого-либо из описанных методов программы для электронно-вычислительных машин [73, 74]. По этим программам подбирают оптические силы (градиенты) для фокусировки пучка в заданной точке при определенном положении линз. Кроме того, можно, изменив некоторые свободные параметры системы, удовлетворить дополнительные требования к системе и пучку на выходе. Так, в случае работы с нестабильными частицами для уменьшения их потерь в результате распада необходимо подобрать систему с возможно меньшим расстоянием между источником и приемником.

Возможен иной метод определения параметров сложных систем из квадрупольных линз и других электронно-оптических элементов с использованием аналоговых устройств. Положительная черта последних — быстрое получение результатов и прямая наглядная связь между изменением параметров системы и получаемых на выходе траекторий.

В основе обычно используемых электронных аналоговых устройств лежит электронная схема, составленная из интегрирующих, суммирующих и других ячеек. В них некоторая функция независимой переменной представляется зависящим от времени напряжением.

Для определения на аналоговой вычислительной машине траектории в системе из квадрупольных линз исходят из дифференциальных уравнений (2.10). Функцию  $\beta^2 u(z)$  (2.11), которая определяет параметры всей системы, представляют при помощи генератора в виде ступенчатой функции, управляемой (с противоположными знаками) в две одинаковые цепи аналогового устройства. В них функции  $x''(z)$  и  $y''(z)$  дважды интегрируются и после умножения на  $\pm\beta^2 u(z)$  направляются обратно в первый интегратор. При этом в соответствующие ячейки схемы вводят начальные условия задачи. Полученный результат подается на двухлучевой осциллограф, вычерчивающий на экране обе проекции траектории одновременно. Для получения на экране неподвижной картины устройство работает в периодическом режиме с частотой повторения 1 Гц. Точность

результатов на аналоговых электронных устройствах достигает 0,1% [18, 75, 76].

В заключение рассмотрим периодические системы из квадрупольных линз. Такие системы называют обычно жесткофокусирующими каналами. В них периодически чередуются фокусирующие и дефокусирующие участки. Отдельный период системы могут составлять дублеты, триплеты или еще какие-либо группы квадрупольных линз.

Рассмотрим вначале периодическую систему из квадрупольных линз (уже упомянутую нами при рассмотрении квадруплета), которая применяется в электростатическом

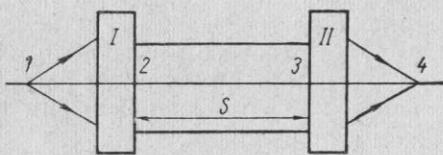


Рис. 37. Ячейка масс-сепаратора.

масс-сепараторе для разделения частиц высокой энергии [77, 78, 15]. Каждая ячейка ее состоит из двух групп линз, между которыми пучок заряженных частиц в пространстве, свободном от поля, параллелен оси системы (рис. 37). Сепарация по массам производится однородным поперечным электрическим полем, которое накладывается на пучок в промежутках между двумя группами линз. Для сохранения неизменной траектории частиц нужного сорта с определенной величиной скорости на отклоняющее электрическое поле накладывается поперечное однородное магнитное поле, направленное перпендикулярно электрическому. Разделение частиц по массам улучшается пропорционально числу ячеек. Будем считать, что все ячейки системы одинаковы, а группы линз I и II в ячейке симметричны. Найдем, каким требованиям они должны удовлетворять.

Матрицу I группы, описывающую преобразование пучка от плоскости 1 в плоскость 2, обозначим  $R$ :

$$R = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{vmatrix}. \quad (3.67)$$

Тогда II группа будет описываться матрицей  $R_r$ , равной, согласно формуле (2.74),

$$R_r = \begin{vmatrix} R_{22} & R_{12} \\ R_{21} & R_{11} \end{vmatrix}. \quad (3.68)$$

Эта матрица описывает преобразование пучка от плоскости 3 к плоскости 4.

Если длина свободного от поля пространства между двумя группами линз равна  $s$ , то соответствующая матрица  $S$  имеет вид

$$S = \begin{vmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.69)$$

и преобразование пучка от плоскости 1 к плоскости 4 описывается произведением матриц (3.67)–(3.69)

$$\begin{aligned} P &= \begin{vmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{vmatrix} = R_r S R = \\ &= \begin{vmatrix} R_{11} R_{22} + R_{12} R_{21} + R_{22} R_{21} s & 2R_{22} R_{12} + R_{22}^2 s \\ 2R_{11} R_{21} + R_{21}^2 s & R_{11} R_{22} + R_{12} R_{21} + R_{22} R_{21} s \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Необходимо иметь в виду, что матрицы  $R$ ,  $R_r$  и  $P$  имеют разный вид для двух взаимно перпендикулярных плоскостей.

Для того чтобы пучок был параллелен оси в пространстве между двумя группами, необходимо иметь

$$R_{22} = 0. \quad (3.71)$$

А так как детерминант матрицы  $R$  должен быть равен единице, то

$$R_{12} R_{21} = -1, \quad (3.72)$$

и матрица  $P$  приобретает вид

$$P = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2R_{11} R_{21} + R_{21}^2 s & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ \frac{s}{R_{12}^2} - \frac{2R_{11}}{R_{12}} & -1 \end{vmatrix}. \quad (3.73)$$

Из формулы (3.73) следует, что увеличение системы, характеризуемое элементом  $P_{11}$ , равно  $P_{11} = -1$ .

Отличие от нуля элемента  $P_{21}$  в формуле (3.73) приводит к тому, что угловая расходимость пучка ввиду конечных размеров источника увеличивается в направлении от источ-

ника к изображению. В результате размеры пучка в месте расположения разделяющих полей увеличиваются. Если потребовать

$$P_{21} = 0, \quad (3.74)$$

то матрица  $P$  приобретает вид

$$P = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad (3.75)$$

т. е. будет соответствовать «антитождественному» преобразованию пучка. Из выражений (3.74) и (3.73) следует условие для расстояния между группами линз

$$s = -\frac{2R_{11}}{R_{21}} = 2R_{11} R_{12}. \quad (3.76)$$

Согласно уравнениям (2.80), расстояние от фокуса пространства изображений I группы до ее выходного края равно  $z_1^*(F) = -R_{11}/R_{21}$ , а благодаря симметрии групп расстояние от фокуса предметного пространства II группы до ее входного края равно  $z_{11}^*(F') = z^*(F)$  [см. уравнение (2.87)]. Поэтому условие (3.76) соответствует такому расположению групп, при котором фокус пространства изображений I группы совпадает с фокусом предметного пространства II.

Если каждая группа в ячейке представляет собой дублет, то для выполнения в обеих плоскостях  $cd$  и  $dc$  условия  $R_{22} = 0$  в приближении тонких линз имеем

$$\frac{as_1}{f_1 f_2} = 1; \quad \frac{a}{f_1} = \frac{a + s_1}{f_2}. \quad (3.77)$$

Здесь  $\pm f_1$  и  $\mp f_2$  — фокусные расстояния входящих в дублет первой и второй линз;  $a$  — расстояние от источника до первой линзы;  $s_1$  — расстояние между линзами. Из выражения (3.77) следует:

$$f_1 = a \sqrt{\frac{s_1}{a + s_1}}; \quad f_2 = s_1 \sqrt{1 + \frac{a}{s_1}}. \quad (3.78)$$

Если каждая группа линз представляет собой триплет, то для выполнения одновременно в обеих плоскостях условия  $R_{22} = 0$  необходимо, чтобы

$$\frac{a}{f_1} - \frac{a + s_1}{f_2} + \frac{a + 2s_1}{f_3} = \frac{as_1^2}{f_1 f_2 f_3}; \quad (3.79)$$

$$\frac{as_1}{f_1 f_2} - \frac{2as_1}{f_1 f_3} + \frac{s_1(a + s_1)}{f_2 f_3} = 1. \quad (3.80)$$

Здесь  $\pm f_1$ ,  $\mp f_2$ ,  $\pm f_3$  — фокусные расстояния образующих триплет линз;  $a$  — расстояние от предмета до первой линзы;  $s_1$  — длина промежутков между линзами.

Одним из важных преимуществ триплета в данном случае является то, что хроматическая aberrация у него меньше, чем у дублета.

Жесткофокусирующий канал из квадрупольных линз используют также при транспортировке заряженных частиц на значительные расстояния, когда потери их крайне нежелательны. Например, его ставят на пути частиц от ускорителя к измерительной аппаратуре. Если применить одну какую-нибудь фокусирующую систему типа дублета или триплета, то ввиду большого расстояния, проходимого частицами, и наличия поперечных составляющих скорости поперечное сечение пучка сильно возрастает. Это требует больших диаметров вакуумных систем, больших апертур линз и создает еще много неудобств.

Иногда требуется постоянная небольшая подфокусировка пучка. Так, например, в линейных ускорителях высокочастотное продольное электрическое поле сопровождается дефокусирующим радиальным полем, возникающим в конце ускоряющих зазоров на входах в дрейфовые трубы. В результате наряду с ускорением зазор действует как рассеивающая линза. Первой попыткой устраниТЬ эту дефокусировку было применение сеток на входе в дрейфовые трубы. Однако от этого метода, связанного с большой потерей заряженных частиц на сетках, отказались. В ионных и протонных линейных ускорителях чаще всего используют дополнительную фокусировку, созданную периодической системой из квадрупольных линз.

Рассмотрим каналы, состоящие только из квадрупольных линз, не учитывая дополнительные радиальные или еще какие-нибудь поля. Однако общая часть, связанная с решением дифференциальных уравнений, имеющих периодические коэффициенты, может быть применена к любому периодическому полю.

Траектория заряженных частиц в периодических системах имеет колебательный характер. Она совершает по-

перечные колебания, то удаляясь от оси, то приближаясь к ней. В жесткофокусирующих каналах на нее действуют поочередно то фокусирующие, то дефокусирующие силы. Чрезвычайно важно, чтобы эти периодически повторяющиеся воздействия не раскачивали частицы. Поэтому основным вопросом в теории периодических систем являются условия устойчивости, стабильности траекторий. Для ускоряющих сильнофокусирующих циклических систем этот вопрос рассмотрен в работе [3], для линейных ускорителей с жесткой фокусировкой — в работе [4] и др.

Параксиальные траектории заряженных частиц в жесткофокусирующих каналах описываются уравнениями (2.10). В этом случае  $u(z)$  — периодическая функция  $z$ . Линейные дифференциальные уравнения такого типа называют уравнениями Матье — Хилла. Для них имеется хорошо разработанная теория [79, 80]. Уравнения Матье — Хилла описывают также траектории заряженных частиц в ускорителях.

Общие решения уравнений (2.10) с периодическими коэффициентами наиболее просто можно выразить такими его частными решениями  $w_1(z)$  и  $w_2(z)$ , которые легко вычисляются для любых  $z$ , определенных на одном периоде канала [17, 20]. Если предположить, что период фокусировки равен единице (это не ограничивает общность рассмотрения), то

$$u(z+1) = u(z). \quad (3.81)$$

Ограничимся анализом уравнения (2.10) для плоскости  $xOz$ . Общее решение его, записанное через  $w_1(z)$  и  $w_2(z)$ , имеет вид

$$x = C_1 w_1(z) + C_2 w_2(z), \quad (3.82)$$

где  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные, зависящие от начальных условий.

Рассмотрим такие частные решения  $w_{1,2}(z)$ , которые увеличиваются на некоторые постоянные множители  $\rho_{1,2}$  с каждым увеличением  $z$  на период (в нашем случае на единицу):

$$w_{1,2}(z+1) = \rho_{1,2} w_{1,2}(z). \quad (3.83)$$

Отсюда следует, что  $w_{1,2}(z)$  можно выразить в виде

$$w_{1,2}(z) = \rho_{1,2}^z \varphi_{1,2}(z), \quad (3.84)$$

где  $\varphi_1(z)$  и  $\varphi_2(z)$  — периодические функции с единичным периодом. Эти функции, а иногда и  $w_{1,2}(z)$  называют функциями Флока. Множители  $\rho_1$  и  $\rho_2$  называются характеристическими.

Если рассмотреть  $n$ -й период фокусировки, в начале которого  $z = n$ , а в конце  $z = n+1$ , то параметры траектории в нем можно описать при помощи матрицы  $R(n)$ , характеризующей фокусирующую систему периода

$$\begin{vmatrix} x_{n+1} \\ x'_{n+1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_{11}(n) & R_{12}(n) \\ R_{21}(n) & R_{22}(n) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_n \\ x'_n \end{vmatrix}. \quad (3.85)$$

В частности, для начального «нулевого» периода имеем

$$\begin{vmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} R_{11}(1) & R_{12}(1) \\ R_{21}(1) & R_{22}(1) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{vmatrix}. \quad (3.86)$$

Таким образом, частные решения  $w_1(n+1)$  и  $w_2(n+1)$  и их производные связаны с  $w_1(n)$  и  $w_2(n)$  как выражениями (3.83), так и (3.85). Отсюда можно получить для  $w(n)$  и  $w'(n)$  систему из двух линейных однородных уравнений:

$$\begin{aligned} R_{11} w(n) + R_{12} w'(n) &= \rho w(n); \\ R_{21} w(n) + R_{22} w'(n) &= \rho w'(n). \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (3.87)$$

Эта система имеет отличные от нуля решения, если ее определитель равен нулю:

$$(R_{11} - \rho)(R_{22} - \rho) - R_{12} R_{21} = 0. \quad (3.88)$$

Учитывая, что матричные элементы связаны соотношением  $R_{11} R_{22} - R_{12} R_{21} = 1$ , получим

$$\rho^2 - (R_{11} + R_{22})\rho + 1 = 0. \quad (3.89)$$

Из уравнения (3.89) следует, что произведение  $\rho_1 \rho_2 = 1$ , а их значения таковы:

$$\rho_{1,2} = \frac{R_{11} + R_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{(R_{11} + R_{22})^2}{4} - 1}. \quad (3.90)$$

Сумма диагональных элементов  $R_{11} + R_{22}$  — это так называемый след матрицы  $R$ , который обозначается обычно  $\text{Sp } R$ . Если ввести обозначение

$$\cos \mu = \frac{\text{Sp } R}{2} = \frac{R_{11} + R_{22}}{2}, \quad (3.91)$$

то получим

$$\rho_{1,2} = e^{\pm i\mu}. \quad (3.92)$$

Постоянную  $\mu$  называют характеристическим показателем. В общем случае это некоторое комплексное число. В зависимости от его величины траектория в канале совершает периодическое движение или имеет непериодический характер. Если

$$-1 < \frac{R_{11} + R_{22}}{2} = \cos \mu < 1, \quad (3.93)$$

то характеристический показатель  $\mu$  — величина вещественная. При этом оба частных решения  $w_{1,2}(z)$  с возрастанием  $z$  остаются ограниченными. Следовательно, колебания  $x(z)$  тоже ограничены по величине, т. е. устойчивы.

Если условие (3.93) не выполняется, то или обе, или одна из функций  $w(z)$  неограниченно увеличиваются с ростом  $z$ . Колебания траектории  $x(z)$  тоже неограниченно возрастают. Траектория становится нестабильной. Стабильная траектория имеет вид периодической кривой, на которую наложены более мелкие колебания с периодом канала. На всех фокусирующих участках частица в среднем удалена от оси больше, чем на смежных дефокусирующих.

Устойчивость колебаний не должна зависеть от положения начала отсчета. Можно показать, что сумма  $R_{11} + R_{22}$  инвариантна по отношению к его сдвигу.

Элементы матрицы  $R$ , а также функции  $w_{1,2}(z)$  полностью определяются решением уравнения траектории (2.10) для одного периода, т. е. функцией  $u(z)$ .

В качестве примера рассмотрим канал из одинаковых квадрупольных линз, расположенных на равном расстоянии друг от друга. Фокусирующие плоскости соседних линз повернуты друг относительно друга на  $90^\circ$ . Такой канал из магнитных линз предназначен для получения чистых пучков  $\mu$ -мезонов [81]. Один период в нем охватывает две линзы и два свободных от поля промежутка. Матрица одного периода равна

$$R = \begin{vmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{vmatrix} Q_d \begin{vmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{vmatrix} Q_c. \quad (3.94)$$

Если аппроксимировать распределение поля линз вдоль оси  $z$  прямоугольником, то выражение  $Q$  дается формулами (2.60). Из выражений (3.94) и (2.60) следует

$$Sp R = R_{11} + R_{22} = 2 \cos \kappa \operatorname{ch} \kappa +$$

$$+ 2\beta s (\cos \kappa \operatorname{sh} \kappa - \sin \kappa \operatorname{ch} \kappa) - \beta^2 s^2 \sin \kappa \operatorname{sh} \kappa. \quad (3.95)$$

Из условия (3.93), определяющего области устойчивости, можно написать уравнение границ областей  $|SpR| = 2$ :

$$\left. \begin{aligned} (\beta s)_{12} &= \operatorname{ctg} \kappa - \operatorname{cth} \kappa \pm \left( \frac{1}{\sin \kappa} - \frac{1}{\operatorname{sh} \kappa} \right), \\ (\beta s)_{34} &= \operatorname{ctg} \kappa - \operatorname{cth} \kappa \pm \left( \frac{1}{\sin \kappa} + \frac{1}{\operatorname{sh} \kappa} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.96)$$

На рис. 38 дан вид областей устойчивости, построенных по уравнениям (3.96). Если  $\kappa > \pi$ , то области имеют вид узких полос, ширина которых убывает с ростом  $\kappa$  как  $e^{-\kappa}$ .

Для частиц с заданной величиной импульса  $p$  следует таким образом выбирать параметры канала  $L$ ,  $s$  и градиенты линз, чтобы получающиеся значения  $\kappa$  и  $\beta s$  не выходили за пределы областей устойчивости. При  $\kappa > \pi$  можно построить канал, который работает как сепаратор заряженных частиц по их импульсам.

Довольно простой вид имеют условия устойчивости для канала, если один период его составлен из трех линз, двух собирающих по краям и одной рассеивающей в центре [81]. В этом случае возбуждения линз предполагаются одинаковыми, а длина каждой крайней равна половине длины средней. Расстояния между краями линз равны нулю.

Матрица одного периода в плоскости  $cdc$  имеет вид

$$R = Q_c Q_d Q_c. \quad (3.97)$$

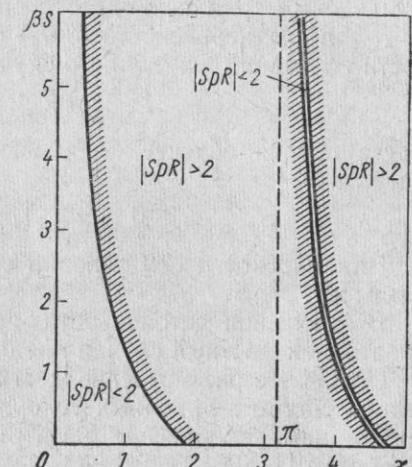


Рис. 38. Области устойчивости в канале из одинаковых квадрупольных линз.

При использовании прямоугольной модели поля, согласно выражению (2.60), матрицы  $Q$  таковы:

$$Q_c = \begin{vmatrix} \cos \frac{\kappa}{2} & \frac{1}{\beta} \sin \frac{\kappa}{2} \\ -\beta \sin \frac{\kappa}{2} & \cos \frac{\kappa}{2} \end{vmatrix}; Q_d = \begin{vmatrix} \operatorname{ch} \kappa & \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \kappa \\ \beta \operatorname{sh} \kappa & \operatorname{ch} \kappa \end{vmatrix}. \quad (3.98)$$

Из уравнений (3.97) и (3.98) получим

$$R_{11} = \cos \kappa \operatorname{ch} \kappa. \quad (3.99)$$

Ввиду симметрии периода относительно его центра  $R_{11} = R_{22}$  и из неравенства (3.93) следует условие устойчивости колебаний для данного случая:

$$-1 \leq \cos \kappa \operatorname{ch} \kappa \leq 1. \quad (3.100)$$

Тогда первая область стабильности траектории лежит в пределах

$$0 < \kappa \leq 1,873. \quad (3.101)$$

Для плоскости  $dcd$  условия стабильности остаются такими же.

В отношении устойчивости эту задачу можно рассматривать как частный случай предыдущей задачи для  $s=0$ .

Подробное рассмотрение жесткофокусирующих периодических систем в линейных ускорителях с учетом действующих в нем ускоряющих электрических полей приведено в работах [17, 20, 82, 83, 84].

## ГЛАВА 4

### ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АБЕРРАЦИИ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ

В электронно-оптических системах для увеличения интенсивности изображения часто приходится применять пучки заряженных частиц с большим углом раствора. В ряде случаев бывает необходимым увеличение поля зрения. Использование широких и удаленных от оси пучков приводит к ухудшению качества фокусировки.

Приближение параксиальной оптики в этих случаях оказывается недостаточным для расчета. Необходима более точная теория, учитывающая влияние величины угла раствора и положения пучка на качество создаваемого изображения. Искажения, связанные с этими факторами, называют геометрическими аберрациями. Они сводятся к смещению изображения в гауссовой плоскости относительно параксиального и к его расплыванию, которые зависят от положения источника в предметной плоскости и величины углов вылета.

В этой главе будут рассмотрены геометрические аберрации квадрупольных линз. Они изучены еще мало. Вычисление аберраций электронно-оптических систем связано со сложными и громоздкими выкладками. В квадрупольных линзах эта работа усложняется по сравнению с осесимметричными линзами. Количество аберрационных коэффициентов возрастает.

При рассмотрении параксиального случая мы ограничивались в уравнениях траекторий заряженных частиц первыми степенями малых величин  $x, x', y$  и  $y'$ . Для вычисления аберраций необходимо принять во внимание их более высокие степени. Если учесть в уравнениях траекторий третьи степени этих величин, то можно определить геометрические аберрации третьего порядка.

В квадрупольных линзах аберрации второго порядка, содержащие вторые степени смещений и углов наклона

траекторий, отсутствуют. Это связано с наличием плоскостей симметрии поля, благодаря чему выражения для траекторий имеют только нечетные степени этих величин.

Ввиду большой громоздкости вычислений ограничимся нерелятивистским приближением. Вывод уравнений в релятивистском приближении может быть проделан аналогичным образом.

Рассмотрим уравнение движения в декартовой системе координат (2.4), считая массу заряженных частиц постоянной. Тогда  $\frac{dp}{dt} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ . Связь скорости частицы  $\mathbf{v}$  с ускоряющим потенциалом  $\Phi = \varphi - \varphi_0$  упрощается, и выражение (2.7) переходит в

$$v = \sqrt{-\frac{2e\Phi}{m}}. \quad (4.1)$$

В данном приближении уже нельзя считать потенциал электрического поля  $\varphi$  и продольную составляющую скорости  $v_z$  постоянными, как это было в параксиальной области. Необходимо учитывать в них, а также в выражениях для напряженностей электрического и магнитного полей члены, содержащие малые величины поперечных координат и углов в степенях не выше третьей. В этом случае из уравнений (2.8) имеем:

$$v = v_z \left( 1 + \frac{1}{2} x'^2 + \frac{1}{2} y'^2 \right). \quad (4.2)$$

Для перехода от дифференцирования по времени в формуле (2.4) к дифференцированию по координате  $z$  получим из соотношения (4.2)

$$dt = \frac{dz}{v} \left( 1 + \frac{1}{2} x'^2 + \frac{1}{2} y'^2 \right). \quad (4.3)$$

Скорость  $v$  в уравнении (4.3), согласно выражениям (4.1) и (1.4), имеет вид

$$v = \sqrt{\frac{2e\varphi_0}{m}} \left[ 1 - \frac{k_2(z)V}{2r_E^2\varphi_0} (x^2 - y^2) \right]. \quad (4.4)$$

Из выражений (1.4) и (1.6) следует:

$$\left. \begin{aligned} E_x &= -\frac{V}{r_E^2} \left[ 2k_2(z)x - \frac{1}{3} k_2''(z)x^3 \right]; \\ E_y &= \frac{V}{r_E^2} \left[ 2k_2(z)y - \frac{1}{3} k_2''(z)y^3 \right]; \\ H_x &= -\frac{2W}{r_M^2} \left[ n_2(z)y - \frac{1}{12} n_2''(z)y(3x^2 + y^2) \right]; \\ H_y &= -\frac{2W}{r_M^2} \left[ n_2(z)x - \frac{1}{12} n_2''(z)x(x^2 + 3y^2) \right]; \\ H_z &= -\frac{2W}{r_M^2} n_2'(z)xy. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

Подставив соотношения (4.3)–(4.5) в уравнения движения (2.4) и произведя некоторые преобразования, получим уравнения траекторий в квадрупольных линзах с точностью до членов третьего порядка малости:

$$\left. \begin{aligned} x'' + \beta^2 ux &= -\beta^2 \left\{ \frac{1}{2} ux [(n+3)x'^2 - (n-1)y'^2] - \right. \\ &\quad \left. -(n+1)uyx'y' + \frac{1}{2} nu'x'(x^2 - y^2) - (n+1)u'xyy' + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} u''x \left[ \frac{n-1}{3}x^2 - (n+1)y^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} n(n-1)\beta^2 u^2 x(x^2 - y^2) \right\}; \\ y'' - \beta^2 uy &= \beta^2 \left\{ -\frac{1}{2} uy [(n-1)x'^2 - (n+3)y'^2] - \right. \\ &\quad \left. -(n+1)uxx'y' - \frac{1}{2} nu'y'(x^2 - y^2) - (n+1)u'xyx' - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} u''y \left[ (n+1)x^2 - \frac{n-1}{3}y^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} n(n-1)\beta^2 u^2 y(x^2 - y^2) \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

В этих уравнениях предполагается, что распределения электрического и магнитного полей вдоль оси  $z$  совпадают:

$$\frac{k_2(z)}{K_2} = \frac{n_2(z)}{N_2} = u(z). \quad (4.7)$$

Выражение для  $\beta^2$  дано формулой (2.12), в которой  $\Phi$  соответствует потенциалу на оси:  $\Phi = -\varphi_0$ . Коэффициент  $n$  определяется соотношением возбуждений электрического и магнитного полей

$$\beta_E^2 = n\beta^2; \quad \beta_M^2 = (n+1)\beta^2. \quad (4.8)$$

Магнитной линзе соответствует  $n = 0$ , электрической  $n = -1$ . Если имеется квадрупольная линза с наложенным электростатическим и магнитным полями, то коэффициент  $n$  связан с отношением их возбуждений следующим образом:

$$\beta_E^2/\beta_M^2 = n/(n+1). \quad (4.9)$$

В уравнениях, описывающих траекторию заряженной частицы с точностью до членов третьего порядка, переменные  $x$  и  $y$  не разделяются, в отличие от параксиальных уравнений.

В то время как параксиальные свойства квадрупольной линзы не зависят от рода ее поля (электрического или магнитного), а определяются полностью коэффициентом  $\beta^2$ , aberrации линз зависят от рода поля. Как следует из выражений (4.6), вид уравнений определяется не только коэффициентом  $\beta^2$ , т. е. величиной возбуждения, но и величиной  $n$ , т. е. соотношением электрического и магнитного полей.

Более общий вид уравнений траекторий в квадрупольной линзе с учетом членов третьего порядка при несовпадающих распределениях электрического и магнитного полей приведен в работе [85]. Уравнения траекторий для чисто магнитного и чисто электрического полей приведены в работах [8, 86].

Правые части уравнений (4.6) есть не просто сумма правых частей соответствующих уравнений для магнитной и электрической линз; в них входят также смешанные члены, связанные с взаимодействием этих полей.

Отдельные слагаемые в правых частях уравнений определяются изменением продольной составляющей скорости, связанным со значительным наклоном траектории (члены с  $x'^2$  и  $y'^2$ ). Ряд членов связан с наличием продольной составляющей электрического и магнитного полей (члены с  $u'$ ), а также с изменением этой составляющей (слагаемые с  $u''$ ).

Если рассматривается только магнитная квадрупольная линза ( $n = 0$ ), то можно пользоваться уравнениями (4.6)

и рассчитанными из них выражениями для aberrаций и релятивистского случая, так как в магнитном поле величина скорости, а следовательно, и масса заряженной частицы не меняются. При этом только необходимо в выражение (2.12) для  $\beta^2$  вместо величины  $\Phi$  подставлять «релятивистский потенциал»  $\Phi_r$ :

$$\Phi_r = \Phi \left( 1 - \frac{e\Phi}{2mc^2} \right). \quad (4.10)$$

Для электрона, если выражать ускоряющий потенциал в вольтах, имеем

$$\Phi_r = \Phi (1 + 0,98 \cdot 10^{-6} \Phi). \quad (4.11)$$

Если же пользоваться выражением для  $\beta^2$ , записанным в виде соотношения (2.13а), то вместо  $m$  нужно подставить

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Уравнения траекторий заряженных частиц с точностью до членов третьего порядка для квадрупольной линзы могут быть также получены из общих уравнений работы [87]. В последних следует положить, что кривизна и кручение осевой траектории равны нулю, а входящие в них коэффициенты определить из выражений для распределения полей (1.4) и (1.6).

Если правые части выражения (4.6) положить равными нулю, то полученные однородные уравнения совпадут с уравнениями параксиальных траекторий (2.10).

Геометрические aberrации третьего порядка определяются из уравнения (4.6) методом возмущений. Для этого в правые части уравнения подставляют вместо  $x(z)$ ,  $y(z)$  и их производных решения соответствующих однородных уравнений  $x_p(z)$ ,  $y_p(z)$  и их производные, взятые при тех же начальных условиях. Затем из полученных линейных неоднородных дифференциальных уравнений методом вариации произвольных постоянных определяют  $x(z)$  и  $y(z)$ . Аберрации третьего порядка  $\Delta x(z)$  и  $\Delta y(z)$  равны разности между найденной и параксиальной траекториями:

$$\begin{cases} \Delta x(z) = x(z) - x_p(z); \\ \Delta y(z) = y(z) - y_p(z). \end{cases} \quad (4.12)$$

Вид параксиальной траектории дается выражением (2.17). Начальные значения частных решений  $x_\alpha$ ,  $x_\beta$ ,  $y_\alpha$

и  $y_\beta$  определяются из соотношения (2.16). Обозначим правую часть первого уравнения (4.6), в которую подставлены значения  $x_p$  и  $y_p$  из выражения (2.17),  $X_p$ , а правую часть второго уравнения —  $Y_p$ . Тогда

$$\left. \begin{aligned} \Delta x(z) &= x_\alpha(z) \int_0^z x_\beta(z) X_p(z) dz - x_\beta(z) \int_0^z x_\alpha(z) X_p(z) dz; \\ \Delta y(z) &= y_\alpha(z) \int_0^z y_\beta(z) Y_p(z) dz - y_\beta(z) \int_0^z y_\alpha(z) Y_p(z) dz. \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

Сгруппировав в уравнениях (4.13) члены при одинаковых степенях начальных смещений траектории и ее углов, получим общие выражения для aberrаций квадрупольной линзы без ограничивающей диафрагмы. В плоскости гауссова изображения  $z = z_1$  они имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Delta x(z_1) &= M_c (C_1 x_0^{'}^3 + C_2 x_0^{'} y_0^{'}^2 + C_3 x_0^{'} x_0^2 + \\ &+ C_4 y_0^{'} x_0 + C_5 x_0^{'} y_0^{'} y_0 + C_6 x_0^{'} x_0^2 + C_7 x_0^{'} y_0^2 + \\ &+ C_8 y_0^{'} x_0 y_0 + C_9 x_0^{'} y_0^3 + C_{10} x_0 y_0^2); \\ \Delta y(z_1) &= D_1 y_0^{'}^3 + D_2 x_0^{'} y_0^{'} + D_3 y_0^{'} y_0 + D_4 x_0^{'} y_0 + \\ &+ D_5 x_0^{'} y_0 x_0 + D_6 y_0^{'} y_0^2 + D_7 y_0^{'} x_0^2 + \\ &+ D_8 x_0^{'} x_0 y_0 + D_9 y_0^{'} y_0^3 + D_{10} x_0^2 y_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

Здесь коэффициенты  $C$  и  $D$  определяются интегралами от  $z = 0$  до  $z = z_1$ , в подынтегральные выражения которых входят частные решения параксиальных уравнений и функции, характеризующие распределение поля вдоль оси  $z$ .

Как следует из уравнений (4.14), число aberrационных членов в квадрупольной линзе превышает число aberrационных членов, соответствующих осесимметричной линзе.

При использовании ограничивающей пучок диафрагмы с круглым отверстием можно классифицировать aberrации в квадрупольной линзе по аналогии с классификацией, введенной в осесимметричной линзе. Для этого нужно выразить значения  $x_0$  и  $y_0$  через координаты траекторий  $x_0$ ,  $y_0$  в плоскости предмета  $z = 0$  и  $x_B$ ,  $y_B$  в плоскости диафрагмы  $z = z_B$ . Согласно соотношениям (2.17),

$$\left. \begin{aligned} x_B &= x_0 x_\alpha(z_B) + x_0 x_\beta(z_B); \\ y_B &= y_0 y_\alpha(z_B) + y_0 y_\beta(z_B). \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

Подробно вопрос о геометрических aberrациях косых пучков ( $x_0 \neq 0$ ,  $y_0 \neq 0$ ) рассмотрен в работах [21, 88, 89]. Общее рассмотрение вопроса о числе и виде aberrационных членов в электрических стигматических системах с двумя плоскостями симметрии дано в работе [90].

Остановимся только на сферической, или, как ее еще называют, апертурной aberrации квадрупольных линз. Это один из основных видов aberrации, так как он сохра-

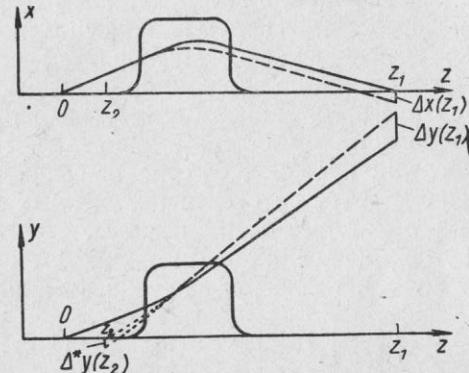


Рис. 39. Сферическая aberrация квадрупольной линзы. Сплошная кривая — параксиальная траектория, штриховая — действительная траектория, пунктирные — их обратные продолжения.

няется для точечного источника, расположенного на оси ( $x_0 = y_0 = 0$ ), в то время как все остальные геометрические aberrации третьего порядка обращаются при этом в нуль. Сферическая aberrация играет решающую роль в фокусирующих системах с широким пучком и малым полем зрения. На рис. 39 показан действительный ход траектории в линзе (штриховая линия) и траектория, вычисленная в параксиальном приближении (сплошная линия). Их разность представляет собой сферическую aberrацию.

Определение сферической aberrации — весьма трудная для расчета и эксперимента задача. В осесимметричных линзах, имеющих уже значительную историю развития, сферическая aberrация вычислена для сравнительно немногих случаев. В квадрупольных линзах этот вопрос еще более сложен, так как из-за иной симметрии поля сфери-

ческая aberrация квадрупольной линзы определяется четырьмя коэффициентами, вместо одного у осесимметричной линзы.

Выражения (4.13) остаются в силе для определения сферической aberrации с той разницей, что в них следует подставлять  $x_p$  и  $y_p$  в виде

$$x_p(z) = x'_0 x_\alpha(z); \quad y_p = y'_p y_\alpha(z). \quad (4.16)$$

Однако такой вид записи, в которую входят выражения не только для распределения полей вдоль оси  $z$ , но и его производные, не всегда удобен. Преобразуем соотношения (4.13) так, чтобы в них не входили производные от полей [88, 91, 92]. Эта форма записи более удобна при задании полей не в аналитическом виде, а в виде таблиц или графиков, где вычисление производной связано со значительными ошибками. Кроме того, на основе полученных выражений можно сделать некоторые общие выводы.

Интегрируя в уравнениях (4.13) по частям и используя соотношения (2.16а), после ряда преобразований получим:

$$\begin{aligned} \Delta x(z) = & \frac{1}{2} x'_0 \left\{ x'_0^2 \left[ \frac{1}{2} x_\alpha(x_\alpha'^2 - 1) - \frac{n-1}{6} \beta^2 u x_\alpha^3 + \right. \right. \\ & + \beta^2 \left( x_\beta \int_0^z u x_\alpha^2 x_\alpha'^2 dz - x_\alpha \int_0^z u x_\alpha x_\beta x_\alpha'^2 dz \right) + \\ & + \frac{1}{3} \beta^4 (3n^2 - 2n + 2) \left( x_\beta \int_0^z u^2 x_\alpha^4 dz - x_\alpha \int_0^z u^2 x_\alpha^3 x_\beta dz \right) \Big] + \\ & + y'_0 \left[ -\frac{1}{2} x_\alpha(y_\alpha'^2 + 3) - y_\alpha x_\alpha' y_\alpha' + \frac{n+1}{2} \beta^2 u x_\alpha y_\alpha^2 + \right. \\ & + 3 \left( x_\beta \int_0^z x_\alpha^2 y_\alpha'^2 dz - x_\alpha \int_0^z x_\alpha x_\beta y_\alpha'^2 dz \right) - \beta^4 (n^2 - 2n - 2) \times \\ & \times \left. \left( x_\beta \int_0^z u^2 x_\alpha^2 y_\alpha^2 dz - x_\alpha \int_0^z u^2 x_\alpha x_\beta y_\alpha^2 dz \right) \right] \Big\}. \quad (4.17) \end{aligned}$$

Выражение для  $\Delta y(z)$  можно получить из уравнения (4.17) заменой  $\beta^2$  на  $-\beta^2$ ,  $ax$  и  $u$  на  $ay$  и  $x$  соответственно.

Для того чтобы найти величину сферической aberrации в плоскости гауссова изображения, нужно подставить в  $\Delta x(z)$  и  $\Delta y(z)$   $z = z_1$  и учесть, что  $x_\alpha(z_1) = 0$ . Выражение для

$\Delta x(z_1)$  при этом значительно упрощается. В плоскости  $z = z_1 \Delta x(z_1)$  характеризует aberrацию ширины линейного изображения,  $\Delta y(z_1)$  — aberrацию его длины.

Если использовать одну квадрупольную линзу, то основной интерес представит aberrация ширины ее линейного изображения. Обычно aberrации характеризуются коэффициентами. Для сферической aberrации ширины  $\Delta x(z_1)$  можно написать

$$\Delta x(z_1) = M_c x'_0 (C_p x'_0^2 + C_s y'_0^2). \quad (4.18)$$

Коэффициент  $C_p$  определяет сферическую aberrацию ширины действительного изображения плоского пучка заряженных частиц с  $y'_0 = 0$ , т. е. пучка, лежащего в плоскости  $y = 0$ . Коэффициент  $C_s$  связан с траекториями, не лежащими в этой плоскости.

Из выражения (4.17) получим

$$\begin{aligned} C_p = & \frac{1}{2} \beta^2 \left[ \int_0^{z_1} u x_\alpha^2 x_\alpha'^2 dz + \frac{1}{3} \beta^2 (3n^2 - 2n + 2) \int_0^{z_1} u^2 x_\alpha^4 dz \right] = \\ = & \frac{1}{6} \left[ \int_0^{z_1} x_\alpha'^4 dz + \beta^4 (3n^2 - 2n + 2) \int_0^{z_1} u^2 x_\alpha^4 dz \right]; \quad (4.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_s = & \frac{1}{2} \left[ -y_\alpha(z_1) x_\alpha'^2(z_1) y'_\alpha(z_1) + 3 \int_0^{z_1} x_\alpha'^2 y_\alpha'^2 dz - \right. \\ & \left. - \beta^4 (n^2 - 2n - 2) \int_0^{z_1} u^2 x_\alpha^2 y_\alpha^2 dz \right]. \quad (4.20) \end{aligned}$$

Из уравнения (4.19) можно сделать общий вывод о знаке  $C_p$ , учитывая, что полином  $3n^2 - 2n + 2$  имеет мнимые корни и всегда положителен: при любой форме распределения полей в квадрупольной линзе и произвольном соотношении образующих ее электрического и магнитного полей величина  $C_p$  всегда положительна. Это означает, что если изображение создается плоским пучком заряженных частиц с  $y'_0 = 0$ , то в обычных случаях, когда  $M_c < 0$ , величина  $\Delta x(z_1)$  отрицательна. Частицы, идущие под большим углом к оси, фокусируются сильнее параксиальных и пересекают ось раньше. Такой характер фокусировки аналогичен фокусировке в осесимметричных линзах, у которых коэффициент сферической aberrации всегда положителен.

Сферическую aberrацию нельзя уничтожить, варьируя величину  $n$ , т. е. соотношение возбуждений электрического и магнитного полей. Так как полином  $3n^2 - 2n + 2$  имеет минимум при  $n = 1/3$ , то коэффициент сферической aberrации для данного значения  $\beta^2$  минимален при соотношении возбуждений

$$\beta_E^2 = 0,25 \beta_M^2. \quad (4.21)$$

Относительно знака  $C_s$  на основании выражения (4.20) нельзя сделать определенные выводы: первый член в нем отрицателен, второй положителен, а знак третьего зависит от  $n$ . Для электрической линзы ( $n = -1$ ) он отрицателен, для магнитной ( $n = 0$ ) положителен. Поэтому на основании уравнений (4.19) и (4.20) нельзя также судить о значке  $\Delta x(z_1)$  по всей длине линейного изображения.

В осесимметричных линзах для получения оценочных величин сферической aberrации часто используют приближение тонкой линзы. Его применение дает довольно хорошие результаты и при определении фокусирующих свойств первого порядка квадрупольных линз, если их возбуждение и длины малы.

В приближении тонкой квадрупольной линзы выражения (4.19) и (4.20) для  $C_p$  и  $C_s$ , а также выражения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  [см. уравнение (4.17)] легко проинтегрировать [91]. Для этого нужно применить теорему о среднем, что особенно удобно в принятой нами записи, так как в выражениях (4.19), (4.20) и (4.17) не входят знакопеременные функции типа  $u'(z)$  и  $u''(z)$ .

После интегрирования соотношений (4.19) и (4.20) получим

$$C_p = \frac{1}{6} (3n^2 - 2n + 2) \tau \frac{a^4}{f_c^2 L}; \quad (4.22a)$$

$$C_s = -\frac{1}{2} (n^2 - 2n - 2) \tau \frac{a^4}{f_c^2 L}, \quad (4.22b)$$

где  $f_c = \frac{1}{\beta^2 L}$  — фокусное расстояние тонкой линзы в собирающей плоскости;  $L$  — эффективная длина поля, равная  $L = \int_{-\infty}^{+\infty} u(z) dz$ ;  $\tau$  — коэффициент, характеризующий крутизну спада поля

$$\tau = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} u^2(z) dz}{\int_{-\infty}^{+\infty} u(z) dz} = \bar{u}(z) \ll 1. \quad (4.23)$$

Здесь  $u(z)$  — среднее значение функции  $u(z)$ . При аппроксимации распределения поля вдоль оси  $z$  прямоугольником  $\bar{u}(z) = 1$ .

Рассмотрим класс колоколообразных полей, имеющих распределение

$$u(z) = \left[ 1 + \left( \frac{z - z_k}{d} \right)^2 \right]^{-v}, \quad (4.24)$$

где  $d$  — линейный параметр поля;  $z_k$  — расстояние от предмета до центра поля (в приближении тонких линз  $z_k = a$ );  $v$  — произвольное целое положительное число. Для него получаем следующий вид  $\tau$ :

$$\tau = \frac{(2v-1)(2v+1)\dots(4v-3)}{2v(2v+2)\dots(4v-2)}. \quad (4.25)$$

С ростом крутизны фронта поля, т. е. при изменении  $v$  от единицы до бесконечности,  $\tau$  меняется от 0,5 до  $1/\sqrt{2}$ . Следовательно, согласно выражению (4.22), сферическая aberrация увеличивается с ростом крутизны поля.

Можно показать, что и в более общем случае симметричной короткой линзы  $\tau \geq 0,5$ .

Как уже отмечалось, полином  $3n^2 - 2n + 2$ , входящий в выражение для  $C_p$ , всегда положителен и имеет минимум, равный  $5/3$ , при  $n = 1/3$ . Полином  $n^2 - 2n - 2$  имеет минимум, равный  $-3$ , при  $n = 1$  и проходит через нуль, когда  $n = 1 \pm \sqrt{3}$ . Если полином стремится к нулю, то резко снижается область применимости формулы (4.22b) для  $C_s$ . Когда полином обращается в нуль, в выражении для  $C_s$  необходимо учитывать члены более высокого порядка малости. В этом случае имеем

$$C_s = \frac{1}{2} \frac{a^2}{f_c} \left( \frac{a^2}{f_c^2} + \frac{3a}{f_c} - 1 \right). \quad (4.26)$$

Для тонкой линзы можно определить знак  $\Delta x(z_1)$ . Он отрицателен по всей длине линейного изображения, если  $n$  заключено в пределах

$$1 - \sqrt{3} \leq n \leq 1 + \sqrt{3}. \quad (4.27)$$

Отсюда следует, что  $\Delta x(z_1) < 0$  в тонкой магнитной квадрупольной линзе. В тонкой электрической квадрупольной линзе коэффициенты  $C_p$  и  $C_s$  имеют разные знаки ( $C_p > 0$ ,  $C_s < 0$ ).

При выводе формул тонкой линзы принималось, что среднее значение  $\bar{x}_a = \bar{y}_a = a$ , т. е. равно значению на входе в линзу. Следует отметить, что так как  $x_a$  в линзе вначале растет, а затем уменьшается, а  $y_a$  все время растет, то величина  $x_a$  меньше отличается от  $a$ , чем величина  $y_a$ . Поэтому точность найденного в приближении тонкой линзы значения  $C_p$  несколько выше, чем  $C_s$ .

Сравним коэффициенты сферической aberrации тонких магнитных квадрупольной и осесимметричной линз, если зависимость их полей от координаты  $z$  описывается колоконообразной кривой (4.24) с  $v = 1$ . При сравнении нужно иметь в виду различную структуру поля в квадрупольной и осесимметричной линзе. Выражение (4.24) в осесимметричной линзе описывает зависимость от  $z$  не поперечной, а продольной составляющей  $H_z$  магнитного поля на оси линзы. Для больших увеличений при фокусных расстояниях, равных  $f$ , имеем

$$\frac{C_p}{C} = \frac{2}{3\pi} \cdot \frac{d}{f}; \quad \frac{C_s}{C} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{d}{f}. \quad (4.28)$$

Здесь  $C$  — коэффициент сферической aberrации осесимметричной линзы (см. работу [23]). Из выражений (4.28) видно, что для данного случая коэффициент сферической aberrации квадрупольной линзы много меньше, чем осесимметричной.

Выражения для сферической aberrации квадрупольной линзы в формулах (4.17), (4.19), (4.20) дают возможность найти их в аналитическом виде, аппроксимируя распределение поля вдоль оси прямоугольником [93]. Применение для этой цели выражений (4.13) вызывает затруднение, связанное с тем, что входящие в них производные поля становятся бесконечно большими на краях линзы. В формулах (4.17), (4.19) и (4.20) эта трудность обойдена тем, что все преобразования производятся в предположении плавно меняющегося поля (что соответствует физической картине явления). Только в конце расчета для приближенного вы-

числения полученных интегралов вводится предположение о прямоугольной форме распределения поля. Таким образом, оказывается возможным учесть как действие основного поля линзы, так и влияние ее краевого поля рассеяния.

Для случая, когда поле ограничено в осевом направлении, а предмет и его изображение находятся в пространстве, свободном от поля, удобнее несколько иная, чем в выражении (4.20), форма записи для коэффициента  $C_s$ . Перепишем уравнения (4.19) и (4.20) таким образом, чтобы в выражения для  $C_p$  и  $C_s$  входили интегралы только по области, занятой полем:

$$\left. \begin{aligned} C_p &= \frac{1}{2} \beta^2 \left[ \int_a^{a+l} u(z) x_a^2 x_a'^2 dz + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} \beta^2 (3n^2 - 2n + 2) \int_a^{a+l} u^2(z) x_a^4 dz \right]; \\ C_s &= \frac{1}{2} \left[ 3a + M_c^{-2} M_d^{-2} (2g_c + g_d) + 3 \int_a^{a+l} x_a'^2 y_a'^2 dz - \right. \\ &\quad \left. - \beta^4 (n^2 - 2n - 2) \int_a^{a+l} u^2(z) x_a^2 y_a^2 dz \right]. \end{aligned} \right\} (4.29)$$

Здесь  $x_a$  и  $y_a$  — частные решения параксиальных уравнений, удовлетворяющие следующим условиям на входе в поле:

$$x_a(a) = y_a(a) = a; \quad x_a'(a) = y_a'(a) = 1. \quad (4.30)$$

При этом параксиальная траектория в поле по-прежнему имеет вид равенств (4.16);  $g_c$  и  $g_d$  — расстояния от выхода из поля до изображения в собирающей и рассеивающей плоскостях соответственно:

$$g_c = -\frac{x_a}{x_a'}; \quad g_d = -\frac{y_a}{y_a'} \quad (4.31)$$

для  $z = a + l$ . Здесь  $l$  — протяженность поля. При аппроксимации поля прямоугольной моделью  $l = L$ . В случае минимого изображения  $g$  отрицательно.

После замены распределения поля вдоль оси  $z$  прямоугольником выражения для  $x_a$  и  $y_a$  принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} x_a &= a \cos \beta (z - a) + \frac{1}{\beta} \sin \beta (z - a); \\ y_a &= a \operatorname{ch} \beta (z - a) + \frac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta (z - a). \end{aligned} \right\} \quad (4.32)$$

Подставив выражения (4.32) в уравнения (4.29) и проинтегрировав, получим [93]:

$$\left. \begin{aligned} C_p &= \frac{1}{L} \left\{ (1+v^2)^2 - (1-6v^2+v^4) \frac{\sin 4x}{4x} + \frac{a}{L} (1-v^2) \times \right. \\ &\quad \times (1-\cos 4x) + \frac{1}{3} (3n^2-2n+2) \left[ 3(1+v^2)^2 - \right. \\ &\quad - 4(1-v^4) \frac{\sin 2x}{2x} + (1-6v^2+v^4) \frac{\sin 4x}{4x} + \\ &\quad \left. \left. + 4 \frac{a}{L} (1+v^2)(1-\cos 2x) - \frac{a}{L} (1-v^2)(1-\cos 4x) \right] \right\}; \\ C_s &= \frac{1}{L} \left\{ \left\{ 6(1-v^4) + \frac{2a}{L} [3-(1-v^2)\cos 2x + \right. \right. \\ &\quad + (1+v^2)\operatorname{ch} 2x - (2-3v^2)\sin 2x \operatorname{sh} 2x - \\ &\quad - (3+2v^2)\cos 2x \operatorname{ch} 2x] - [2(1-v^2)^2 + \\ &\quad + (5-4v^2-5v^4)\operatorname{ch} 2x] \frac{\sin 2x}{2x} + [2(1+v^2)^2 - \\ &\quad - (1+20v^2-v^4)\cos 2x] \frac{\operatorname{sh} 2x}{2x} + (n^2-2n-2) \times \\ &\quad \times \left\{ 2(1-v^4) + \frac{2a}{L} [1-(1-v^2)\cos 2x - \right. \\ &\quad - (1+v^2)\operatorname{ch} 2x - v^2 \sin 2x \operatorname{sh} 2x + \cos 2x \operatorname{ch} 2x] - \\ &\quad - [2(1-v^2)^2 - (1-4v^2-v^4)\operatorname{ch} 2x] \frac{\sin 2x}{2x} - \\ &\quad \left. \left. - [2(1+v^2)^2 - (1+4v^2-v^4)\cos 2x] \frac{\operatorname{sh} 2x}{2x} \right\} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.33)$$

Здесь для сокращения записи обозначено  $\beta a = v$  и по-прежнему  $\beta L = x$ . При этом, согласно соотношениям (2.20), (2.21) и (4.32), увеличения  $M_c$  и  $M_d$  имеют вид

$$M_c = [-v \sin x + \cos x]^{-1}; \quad M_d = [v \operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x]^{-1}, \quad (4.34)$$

так как угол наклона траектории в плоскости изображения равен углу ее наклона на выходе из поля.

Если предмет и его действительное изображение находятся на краях поля ( $a = 0$ ;  $\beta L = \pi$ ), то выражения для коэффициентов сферической aberrации  $C_p$  и  $C_s$  переходят в соответствующие формулы для двумерного поля [85, 94].

При больших увеличениях (предмет расположен в фокальной точке собирающей плоскости)

$$\beta a = \operatorname{ctg} \beta L, \quad (4.35)$$

и выражения для коэффициентов сферической aberrации значительно упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} C_p &= \frac{1}{16 \sin^4 x} \left[ 1 - \frac{\sin 4x}{4x} + \frac{1}{3} (3n^2-2n+2) \times \right. \\ &\quad \times \left. \left( 3 + 4 \frac{\sin 2x}{2x} + \frac{\sin 4x}{4x} \right) \right]; \\ C_s &= \frac{1}{16 \sin^4 x} \left\{ 3 \left[ -2 \cos 2x + (1+\operatorname{ch} 2x) \frac{\sin 2x}{2x} - \right. \right. \\ &\quad - \frac{\sin 4x}{4x} + \frac{\operatorname{sh} 2x}{2x} \left. \right] - (n^2-2n-2) \left[ 2 \cos 2x - \right. \\ &\quad - (1-3\operatorname{ch} 2x) \frac{\sin 2x}{2x} + \frac{\sin 4x}{4x} + 3 \frac{\operatorname{sh} 2x}{2x} \left. \right] \}. \end{aligned} \right\} \quad (4.36)$$

Зависимость коэффициентов сферической aberrации ширины линейного изображения  $C_p$  и  $C_s$  от  $x$  для прямоугольного распределения поля при больших увеличениях дана на рис. 40. Сплошные кривые рассчитаны по формулам (4.36), кривая 1 — для электрической линзы ( $n = -1$ ); 2 — для линзы с  $n = 1$  (ахроматическая линза, которая подробнее рассмотрена в гл. 5); 3 — для магнитной линзы ( $n = 0$ ). Из трех рассмотренных линз (см. рис. 40, а) наименьшая величина коэффициента  $C_p$  у магнитной и наибольшая — у электрической. Значение  $C_s$  максимально (см. рис. 40, б) у ахроматической линзы и минимально у электрической. В последнем случае оно меняет знак с отрицательного (при малых возбуждениях) на положительный (при больших).

Так как в выражения для коэффициентов сферической aberrации величина  $n$  входит в полином второй степени, то каждая кривая на рис. 40 соответствует двум значениям  $n$ . На этом же рисунке для сравнения приведены коэффициенты, вычисленные в приближении тонких линз, причем в уравнения (4.22) подставили значение  $\tau = 1$  и  $a = f_c =$

$= 1/\beta^2 L$ . Кривые 3а соответствуют магнитной линзе, 1а — электрической. Как видно из рис. 40, а в области малых  $\beta L$  кривые для  $C_p$ , вычисленные по приближенным и по более точным формулам, отличаются незначительно. Для коэффициентов  $C_s$  совпадение несколько хуже.

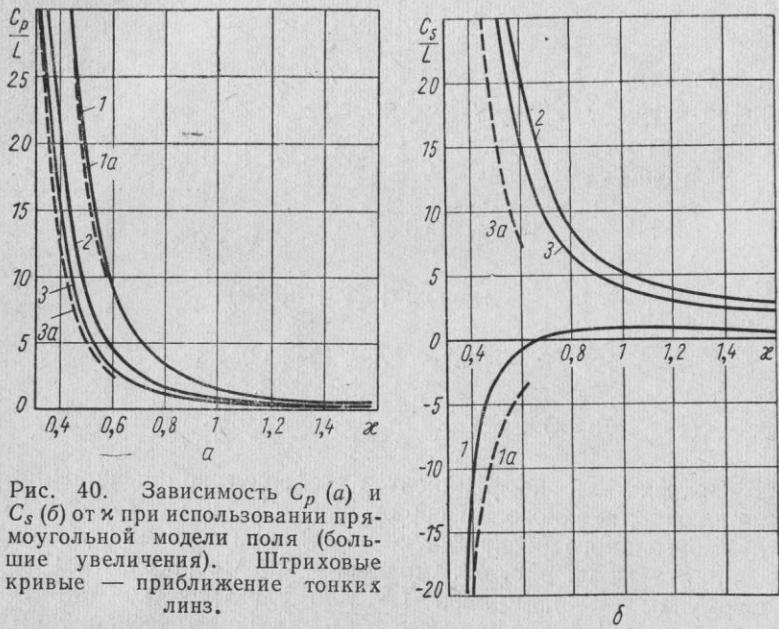


Рис. 40. Зависимость  $C_p$  (а) и  $C_s$  (б) от  $x$  при использовании прямоугольной модели поля (большие увеличения). Штриховые кривые — приближение тонких линз.

Если на линзу падает параллельный пучок, выражение для сферической aberrации ширины линейного изображения можно представить следующим образом:

$$\Delta x_{||}(z_1) = \frac{x_0}{L} \left[ C_{p||} \left( \frac{x_0}{L} \right)^2 + C_{s||} \left( \frac{y_0}{L} \right)^2 \right], \quad (4.37)$$

где коэффициенты  $C$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_{p||}}{L} &= -\frac{x^3}{16 \sin x} \left[ 1 - \frac{\sin 4x}{4x} + \frac{1}{3} (3n^2 - 2n + 2) \times \right. \\ &\quad \left. \times \left( 3 + 4 \frac{\sin 2x}{2x} + \frac{\sin 4x}{4x} \right) \right]; \\ \frac{C_{s||}}{L} &= -\frac{x^3}{16 \sin x} \left\{ -6 - (2 - 5 \operatorname{ch} 2x) \frac{\sin 2x}{2x} + \right. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

$$\left. \begin{aligned} &+ (2 + \cos 2x) \frac{\sinh 2x}{2x} - (n^2 - 2n - 2) \times \\ &\times \left[ 2 + (2 + \operatorname{ch} 2x) \frac{\sin 2x}{2x} + (2 + \cos 2x) \frac{\sinh 2x}{2x} \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.38)$$

Эти выражения получены из соотношений (4.33) предельным переходом при  $a \rightarrow \infty$  с учетом того, что  $x_0/a = x_0$ ,  $y_0/a = y_0$ .

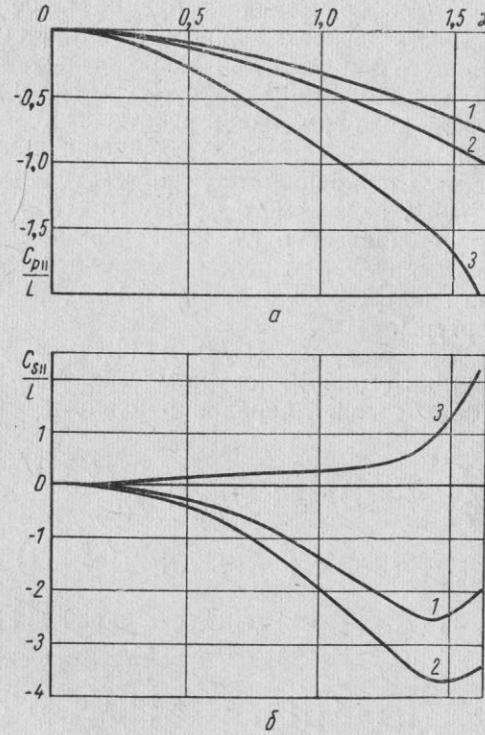


Рис. 41. Зависимость  $C_{p||}$  (а) и  $C_{s||}$  (б) от  $\delta$  при использовании прямоугольной модели поля (параллельный пучок): 1 — магнитная линза; 2 — ахроматическая; 3 — электрическая.

На рис. 41 представлены зависимости коэффициентов  $C$  от  $\beta L$  для параллельного пучка, вычисленные по этим формулам.

Для параллельного пучка абсолютная величина  $C_p$  из трех рассмотренных случаев также максимальна у электрической линзы и минимальна у магнитной. Знак  $C_{s\parallel}$  у электрической линзы отличается от знака  $C_{p\parallel}$ , а также от знака коэффициента  $C_{s\parallel}$  у магнитной и ахроматической линз. Поэтому величина  $\Delta x_{\parallel}(z_1)$  для магнитной линзы минимальна в плоскости  $xOz$  и увеличивается по длине линейного изображения, а у электрической линзы она максимальна в плоскости  $xOz$ .

Коэффициенты сферической aberrации квадрупольной линзы, зависимость распределения поля которой от  $z$  представлена прямоугольником, для широкой области изменения параметров рассчитаны по формулам (4.33) на ЭВЦМ и представлены в виде графиков в работе [95].

Выражения для сферической aberrации квадрупольной линзы удается точно проинтегрировать в случае колоколообразного поля, задаваемого функцией (1.76) [92].

Как уже упоминалось в гл. 2, зависимость (1.76) хорошо аппроксимирует распределение поля вдоль оси  $z$  линзы, длина электродов или полюсов которой не больше радиуса апертуры.

Подставляя выражения (1.76) и (2.46) в уравнения (4.19) и (4.20) и интегрируя, получаем выражения для коэффициентов сферической aberrации в аналитическом виде:

$$\begin{aligned} \frac{C_p}{d} &= \frac{1}{32 \sin^4 \psi_0} \left\{ (\omega_c^2 - 1)(\omega_c^2 + 3) \frac{\pi}{\omega_c^5} + \frac{2(7 - \omega_c^2)}{4\omega_c^2 - 1} \times \right. \\ &\quad \times (\sin 2\psi_0 - \sin 2\psi_1) + (3n^2 - 2n + 2)(\omega_c^2 - 1) \times \\ &\quad \times \left[ (\omega_c^2 - 1) \frac{\pi}{\omega_c^5} - \frac{2}{4\omega_c^2 - 1} (\sin 2\psi_0 - \sin 2\psi_1) \right] \}; \\ \frac{C_s}{d} &= \frac{1}{32 \omega_d^2 \sin^4 \psi_0} \left\{ -4 \left[ \left( 1 - \cos 2\pi \frac{\omega_d}{\omega_c} \right) \sin 2\psi_1 + \right. \right. \\ &\quad + \omega_d (1 - \cos 2\psi_1) \sin 2\pi \frac{\omega_d}{\omega_c} + 3(\omega_c^2 - 1) \times \\ &\quad \times \left\{ -2(\omega_c^2 - 1) \frac{\pi}{\omega_c^3} + \frac{1}{\omega_c^2 - 1} \times \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left[ -\frac{4\omega_d^2(\omega_c^2 \omega_d^2 + 2)}{4\omega_c^2 \omega_d^2 - 1} \sin 2\psi_0 + (\omega_d^2 + 3) \sin 2\psi_1 + \right. \right. \right. \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\begin{aligned} &\left. \left. \left. + \frac{3\omega_d^2 + 1}{2\omega_d} \sin 2\pi \frac{\omega_d}{\omega_c} \right] \right\} - \frac{3}{4\omega_c^2 \omega_d^2 - 1} \left[ (4\omega_d^2 - 1) \sin 2\psi_1 \times \right. \right. \\ &\quad \times \cos 2\pi \frac{\omega_d}{\omega_c} + \omega_d (2\omega_d^2 + 1) \cos 2\psi_1 \sin 2\pi \frac{\omega_d}{\omega_c} \right\} - \\ &- (n^2 - 2n - 2)(\omega_c^2 - 1) \left\{ 2(\omega_c^2 - 1) \frac{\pi}{\omega_c^3} - \right. \\ &\quad - \frac{4\omega_d^2(\omega_c^2 - 1)}{4\omega_c^2 \omega_d^2 - 1} \sin 2\psi_0 + \sin 2\psi_1 - \frac{1}{2\omega_d} \sin 2\pi \frac{\omega_d}{\omega_c} - \\ &\quad - \frac{1}{4\omega_c \omega_d - 1} \left[ (4\omega_d^2 - 1) \sin 2\psi_1 \cos 2\pi \frac{\omega_d}{\omega_c} + \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \omega_d (2\omega_d^2 + 1) \cos 2\psi_1 \sin 2\pi \frac{\omega_d}{\omega_c} \right] \right\}. \right\} \end{aligned} \quad (4.39)$$

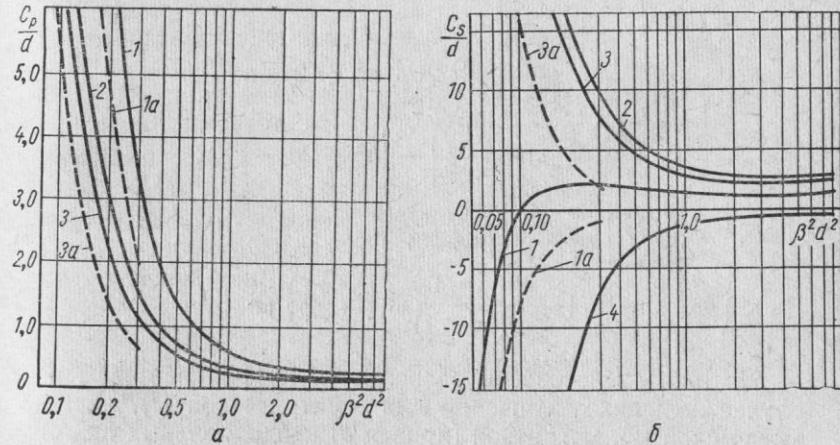


Рис. 42. Зависимость  $C_p(a)$  и  $C_s(b)$  от  $\beta^2 d^2$  для колоколообразного распределения поля (большие увеличения): Кривая 1— $n = -1$ ; 2— $n = 1$ ; 3— $n = 0$ ; 4— $n = -2$ . Штриховые кривые — приближение тонких линз.

При  $\omega_d^2 < 0$   $\omega_d = i|\omega_d|$  тригонометрические функции в уравнениях (4.39) и соответствующих последующих формулах переходят в гиперболические. Несмотря на громоздкий вид, выражения (4.39) дают возможность довольно быстро рассчитать коэффициенты сферической aberrации

квадрупольных линз в широком диапазоне изменения их параметров.

Выражения для  $C$  значительно упрощаются при больших увеличениях (предмет находится в фокальной точке собирающей плоскости), когда  $\Psi_1 = 0$  и  $\Psi_0 = \frac{\pi}{\omega_c}$ . Тогда из уравнений (4.39) получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_p}{d} &= \frac{1}{32 \sin^4 \frac{\pi}{\omega_c}} \left\{ (\omega_c^2 - 1)(\omega_c^2 + 3) \frac{\pi}{\omega_c^5} + \right. \\ &\quad + \frac{2(7 - \omega_c^2)}{4\omega_c^2 - 1} \sin \frac{2\pi}{\omega_c} + (3n^2 - 2n + 2)(\omega_c^2 - 1) \times \\ &\quad \times \left[ (\omega_c^2 - 1) \frac{\pi}{\omega_c^5} - \frac{2}{4\omega_c^2 - 1} \sin \frac{2\pi}{\omega_c} \right] \left. \right\}; \\ \frac{C_s}{d} &= \frac{1}{32 \sin^4 \frac{\pi}{\omega_c}} \frac{\omega_c^2 - 1}{\omega_d^2} \left\{ -6(\omega_c^2 - 1) \frac{\pi}{\omega_c^3} - \right. \\ &\quad - \frac{1}{(\omega_c^2 - 1)(4\omega_c^2 \omega_d^2 - 1)} \left[ 4\omega_d^2 (\omega_c^2 \omega_d^2 + 2) \sin \frac{2\pi}{\omega_c} - \right. \\ &\quad - \frac{14\omega_d^4 - \omega_d^2 - 1}{2\omega_d} \sin 2\pi \frac{\omega_d}{\omega_c} \left. \right] - (n^2 - 2n - 2) \times \\ &\quad \times (\omega_c^2 - 1) \left[ \frac{2\pi}{\omega_c^3} - \frac{1}{4\omega_c^2 \omega_d^2 - 1} \times \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left( 4\omega_d^2 \sin \frac{2\pi}{\omega_c} + \frac{10\omega_d^2 - 1}{2\omega_d (\omega_c^2 - 1)} \sin 2\pi \frac{\omega_d}{\omega_c} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (4.40)$$

На рис. 42 построены зависимости коэффициентов  $C$  в случае больших увеличений для электрической (1), ахроматической (2), магнитной (кривая 3) квадрупольных линз. Как видно на рис. 42, а, наибольшее значение  $C_p$  у электрической линзы. При больших возбуждениях ( $\beta^2 d^2 = 5-7$ ) коэффициент  $C_p$  имеет минимум, величина которого зависит от  $n$ . Наименьшее значение  $C_p$ , равное  $C_p/d = 0,10$ , получается, когда  $n = 1/3$ . Минимальное значение коэффициента  $C_p$  для магнитной квадрупольной линзы примерно равно  $C_{\min}$  магнитной осесимметричной линзы с простым колоколообразным распределением поля [ $v = 1$  в формуле (4.24)] при равных эффективных длинах полей.

Как видно из рис. 42, б, в зависимости от значения  $n$  величина  $C_s$  может быть целиком положительна или отрицательна, а также может менять знак.

Штриховые кривые на рис. 42 — значения коэффициентов, вычисленные по приближенным формулам тонких линз (4.22). Здесь  $a = f_c = \frac{2}{\pi \beta^2 d}$ ,  $\tau = 0,625$ . Кривая 1а соответствует электрической линзе, кривая 3а — магнитной.

Коэффициенты сферической aberrации для линзы с распределением поля вдоль оси  $z$ , аппроксимированного треугольником, приведены в работе [48].

Экспериментальных данных по сферической aberrации квадрупольных линз мало. В работе [96] приведены результаты измерений коэффициентов  $C_1 = M_c^4 C_p$  и  $C_2 = M_c^2 M_d^2 C_s$  магнитной квадрупольной линзы с цилиндрическими полюсами (рис. 43). Коэффициенты определялись для расходящегося пучка теневым методом на электронно-оптической скамье. Были исследованы линзы с длиной полюсов  $l = 10 \text{ мм}$  и радиусом апертуры  $r_m = 12 \text{ мм}$  (эффективная длина 24,8 мм), а также линзы с длинами  $l = 20 \text{ мм}$  и  $l = 30 \text{ мм}$  и радиусами апертур  $r_m = 12 \text{ мм}$  и  $r_m = 20 \text{ мм}$ . Измерения проводились для фокусного расстояния  $f = 35 \text{ мм}$  и  $a = 200 \text{ мм}$ . Сплошные кривые на рис. 43 — значения  $C_2$ , штриховые —  $C_1$ . Цифры рядом с кривыми — значения радиусов апертуры. Точки А и В получены в результате численного интегрирования дифференциальных уравнений для колоколообразной формы поля с равными  $L$  (в колоколообразном поле  $L = \frac{\pi}{2}d$ ). Точность измерений и расчетов около 10%.

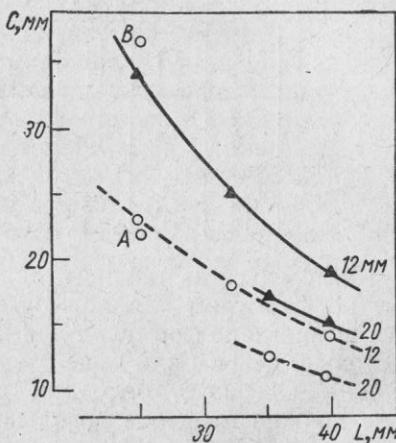


Рис. 43. Зависимость  $C_1$  и  $C_2$  от  $L$  магнитной квадрупольной линзы. Сплошные кривые —  $C_2$ , штриховые —  $C_1$ .

Page-Footer

В табл. 2 приведены для сравнения некоторые экспериментальные и расчетные данные коэффициентов  $C_1$  и  $C_2$ . Все величины в табл. 2 даны в миллиметрах.

Таблица 2

$L$	$r$	$c$	Результаты измерений	Результаты численного интегрирования	Расчет по формулам для прямоугольной модели	Расчет по формулам для колоколообразного поля
39,9	12	$C_1$	14	—	18,9	11,1
	20	$C_1$	11	—	—	—
	12	$C_2$	19	—	29,8	13,4
	20	$C_2$	15	—	—	—
24,8	12	$C_1$	23	22	—	20,9
	12	$C_2$	34	37	—	34,0

Как следует из таблицы, значения  $C_1$  и  $C_2$ , рассчитанные по формулам для прямоугольной модели, большие, а рассчитанные по формулам для колоколообразного поля — несколько меньше или даже равны экспериментальным значениям. Очевидно, что при таких соотношениях  $l/r_M$  поле должно меняться довольно плавно и быть ближе к колоколу. При  $L = 39,9 \text{ мм}$  с уменьшением радиуса апертуры, т. е. с увеличением  $l/r_M$  соответственно с ростом крутизны поля экспериментальные значения  $C_1$  и  $C_2$  увеличиваются. Их величина начинает больше отличаться от рассчитанной для колоколообразного распределения поля и приближаться к данным расчета для прямоугольной модели.

В работе [97] приведены данные по сферической aberrации электрической квадрупольной линзы с цилиндрическими полюсами. Параметры линзы: длина электродов  $l = 15 \text{ см}$ , радиус апертуры  $r_E = 4 \text{ см}$ , радиус электродов  $R = 4,6 \text{ см}$ . Исследование проводилось на ионно-оптической скамье. На флуоресцирующем экране наблюдались и фотографировались aberrационные фигуры, создаваемые полым параллельным пучком. Была измерена величина максимальной сферической aberrации ширины линейного фокуса  $\Delta x(z_1)_{\max}$ , которая соответствует  $y_0 = 0$ ,  $x_0 = R_0$  ( $R_0$  — радиус ионного пучка).

Полученная зависимость  $\Delta x_{\max}/R_0$  от  $R_0$  хорошо аппроксимируется параболой с коэффициентом  $\alpha_s = 2 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-2}$

(при  $\beta L \approx 0,72$ ,  $L = 19,5 \text{ см}$ ). Расчет по формуле для прямоугольной модели (4.38) с теми же значениями параметров дает  $\alpha_t = 1,35 \cdot 10^{-3} \text{ см}^{-2}$ .

Электрическая квадрупольная линза из двух коаксиальных цилиндров (с двумя симметрично расположенными щелями во внутреннем цилиндре) рассмотрена в работе [98]. Ее aberrации исследовались с помощью траекторографа в электролитической ванне. Параметры линзы таковы: диаметр внешнего цилиндра  $22,8 \text{ см}$ , потенциал его равен потенциальному катода, диаметр внутреннего цилиндра  $18,3 \text{ см}$ , потенциал равен потенциальному анода. Длина дуги каждой щели равна  $102^\circ$ . Провисающее в щели поле создает симметричную квадрупольную линзу. Коэффициент  $C_{p\parallel}$ , измеренный для  $L = 20,3 \text{ см}$  и  $\beta L \approx 1,65$ , равен  $C_{p\parallel}/L = -2,8$ . Значение  $C_{p\parallel}$ , рассчитанное по формуле (4.38) при тех же значениях  $L$  и  $\beta L$ , равно  $C_{p\parallel}/L = -2,4$ .

При расчете aberrаций систем из осесимметричных линз величины aberrаций каждой линзы умножаются на увеличение следующей за данной линзой части системы и затем суммируются. В системах из квадрупольных линз определение aberrаций производится несколько сложнее. Квадрупольная линза астигматична. Поэтому если она часть системы, то обычно на нее падает негомоцентричный пучок, искаженный предыдущими линзами. Следовательно, для расчета aberrаций системы необходимо определить aberrации квадрупольных линз при падении на них астигматического пучка. Такой расчет представляет большой интерес, так как для концентрации пучка во всех направлениях необходимо применять не одну квадрупольную линзу, а систему из них.

До сих пор мы рассматривали только сферическую aberrацию ширины линейного изображения, т. е. aberrацию в собирающей плоскости линзы. Если имеется система из квадрупольных линз, то обе взаимно перпендикулярные плоскости могут оказаться собирающими, и представляют интерес aberrации в каждой из них. Поэтому необходимо рассмотреть также aberrацию в рассеивающей плоскости отдельной линзы.

Проекции непараксиальной траектории в линзе и траектории, вычисленной в параксиальном приближении, построены на рис. 39. Если штриховая кривая — это траектория, вычисленная с точностью до членов третьего порядка малости, то  $\Delta x$  и  $\Delta y$  — aberrации третьего порядка. Если

$z = z_1$  — плоскость гауссова изображения, то  $\Delta x(z_1)$  и  $\Delta y(z_1)$  — aberrации его ширины и длины. Однако, для того чтобы иметь возможность найти aberrацию системы суммированием aberrаций входящих в нее линз (с учетом их последующего увеличения), нужно знать не aberrацию длины линейного изображения  $\Delta y(z_1)$ , а aberrацию ширины мнимого линейного изображения, создаваемого в рассе-

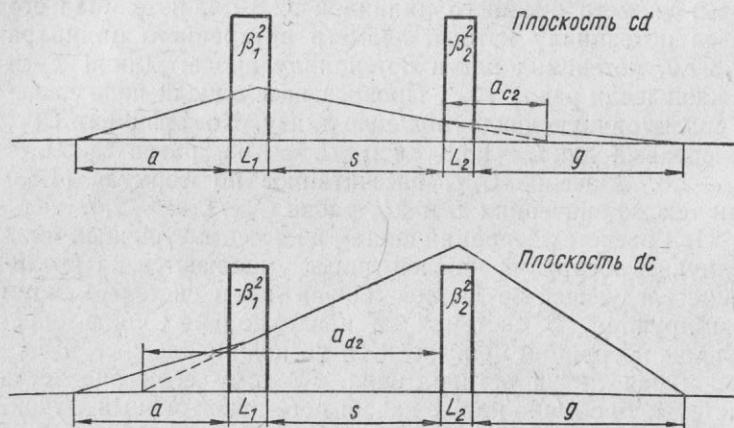


Рис. 44. Стигматический дублет из тонких линз.

вающей плоскости. Координата  $z = z_2$  этого изображения определяется пересечением с осью обратного продолжения касательной в пространстве изображения к  $y$ -проекции параксиальной траектории:

$$z_2 = z_1 - \frac{y_p(z_1)}{y'_p(z_1)}. \quad (4.41)$$

Величина aberrации в этой плоскости  $\Delta^* y(z_2)$  равна проекции на нее расстояния от оси обратного продолжения касательной в пространстве изображения к траектории третьего порядка:

$$\Delta^* y(z_2) = \Delta y(z_1) - \frac{y_p(z_1)}{y'_p(z_1)} \Delta y'(z_1). \quad (4.42)$$

Продифференцировав по  $z$  выражение для  $\Delta y(z)$ , полученное заменой обозначений в формуле (4.18), и подставив его в уравнение (4.42) при  $z = z_1$ , получим

$$\Delta^* y(z_2) = -\frac{1}{y'_a(z_1)} \int_0^{z_1} y_a(z) Y_p(z) dz. \quad (4.43)$$

Выражение (4.43) по виду аналогично выражению для  $\Delta x(z_1)$ , полученному из соотношения (4.13) для  $x_a(z_1) = 0$ .

Если падающий на линзу пучок астигматичен, то нужно учесть, что точки, в которых выполняются начальные условия (2.16), различны в плоскостях  $xOz$  и  $yOz$  (см., например, рис. 44, где на вторую линзу дублета падает астигматический пучок). В первой из них эти условия верны при некотором  $z = 0'$ , во второй при  $z = 0''$ . Поэтому расстояния от источника до линзы будем теперь сопровождать индексом, указывающим, в какой плоскости эта величина относится. Знак у этого расстояния может быть различным в зависимости от того, падает ли на линзу расходящийся пучок ( $a > 0$ ) или сходящийся ( $a < 0$ ).

Выразим сферическую aberrацию  $\Delta^* y(z_2)$  через ее коэффициенты, как это было сделано для  $\Delta x(z_1)$  в уравнении (4.18):

$$\Delta^* y(z_2) = M_d y'_0 (D_p y'^2_0 + D_s x'^2_0). \quad (4.44)$$

Применяя интегрирование по частям в правой части выражения (4.43) и считая поле ограниченным областью длиной  $l$ , получим [99]:

$$\left. \begin{aligned} D_p &= \frac{1}{2} \beta^2 \left[ - \int_{a_d}^{a_d+l} u(z) y_a^2 y'^2 dz + \frac{1}{3} \beta^2 \times \right. \\ &\quad \left. + (3n^2 - 2n + 2) \int_{a_d}^{a_d+l} u^2(z) y_a^4 dz \right]; \\ D_s &= \frac{1}{2} \left[ a_c + 2a_d + M_c^{-2} M_d^{-2} (g_c + 2g_d) + 3 \int_{a_d}^{a_d+l} x_a y_a'^2 dz - \right. \\ &\quad \left. - \beta^4 (n^2 - 2n - 2) \int_{a_d}^{a_d+l} u^2(z) x_a^2 y_a^2 dz \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

Выражения для коэффициентов сферической aberrации  $C$  в случае падающего на линзу астигматического пучка по-

лучаются из соотношений (4.45) заменой  $\beta^2 \rightarrow -\beta^2$ ,  
 $x_a \leftrightarrow y_a; C \leftrightarrow D; c \leftrightarrow d$ .

Они отличаются от выражений (4.29) тем, что у расстояния  $a$  появляется индекс  $c$ , и первое слагаемое в выражении для  $C_s$ , равное в уравнении (4.29)  $3a$ , переходит в  $2a_c + a_d$ . Кроме того, нужно учесть, что теперь начальные значения частных решений параксиальных уравнений  $x_a$  и  $y_a$  отличаются от частных решений (4.30):

$$\left. \begin{aligned} x_a(a_c) &= a_c; & y_a(a_d) &= a_d; \\ x'_a(a_c) &= y'_a(a_d) = 1. \end{aligned} \right\} \quad (4.46)$$

Интересно отметить, что так как первое слагаемое в уравнении для  $D_p$  отрицательно, а второе положительно, то в отличие от  $C_p$  коэффициент  $D_p$  может менять свой знак. Для малых возбуждений (тонкая линза)  $D_p > 0$ . В случае больших увеличений второй член в выражениях для  $D_s$  и  $C_s$  становится равным нулю, и если  $a_c = a_d$ , то  $C_s = D_s$ . Выражения (4.45) для  $D$  и аналогичные формулы для  $C$  можно применять не только для отдельных квадрупольных линз, но и для системы из них в целом. При этом  $u(z)$  будет описывать зависимость от  $z$  распределения поля всей системы. Если последняя стигматична ( $a_c = a_d, g_c = g_d$ ), то  $C_s = D_s$ .

В качестве простейшего примера рассмотрим сферическую aberrацию стигматического дублета из тонких линз (рис. 44), описанного в работе [59]. По аналогии с выражениями для aberrаций одной квадрупольной линзы напишем выражения для aberrаций дублета:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{cd} &= M_{cd} x'_0 \left( P_{cd} x_0^{*2} + S_{cd} y_0^{*2} \right); \\ \Delta_{dc} &= M_{dc} y'_0 \left( P_{dc} y_0^{*2} + S_{dc} x_0^{*2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.47)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} P_{cd} &= C_{p1} + D_{p2} M_{c1}^{-4}, & S_{cd} &= C_{s1} + D_{s2} M_{c1}^{-2} M_{d1}^{-2}; \\ P_{dc} &= D_{p1} + C_{p2} M_{d1}^{-4}, & S_{dc} &= D_{s1} + C_{s2} M_{c1}^{-2} M_{d1}^{-2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

Индекс 1 относится к первой линзе, индекс 2 — ко второй. Увеличение дублета  $M_{cd} = M_{c1} M_{d2}$ ,  $M_{dc} = M_{d1} M_{c2}$ . Подставляя в выражения (4.48) значения aberrационных коэффициентов линз, входящих в дублет, и увеличений первой линзы, получаем коэффициенты aberrаций дублета.

В приближении тонкой линзы коэффициенты aberrаций при падающем на линзу астигматическом пучке имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} C_p &= \frac{1}{6} (3n^2 - 2n + 2) \tau \frac{a_c^4}{f_c^2 L}; \\ D_p &= \frac{1}{6} (3n^2 - 2n + 2) \tau \frac{a_d^4}{f_c^2 L}; \\ C_s &= D_s = -\frac{1}{2} (n^2 - 2n - 2) \tau \frac{a_c^2 a_d^2}{f_c^2 L}. \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

Они получаются вычислением интегралов в уравнениях (4.45) и в аналогичных выражениях для  $C$  при помощи теоремы о среднем. Полагаем  $x_a = a_c, y_a = a_d$ , т. е. равным их значениям на входе в линзу.

Величины  $a_{c2}$  и  $a_{d2}$  для второй линзы равны разности между величиной  $s$  и соответствующим значением  $g$  первой линзы. Из соотношений (2.91) получим:

$$a_{c2} = \frac{\beta_1^2 L_1 a s - (a + s)}{\beta_1^2 L_1 a - 1}; \quad a_{d2} = \frac{\beta_1^2 L_1 a s + (a + s)}{\beta_1^2 L_1 a + 1}. \quad (4.50)$$

Для первой линзы  $a_{c1} = a_{d1} = a$ . Возбуждения линз в стигматическом режиме определяются формулами (3.40) и (3.33). Увеличения первой линзы даются формулами (2.92).

Подставляя выражения (4.49), (4.50) и (2.92) в равенства (4.48), получаем соотношения для коэффициентов сферической aberrации стигматического дублета из тонких линз:

$$\left. \begin{aligned} P_{cd} &= \frac{1}{6} Z \left[ (3n_1^2 - 2n_1 + 2) \frac{\tau_1}{L_1} + (3n_2^2 - 2n_2 + 2) \frac{\tau_2}{L_2} \left( \frac{M_{dc}}{M_{cd}} \right)^2 \right]; \\ P_{dc} &= \frac{1}{6} Z \left[ (3n_1^2 - 2n_1 + 2) \frac{\tau_1}{L_1} + (3n_2^2 - 2n_2 + 2) \frac{\tau_2}{L_2} \left( \frac{M_{cd}}{M_{dc}} \right)^2 \right]; \\ S_{cd} &= S_{dc} = -\frac{1}{2} Z \left[ (n_1^2 - 2n_1 - 2) \frac{\tau_1}{L_1} + (n_2^2 - 2n_2 - 2) \frac{\tau_2}{L_2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.51)$$

Здесь буквой  $Z$  обозначена комбинация геометрических параметров:

$$Z = \frac{a^2(a+s)(a+s+g)}{s(s+g)}. \quad (4.52)$$

Так как полином  $(3n^2 - 2n + 2)$  всегда положителен, то  $P_{cd} > 0$  и  $P_{dc} > 0$ . Знак  $S$  может меняться. В электрическом дублете ( $n_1 = n_2 = -1$ )  $S < 0$ , а в магнитном  $S > 0$ . В комбинированном дублете, состоящем из электрической и магнитной линз при  $\tau_1/L_1 = \tau_2/L_2, S > 0$ , так как величина полинома  $n^2 - 2n - 2$  больше в случае магнитной линзы. Отсюда следует, что величины  $\Delta_{cd}$  и  $\Delta_{dc}$ , определяемые выражением (4.47), не проходят через нуль в магнитном и комбинированном ( $\tau_1/L_1 = \tau_2/L_2$ ) дублетах. В электрическом дублете при определенных значениях  $x_0$  и  $y_0$ ,  $\Delta_{cd}$  и  $\Delta_{dc}$  могут обратиться в нуль.

В стигматическом дублете из тонких линз увеличения имеют вид равенств (3.39) и  $M_{cd}^2 M_{dc}^{-2}$  обычно значительно больше единицы. Поэтому при  $\tau_1/L_1 \approx \tau_2/L_2$  и  $n_1$ , близком к  $n_2$ , величина  $P_{cd}$  определяется в основном первым слагаемым, т. е. aberrацией первой линзы, а величина  $P_{dc}$  — вторым слагаемым, т. е. aberrацией второй линзы. Таким образом, коэффициент  $P$  близок к коэффициенту aberrации той линзы, которая собирает в данной плоскости. В этом случае  $P_{dc} > P_{cd}$ , так как в плоскости  $dc$  проекция траектории заряженной частицы отходит от оси больше, чем в плоскости  $cd$  (см. рис. 44).

В выражении для  $S$  коэффициенты aberrаций обеих линз равноправны.

В работе [59] приведены графики, дающие зависимость коэффициентов сферической aberrации дублета от его параметров.

Рассмотрим еще сферическую aberrацию дублета из тонких линз с падающим на него параллельным пучком заряженных частиц.

По аналогии с уравнением (4.37) запишем величину сферической aberrации в этом случае так:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{cd||} &= x_0 (P_{cd||} x_0^2 + S_{cd||} y_0^2); \\ \Delta_{dc||} &= y_0 (P_{dc||} y_0^2 + S_{dc||} x_0^2). \end{aligned} \right\} \quad (4.53)$$

Выражения для коэффициентов  $P$  и  $S$  можно получить из соотношений (3.39) и (4.51) предельным переходом при  $a \rightarrow \infty$ , учитывая, что  $x_0/a = x_0$ ,  $y_0/a = y_0$ . В результате имеем:

$$\left. \begin{aligned} P_{cd||} &= -\frac{(1 + \sqrt{s/(s+g)})}{6s} \left[ (3n_1^2 - 2n_1 + 2) \frac{\tau_1}{L_1} + \right. \\ &\quad \left. + (3n_2^2 - 2n_2 + 2) \frac{\tau_2}{L_2} \left( \frac{M_{dc}}{M_{cd}} \right)^2 \right]; \\ P_{dc||} &= -\frac{(1 - \sqrt{s/(s+g)})}{6s} \left[ (3n_1^2 - 2n_1 + 2) \frac{\tau_1}{L_1} + \right. \\ &\quad \left. + (3n_2^2 - 2n_2 + 2) \frac{\tau_2}{L_2} \left( \frac{M_{cd}}{M_{dc}} \right)^2 \right]; \\ S_{cd||} &= \frac{(1 + \sqrt{s/(s+g)})}{2s} \left[ (n_1^2 - 2n_1 - 2) \frac{\tau_1}{L_1} + \right. \\ &\quad \left. + (n_2^2 - 2n_2 - 2) \frac{\tau_2}{L_2} \right]; \\ S_{dc||} &= \frac{(1 - \sqrt{s/(s+g)})}{2s} \left[ (n_1^2 - 2n_1 - 2) \frac{\tau_1}{L_1} + \right. \\ &\quad \left. + (n_2^2 - 2n_2 - 2) \frac{\tau_2}{L_2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

Отметим, что при определении коэффициентов, какое дается выражением (4.53),  $S_{cd||}$  не равно  $S_{dc||}$ .

Представляют интерес aberrационные фигуры стигматического дублета из тонких линз, построенные на основе имеющихся выражений для коэффициентов. Фигура, обусловленная сферической aberrацией, создается пучком заряженных частиц, выходящим из точки на оси системы и имеющим форму полого конуса со значительным углом у его вершины. В осесимметричной линзе ввиду полной симметрии поля относительно ее оси aberrационные фигуры имеют форму концентрических кругов с центром на оси. Очевидно, что в квадрупольной линзе эти кривые имеют более сложный характер.

Построим aberrационные фигуры для случая, когда на дублет падает параллельный пучок ( $x_0^2 + y_0^2 = R_0^2$ ). Рассмотрим четыре варианта: дублет из магнитных линз ( $n_1 = n_2 = 0$ ); дублет из электрических линз ( $n_1 = n_2 = -1$ ) и два комбинированных дублета, в одном из которых первая линза магнитная ( $n_1 = 0$ ), вторая электрическая ( $n_2 = -1$ ), в другом — расположение линз обратное ( $n_1 = -1, n_2 = 0$ ). Положим  $\tau_1 = \tau_2, L_1 = L_2 = L$  и  $g = s = 5L$ . Рассчитанные при этих значениях параметров на основании

формул (4.53) и (4.54) аберрационные фигуры представлены на рис. 45. По оси абсцисс отложена величина, пропорциональная  $\Delta_{cd\parallel}$ , по оси ординат — величина, пропорциональная  $\Delta_{dc\parallel}$ . Фигуры имеют две плоскости симметрии. Однако они не симметричны относительно диагоналей квадратов. В магнитном дублете аберрация минимальна в плоскости  $cd$  и не меняет знака. Величина  $\Delta_{dc}$  максимальна в плоскости  $dc$ . В электрическом дублете  $\Delta_{cd}$  и  $\Delta_{dc}$  в некоторых точках обращаются в нуль и затем меняют знак. Как

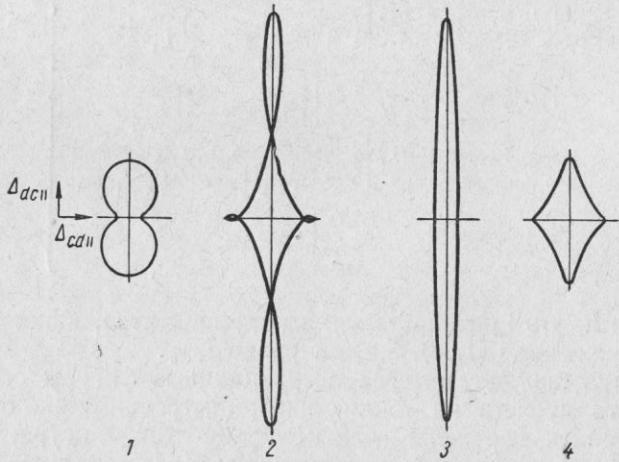


Рис. 45. Аберрационные фигуры стигматического дублета из тонких линз:  
 $1 - n_1 = n_2 = 0; \quad 2 - n_1 = n_2 = -1; \quad 3 - n_1 = 0, \quad n_2 = -1; \quad 4 - n_1 = -1, \quad n_2 = 0.$

В электрическом, так и в комбинированных дублетах величины  $\Delta_{cd}$  и  $\Delta_{dc}$  максимальны в плоскостях  $cd$  и  $dc$  соответственно. По своему характеру аберрационные кривые на рис. 45 похожи на фотографии аберрационных кривых, полученных экспериментально в работах [8, 100].

Аберрации систем из квадрупольных линз описываются выражениями, подобными соотношениям (4.47) и (4.48). Для их вычисления необходимо знать параметры фокусировки первого порядка в данной системе и коэффициенты аберраций линз составляющих ее в общем случае астигматического пучка на входе. Приведем здесь выражения для коэффициентов сферической аберрации квадрупольной

линзы, у которой зависимость распределения поля от координаты  $z$  аппроксимирована прямоугольником [99, 101]:

$$\begin{aligned} \frac{C_p}{L} = & \frac{1}{16} \left\{ \eta_c^2 - (1 - 6v_c^2 + v_c^4) \frac{\sin 4\kappa}{4\kappa} + \mu_c \zeta_c \times \right. \\ & \times (1 - \cos 4\kappa) + \frac{1}{3}(3n^2 - 2n + 2) \left[ 3\eta_c^2 - 4(1 - v_c^4) \times \right. \\ & \times \frac{\sin 2\kappa}{2\kappa} + (1 - 6v_c^2 + v_c^4) \frac{\sin 4\kappa}{4\kappa} + \\ & \left. \left. + 4\mu_c \eta_c (1 - \cos 2\kappa) - \mu_c \zeta_c (1 - \cos 4\kappa) \right] \right\}; \\ \frac{C_s}{L} = & \frac{1}{16} \left\{ \{6\eta_c \zeta_d + \mu_c (7 + 3v_d^2) - \mu_d (1 + 3v_c^2) - \right. \\ & - [2\zeta_c \zeta_d + (5\zeta_c \eta_d - 4v_c v_d) \operatorname{ch} 2\kappa] \frac{\sin 2\kappa}{2\kappa} + \\ & - [2\eta_c \eta_d - (\zeta_c \eta_d + 20v_c v_d) \cos 2\kappa] \frac{\operatorname{sh} 2\kappa}{2\kappa} - \\ & - 2(\mu_c \zeta_d \cos 2\kappa - \eta_c \mu_d \operatorname{ch} 2\kappa) + (\mu_c \eta_d - 5\zeta_c \mu_d) \times \\ & \times \sin 2\kappa \operatorname{sh} 2\kappa - (5\mu_c \eta_d + \zeta_c \mu_d) \cos 2\kappa \operatorname{ch} 2\kappa - \\ & - (n^2 - 2n - 2) \{- 2\eta_c \zeta_d - \mu_c (1 - 3v_d^2) - \right. \\ & - \mu_d (1 + 3v_c^2) + [2\zeta_c \zeta_d - (\zeta_c \eta_d - 4v_c v_d) \operatorname{ch} 2\kappa] \times \\ & \times \frac{\sin 2\kappa}{2\kappa} + [2\eta_c \eta_d - (\zeta_c \eta_d + 4v_c v_d) \cos 2\kappa] \times \\ & \times \frac{\operatorname{sh} 2\kappa}{2\kappa} + 2(\mu_c \zeta_d \cos 2\kappa + \eta_c \mu_d \operatorname{ch} 2\kappa) + \\ & + (\mu_c \eta_d - \zeta_c \mu_d) \sin 2\kappa \operatorname{sh} 2\kappa - \\ & \left. \left. - (\mu_c \eta_d + \zeta_c \mu_d) \cos 2\kappa \operatorname{ch} 2\kappa \right\} \right\}. \end{aligned} \quad (4.55)$$

В уравнениях (4.55) приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \beta a_c = v_c; \quad \beta a_d = v_d; \quad a_c/L = \mu_c; \quad a_d/L = \mu_d; \\ 1 + \beta^2 a_c^2 = \eta_c; \quad 1 + \beta^2 a_d^2 = \eta_d; \quad 1 - \beta^2 a_c^2 = \zeta_c; \\ 1 - \beta^2 a_d^2 = \zeta_d. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Коэффициенты  $D_p$  и  $D_s$  получаются из выражений (4.55) заменой  $\beta \leftrightarrow i\beta$ ;  $a_c \leftrightarrow a_d$ . В этом случае тригонометрические функции переходят в гиперболические и наоборот. Для  $a_c = a_d$  формулы (4.55) совпадают с соотношениями (4.33).

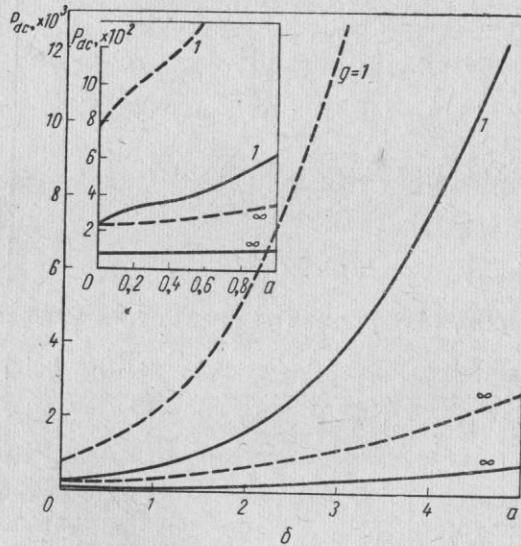
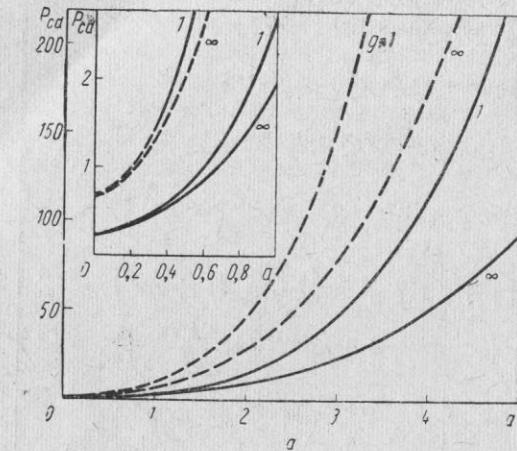
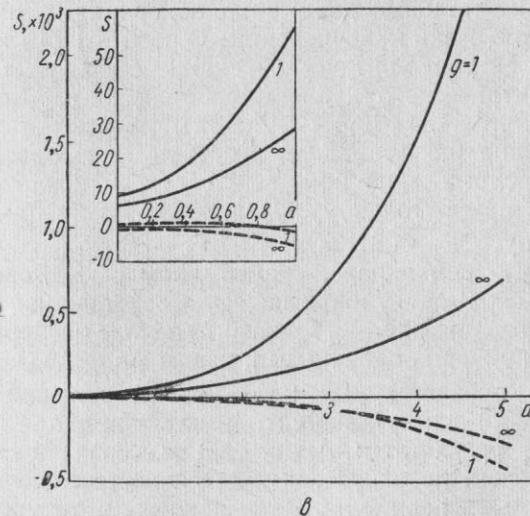


Рис. 46. Аберрационные коэффициенты  $P_{cd}$  (а),  $P_{dc}$  (б) стигматического дублета (прямоугольная модель). Сплошные кривые соответствуют дублету, состоящему, составленному из электрических линз. Расстояние

На основе выражений для коэффициентов сферической аберрации линз с прямоугольной моделью поля и формул (4.47), (4.48) рассчитаны коэффициенты сферической аберрации стигматичного дублета [101].

Значения параметров  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  для широкого диапазона изменения геометрических параметров в стигматическом дублете даны на рис. 24 и 25. Однако для расчета аберраций третьего порядка точность этих данных недостаточна. Значения  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  с необходимой точностью получены решением уравнений (3.20) на электронно-вычислительной машине БЭСМ-2.

Для заданных геометрических параметров дублета и вычисленных значений возбуждений были рассчитаны величины первого порядка  $a_{c2}$ ,  $a_{d2}$ ,  $M_{c1}$  и  $M_{d1}$ . Затем по формулам (4.55) и соответствующим выражениям для коэффициентов  $D$  были найдены коэффициенты сферической аберрации каждой из двух квадрупольных линз дублета. На основании этих данных вычислялись коэффициенты  $P$  и  $S$



(б) и  $S$  (в) стигматичного дублета (прямоугольная модель, составленному из магнитных линз, штриховые—дублет между линзами  $s = 0$ ).

дублета для большого интервала изменения положений предмета и изображения. Все эти расчеты также производились на электронно-вычислительной машине.

На рис. 46 приведены зависимости коэффициентов  $P$  и  $S$  от положения предмета  $a$ . Параметрами служат положение изображения  $g$  и расстояние между линзами  $s$ . Эффективные длины линз одинаковы и равны  $L$ . Все величины на графиках выражены в единицах  $L$ .

Из рисунков видно, что все коэффициенты положительны, кроме  $S$  для электрического дублета, который при некоторых значениях параметров меняет знак. Во всех случаях величины коэффициентов aberrаций в плоскостях  $cd$  и  $dc$  сильно отличаются друг от друга ( $P_{cd} \ll P_{dc}$ ). Это, как и в дублете из тонких линз, можно объяснить тем обстоятельством, что при равных углах наклона  $x_0$  и  $y_0$  проекция траектории на плоскость  $dc$  отходит от оси  $z$  на большее расстояние, чем проекция на плоскость  $cd$  (см. рис. 23). Величины коэффициентов  $P$  определяются главным образом aberrацией той линзы, которая фокусирует в соответствующей плоскости. Аберрационные фигуры имеют форму, близкую к показанной на рис. 45.

Экспериментальные данные по aberrациям стигматических дублетов очень малочисленны. В работе [100] исследована на электронно-оптической скамье сферическая aberrация электрического дублета, состоящего из линз одинаковой длины  $L = 19,4$  см, центры которых находятся на расстоянии 0,5 м. Радиус апертуры линз равен 4 см, поэтому распределение поля вдоль оси  $z$  можно считать близким к прямоугольному. Для параллельно падающего пучка радиуса  $R_0 = 2$  см при  $\chi_1^2 = 0,33$  и  $\chi_2^2 = 0,74$  на флуоресцирующем экране, совмещенном с гауссовой плоскостью изображений, наблюдалась aberrационная фигура типа фигуры 2 на рис. 45. Однако при этом размеры полуосей были примерно одинаковы и равны  $\Delta_{cd} \approx \Delta_{dc} = 1$  мм.

Расчет, произведенный на основе выражений (4.47), (4.48) и (4.55) для указанного режима при  $a \rightarrow \infty$ , дал следующие результаты:  $\Delta_{cd} = 0,23$  мм,  $\Delta_{dc} = 1,23$  мм. Таким образом, по одной оси имеется хорошее совпадение расчетных и экспериментальных данных, в то время как по другой получается значительное расхождение.

Сравним сферическую aberrацию стигматического дублета и отдельной квадрупольной линзы, у которой существует

только сферическая aberrация ширины линейного изображения. Если заменить отдельную квадрупольную линзу стигматическим дублетом, то поскольку у него  $\Delta_{cd} < \Delta_{dc}$ , имеет смысл совместить его плоскость  $cd$  с собирающей плоскостью линзы. Если сравнивать коэффициенты  $P_{cd}$  с  $C_p$  при одинаковых расстояниях от предмета до края поля и от предмета до изображения, то получим, что  $P_{cd} > C_p$  (предполагалось, что длины всех линз равны). В случае малых  $a$  и  $g$  разница между  $P_{cd}$  и  $C_p$  незначительна. Например, при  $a = g = 0$  ( $s = 0$ ) она составляет  $\sim 5\%$  для магнитного и электрического дублетов. С ростом  $a$  и  $g$  различие увеличивается, и если  $a = g = 2L$  ( $s = 0$ ), то  $P_{cd}/C_p \approx 2,3$  для обоих типов дублетов.

Сравнение сферической aberrации магнитного дублета (с прямоугольной моделью поля составляющих его линз) со сферической aberrацией осесимметричной магнитной линзы, которая имеет колоколообразное распределение поля [23], показало следующее. Если совместить линзу с дублетом таким образом, чтобы центры их совпали, и рассмотреть случай равных эффективных длин ( $2L = \pi d$ ) и равных расстояний от фокуса до центра поля, то в случае больших увеличений  $(P/f)_{cd}$  несколько меньше  $C/f$ , а  $(P/f)_{dc}$  в несколько раз больше  $C/f$  (здесь  $C$  — коэффициент сферической aberrации осесимметричной линзы).

Для конструирования и изготовления квадрупольной линзы важен вопрос о влиянии формы полюсов на качество создаваемого линзой изображения. В двумерном поле (поле, не зависящем от продольной координаты  $z$ ) влияние формы полюсов и электродов на качество изображения начинаетказываться только при учете aberrаций пятого порядка [102]. Это связано с тем, что величины, характеризующие отличие распределения потенциала квадрупольной линзы от квадратичного, входят в разложение потенциала, начиная с членов, содержащих шестую степень координат [см. выражения (1.5) и (1.11)]. Как уже говорилось в гл. 1, величины коэффициентов  $K_6$  и  $N_6$  зависят от формы полюсов и электродов. В поле с гиперболическими полюсами или электродами  $K_6 = N_6 = 0$ .

Чтобы получить уравнение траектории заряженной частицы с точностью до членов пятого порядка, необходимо в уравнение движения (2.4) подставить напряженности полей, полученные из соотношений (1.5) и (1.11), с учетом членов, содержащих шестые степени координат. В разложении

жении для скорости следует учесть члены, содержащие производные  $x'$  и  $y'$  в четвертой степени. Тогда в нерелятивистском случае получим

$$x'' + \beta^2 x = F_3(x, x', y, y') + F_5(x, x', y, y'), \quad (4.57)$$

где  $F_3$  — многочлен, содержащий поперечные смещения и углы в третьей степени, а  $F_5$  — в пятой:

$$\begin{aligned} F_3 &= x'(x''x + y'y'') + \beta^2 \left[ -nx'(xx' - yy') + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(n-1)x(x'^2 + y'^2) \right] - \frac{1}{2}\beta^4 n(n-1) \times \\ &\quad \times x(x^2 - y^2); \\ F_5 &= -x'(x'^2 + y'^2)(x''x + y'y'') + \frac{1}{8}\beta^2(n+1) \times \\ &\quad \times x(x'^2 + y'^2)^2 + \beta^4 n(x^2 - y^2)[-ny'(xy' + yx') + \\ &\quad + \frac{1}{4}(n+1)x(x'^2 + y'^2)] + \frac{1}{8}\beta^6 n^2(5n-3)x \times \\ &\quad \times (x^2 - y^2)^2 + \beta^2 \left( \frac{3n}{r_E^4} \frac{K_6}{K_2} - \frac{n+1}{r_M^4} \frac{N_6}{N_2} \right) \times \\ &\quad \times x(x^4 - 10x^2y^2 + 5y^4). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Если пренебречь членами пятого порядка малости ( $F_5 = 0$ ) и подставить в соотношения (4.58) величину  $x'$  и  $y''$  из параксиального уравнения, то выражение (4.57) перейдет в уравнение проекции траектории на плоскость  $xOz$  с точностью до членов третьего порядка малости [см. уравнение] (4.6). Так как рассматривается двумерное поле, то следует положить  $u(z) = 1$ ,  $u'(z) = u''(z) = 0$ .

Как видно из выражений (4.58), коэффициенты, обусловленные отличием напряженностей поперечных полей от линейных, входят в последнее слагаемое многочлена  $F_5$ . Остальные слагаемые  $F_5$  связаны с линейными составляющими напряженностей и не обращаются в нуль при  $K_6 = N_6 = 0$ .

Уравнение для  $y$ -проекции траектории можно получить из выражений (4.57) и (4.58) переходом  $\beta \rightarrow i\beta$ ,  $y \leftrightarrow y'$ .

Для расчета траектории с точностью до пятого порядка применим, как и ранее для траекторий третьего порядка,

метод последовательных приближений. Параксиальная траектория заряженных частиц в двумерном поле имеет вид уравнений (2.27).

Ограничимся рассмотрением только сферической aberrации и поэтому расположим источник на оси ( $x_0 = y_0 = 0$ ). Тогда ( $z_0 = 0$ )

$$x_p = x_0 \frac{1}{\beta} \sin \beta z; \quad y_p = y_0 \frac{1}{\beta} \sin \beta z. \quad (4.59)$$

Траектория, рассчитанная с точностью до третьего порядка, получается вычислением интегралов в выражении (4.17) и соответствующем выражении для  $\Delta y(z)$  при  $u(z) = 1$ . Линейно независимые частные решения параксиальных уравнений в двумерном поле имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x_a &= \frac{1}{\beta} \sin \beta z; & x_\beta &= \cos \beta z; \\ y_a &= \frac{1}{\beta} \sin \beta z; & y_\beta &= \cos \beta z. \end{aligned} \right\} \quad (4.60)$$

Тогда [85, 94]

$$\begin{aligned} x_3(z) &= x_p(z) + \Delta_3 x(z) = x_0 \frac{1}{\beta} \sin \beta z + x_0 \frac{1}{32\beta} \times \\ &\quad \times \{2x_0^2 [(3n^2 - 2n + 3)(\beta z \cos \beta z - \sin \beta z) + \\ &\quad + (n+1)(n-3)\sin^3 \beta z] + y_0^2 [4(n-1)^2 \beta z \times \\ &\quad \times \cos \beta z - (3n^2 - 2n + 11)\sin \beta z + \\ &\quad + (n+1)^2 \sin \beta z \ch 2\beta z - \\ &\quad - (n+1)(n-3)\cos \beta z \sh 2\beta z]\}; \\ y_3(z) &= y_p(z) + \Delta_3 y(z) = y_0 \frac{1}{\beta} \sh \beta z + y_0 \frac{1}{32\beta} \times \\ &\quad \times \{2y_0^2 [(3n^2 - 2n + 3)(\beta z \ch \beta z - \sh \beta z) - \\ &\quad - (n+1)(n-3)\sh^3 \beta z] + x_0^2 [4(n-1)^2 \times \\ &\quad \times \beta z \ch \beta z - (3n^2 - 2n + 11)\sh \beta z + (n+1)^2 \times \\ &\quad \times \sh \beta z \cos 2\beta z - (n+1)(n-3)\ch \beta z \sin 2\beta z]\}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Для нахождения траектории с точностью до пятого порядка  $x_3(z)$  и  $y_3(z)$  из выражения (4.61) подставляются в правую часть уравнения (4.57) и в правую часть соот-

ветствующего уравнения для  $y$ -проекции. Получаются линейные дифференциальные уравнения второго порядка с правой частью. Они решаются методом вариации произвольных постоянных. В результате для гауссовой плоскости линейного изображения ( $\beta z = \beta L = \pi$ ) полное значение отклонения вычисленной траектории от параксиальной имеет вид

$$\Delta x = \Delta_3 x + \Delta_5 x = -x'_0 [C_p x'^2_0 + C_s y'^2_0 + (C_{p1} + C_{p2}) x'^4_0 + (C_{s1} + C_{s2}) x'^2_0 y'^2_0 + (C_{t1} + C_{t2}) y'^4_0]. \quad (4.62)$$

Здесь  $C_p$  и  $C_s$  — по-прежнему коэффициенты сферической aberrации третьего порядка, а  $C_{p1} + C_{p2}$ ,  $C_{s1} + C_{s2}$  и  $C_{t1} + C_{t2}$  — коэффициенты сферической aberrации пятого порядка.

В двумерном поле

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_p}{L} &= \frac{1}{16} (3n^2 - 2n + 3); \\ \frac{C_s}{L} &= \frac{1}{32} \left[ 4(n-1)^2 - (n+1)(n-3) \frac{\sinh 2\pi}{\pi} \right]; \\ \frac{C_{p1}}{L} &= -\frac{1}{1024} (105n^4 + 60n^3 + 126n^2 - 84n + 129); \\ \frac{C_{s1}}{L} &= -\frac{1}{512} [65n^4 + 4n^3 + 78n^2 - 108n + 137 + \\ &\quad + (n+1)(-51n^3 + 47n^2 - 113n + 109) \frac{\sinh 2\pi}{5\pi} + \\ &\quad + (n+1)(n^3 - 21n^2 + 27n - 15) \operatorname{ch} 2\pi]; \\ \frac{C_{t1}}{L} &= -\frac{1}{512} [29n^4 + 8n^3 + 18n^2 - 96n + 57 + \\ &\quad + (n+1)(-23n^3 + 23n^2 + 3n + 85) \frac{\sinh 2\pi}{2\pi} + \\ &\quad + (n+1)(n^3 + 43n^2 - 77n - 119) \frac{\sinh 4\pi}{20\pi} + \\ &\quad + 4(n+1)(n^3 - 5n^2 + 5n - 5) \operatorname{ch} 2\pi]; \\ \frac{C_{p2}}{L} &= \frac{5}{16\pi^4} \left[ (n+1) \left( \frac{L}{r_M} \right)^4 \frac{N_6}{N_2} - 3n \left( \frac{L}{r_E} \right)^4 \frac{K_6}{K_2} \right]; \\ \frac{C_{s2}}{L} &= 6 \left( 1 - \frac{\sinh 2\pi}{5\pi} \right) \frac{C_{p2}}{L}; \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

$$C_{t2}/L = (3 - \sinh 2\pi/\pi + \sinh 4\pi/20\pi) C_{p2}/L.$$

Из соотношений (4.63) следует, что коэффициенты  $C_p$ ,  $C_s$ ,  $C_{p1}$ ,  $C_{s1}$  и  $C_{t1}$  характеризуют сферическую aberrацию двумерной квадрупольной линзы с гиперболическими полюсами. Коэффициенты  $C_{p2}$ ,  $C_{s2}$  и  $C_{t2}$  соответствуют дополнительной сферической aberrации, возникающей из-за нелинейности напряженности поля.

Если положить в выражении (4.63)  $n = 0$ , то получим коэффициенты aberrаций магнитной линзы, если  $n = -1$  — коэффициенты aberrаций электрической линзы.

В качестве примера приведем значения коэффициентов  $C$  для электрической и магнитной линз при  $K_6/K_2 = N_6/N_2 = -0,033$ . Эта величина отношения  $K_6/K_2$  значительно больше той, которая получается при замене электродов, имеющих форму гиперболических цилиндров, электродами в форме круговых цилиндров с радиусом, равным  $R/r_E = 1,1-1,2$ . Однако она на порядок меньше величины  $K_6/K_2$  для круговых цилиндров, радиус которых много меньше апертуры (в этом случае  $K_6/K_2 = 1/3$ ).

Результаты расчета для средней плоскости  $y_0 = 0$  приведены в табл. 3.

Таблица 3

$n$	$L/r$	$C_p/L$	$C_{p1}/L$	$C_{p2}/L$	$(C_{p1} + C_{p2})/L$
-1	4 10	0,5	-0,375	0,081 3,17	-0,294 2,80
0	4 10	0,187	-0,126	0,027 1,06	-0,099 0,93

Из таблицы видно, что в средней плоскости квадрупольной линзы с гиперболическими электродами (полюсами) коэффициенты aberrаций ширины линейного изображения третьего и пятого порядков близки по величине, но противоположны по знаку. Этим квадрупольные линзы существенно отличаются от осесимметричных линз, знаки обоих коэффициентов которых одинаковы [103]. Коэффициент  $C_{s2}$ , связанный с нелинейностью поля, при выбранном положительном знаке  $K_6/K_2$  совпадает по знаку с  $C_p$ . Величина его при заданной форме электродов и полюсов сильно за-

висит от отношения  $L/r$ . Если  $L/r$  невелико, то преобладает влияние аберраций линейного поля. Значительных различий между электрической и магнитной линзами в средней плоскости нет.

Таблица 4

$n$	$\frac{L}{r}$	$\frac{C_s}{L}$	$\frac{C_{s1}}{L}$	$\frac{C_{s2}}{L}$	$\frac{C_{s1}+C_{s2}}{L}$	$\frac{C_{t1}}{L}$	$\frac{C_{t2} \cdot 10^{-3}}{L}$	$\frac{C_{t1}+C_{t2} \cdot 10^{-3}}{L}$
-1	10 0,5	4 -0,75	-7,83 $\times 10^3$	-8,58 $\times 10^3$	-0,305 $\times 10^3$	-0,306 $\times 10^3$	-0,375 6,98	0,179 6,98
0	10 8,12	4 3,95	-2,60 $\times 10^3$	1,35 $\times 10^3$	-0,102 $\times 10^3$	-0,098 $\times 10^3$	0,533 2,33	0,059 2,86

Коэффициенты аберраций, связанные с наличием траекторий, не лежащих в средней плоскости ( $y_0 \neq 0$ ), приведены в табл. 4, из которой видно, что они сильно зависят от рода линзы. Эта зависимость особенно заметна в случае линейного поля, когда коэффициенты пятого порядка отличаются и по величине, и по знаку.

Все коэффициенты, связанные с нелинейностью поля, растут по абсолютной величине с ростом  $L/r$ . При одинаковом  $L/r$  они больше, когда стоят при более высокой степени  $y_0$ . Поэтому вклад от отдельных слагаемых, а следовательно, и суммарная величина аберрации  $\Delta x$  в значительной мере определяется формой апертуры линзы. Например, при использовании круглой апертуры максимальное значение углов  $y_0$  много меньше, чем максимальное значение  $x_0$ . Несмотря на большую величину  $(C_{s2} + C_{s1})$  и  $(C_{t1} + C_{t2})$ , их вклад в  $\Delta x$  сильно уменьшается.

Общее рассмотрение геометрических аберраций ортоогональных систем с прямолинейной осью при помощи характеристической функции проведено в работе [104]. Вопросы коррекции сферической аберрации квадрупольных линз рассмотрены в гл. 7.

## ГЛАВА 5

### ХРОМАТИЧЕСКАЯ АБЕРРАЦИЯ И ПОГРЕШНОСТИ ЮСТИРОВКИ

Кроме геометрических аберраций существенную роль в квадрупольных линзах играет хроматическая аберрация, обусловленная зависимостью фокусирующей силы линзы от энергии заряженных частиц: воздействие линзы на них тем слабее, чем больше их энергия. Поэтому частицы с большей энергией пересекают ось дальше от линзы, чем частицы с меньшей энергией. Если в пучке присутствуют частицы с разной энергией, то изображение будет размытым даже при использовании параксиального пучка. Представление о хроматической аберрации квадрупольной линзы можно составить на основании рис. 39, если считать, что обе траектории на нем принадлежат параксиальным частицам, энергии которых различны. В поле линзы траектории таких частиц разделяются. Сплошная кривая соответствует частице с большей энергией.

В силу многих причин в пучке имеются частицы с разными скоростями или энергиями. У электронов они могут быть обусловлены различием начальных скоростей при термоэмиссии. У ионов, получающихся в источнике, наличие разброса связано с образованием их на разных эквипотенциалах электрического поля. Некоторое отличие в скоростях частиц связано с потерями при прохождении пучка через плотную среду. Ускорение частиц может сопровождаться возникновением разброса по скоростям, связанного, в частности, с недостаточной стабильностью ускоряющего напряжения.

Эффект, аналогичный хроматической аберрации, вызывают колебания напряженностей электрических и магнитных полей линз.

Расчет параксиальной хроматической аберрации в квадрупольной линзе сводится к решению параксиальных уравнений для траектории, в которые вместо энергии частицы,

равной  $-e\Phi$ , нужно подставить  $-e(\Phi + \epsilon)$ . Здесь  $-e\epsilon$  — величина, соответствующая малой добавочной энергии ( $\epsilon/\Phi \ll 1$ ). Тогда возбуждение линзы  $\beta^2$  изменится и станет равным  $\beta^2 + \Delta\beta^2$ . В релятивистском случае  $\beta^2$  выражается через энергию по формуле (2.11). Тогда  $\Delta\beta^2$  в первом приближении равно

$$\begin{aligned} \Delta\beta^2 &= \frac{d\beta^2}{d(-e\Phi)} (-e\epsilon) = \frac{2e^2 \epsilon}{(-e\Phi)^2 (2mc^2 - e\Phi)^2} \times \\ &\times \left\{ \frac{VK_2}{r_E^2} [m^2 c^4 + (mc^2 - e\Phi)^2] \mp \frac{WN_2}{r_M^2} (mc^2 - e\Phi) \times \right. \\ &\times \left. \sqrt{(-e\Phi)(2mc^2 - e\Phi)} \right\}. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Подставив  $\beta^2 + \Delta\beta^2$  в параксиальные уравнения (2.10), получим:

$$\begin{cases} x'' + \beta^2 u(z)x = -\Delta\beta^2 u(z)x; \\ y'' - \beta^2 u(z)y = \Delta\beta^2 u(z)y. \end{cases} \quad (5.2)$$

Учитывая, что  $\Delta\beta^2$  малая величина, можно решать уравнения (5.2) методом последовательных приближений, как это уже делалось при расчете сферической aberrации. В первом приближении подставим в правую часть выражения (5.2) вместо  $x$  и  $y$  решение уравнений (2.10), т. е. траекторию частиц с энергией  $(-e\Phi)$ , определенную при тех же начальных условиях. Получатся линейные дифференциальные уравнения второго порядка с правой частью, решения которых можно найти методом вариации произвольных постоянных. Хроматические aberrации  $\Delta x_{xp}(z)$  и  $\Delta y_{xp}(z)$  равны разностям между найденной таким образом из уравнений (5.2) траекторией заряженной частицы с энергией  $-e(\Phi + \epsilon)$  и траекторией частицы с энергией  $(-e\Phi)$ .

Окончательно получим

$$\begin{cases} \Delta x_{xp}(z) = -x_\alpha(z) \int_0^z \Delta\beta^2 u(z) x_\beta(z) [x_0 x_\beta(z) + \\ + x'_0 x_\alpha(z)] dz + x_\beta(z) \int_0^z \Delta\beta^2 u(z) x_\alpha(z) [x_0 x_\beta(z) + \\ + x'_0 x_\alpha(z)] dz; \end{cases} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \Delta y_{xp}(z) &= y_\alpha(z) \int_0^z \Delta\beta^2 u(z) y_\beta(z) [y_0 y_\beta(z) + \\ &+ y'_0 y_\alpha(z)] dz - y_\beta(z) \int_0^z \Delta\beta^2 u(z) y_\alpha(z) [y_0 y_\beta(z) + \\ &+ y'_0 y_\alpha(z)] dz. \end{aligned} \quad (5.3)$$

В плоскости гауссова изображения  $x_\alpha(z_1) = 0$ , и выражение для  $\Delta x_{xp}$  упрощается:

$$\Delta x_{xp}(z_1) = x_\beta(z_1) \int_0^{z_1} \Delta\beta^2 u(z) x_\alpha(z) [x_0 x_\beta(z) + x'_0 x_\alpha(z)] dz. \quad (5.4)$$

Общие выражения для хроматической aberrации квадрупольных линз в нерелятивистском приближении, полученные при помощи электронно-оптического показателя преломления приведены в работе [105]. В дальнейшем эти выражения были обобщены на случай ортогональных систем и релятивистских скоростей в работе [106]. Хроматические aberrации электрических квадрупольных линз при малых скоростях заряженных частиц рассчитаны в работе [21].

Прежде чем исследовать более детально хроматические aberrации отдельных линз и систем из них, остановимся на вопросе о возможности создания ахроматической квадрупольной линзы [107, 62]. Это представляет тем больший интерес, что существует строгое доказательство невозможности построения осесимметричных ахроматических линз [108]. В то же время в масс-спектрометрии используются отклоняющие системы с фокусировкой по скоростям, впервые предложенные Астоном [109].

Очевидно, что квадрупольная линза ахроматична, если величина  $\Delta\beta^2$  в уравнениях (5.2) равна нулю. В первом приближении, т. е. при малой величине разброса по энергии или скорости в пучке, условие  $\Delta\beta^2 = 0$  сводится к требованию

$$\frac{d\beta^2}{d(-e\Phi)} \Big|_{\Phi = \Phi_0} = 0. \quad (5.5)$$

Из выражения (5.1) получим, что требование (5.5) выполняется для любого  $z$ , если

$$\frac{V}{W} = \left( \frac{r_E}{r_M} \right)^2 \frac{N_2}{K_2} \frac{(mc^2 - e\Phi_0) \sqrt{(-e\Phi_0)(2mc^2 - e\Phi_0)}}{m^2 c^4 + (mc^2 - e\Phi_0)^2}. \quad (5.6)$$

$$k_2(z) = n_2(z).$$

Отсюда следует, что возможно создание ахроматической квадрупольной линзы на основе сочетания электрической и магнитной линз. Взаимное расположение электродов и полюсов ахроматической линзы дано на рис. 4. Полярность их должна быть такова, чтобы силы, действующие на заряженную частицу со стороны этих полей, были направлены противоположно друг другу. Если при этом зависимость полей от координаты  $z$  в параксиальной области одинакова, а величины скалярных потенциалов на электродах и полюсах связаны соотношением (5.6), то линза ахроматична для частиц с энергией, близкой к  $-e\Phi_0$ . Траектории этих частиц полностью совпадают.

Для малых энергий выражение (5.6) упрощается:

$$\frac{V}{W} = \frac{1}{c} \left( \frac{r_E}{r_M} \right)^2 \frac{N_2}{K_2} \sqrt{-\frac{e\Phi_0}{2m}}. \quad (5.7)$$

Запишем еще условие ахроматичности через скорость заряженной частицы и градиенты компонент напряженности электрического и магнитного полей  $G_E$  и  $G_M$ . Из соотношений (5.6), (1.16) и (1.17) получим

$$G_E = \frac{cv_0}{2c^2 - v_0^2} G_M \quad (5.8)$$

и в нерелятивистском случае

$$G_E = \frac{v_0}{2c} G_M. \quad (5.9)$$

Подставив уравнение (5.6) в выражение для возбуждения линзы (2.11), получим величину возбуждения ахроматической линзы  $\beta_A^2$ . В случае малых скоростей

$$\beta_A^2 = -\beta_E^2 = -\frac{1}{2} \beta_M^2. \quad (5.10)$$

Таким образом, возбуждение ахроматической линзы в нерелятивистском приближении равно по величине и обратно по знаку возбуждению электрической линзы или равно половине возбуждения магнитной линзы.

На рис. 47 представлена зависимость  $\beta^2$  электрической, магнитной и комбинированной квадрупольных линз от ско-

рости заряженной частицы. На рисунке видно, что хотя возбуждение магнитной и электрической линз уменьшается с увеличением скорости, но так как его зависимость от  $v$  различна (при малых скоростях  $\beta_M^2 \approx 1/v$ ,  $\beta_E^2 \approx 1/v^2$ ), то возбуждение составленной из них комбинированной линзы может даже увеличиваться с ростом  $v$ . Область значений скорости, лежащих вблизи  $v_0$ , соответствует ахроматической линзе (в точке  $v = v_0$  кривая 2 имеет максимум). Область

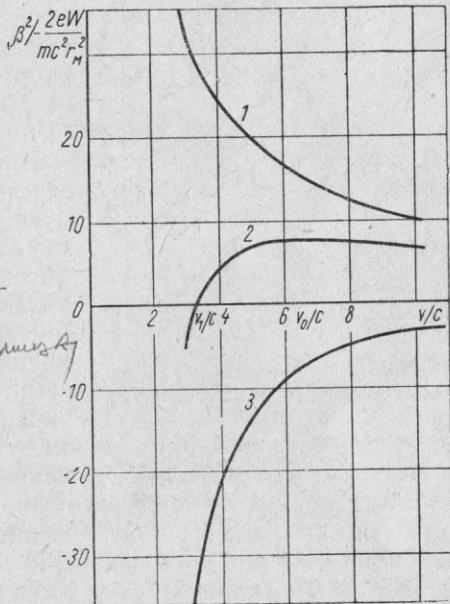


Рис. 47. Зависимость возбуждения магнитной (1), комбинированной (2) и электрической (3) квадрупольных линз от скорости заряженной частицы;  $G_E/G_M = 10$  в/ (эрст·см).

слева от  $v_0$  до  $v_1$ , в которой  $\beta_A^2$  увеличивается с ростом  $v$ , соответствует комбинированной квадрупольной линзе с отрицательной хроматической aberrацией [62, 110]. Отношение полей, необходимое для получения квадрупольной линзы с отрицательной хроматической aberrацией, лежит в пределах

$$\frac{c}{v} < \frac{G_M}{G_E} < \frac{2c^2 - v^2}{cv}. \quad (5.11)$$

Экспериментальная проверка работы комбинированной квадрупольной линзы в ахроматическом режиме и режиме отрицательной хроматической aberrации была проведена на

электронно-оптической скамье [111—113]. Поперечное сечение исследуемой линзы показано на рис. 48. Параметры магнитной линзы таковы: полюсные наконечники имеют цилиндрическую форму радиусом  $R_m = 65$  мм, ширина полюса 110 мм, длина линзы  $l = 200$  мм, ее апертура  $2r_m = 110$  мм. Радиус цилиндрических электродов электрической линзы  $R_E = 29,8$  мм, длина их 238 мм, апертура линзы 25,7 мм.

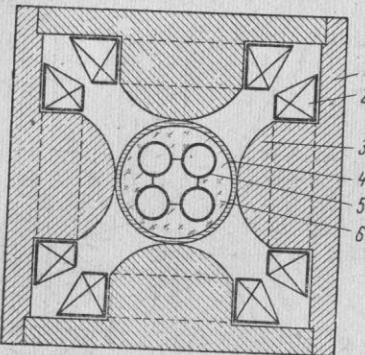


Рис. 48. Поперечное сечение комбинированной квадрупольной линзы:

1 — прямоугольное ярмо; 2 — катушки возбуждения; 3 — полюсные наконечники; 4 — вакуумная труба; 5 — электронно-оптической скамьи; 6 — электроды;

б — изолятор.

постоянной величине их отношения) до тех пор, пока изображение не фокусировалось на экране. Очевидно, что при этом  $\beta^2$  комбинированной линзы оставалось постоянным и можно было получить зависимость  $\beta^2/I = f(-e\Phi)$ . Экспериментальные результаты для различных значений  $V/I$  хорошо согласуются с расчетными.

Аналогичные измерения, также хорошо согласующиеся с расчетом, были проведены для комбинированной квадрупольной линзы иной конструкции. Электроды ее имели выгнутую форму (см. рис. 7, б), а магнитное поле создавалось витками с током (см. рис. 12). Для совпадения средних плоскостей линз витки с током располагали над электродами, а не поворачивали относительно них на  $45^\circ$ , как

Условия ахроматичности (5.6)–(5.9) получены в предположении полного совпадения зависимости от  $z$  электрического и магнитного полей в приосевой области. Необходимость такого совпадения значительно усложняет конструирование линзы. Однако если зависимость полей от  $z$  имеет вид плато с резким спадом на краях, то эти края можно рассматривать как тонкие линзы. Свойства первого порядка тонких линз определяются не формой кривой распределения поля, а величиной, пропорциональной интегралу от него, т. е. их эффективной длиной. Поэтому если полные эффективные длины обоих полей равны, а центры их совпадают, то условия ахроматизации линзы остаются прежними.

Можно создать ахроматическую линзу и в том случае, когда эффективные длины полей несколько отличаются или центры линз при равных эффективных длинах немного смещены вдоль оси  $z$  [113, 114]. Последнее возможно в случае неточной юстировки. Тогда условия ахроматизации изменяются и, что более существенно, траектории не могут на всем своем протяжении быть независимыми от энергии частиц. Можно найти условие, когда в пространстве изображений угол наклона проекции траектории на собирающую плоскость не будет зависеть (в первом приближении) от ее энергии. Выполнение другого условия позволяет ахроматизировать поперечные смещения траекторий в плоскости гауссова изображения.

В центральной области рассматриваемых систем образуются обычные комбинированные линзы, причем силы, действующие на заряженную частицу со стороны электрического и магнитного полей, направлены в противоположные стороны. Кроме центральной области имеются две краевые, каждая из которых образована либо электрическим, либо магнитным полем. В плоскости фокусировки комбинированной линзы краевая магнитная тоже фокусирует, а краевая электрическая рассеивает заряженные частицы. Разделить зависимость от энергии и от координаты  $z$  в дифференциальных уравнениях траектории (2.8) нельзя, так как  $k_2(z) \neq n_2(z)$ . Поэтому для исследования такой системы нужно решить уравнения (2.8) или (2.10) для каждой из трех зон, найти траекторию на выходе из линзы и рассмотреть условия ее ахроматизации. В данном случае рассмотрение упрощается, если учесть, что краевые зоны можно рассчитывать как слабые линзы.

Отличие эффективных длин электрического и магнитного полей на величину  $2\Delta L$  ( $L$  — эффективная длина более короткого поля) приводит условие ахроматизации положения линейного изображения (все рассмотрение проведено для нерелятивистского приближения) к виду

$$\frac{\beta_E^2}{\beta_M^2} = 0,5 \left[ 1 \mp \frac{\Delta L}{L} j(a/L, \kappa) \right], \quad (5.12)$$

где

$$(a/L, \kappa) = \frac{2a^2/L^2 + \left[ \frac{1}{\kappa^2} - \left( \frac{a}{L} \right)^2 \right] \sin^2 \kappa + \frac{a}{\kappa L} \sin 2\kappa}{\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\kappa^2} + \left( \frac{a}{L} \right)^2 \right] + \frac{1}{\kappa^2} \frac{a}{L} \sin^2 \kappa - \frac{1}{4\kappa} \left[ \frac{1}{\kappa^2} - \left( \frac{a}{L} \right)^2 \right] \sin 2\kappa}. \quad (5.13)$$

Знак минус соответствует случаю, когда протяженность электрического поля вдоль оси  $z$  больше магнитного, знак плюс — магнитное поле имеет большую протяженность. Выражения (5.12) и (5.13) получены при условии совпадения центров полей.

Если эффективные длины полей равны, а их центры смешены вдоль оси  $z$ , то функция  $j(a/L, \kappa)$  в выражении (5.12) принимает иной вид (см. работы [113, 114]).

Функция  $j$  значительно упрощается для параллельного пучка ( $a \rightarrow \infty$ ):

$$j_{||}(\kappa) = \frac{3 + \cos 2\kappa}{1 + \frac{\sin 2\kappa}{2\kappa}}. \quad (5.14)$$

Пренебрегая в уравнении (5.12) членом, содержащим  $\Delta L/L$  незначительным по сравнению с единицей, получим  $\beta_E^2 = 0,5\beta_M^2$ , т. е. обычное условие для совмещенной ахроматической линзы в нерелятивистском приближении.

Как следует из соотношений (5.13) и (5.14), при произвольных  $aL$  и  $\kappa$   $j \geq 0$ . Это соответствует тому, что при  $L_E > L_M$   $\beta_E^2 < 0,5\beta_M^2$ , т. е. для получения ахроматического режима из-за дополнительных электрических полей вклад электрического поля в комбинированной линзе должен быть уменьшен. Если  $L_E < L_M$ , то  $\beta_E^2 \geq 0,5\beta_M^2$ .

Условие ахроматизации увеличения, т. е. угла наклона  $x$ -проекции траектории в пространстве изображений, для  $L_E > L_M$  имеет вид

$$\frac{\beta_E^2}{\beta_M^2} = 0,5 \left[ 1 - \frac{2\Delta L}{L} \frac{2}{L} - \frac{a}{L} \sin^2 \kappa + \frac{1}{2\kappa} \sin 2\kappa \right]. \quad (5.15)$$

Приравняв правые части в выражениях (5.15) и (5.12) (в последнем нужно взять знак минус), получим условие полной ахроматичности  $x$ -проекции траектории в пространстве изображений. Оно соответствует неизменности положения и угла наклона  $x$ -проекции траектории на выходе из системы при небольшом изменении энергии. Для  $a = 0$  получим уравнение

$$\kappa = \operatorname{tg} \kappa \quad (5.16)$$

с первым значением корня  $\kappa = 4,494$ .

Если  $a = L$ , то имеем

$$\frac{2\kappa^2}{1 + \kappa^2} = \sin \kappa (\kappa \cos \kappa + \sin \kappa), \quad (5.17)$$

где первое значение корня  $\kappa = 1,31$ .

Таким образом, каждому положению предмета соответствует некоторый набор значений  $\kappa$ , а следовательно, и положений ахроматизированного изображения. В этом заключается существенное отличие от комбинированной квадрупольной линзы с полностью совпадающими распределениями полей. В последнем случае при заданном положении предмета величина возбуждения ахроматической линзы (и положение изображения) может быть произвольной.

В работе [114] рассмотрено также условие ахроматичности линейного изображения по длине.

Расчеты ахроматизации положения изображения были проверены экспериментально на электронно-оптической скамье для случая, когда центры полей не совпадали (см. работу [113]). Использовались безжелезная магнитная линза, составленная из прямоугольных рамок с отогнутыми концами, обтекаемых током (см. рис. 12), и электрическая линза с вогнутыми электродами (см. рис. 7, б). Получено хорошее совпадение эксперимента с расчетом.

Исследование вопроса о нулевой и отрицательной хроматических aberrациях в случае, когда система состоит из

полностью раздвинутых электрических и магнитных квадрупольных линз, представляет большую сложность. Здесь, как и в случае частично несовпадающих распределений полей, нельзя полностью ахроматизировать всю траекторию. Однако можно найти условия, при которых положение изображения и увеличение не будут меняться при небольшом изменении энергии частиц [115, 116]. Система из двух последовательно расположенных квадрупольных линз (дублет) может обладать нулевой или отрицательной хроматической aberrацией в фокусирующей плоскости только в том случае, если в ней магнитная линза собирает, а электрическая рассеивает заряженные частицы независимо от порядка следования линз. Это условие аналогично положению в геометрической световой оптике, где для получения положительного ахромата собирающая линза должна обладать большим коэффициентом дисперсии [117]. Если дублет фокусирует в обеих плоскостях, то в одной из них хроматическая aberrация всегда будет положительной.

Для нахождения условий ахроматичности приравнивают нуль производную по энергии (или скорости) выражений для  $q$ ,  $f$  или  $M$ , приведенных в гл. 3.

В приближении тонких линз положение линейного изображения не меняется с изменением энергии частиц, если

$$\beta_{1M}^2 L_{1M} = 2\beta_{2E}^2 L_{2E} (1 - \beta_{1M}^2 L_{1M} s + s/a)^2 \quad (5.18)$$

(первая линза дублета — магнитная) или

$$2\beta_{1E}^2 L_{1E} = \beta_{2M}^2 L_{2M} (1 + \beta_{1E}^2 L_{1E} s + s/a)^2 \quad (5.19)$$

(первая линза в дублете — электрическая). Можно показать, что в дублете, составленном из тонких линз, хроматические aberrации положения и увеличения не могут быть равны нулю одновременно.

Ахроматизировать систему, образованную последовательно расположенными электрическими и магнитными полями, сложнее, чем систему из пространственно совмещенных полей. Однако некоторое преимущество последовательного расположения — возможность уменьшения апертуры магнитных линз.

По многим причинам бывает невозможно совместное использование электрических и магнитных квадрупольных линз. Например, при фокусировке частиц больших энергий могут быть недостаточны предельно достижимые градиенты

в электрических линзах. В то же время можно строго доказать, что системы, составленные только из магнитных или только из электрических квадрупольных линз, всегда обладают положительной хроматической aberrацией [18, 21]. Этот результат следует из выражения (5.4), которое можно преобразовать, аналогично тому, как это было сделано при расчете сферической aberrации, к виду, содержащему под интегралом квадраты переменных величин.

В магнитных линзах для параллельного пучка в плоскости гауссова изображения можно написать [18]

$$\begin{aligned} \Delta x_{xp} &= \frac{\Delta p}{p} x_0 \beta^2 x_\alpha(z_F) \int_0^{z_F} u(z) x_\beta^2(z) dz = \\ &= \frac{\Delta p}{p} x_0 x_\alpha(z_F) \int_0^{z_F} x_\beta^{'2}(z) dz. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Для расходящегося пучка имеем

$$\begin{aligned} \Delta x_{xp} &= -\frac{\Delta p}{p} x_0' \beta^2 x_\beta(z_F) \int_0^{z_F} u(z) x_\alpha^2(z) dz = \\ &= -\frac{\Delta p}{p} x_0' x_\beta(z_F) \int_0^{z_F} x_\alpha^{'2}(z) dz. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Здесь  $\Delta p/p$  — относительное изменение импульса заряженных частиц. Аналогичные выражения можно написать для электрических линз. Отличие заключается в том, что в них вместо множителя  $\Delta p/p$  будет стоять (в нерелятивистском приближении) множитель  $\Delta\Phi/\Phi$ .

Как следует из уравнений (5.20) и (5.21),  $\Delta x_{xp}$  нельзя обратить в нуль. Это соответствует тому, что все магнитные квадрупольные линзы имеют одинаковый «показатель преломления». Также одинаков «показатель преломления» у всех электрических квадрупольных линз. В то же время хорошо известно, что скомпенсировать хроматическую aberrацию системы из стеклянных линз, имеющих одинаковую дисперсию, можно только для мнимого изображения. Метод коррекции хроматической aberrации с помощью дополнительных элементов рассмотрен в заключении.

Фокусное расстояние магнитной квадрупольной линзы, зависимость поля которой от  $z$  аппроксимирована прямы-

угольником, меняется с изменением импульса частицы следующим образом [14]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{df_c}{f_c} &= (1 + \kappa \operatorname{ctg} \kappa) \frac{dp}{2p} \approx \left(1 - \frac{\kappa^2}{6} - \frac{\kappa^4}{90}\right) \frac{dp}{p}; \\ \frac{df_d}{f_d} &= (1 + \kappa \operatorname{cth} \kappa) \frac{dp}{2p} \approx \left(1 + \frac{\kappa^2}{6} - \frac{\kappa^4}{90}\right) \frac{dp}{p}. \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

Ранее (см. рис. 17) были рассмотрены графики функций  $\frac{df}{f} / \frac{dp}{p} = \delta$ .

Хроматическую aberrацию дублета можно найти, про-дифференцировав по импульсу формулы, приведенные для него в гл. 3. Приближенная формула для изменения положения изображения с изменением импульса на  $dp$  имеет вид

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{g_2}\right) &\approx \left(\frac{g_1}{a_2}\right)^2 d\left(\frac{1}{f_1}\right) + d\left(\frac{1}{f_2}\right) = \\ &= -\frac{dp}{p} \left[ \left(\frac{\delta_1}{f_1}\right) \left(\frac{g_1}{a_2}\right)^2 + \frac{\delta_2}{f_2} \right]. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Здесь индекс 1 относится к величинам, связанным с первой линзой дублета, 2 — со второй. Все расстояния в выражении (5.23), а также и дальше в соотношении (5.24) отсчитываются от главных плоскостей соответствующих линз. При выводе уравнения (5.23) предполагалось, что положение главных плоскостей остается неизменным, если уменьшение импульса невелико. Выражение (5.23) легко обобщить применительно к системе из произвольного числа линз. Величины можно найти (см. рис. 17).

Хроматическое расширение пучка  $\Delta$  равно

$$\Delta = -Qg_2 d\left(\frac{1}{g_2}\right) = Qg_2 \frac{dp}{p} \left[ \left(\frac{\delta_1}{f_1}\right) \left(\frac{g_1}{a_2}\right)^2 + \frac{\delta_2}{f_2} \right], \quad (5.24)$$

где  $Q$  — ширина пучка во второй линзе. В плоскости  $dC$   $Q$  равно всей апертуре второй линзы. В плоскости  $cd$  (для одинаковых апертур линз) пучок занимает примерно  $a_2/q_1$  часть апертуры.

Можно показать, что для дублета хроматическое расширение в обеих плоскостях одинаково в случае одинаковой апертуры на входе. Однако практически входная апертура для  $dc$  меньше. Поэтому хроматическое расширение изображения в плоскости  $dc$  всегда значительно меньше, чем в плоскости  $cd$ .

Хроматические aberrации триплета в обеих плоскостях более близки между собой, чем у дублета, и по величине

обычно лежат между aberrациями дублета в плоскостях  $cd$  и  $dc$ .

Знак дисперсии всегда определяется собирающими в данной плоскости линзами. Из соотношений (5.20) и (5.21) видно, что хотя в фокусирующей системе из квадрупольных линз  $u(z)$  меняет знак, величина  $\int u(z)x^2(z)dz$  всегда положительна, так как средняя величина  $u(z)x^2(z)$  больше на фокусирующих участках. Этот же результат получается из уравнения (5.23), так как в нем коэффициенты при  $1/f_c$  всегда больше, чем при  $1/f_d$ . Это приводит к тому, что частицы с большим импульсом фокусируются на большем расстоянии от системы.

Выражения, аналогичные соотношениям (5.22)–(5.24), можно получить также для электрических систем. Следует отметить, что ввиду более сильной зависимости от скорости хроматическая aberrация электрических линз больше магнитных. В нерелятивистском приближении [см. выражение (2.12)]

$$\frac{d\beta_E^2}{\beta_E^2} = -\frac{d\Phi}{\Phi}; \quad \frac{d\beta_M^2}{\beta_M^2} = -\frac{d\Phi}{2\Phi}. \quad (5.25)$$

Отсюда

$$\frac{d\beta_E^2}{\beta_E^2} = 2 \frac{d\beta_M^2}{\beta_M^2}. \quad (5.26)$$

Относительное изменение возбуждения с изменением энергии в электрической линзе вдвое больше, чем в магнитной.

Распределение поля квадрупольной линзы представленное в виде ряда, из-за наличия плоскостей симметрии содержит только члены с четными степенями координат  $x$  и  $y$ . Дефекты изготовления и юстировки линзы нарушают эту симметрию. Они приводят к появлению в разложении поля дополнительных членов с четными и нечетными степенями координат. Особенно сильные искажения вносят члены с малыми степенями координат. Необходимо оценить влияние неточности изготовления и сборки линз на распределение поля и найти допустимые отклонения конструктивных параметров от расчетных.

Ошибки изготовления и сборки гиперболических полюсов (или электродов) квадрупольной линзы можно рассматривать как малое отклонение их формы от гиперболы  $|xy| = 1/2$  [118]. Здесь (и в дальнейшем) все линейные размеры отнесены к радиусу апертуры линзы  $r_m$ . Рассмотрение огра-

ничим случаем бесконечно длинных полюсов, т. е. двумерными полями. Такая постановка вопроса позволяет использовать для нахождения распределения поля вариационные принципы конформных отображений [24]. Эта методика была применена в гл. 1 для определения поля линзы, полюса которой имеют форму круговых цилиндров.

Установим связь между искажением поля и геометрическими параметрами, характеризующими точность сборки квадрупольной линзы. Ошибки, связанные с установкой полюса в линзе можно свести к трем: смещение полюса параллельно координатным осям  $x$  и  $y$  и поворот его относительно центра (рис. 49). Уравнения, описывающие смещенное положение полюса для каждого случая в отдельности, таковы:

$$\left. \begin{aligned} y(x + \Delta_x) &= \frac{1}{2}; \quad x(y + \Delta_y) = \frac{1}{2}; \\ (x - \gamma_y)(y + \gamma_x) &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

В общем случае присутствуют все три смещения.

Найдем функцию  $\zeta(z)$ , где  $z = x + iy$ , осуществляющую конформное отображение области, лежащей в верхней полуплоскости и ограниченной с одной стороны двумя гиперболами  $|xy| = 1/2$ , а с другой — вещественной осью (рис. 50, a) на единичную полосу  $0 < \operatorname{Im}\zeta < 1$  (рис. 50, г). Согласно принципу симметрии, эта функция отображает также область, заключенную между четырьмя гиперболами  $|xy| = 1/2$ , на полосу  $|\operatorname{Im}\zeta| < 1$ . Последовательность преобразований такова.

Функции

$$\zeta_1 = z^2 \quad (5.28)$$

и

$$\zeta_1 = -\frac{1}{\pi} \ln(1 - \xi_2^2) \quad (5.29)$$

преобразуют соответственно исходную область и верхнюю полуплоскость (рис. 50, б) на полосу  $|\operatorname{Im}\zeta_1| < 1$  с исключенным лучом  $0 \leq \xi_1 < \infty$ ;  $\eta_1 = 0$ .

Функция

$$\zeta = \frac{2}{\pi} \operatorname{Ar th} \xi_2 \quad (5.30)$$

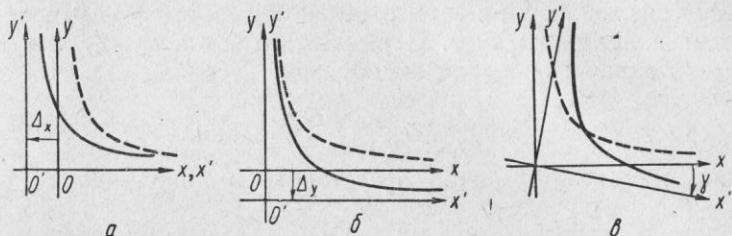


Рис. 49. Ошибки при установке полюса квадрупольной линзы. Сплошной кривой показано смещенное положение полюса, штриховой — точное:  
а — смещение полюса параллельно оси  $x$  на  $\Delta_x$ ; б — смещение параллельно оси  $y$  на  $\Delta_y$ ; в — поворот на угол  $\gamma$ .

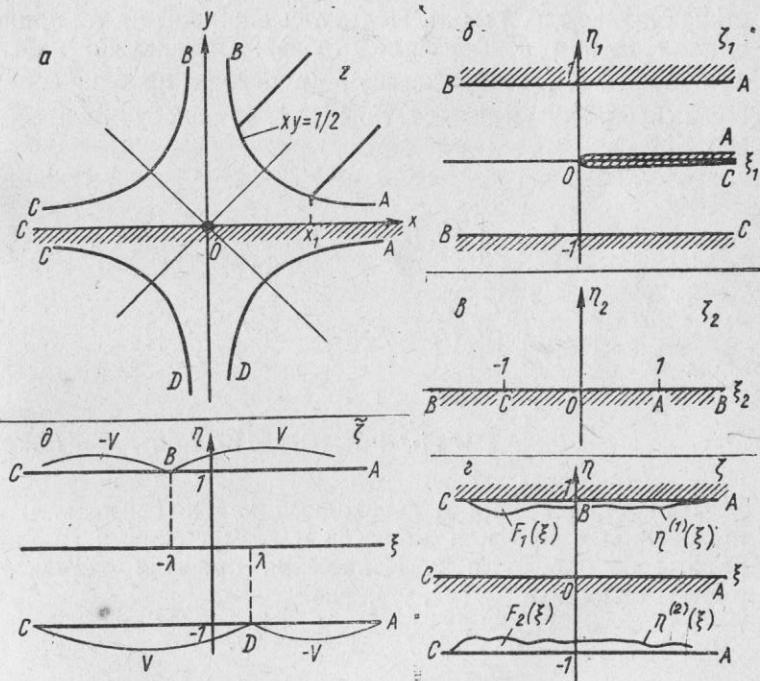


Рис. 50. Конформное отображение плоскости  $z$  на  $\tilde{\zeta}$ .

преобразует верхнюю полуплоскость  $\zeta_2$  в единичную полосу (рис. 50,2). При этом отрезок  $|\xi_2| \leq 1$ ;  $\eta_2 = 0$  переходит в прямую  $\eta = 0$ . В результате связь между  $\zeta$  и  $z$  можно записать следующим образом:

$$\operatorname{ch} \frac{\pi \zeta}{2} = e^{\pi z^2/2}. \quad (5.31)$$

Зависимость  $\zeta(z)$  можно представить в виде ряда

$$\zeta = \frac{2}{V\pi} \left( z + \frac{\pi z^3}{12} + \frac{\pi^2 z^5}{480} + \dots \right). \quad (5.32)$$

В рассматриваемом случае форма полюсов мало отличается от гиперболы  $|xy| = \frac{1}{2}$ , поэтому уравнения, описывающие их границы на плоскости  $\zeta$  (рис. 50,2), имеют вид

$$\eta^{(1)} = 1 - F_1(\xi); \quad \eta^{(2)} = -1 + F_2(\xi), \quad (5.33)$$

причем абсолютные величины  $F(\xi)$ , а также их первой и второй производной малы. Пользуясь вариационными принципами теории конформных отображений, можно найти функцию  $\tilde{\zeta}(\zeta)$ , отображающую (в первом приближении) область, близкую к полосе  $|\operatorname{Im} \zeta| < 1$ , на полосу  $|\operatorname{Im} \tilde{\zeta}| < 1$  (рис. 50,2).

В этом случае

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta} = \zeta + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} [F_1(t) + F_2(t)] \operatorname{th} \frac{\pi(\zeta-t)}{2} dt + \\ + \frac{i}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} [F_1(t) - F_2(t)] \frac{dt}{\operatorname{ch} \frac{\pi(\zeta-t)}{2}} + \\ + \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} [F_1(t) + F_2(t)] \operatorname{cth} \pi t/2 dt. \end{aligned} \quad (5.34)$$

Для определения  $\tilde{\zeta}$  необходимо найти связь между искажениями профиля полюсов и возмущениями границ полосы на плоскости  $\zeta$ . Искажения профиля охарактеризуем функцией  $\chi_i(x^*, y^*)$ , где

$$\chi_i(x^*, y^*) = \pm \frac{1}{2} - xy. \quad (5.35)$$

Здесь  $i = 1 \div 4$  — номер полюса;  $x^*$  и  $y^*$  — координаты ближайшей точки гиперболы. Тогда из выражения (5.27)

получим, что ошибки, связанные с установкой полюса в первом квадранте, записываются так:

$$\left. \begin{array}{l} \chi_1^{(1)}(x^*, y^*) = \Delta_x y^*; \\ \chi_1^{(2)}(x^*, y^*) = \Delta_y x^*; \\ \chi_1^{(3)}(x^*, y^*) = \gamma(x^{*2} - y^{*2}). \end{array} \right\} \quad (5.36)$$

Подставляя соотношения (5.33) и (5.35) в (5.31), для первого квадранта получаем

$$F_1(\xi) = 2\chi_1[x^*(\xi), y^*(\xi)] \operatorname{th} \frac{\pi \xi}{2}. \quad (5.37)$$

Тогда  $x^*(\xi)$  и  $y^*(\xi)$  имеют вид

$$\left. \begin{array}{l} x^*(\xi) = \left[ \frac{1}{\pi} \ln \operatorname{sh} \frac{\pi \xi}{2} + \sqrt{\frac{1}{\pi^2} \left( \ln \operatorname{sh} \frac{\pi \xi}{2} \right)^2 + \frac{1}{4}} \right]^{\frac{1}{2}}; \\ y^*(\xi) = \left[ -\frac{1}{\pi} \ln \operatorname{sh} \frac{\pi \xi}{2} + \sqrt{\frac{1}{\pi^2} \left( \ln \operatorname{sh} \frac{\pi \xi}{2} \right)^2 + \frac{1}{4}} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{array} \right\} \quad (5.38)$$

Подставляя выражения (5.36) в уравнение (5.37), находим  $F(\xi)$  и из соотношения (5.34) определяем  $\tilde{\zeta}$ .

Выражение для комплексного потенциала  $w(\tilde{\zeta})$  при заданных граничных условиях на полосе  $|\operatorname{Im} \zeta| < 1$  имеет вид

$$w(\tilde{\zeta}) = \frac{2V}{\pi} \ln \operatorname{ch} \frac{\pi \tilde{\zeta}}{2} + V\lambda \frac{i}{\operatorname{ch} \frac{\pi \tilde{\zeta}}{2}}, \quad (5.39)$$

где

$$\lambda = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} [F_1(t) - F_2(t)] \frac{dt}{\operatorname{sh} \frac{\pi t}{2}}. \quad (5.40)$$

Подставляя в уравнение (5.39) выражения для  $\tilde{\zeta}(\zeta)$  (5.34) и  $\zeta(z)$  (5.31) и используя разложение в ряд (5.32), получаем

$$w(z) = 2V \left[ \frac{1}{2} z^2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + i\beta_k) \frac{z^k}{k} \right]. \quad (5.41)$$

Здесь коэффициенты  $\alpha_k$  и  $\beta_k$ , характеризующие отклонение от распределения поля, создаваемого несмещенным

ми полюсами, определяются функциями  $F(t)$ . Они записываются в виде квадратур (см. работу [118]). Для рассматриваемых случаев их можно представить следующим образом:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_k^{(1)} = \Delta_x m_k^{(1)}; \quad \beta_k^{(1)} = \Delta_x n_k^{(1)}; \\ \alpha_k^{(2)} = \Delta_y m_k^{(2)}; \quad \beta_k^{(2)} = \Delta_y n_k^{(2)}; \\ \alpha_k^{(3)} = \gamma m_k^{(3)}; \quad \beta_k^{(3)} = \gamma n_k^{(3)}. \end{array} \right\} \quad (5.42)$$

Значения коэффициентов  $m_k^i$  и  $n_k^i$  приведены в табл. 5 для  $k = 1 \div 6$ . При вычислении предполагалось, что гиперболы не идут в бесконечность, а оборваны, причем точка обрыва  $x_1 = 1,3$  (см. рис. 50,а).

Таблица 5

$k$	$m_k^{(1)}$	$n_k^{(1)}$	$m_k^{(2)}$	$n_k^{(2)}$	$m_k^{(3)}$	$n_k^{(3)}$
1	0,212	0,168	0,168	0,212	-0,073	0,072
2	0,358	-0,100	0,358	0,100	0	0,309
3	0,085	-0,291	0,291	-0,085	0,328	0,324
4	-0,150	-0,077	0,150	-0,077	0,454	0,076
5	-0,096	0,072	0,072	-0,096	0,238	-0,244
6	0,002	0,080	0,002	-0,080	0,002	-0,224

Если требования к качеству фокусировки заданы допустимыми величинами членов ряда в разложении потенциала (5.41), то на основании выражений (5.42) и табл. 5 можно определить допуски для смещения и поворота полюсов линзы. В табл. 5 приведены данные о возмущении поля линзы при неточной установке одного полюса. В наихудшем варианте размещения всех четырех полюсов возмущения поля увеличивается в четыре раза.

Поскольку при сборке линзы поверхности полюсов опорные, точность их изготовления должна в несколько раз превышать точность сборки линзы.

В настоящее время используются системы, содержащие несколько десятков квадрупольных линз и имеющие протяженность больше ста метров. Сюда относятся, например, каналы заряженных частиц [119], где сечение пучка в фокусе должно быть порядка нескольких миллиметров. Отклонение положения линз от требуемого приводит к

искажению изображения или смещению пучка в целом. Поэтому необходима большая точность юстировки всей системы.

Ошибки юстировки можно свести к следующим: ошибки во взаимном расположении линз вдоль оси системы, смещение оптической оси линзы параллельно оси системы, поворот линзы относительно оптической оси, поворот линзы относительно поперечных осей  $x$  и  $y$ .

Наиболее распространенный элемент систем — дублет из квадрупольных линз. Поэтому все эти ошибки рассмотрим на его примере [120].

Для определения влияния на качество и положение изображения неточности юстировки используем матричный метод. Рассмотрим, как влияет на оптические параметры дублета изменение расстояния между линзами  $s$ . Величина  $s$  входит во все элементы матриц дублета  $T_{cd}$  и  $T_{dc}$  [см. уравнение (3.3)], которые в свою очередь определяют кардинальные элементы дублета.

Изменение положения фокусов в пространстве изображений при изменении  $s$  на  $\Delta s$  можно найти из выражений для  $z^*(F)$  в уравнении (2.80):

$$\Delta z^*(F) = \frac{d}{ds} \left( -\frac{t_{11}}{t_{21}} \right) \Delta s. \quad (5.43)$$

Координаты фокусов  $z^*(F)$  отсчитываются от выходного края дублета.

Подставив в соотношение (5.43) выражения (3.3) для плоскости  $cd$  и соответствующие выражения для плоскости  $dc$  и продифференцировав по  $s$ , получим

$$\left. \begin{array}{l} \Delta z^*(F_{cd}) = - \left[ \frac{(t_{21})_c^{(1)}}{(t_{21})_{cd}} \right]^2 \Delta s; \\ \Delta z^*(F_{dc}) = - \left[ \frac{(t_{21})_d^{(1)}}{(t_{21})_{dc}} \right]^2 \Delta s. \end{array} \right\} \quad (5.44)$$

Изменение положения фокусов в предметном пространстве можно получить, продифференцировав по  $s$  выражение (2.85):

$$\Delta z^*(F'_{cd}) = - \left[ \frac{(t_{21})_d^{(2)}}{(t_{21})_{cd}} \right]^2 \Delta s; \quad \Delta z^*(F'_{dc}) = - \left[ \frac{(t_{21})_c^{(2)}}{(t_{21})_{dc}} \right]^2 \Delta s. \quad (5.45)$$

Здесь координаты фокусов  $z^*(F')$  отсчитываются от входного края дублета в направлении, противоположном оси  $z$ .

Знак минус в уравнениях (5.44) и (5.45) показывает, что с увеличением расстояния между линзами дублета при неизменных возбуждениях расстояние фокуса от линзы уменьшается. Аналогичным образом из выражений (2.79), (2.89) и (2.90) можно найти изменения фокусных расстояний, положений изображения и увеличений.

Смещение изображения по отношению к заданной плоскости приводит к увеличению сечения пучка в ней. Поперечное смещение линзы или дублета, в целом параллельное геометрической оси системы, не вызывает искажения изображения, а только смещает его поперек оси. Если система координат  $\tilde{x}, \tilde{y}$  линзы связана с основной системой координат  $x, y$  равенствами

$$\tilde{x} = \tilde{x} + \varepsilon; \quad y = \tilde{y} + v, \quad (5.46)$$

то матрицу линзы можно представить следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x \\ x' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} T & t_{13} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad (5.47)$$

где

$$t_{13} = \varepsilon(1 - t_{11}); \quad t_{23} = -\varepsilon t_{21}. \quad (5.48)$$

Аналогичный вид имеет матрица для плоскости  $yOz$ . Расписав выражение (5.47) для  $x$  и  $x'$ , можно убедиться, что если в системе координат  $x, y$  параметры траектории связаны с их начальными значениями матрицей  $T$ , то в системе координат  $xy$  они определяются выражением (5.47).

Для нахождения матрицы системы из квадрупольных линз необходимо ввести трехмерную матрицу свободного пространства:

$$\begin{vmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}. \quad (5.49)$$

Полная матрица для дублета, преобразующая траекторию от источника до изображения, будет произведением трех матриц типа (5.49) и двух типа (5.47), расположенных

в обычной последовательности. В плоскости  $cd$  она имеет вид

$$\begin{vmatrix} R & & R_{13} \\ 0 & 0 & R_{23} \\ & & 1 \end{vmatrix}, \quad (5.50)$$

где

$$\left. \begin{aligned} (R_{23})_{cd} &= \varepsilon_1 \{ [1 - (t_{11})^{(1)}] (t_{21})_d^{(2)} - \\ &- (t_{21})_c^{(1)} [(t_{22})_d^{(2)} + s(t_{21})_d^{(2)}] \} - \varepsilon_2 (t_{21})_d^{(2)}; \\ (R_{13})_{cd} &= g(R_{23})_{cd} + \varepsilon_1 \{ [1 - (t_{11})_c^{(1)}] (t_{11})_d^{(2)} - \\ &- (t_{21})_c^{(1)} [(t_{12})_d^{(2)} + s(t_{11})_d^{(2)}] \} + \varepsilon_2 [1 - (t_{11})_d^{(2)}]. \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

Индекс сверху в выражениях (5.51) показывает, к какой линзе относится данный матричный элемент, а  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — величины смещений в плоскости  $cd$  первой и второй линз. В приближении тонких линз выражения для  $R_{cd}$  значительно упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} (R_{23})_{cd} &= \varepsilon_1 \beta_1^2 L_1 (1 + s\beta_2^2 L_2) - \varepsilon_2 \beta_2^2 L_2; \\ (R_{13})_{cd} &= \varepsilon_1 s\beta_1^2 L_1 + g(R_{23})_{cd}. \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

Соотношения для плоскости  $dc$  можно получить из выражений (5.51) и (5.52) заменой индексов  $c$  на  $d$  и наоборот, а также  $\varepsilon$  на  $v$  и  $\beta^2 L$  на  $-\beta^2 L$ . Используя матрицу (5.50), получим, что предмет в форме круга  $x_0^2 + y_0^2 = r_0^2$  преобразуется системой в эллипс:

$$\left[ \frac{x - (R_{13})_{cd}}{(R_{11})_{cd} r_0} \right]^2 + \left[ \frac{y - (R_{13})_{dc}}{(R_{11})_{dc} r_0} \right]^2 = 1. \quad (5.53)$$

Центр эллипса смещен относительно оси системы на величины  $(R_{13})_{cd}$  и  $(R_{13})_{dc}$ , а площадь его равна площади предмета, умноженной на произведение коэффициентов линейного увеличения в обеих плоскостях  $(R_{11})_{cd}$   $(R_{11})_{dc}$ .

С поворотом квадрупольной линзы относительно оси  $z$  на некоторый угол  $\alpha$  проекции траектории заряженной частицы на плоскости  $xOz$  и  $yOz$  становятся связанными. Тогда

$$x = \tilde{x} \cos \alpha - \tilde{y} \sin \alpha; \quad y = \tilde{y} \cos \alpha + \tilde{x} \sin \alpha \quad (5.54)$$

и параксиальные уравнения траектории принимают вид

$$\left. \begin{aligned} x'' + \beta^2 u x \cos 2\alpha + \beta^2 u y \sin 2\alpha &= 0; \\ y'' + \beta^2 u x \sin 2\alpha - \beta^2 u y \cos 2\alpha &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.55)$$

Решения уравнений (5.55) описываются четырехмерной матрицей ( $q$ ):

$$\begin{vmatrix} x \\ x' \\ y \\ y' \end{vmatrix} = |q| \begin{vmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ y_0 \\ y'_0 \end{vmatrix}. \quad (5.56)$$

При малых значениях угла поворота  $\alpha$  матрица ( $q$ ) приобретает вид\*

$$|q| = \begin{vmatrix} q_c & 0 \\ 0 & q_d \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} 0 & q_c - q_d \\ q_c - q_d & 0 \end{vmatrix}. \quad (5.57)$$

Аналогичную матрицу можно написать также и для второй линзы дублета, заменив в матрице (5.57) индексы  $c \leftrightarrow d$  и угол  $\alpha$  на  $\delta$  (где  $\delta$  — ошибка в угле поворота второй линзы).

Введя четырехмерную матрицу для свободного пространства

$$\begin{vmatrix} S & 0 \\ 0 & S \end{vmatrix}, \quad (5.58)$$

можно найти матрицу, соответствующую преобразованию от предмета до изображения и оценить искажения, к которым приводят поворот линз. Точечный предмет в этом случае преобразуется в эллипс, полуоси которого определяются углами поворота линз, а также расстоянием предмета до дублета и апертурой последнего. Если  $\alpha = \delta$ , эллипс переходит в точку. При конечных размерах предмета и  $\alpha = \delta$  изображение повернуто относительно оси на величину, пропорциональную этому углу.

Поворот линз около поперечных осей можно также характеризовать трехмерной матрицей. Если линза повернута относительно оси  $y$  на некоторый малый угол  $\gamma$ , то коорди-

наты траектории на ее выходе связаны с координатами на входе следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x \\ x' \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} q \\ q_{23} \\ 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} q_{13} \\ x_0 \\ 1 \end{vmatrix}. \quad (5.59)$$

Здесь

$$q_{13} = \gamma(L - q_{12}); \quad q_{23} = \gamma(1 - q_{11}). \quad (5.60)$$

Если линзу можно считать тонкой, то  $q_{12} = L$ ;  $q_{11} = 1$  и  $q_{13} = q_{23} = 0$ . Следовательно, эффект первого порядка для  $\gamma$  имеет место только для толстых линз. Это указывает на значительно меньшее влияние поворотов линз относительно поперечных осей по сравнению с параллельным смещением линз относительно оси системы.

Влияние различного рода погрешностей на фокусировку пучков заряженных частиц в системах из квадрупольных линз, применяемых в линейных ускорителях, рассмотрено в работах [17, 20].

\* В результате суммирования матриц складываются соответствующие матричные элементы.

## КОНСТРУКЦИИ И МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ

Рассмотрим в этой главе различные конструктивные особенности квадрупольных линз и экспериментальные методы их исследования.

Для выбора типа квадрупольных линз (электрические или магнитные) в конкретном случае нужно знать их преимущества и недостатки. Основными преимуществами электрической линзы перед магнитной являются большая простота конструкции и изготовления, потребление малых мощностей (можно использовать маломощные, хорошо стабилизированные источники питания), меньший вес. Основной недостаток — трудность получения больших градиентов электрического поля.

Чтобы электрическая линза по силе воздействия на заряженные частицы была эквивалентна магнитной, необходимо равенство их возбуждений при одинаковых эффективных длинах  $\beta_E^2 = \beta_M^2$ . Отсюда следует, что, согласно выражениям (2.13), (1.16) и (1.17), градиенты компонент напряженности электрического и магнитного полей в приосевой области должны быть связаны соотношением

$$\frac{G_E}{\delta^2} = \frac{G_M}{c} \quad G_E = \frac{v}{c} G_M. \quad (6.1)$$

Если выразить градиент  $G_E$  в  $\text{в/см}^2$ , то получим

$$G_E (\text{в/см}^2) = 300 \frac{v}{c} G_M (\text{э/см}). \quad (6.1a)$$

Для фокусировки частиц высоких энергий необходимы большие значения  $\beta^2$ . Практически предельно возможные величины  $G_E$  достигают значений  $60 \text{ кв/см}^2$ . Это соответствует для гиперболической формы электродов разности потенциалов на них, равной  $2V = 60 \text{ кв}$  при радиусе апер-

туры  $r_E = 1 \text{ см}$ . Устранить возможность электрического пробоя при таких параметрах квадрупольной линзы — задача нелегкая. Вместе с тем если скорость заряженных частиц велика, например  $|v/c| = 0,04$  и больше, то величина  $G_M$ , эквивалентная предельно возможному значению  $G_E$ , равна  $G_M = 5 \times 10^3 \text{ э/см}$  или меньше. Обеспечить такую величину технически не очень сложно. Поэтому для фокусировки частиц больших энергий применяют магнитные квадрупольные линзы.

Следует отметить, что электрические квадрупольные линзы помещаются внутри вакуумной камеры, а магнитные как внутри, так и снаружи. Наружное расположение облегчает перемещение линз, но апертуры их при этом несколько увеличиваются.

К недостаткам электрической линзы следует отнести также необходимость подачи в вакуум высокого напряжения.

Одна из наиболее простых конструкций электростатических квадрупольных линз изображена на рис. 1, а. Она состоит из двух соосных колец 3, скрепленных металлическими стержнями. К кольцам через изоляторы 2 крепятся электроды 1. Материалом для электродов обычно служит дюралюминий, латунь, нержавеющая сталь. Форма их может быть различной. На рис. 1, а изображены электроды, имеющие форму сегментов круговых цилиндров. Изоляторы в линзе изготавливают обычно из оргстекла, тefлона или фарфора. Преимущество первых двух материалов в том, что они легче поддаются обработке, зато фарфор обладает большей жесткостью и хорошими вакуумными свойствами. Подводка напряжения к линзам в вакуум может осуществляться неизолированными подведенными проводами с достаточной жесткостью. Если провода имеют изоляцию, то она должна надежно выдерживать приложенное напряжение и обладать хорошими вакуумными свойствами. Во всех случаях провода должны быть расположены как можно дальше от апертуры линзы, чтобы не искажать ее поле.

В другой конструкции электрической квадрупольной линзы электроды насыжены на изолирующие стержни, концы которых закреплены в сцентрированных фланцах. Если нужно собрать систему из электрических квадрупольей, то на каждый стержень надевают несколько электродов, которые в продольном направлении разделяются и

фиксируются изоляционными трубками, также надетыми на стержень. Дублет такой конструкции с электродами, имеющими форму круговых цилиндров, был применен для фокусировки пучка протонов от генератора Ван де Графа [121]. Длина каждого электрода равнялась 20,3 см. Фокусное расстояние отдельной линзы 50,8 см, а всей системы 101,6 см. Для фокусировки пучка протонов с энергией 2 Мэв потенциал на электродах был  $V = \pm 6$  кв, а при энергии 5 Мэв  $V = \pm 15$  кв. Расстояние от предмета до системы равнялось 244 см, а от системы до изображения 152 см.

Системы из электрических квадрупольных линз для большей жесткости можно собирать в металлической трубе, выточенной и обработанной с большой точностью. В работе [122] описан триплет из электрических линз для фокусировки астигматического протонного пучка с энергией 0,75 Мэв, выходящего из десятидюймового циклотрона.

Поверхности электродов имеют форму частей гиперболических цилиндров. Электроды крепят изоляторами к внутренней поверхности стальной трубы, которая имеет вырезы для облегчения откачки воздуха и уменьшения веса. Длина электродов центральной линзы вдвое больше длины электродов крайних линз и равна 30,5 см. Расстояние между электродами вдоль оси 3,8 см. Апертура линз  $2r_E = 7,6$  см. Потенциалы на электродах линз в зависимости от требуемых параметров фокусировки менялись от  $\pm 16$  кв до  $\pm 38$  кв. Напряжение в вакуум подводилось кабелем с полиэтиленовой изоляцией.

Наблюдение за фокусировкой пучка велось при помощи подвижной кварцевой пластины, в которой падающие на нее протоны вызывали флуоресценцию. Сила тока пучка была определена на основании измерений температуры воды, охлаждающей токовый зонд.

В результате было получено, что триплет фокусирует астигматический пучок практически в точку (площадь сечения пучка в плоскости изображения изменялась от 15,1  $\text{см}^2$  до 1,3  $\text{см}^2$ ). При помощи триплета можно также получить на выходе параллельный пучок.

Дублет из электрических квадрупольных линз аналогичной конструкции был применен для фокусировки пучка протонов с энергией 3 Мэв, создаваемого генератором Ван де Графа [123].

В работе [124] описана конструкция системы из электрических квадрупольных линз для фокусировки пучка протонов с энергией в несколько сот килоэлектронвольт. Она изображена на рис. 51. В отличие от описанных ранее конструкций, электроды в ней расположены не на опорах из диэлектрика, а на металлических стержнях, что позволяет повысить жесткость конструкции и точность сборки. Чередование фокусирующих и дефокусирующих

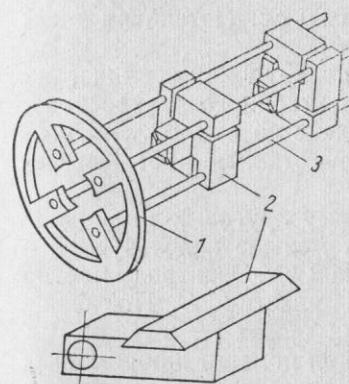


Рис. 51. Разборная система из электрических квадрупольных линз:

1 — фланец из изоляционного материала; 2 — электрод; 3 — металлический стержень.

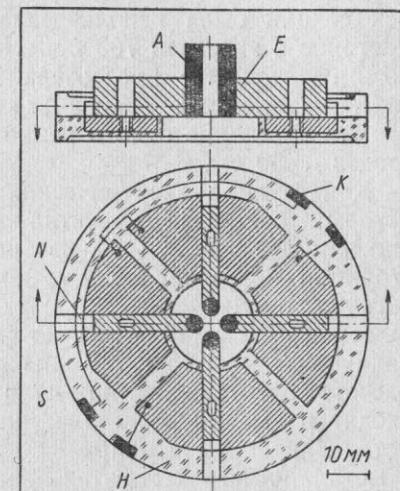


Рис. 52. Конструкция электрической квадрупольной линзы для объектива электронного микроскопа.

плоскостей у последовательно расположенных линз в системе достигается тем, что на одном металлическом стержне крепятся электроды повернутые друг относительно друга на 90° (см. рис. 51). Стальные стержни закреплены концами во фланцах из оргстекла. Продольное положение электродов фиксируется надетыми на стержни стальными трубками. Форма электродов выбрана трапециoidalной для увеличения линейности поля. При юстировке системы электроды поворачивают вокруг стержней, пока обращенные к оси плоскости противоположных электродов не станут параллельными друг другу. Для этих целей можно воспользоваться оправкой квадратного сечения с разме-

рами, соответствующими апертуре. После юстировки вся система стягивается гайками, навинченными на выступающие за фланцы концы стержней.

Недостаток данной конструкции состоит в том, что потенциалы электродов отдельных линз, скрепленных с одним стержнем, равны и не могут регулироваться независимо.

Описанная система с чередованием линз *cacd* из четырех секций была использована для фокусировки пучка протонов с энергией 700 кэВ. На выходе системы создавалось изображение кроссовера пучка на входе. Размеры системы таковы: апертура  $2r_E = 4$  см, длина электрода  $l = 9,5$  см, длина одного периода 20 см. Потенциал электродов  $\pm 50$  кэВ.

Конструкция электрических квадрупольных линз, из которых составлен объектив электронного микроскопа, описанный в работе [69], изображена на рис. 52. Эта конструкция позволяет более точно изготовить и отьюстировать систему.

Электроды линзы *A* имеют форму круговых цилиндров радиусом  $R = 1,15 r_E$ . Длина их меньше используемой в расчете эффективной длины поля на 2 мм. Электроды плотно входят в выемки металлических пластин *E*. Последние устанавливаются в направляющих пазах *N*, вырезанных в металлических сегментах *S*, и при помощи прорезанных в них отверстий скрепляются с основанием линзы. Удлиненная форма отверстия позволяет пластинам перемещаться вдоль направляющих пазов. Сегменты разделены изолятором из эпоксидной смолы *H*. Этот изолятор образует корпус линзы, к которому крепятся металлические сегменты, пластины с электродами и контактные пластины *K*, служащие для подачи напряжения на электроды линзы. Тонкие нити на рис. 52, идущие от контактных пластин к металлическим сегментам, подводят напряжение к электродам.

При сборке системы линзы отделяют одну от другой дистанционными кольцами. Затем их помещают в тубус, в котором предусмотрена возможность смещения винтами каждой линзы в отдельности перпендикулярно к оптической оси. Предварительная юстировка линз и всей системы производится при помощи оптического компаратора. Точность юстировки по отношению к поверхностям электродов, обращенным к оси, составляет 10—20 мкм, такова же точность изготовления отдельных частей линзы.

Дальнейшая юстировка системы производится при включенных источнике электронов и линзах. Наблюдаются светящиеся фигуры, создаваемые потоком электронов на экране электронного микроскопа. Если на отдельную квадрупольную линзу подано напряжение, то на экране возникает более или менее астигматичная размытая теневая картина предмета. Необходимо сдвигать каждую линзу до тех пор,

пока все теневые картины не будут расположены концентрично относительно середины экрана.

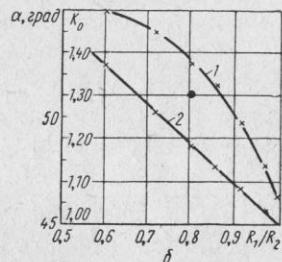
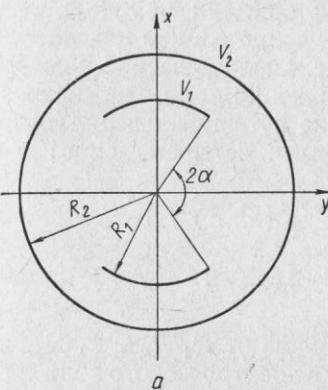


Рис. 53. Сечение неявлнополюсной электрической квадрупольной линзы (а) и зависимости (б)  $\alpha_0$  (1) и  $K_0$  (2) от  $R_1/R_2$ . Кружком отмечено значение  $\alpha_0$ , приведенное в работе [98].

Чувствительный критерий качества центровки системы — стягивание светящейся фигуры на экране при уменьшении напряжения на линзах последовательно в две взаимно перпендикулярные прямые. Вначале юстируют источник электронов так, чтобы эти линии лежали в центре экрана. Это особенно удобно, если на линзы подается переменное напряжение. Если затем изменять напряжение отдельной линзы, то фигура стягивается в линии, не лежащие, вообще говоря, в центре. Необходимо смещением линзы добиваться того, чтобы при наибольшем получаемом конечном увеличении (в данном случае равном  $2 \cdot 10^4 : 1$ ) центр картины еще находился в поле зрения. Для обеспечения этой же степени центровки при переносе системы положение электродов должно совпадать с предыдущим с точностью до 5 мкм.

Довольно простая конструкция «неявлнополюсной» электрической квадрупольной линзы предложена в работе [98].

Линза состоит из двух коаксиальных цилиндрических электродов, причем во внутреннем электроде симметрично прорезаны две широкие щели, параллельные оси линзы (рис. 53, а). На внешний и внутренний цилиндры подают разные потенциалы, и поле, провисающее в щели, создает квадрупольную линзу. Такая конструкция облегчает изготовление и центровку электродов.

В приосевой области линзы благодаря наличию двух плоскостей симметрии  $xOz$  и  $yOz$  распределение потенциала совпадает с распределением потенциала обычной квадрупольной линзы. Даже в приближении поля, не зависящего от координаты  $z$ , разложение потенциала в ряд содержит члены со степенями, кратными четырем. При  $V_2=0$

$$\varphi(x, y) = -\frac{V_1}{2} \left[ K_0 + \frac{K_2}{R^2} (x^2 - y^2) + \right. \\ \left. + \frac{K_4}{R^4} (x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \frac{K_6}{R^6} (x^2 - y^2)(x^4 - 14x^2y^2 + y^4) \right], \quad (6.2)$$

где  $K_i$  и  $R$  — постоянные, зависящие от  $R_1/R_2$  и  $\alpha$ . Наличие этих членов связано с тем, что у электрического поля «неявнополюсной» линзы нет плоскостей антисимметрии.

В работе [34] установлена зависимость угла  $\alpha = \alpha_0$  от  $R_1/R_2$ , для которой коэффициент  $K_4$  в выражении (6.2) обращается в нуль. Тогда поле рассматриваемой линзы в широкой области должно совпадать с полем обычной квадрупольной линзы. Задача решалась с помощью двумерной сетки сопротивлений. Полученные значения  $\alpha_0 = \alpha_0(R_1/R_2)$  и  $K_0$  приведены на рис. 53, б. Значения  $K_2$  при  $\alpha = \alpha_0$  в области  $0.8 < R_1/R_2 < 1$  практически не отличаются от величины  $K_2$  в линзе с вогнутыми электродами, у которых  $\varepsilon \approx 0$ . Постоянную  $R$  в выражении (6.2) следует приравнять  $R = 1/2(R_1 + R_2)$ .

Дублет, как и более сложные системы, можно создать, прорезав во внутреннем цилиндре еще такие же щели, отстоящие на некотором расстоянии вдоль оси  $z$  от первых и повернутые по отношению к ним на  $90^\circ$ . Соотношение длин щелей может быть выбрано произвольно. Недостаток этой системы — невозможность независимого изменения разности потенциалов отдельных линз.

В «явнополюсных» электрических квадрупольных линзах с симметричной подачей питания на два противоположных электрода подводится потенциал  $+V$ , а на два

других —  $-V$ . При этом возбуждение линз связано с величиной  $V$  в релятивистском случае по формулам (2.11) или (2.13), а в нерелятивистском по формулам (2.12) и (2.13 а). (Во всех этих выражениях нужно положить  $W = 0$ .) Отсюда, задаваясь требуемой для фокусировки величиной  $\beta_E^2$ , можно определить необходимое напряжение на электродах.

Если пренебречь зависимостью распределения поля от координаты  $z$ , т. е. аппроксимировать его прямоугольником, то напряжение на электродах  $V$  будет связано с модулем градиента напряженности поля  $G_E$  в приосевой области следующим образом [см. выражение (1.16)]:

$$V = \frac{1}{2K_2} G_E r_E^2.$$

В поле с гиперболическими электродами  $K_2 = 1$  и соотношение остается верным для всего межэлектродного пространства.

В ряде случаев бывает более удобна несимметричная по отношению к земле подача напряжения на электроды. Поле внутри линзы не изменится, если вместо  $-V$  подать на электроды нуль, а вместо  $+V$  подать  $+2V$ . Можно заземлить электроды, на которых было  $+V$ , тогда на вторую пару нужно подать  $-2V$ . Потенциал на оси линзы в первом случае будет равен  $+V$ , во втором  $-V$ . При несимметричной подаче напряжения на краях линзы возникают дополнительные поля, которые можно рассматривать как результат наложения осесимметричной и октупольной линз. Положительно заряженная частица в первом случае будет тормозиться на входе и ускоряться на выходе. Во втором — эффект от влияния краев противоположен. Так как энергия заряженной частицы в линзе отличается от той, которая была бы при симметричной подаче напряжения, то это отразится на величине возбуждения  $\beta_E^2$ , а следовательно, и на фокусировке первого порядка. В формулы (2.11) и (2.12) для  $\beta_E^2$  нужно теперь подставлять не  $\Phi = -\Phi_0$ , а  $\Phi = -\Phi_0 \pm V$ . Обычно эта поправка невелика, так как  $V$  значительно меньше  $|\Phi_0|$ .

Несимметричное питание квадрупольных линз влияет также на их aberrации.

Некоторое преимущество несимметричной подачи напряжения — возможность питания линз от одного источ-

Таблица 6

$R/r_M$	Место измерения	$3\frac{\Omega_6}{\Omega_2} \cdot 10^4$	$5\frac{\Omega_{10}}{\Omega_2} \cdot 10^4$
1,250	В центральной зоне	202 ± 3	-124 ± 5
	На краю	-21 ± 8	-81 ± 8
1,125	В центральной зоне	-51 ± 2	-125 ± 5
	На краю	-206 ± 8	-78 ± 8

имеется довольно существенное уменьшение градиента напряженности поля: на 8% по оси  $x$  и на 4% по диагонали  $x = y$ .

Ярмо линзы может иметь не только квадратную, но и круглую форму. Однако квадратное ярмо легче изготовить и с ним проще получить большую точность. Использование ярма, не имеющего четырех плоскостей симметрии, вносит некоторую несимметрию в поле линзы, что необходимо учитывать.

Иногда вместо четырех катушек возбуждения (по одной на каждый полюс) применяют только две, надетые на противоположные полюса. Это также вносит дополнительную несимметрию в поле линзы.

Полюсные наконечники можно делать отдельно от полюсов, облегчая таким образом их изготовление. В некоторых линзах предусматривается возможность смены полюсных наконечников, что позволяет, в частности, изменять апертуру линзы. Выбор размеров полюсов зависит от мощности, потребной для питания линзы. Размер и форма полюсов определяют размер окон для обмотки. Величина возбуждения линзы  $\beta_M^2$  с заданной апертурой определяет необходимое число ампервитков  $w I$ . При заданных ампервитках мощность питания обратно пропорциональна площади сечения обмотки. Если увеличить площадь сечения, мощность питания (а следовательно, и стоимость) уменьшится. Однако при этом возрастают размеры линзы, вес и, следовательно, стоимость железа полюсов и ярма, меди для обмоток. Дополнительное неудобство при этом — трудность размещения и работы с большими линзами. Особенно остро стоит этот вопрос при необходимости фокусировать частицы высоких энергий, когда требуются предельно достижимые величи-

ника с ускоряющей системой. При этом колебания напряжения источника сказываются одинаковым образом на всей системе (при сравнительно малых скоростях заряженных частиц). Отношение  $V/\Phi$  остается постоянным, и оптические свойства системы не меняются.

Одна из наиболее простых конструкций магнитных явнополюсных квадрупольных линз представлена на рис. 1, б. Обычные соотношения ее размеров таковы: радиус закругления полюсного наконечника  $R \approx 1,15r_M$ , размеры полюса  $b = c = 2r_M$ . Ширину ярма  $g$  выбирают несколько больше половины ширины полюса, чтобы устраниТЬ возможность насыщения в ярме ( $g \approx 1,2-1,3r_M$ ).

Измерения поля линзы, изображенной на рис. 1, б, были проведены для сменных полюсных наконечников с радиусом  $R=1,125 r_M$  и  $R=1,250 r_M$  ( $r_M = 2,54$  см) [26]. Точность их изготовления и установки равна  $\pm 0,025$  мм. Длина полюса  $c = 3r_M = 7,62$  см, ширина  $b = 2r_M = 5,08$  см. Ширина ярма  $g$  равна ширине полюса  $b$ . Полная длина каждой внутренней стороны ярма равнялась 25,4 см, а длина линзы 20,3 см. Четыре катушки трапециoidalной формы были изготовлены из изолированных медных трубок, по которым для охлаждения пропускали воду.

Измерения поля линзы (как в центральной зоне, так и на краю) проводились при помощи врачающихся в магнитном поле катушек. Величина радиальной составляющей поля резко падает вблизи края линзы. На расстоянии 2,54 см от края внутри линзы радиальная составляющая поля по величине равна ее значению в центре. На расстоянии 0,64 см от края снаружи линзы поле уменьшается в два раза, а на расстоянии 8,9 см его величина становится меньше 1% напряженности поля в центре.

Результаты измерения высших гармоник в радиальной составляющей напряженности поля представлены в табл. 6.

Из таблицы следует, что при  $R \approx 1,15r_M$  коэффициент  $\Omega_6 = 0$ . При этом радиусе изменение градиента напряженности магнитного поля не превышает  $\pm 1\%$  на расстоянии от оси вплоть до  $r = 0,8r_M$ . Этот результат хорошо согласуется с оптимальным значением  $R/r_M$ , вычисленным в работе [25]. Измерения, проведенные в работе [125] для  $R/r_M = 1,148$  и  $b/r_M = 2$ , дали значения  $3\Omega_6/\Omega_2 = (7,6 \pm 0,2) \cdot 10^{-4}$  и  $5\Omega_{10}/\Omega_2 = (-206 \pm 5) \cdot 10^{-4}$  в центральной зоне.

Если  $b/r_M = 2,5$  и  $R/r_M = 1,15$ , результаты измерений, приведенные в работе [8], показывают, что для  $r = r_M$

ны магнитных полей. В каждом конкретном случае выбирается некоторое компромиссное решение.

Параметры квадрупольных линз, применяемых в ряде лабораторий для работы с ускорителями, приведены в табл. 7.

Связь между возбуждением магнитной линзы  $\beta_M^2$ , ее геометрическими параметрами и ампервитками дается фор-

Таблица 7

Лаборатория и ускоритель	Параметры квадрупольных линз				
	Радиус апертуры $r_M$ , см	Длина полюсов $l$ , см	Полная ширина, высота, см	Градиент напряженности поля $G_M$ , эрст/см	Потребляемая мощность, квт
Беркли, «Беватрон», 6,4 Гэв	5	81,3 (триплет)	61	1380 (1650)	27 (44)
	10	162,5 (триплет)	60	710 (985)	154 (350)
	10	81,3	87,6	710 (1220)	21 (90)
	10	40,6	87,6	710 (1220)	28 (55)
ЦЕРН, сильнофокусирующий синхрофазotron, 25 Гэв; фазotron 0,6 Гэв	10	100	113	1100	100
	10	200	113	1100	140
	10	22	108	1000	24
	15,2	76,2	124,5	660	85
Брукхейвен, сильнофокусирующий синхрофазotron, 30 Гэв;	10	122	86,4	1000	75
	15,2	152	124,5	660	125
	15,2	152	124,5	660	140
	10	40,6	—	870	24
«Космоптрон», 3 Гэв	10	81,3	—	885 (1150)	44 (105)
	15,5	102	—	650	80
	13	91,4	132	1000	150
Аргоннская лаборатория, синхрофазotron с нулевым градиентом, 12,5 Гэв	10	76,2	147	1000 (500)	26 (5,4)
	10	38,1	115	1000 (500)	34 (6,6)
	10	76,2	71	1000 (500)	113 (21)
	15	107,2	134	275 (550) (780)	25 (100) (200)
Лаборатория Резерфорда, «Нимрод», 7 Гэв	8	54,8	70	490 (990) (1400)	25 (100) (200)
	8	104,8	70	490 (990) (1400)	25 (100) (200)
	17,6	66,6	146	230 (460) (650)	25 (100) (200)
	17,6	66,6	146	230 (460) (650)	25 (100) (200)

мулами (2.11)–(2.13) и (2.13а). В этих формулах нужно положить  $V = 0$  и учесть, что магнитный скалярный потенциал связан с ампервитками выражением (1.9) или (1.10). Если пользоваться выражением (1.9), то число ампервитков линзы нужно увеличить на 20% по сравнению с расчетным, чтобы скомпенсировать потери в железе полюсов и ярма.

Градиент напряженности магнитного поля в приосевой области линзы вблизи ее середины равен

$$G_M = \frac{2WN_2}{r_M^2} = \frac{0,8\pi wIN_2}{r_M^2}. \quad (6.3)$$

Если полюсные наконечники линзы имеют форму гиперболических цилиндров, то  $N_2 = 1$ , и выражение (6.3) остается верным для всей апертуры линзы. В этом случае на радиусе  $r = r_M$  значение напряженности поля  $H_M = G_M r_M$ , и из (6.3) следует:

$$wI = \frac{1}{0,8\pi} H_M r_M. \quad (6.4)$$

Максимальная величина индукции в линзе должна быть меньше индукции насыщения  $B_s$ . Для низкоуглеродистой стали, из которой обычно изготавливают линзы,  $B_s \approx 20$  кгс. Измерения показывают, что максимального значения индукция достигает обычно в центре полюса, ближе к ярму. К краю полюса она уменьшается примерно вдвое, т. е. при  $r = r_M$   $B \approx 10$  кгс. Из выражения (6.4) получим, что при таком значении  $B$  и  $r_M = 10$  см (обычном радиусе апертуры для линз, работающих с ускорителями) расчетное число ампервитков на полюс  $wI = 4 \cdot 10^4$ , если  $\sigma = 1$ , а следовательно, полная величина  $wI \approx 5 \cdot 10^4$ .

Между практически достижимой величиной градиента напряженности поля и апертурой линзы существует обратная зависимость, которую приближенно можно записать так [16]:

$$G_M = 10/r_M. \quad (6.5)$$

Здесь  $G_M$  выражено в кэрст/см, а  $r_M$  — в см. В линзах с  $r_M = 10$  см  $G_M = 1$  кэрст/см.

Сечение одной из типичных квадрупольных линз, используемых в ряде лабораторий (например, в ЦЕРНе), дано на рис. 54, а. Профиль ее полюсного наконечника имеет

в центре форму окружности радиусом  $R = 1,064 r_M$ . На краях он переходит в касательные к окружности прямые, которые способствуют улучшению линейности поля. Наклон прямых подобран так, чтобы поле было линейным в области, составляющей 75% всего межполюсного зазора (поле обычно считается линейным с достаточной точностью для области, в которой отклонение его от линейного не

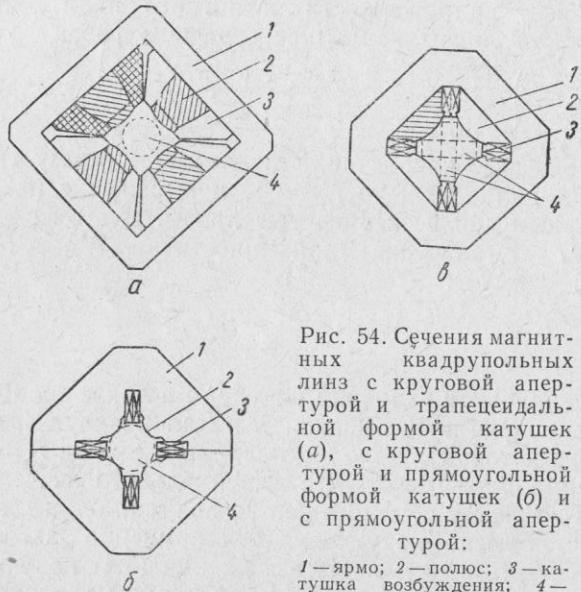
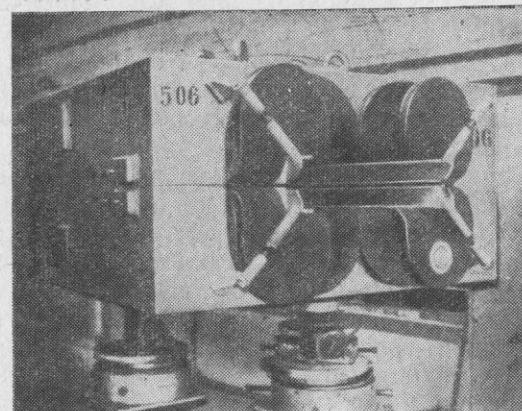


Рис. 54. Сечения магнитных квадрупольных линз с круговой апертурой и трапецидальной формой катушек (а), с круговой апертурой и прямоугольной формой катушек (б) и с прямоугольной апертурой:

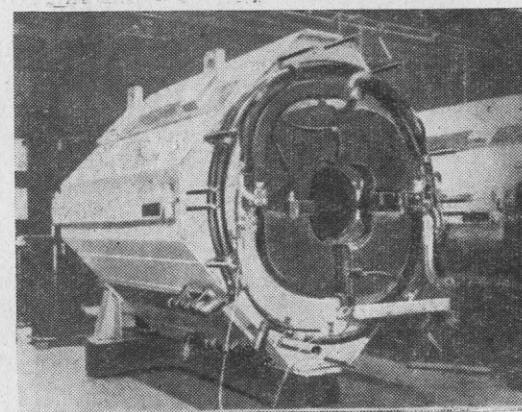
1 — ярмо; 2 — полюс; 3 — катушка возбуждения; 4 — «используемая апертура».

превышает 0,1%). Площадь сечения катушек довольно велика, и они отодвинуты вглубь от используемой апертуры, чтобы уменьшить их влияние на поле. Однако экономически удалять катушки от апертуры невыгодно, так как мощность питания при этом возрастает.

Полюса в линзе несколько расширяются по направлению к ярму, так как через них проходит не только полезный магнитный поток, замыкающийся через полюсные наконечники и апертуру линзы, но и магнитный поток, выходящий через боковые стороны полюсов. Поэтому суммарный магнитный поток в полюсе растет от полюсного наконечника к ярму. Для того чтобы плотность его была примерно постоянна и насыщение в железе полюса вблизи



а



б

Рис. 55. Магнитные квадрупольные линзы с прямоугольной (а) и с круглой (б) апертурой, используемые для проведения экспериментов на сильнофокусирующем синхрофазотроне в Брукхайвене.

ярма не лимитировало предельно достижимое значение индукции на поверхности полюсного наконечника, площадь сечения полюса в направлении ярма увеличивают.

Удобный метод для определения формы полюса — измерение магнитного потока при помощи модели полюса на проводящей бумаге или металлической пластинке. Форму полюса меняют до тех пор, пока плотность потока не станет примерно однородной по всему полюсу. Как правило, достаточно двух-трех моделей.

Дальнейшие исследования показали, что если учесть влияние на поле в апертуре линзы катушек возбуждения, то можно подобрать такую форму профиля железа и обмоток, при которой поле линейно с довольно высокой степенью точности [18, 39]. Очевидно, что для достижения наибольшей эффективности конструкции, т. е. максимально возможной величины градиента напряженности поля при данной апертуре, минимальной потребляемой мощности устранения насыщения и т. д., полюсные наконечники и катушки возбуждения должны находиться как можно ближе к используемой апертуре. Этот вопрос довольно подробно рассмотрен в гл. I. Профиль железа и катушек имеет довольно сложную форму. Изготовление таких линз технически трудно, особенно из-за высоких требований к точности изготовления катушек. Наиболее приемлемы в этом отношении линзы с прямоугольной апертурой (см. работу [40]), которые и осуществлены в нескольких вариантах [39, 126].

Линзы с прямоугольной апертурой, используемые для проведения экспериментов на брукхейвенском сильнофокусирующем синхрофазотроне, показаны на рис. 55, а [39]. Их параметры: размеры апертуры по горизонтали 61 см, по вертикали 15,2 см. Длина равна 91,4 см. Ширина боковых катушек 15,2 см, высота верхних и нижних 3,8 см. Ввиду малой ширины катушек водяное охлаждение их затруднено и поэтому максимально достижимая величина градиента напряженности около 470 эрст/см. Магнитное поле линзы полностью определяется формой катушек и точностью их изготовления. Так как достижимая точность изготовления катушек значительно меньше точности изготовления полюсных наконечников, то в выражении для напряженности магнитного поля появляются нелинейные члены.

В конструкции явнополюсной квадрупольной линзы с круговой апертурой, также используемой для работы с

сильнофокусирующем брукхейвенским синхрофазотроном (рис. 55, б), сделана попытка компромиссного решения вопроса. Так как было найдено, что чем шире полюса и уже катушки, тем лучше линейность поля, то в сечении линзы, показанном на рис. 54 б, катушки имеют прямоугольную форму, что облегчает их изготовление и увеличивает точность. Они подходят вплотную к апертуре линзы. Размеры катушек и форма полюсных наконечников подобраны так, чтобы получить с максимально возможной точностью линейное поле в круговой апертуре. Результирующее поле было рассчитано методом конечных разностей [10, 43], промерено при помощи катушек и дало хорошее согласие расчета и эксперимента. Измерение нелинейности поля при помощи катушек, помещенных вплотную к полюсным наконечникам, показало, что вклад в напряженность поля от шестой гармоники составляет 0,5—0,7% основной второй гармоники, а вклад десятой гармоники 0,4%. Основные параметры этих линз приведены в табл. 7.

Следует обратить внимание на то, что в обоих описанных типах линз (как это видно на рис. 55) выступающие за линзы концы катушек возбуждения отогнуты и прижаты к железному ярму. Это уменьшает поле рассеяния на концах линз.

Чтобы можно было заменять вышедшую из строя квадрупольную линзу без изменения оптических свойств всей системы, линзы одинакового типа должны быть идентичны с большой степенью точности. Измерения показали, что параметры линз совпадают в пределах точности измерений (т. е. до 0,02%).

На рис. 54, в дано сечение магнитной квадрупольной линзы, используемой для работы с синхротроном на 6 Гэв (DESY, Гамбург) [18]. Форма полюсов и катушек линзы подобрана таким образом, чтобы получить хорошую линейность поля не в круговой области, а в крестообразной, вытянутой вдоль осей  $x$  и  $y$ . (Это связано с тем, что сечение пучка, фокусируемого этими линзами, имеет сильно вытянутую форму.) Исходя из расчета формы поперечного сечения пучка, отношение длины апертуры  $2a$  к ее ширине  $2b$  выбрано равным  $a/b = 4$  (при  $ab = 1/2 r_m^2$ ).

Сечение катушек возбуждения, так же как и у линз, изображенных на рис. 54, б, имеет вид узких прямоугольников. Катушки вплотную подходят к апертуре. Ввиду

малости площади сечения такие линзы потребляют большую мощность, чем линзы, изображенные на рис. 54, а. Вблизи апертуры в катушках сделаны небольшие вырезы, в которые заходят полюсные наконечники.

Полюса линз значительно расширяются к ярму. Профиль полюсного наконечника в середине имеет форму гиперболы. На краях его добавлены небольшие выступы для улучшения линейности поля на концах апертуры. Оптимальная форма выступов определена экспериментально. Точность изготовления профиля полюсного наконечника составляет  $\pm 0,02$  мм, и после сборки он совпадает с расчетным с точностью до  $+0,03$  мм. В то же время точность установки лицевой, обращенной к апертуре стороны катушки составляет только  $\pm 0,5$  мм.

Ширина ярма определялась магнитным потоком, идущим изнутри и с концов линзы. Внутри линзы в плоскости симметрии  $y = 0$  напряженность поля  $H_y$  растет линейно с ростом  $x$  и достигает значения  $H_{\max}$  на лицевой стороне катушки. Затем, проходя через область, занятую катушкой, поле постепенно уменьшается и при  $x \approx 2a$  (длина катушки принята равной  $a$ )  $H_y = 0$  снова. Поэтому если выбрать ширину ярма равной  $a$  и пренебречь магнитным потоком от краев линз, то индукция в ярме будет  $B_{\max} = \mu_0 H_{\max}$  ( $\mu_0 = 1$ ). Так как достижение максимальной индукции в ярме нежелательно и необходимо учесть поток рассеяния, то ширина ярма сделана на 20% больше  $a$ .

Основные параметры описанных линз даны в табл. 7.

Распределение магнитного поля в линзе измеряли датчиком Холла. Результаты измерений приведены на рис. 56 и 57. На рис. 57 сверху показана детально форма полюсного наконечника в прилегающей к апертуре части катушки. Штриховыми линиями дан контур вакуумной камеры. На рис. 56 построена зависимость от силы тока в катушках градиента напряженности поля  $G_M$  и его отклонение от линейности. На рис. 57 внизу дана относительная нелинейность поля  $H_y$  в плоскости  $y = 0$  при различных возбуждениях.

Для значений индукции, лежащих ниже насыщения ( $G_M \leq 1$  кэрст/см), поле внутри используемой апертуры линейно с точностью до  $1,5 \cdot 10^{-3}$ . При более высоких возбуждениях выступы на полюсных наконечниках, корректирующие поле, насыщаются, и нелинейность поля значительно возрастает. Следует вообще иметь в виду, что не-

равномерное насыщение железа, не учитываемое, как правило, в расчетах и измерениях поля на моделях, может существенно исказить картину распределения поля.

Остановимся еще вкратце на расчете катушек возбуждения для линз, потребляющих значительную мощность. Связь между расчетными ампервитками на полюс  $wI$  и градиентом

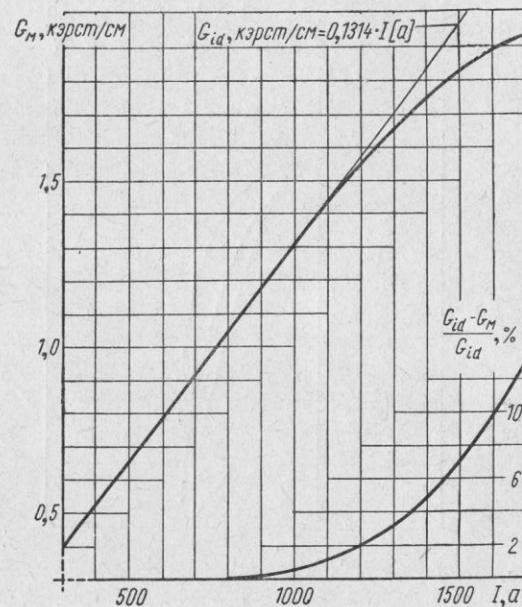
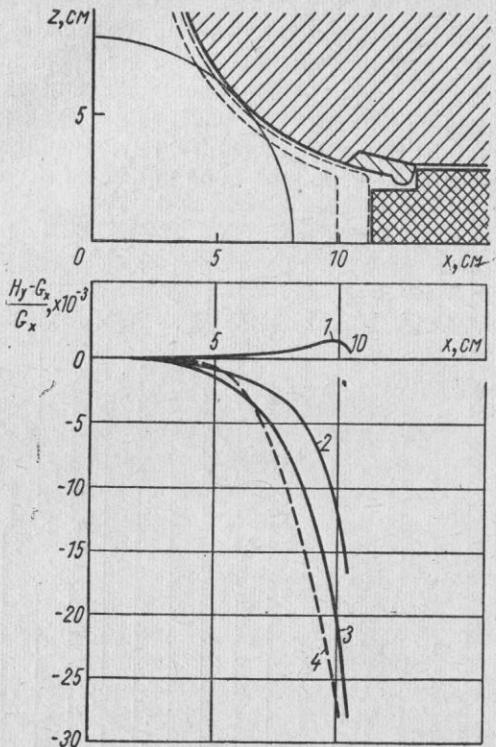


Рис. 56. Зависимость  $G_M$  в центре линзы от силы тока в катушках  $I$ . В нижней части рисунка построено относительное отклонение значения  $G_M$  от линейной зависимости.

напряженности поля дается формулой (6.3). При  $r_M = 10$  см обычное число ампервитков на полюс равно  $(wI)_{\max} \approx 5 \cdot 10^4$  с силой тока  $I = 5 \div 15 \cdot 10^2$  а и количеством витков 35—100.

Расчет площади сечения катушки из медных трубок, по которым протекает вода, нужно проводить с учетом того, что приблизительно 50% площади занимают изоляция и охлаждение. Плотность тока в таких катушках не должна превышать  $30$  а/мм<sup>2</sup>. Для того чтобы требуемый перепад давления воды в катушке был не слишком велик, в ней выполняют несколько параллельных цепей охлаждения.



Фиг. 57. Относительная нелинейность  $H_y$  в плоскости  $y = 0$  при различных возбуждениях  $G_M$  линзы:

1 —  $G_M = 1$  кэрст/см; 2 —  $G_M = 1,55$  кэрст/см; 3 —  $G_M = 1,86$  кэрст/см; 4 —  $G_M = 0,52$  кэрст/см. Сплошные кривые — результат измерений в плоскости  $z = 0$ , штриховая — на краю линзы.

Зная выделяемую в катушках мощность, можно определить требуемую скорость воды. Для расчета перепада давления рекомендуется следующая формула [18]:

$$\Delta p = 5 \cdot 10^{-5} l \frac{v^{1,75}}{d^{1,25}}, \quad (6.6)$$

где  $\Delta p$  — перепад давления, атм;  $l$  — длина и  $d$  — диаметр отверстия трубы, м;  $v$  — скорость воды, м/сек. 200

Если линзы работают с переменными магнитными полями, то их магнитная цепь должна быть собрана из отдельных, изолированных друг от друга пластин толщиной 1—2 мм.

Квадрупольные магнитные линзы с несимметричным расположением полюсов, обеспечивающим эллиптическую рабочую апертуру, описаны в работе [127]. Они рассчитаны на работу в позитрон-электронном накопительном кольце.

Линзы с большими апертурой и градиентом напряженности поля, но с габаритами меньшими, чем у обычных квадрупольных линз, описаны в работе [128]. Рассчитанное распределение поля осуществляется в них с помощью нескольких обмоток, уложенных в разрезы полюсов.

Параметры выпускаемых нашей промышленностью стандартных магнитных квадрупольных линз приведены в работе [129]. Радиусы их апертуры лежат в пределах  $r_M = 2 \div 13$  см, длины полюсных наконечников  $l = 10 \div 90$  см, значения градиентов  $G_M = 0,2 \div 2,7$  кэрст/см.

Несколько специфичны требования к конструкции магнитных квадрупольных линз, применяемых в линейных ускорителях с жесткой фокусировкой. Их размещают внутри пролетных трубок, которые находятся внутри высокочастотного резонатора. Диаметр пролетных трубок в начальной части ускорителя, где скорость частиц меняется в несколько раз, должен быть в 2—2,5 раза больше диаметра трубок в его конечной части. Поэтому диаметр этих трубок должен быть достаточно мал. В то же время апертура квадрупольных линз должна быть достаточно большой для уменьшения потерь частиц пучка. Отсюда возникает задача создания квадрупольных линз с наименьшим отношением наружного диаметра линзы к диаметру ее апертуры при заданном градиенте напряженности поля и допустимой величине его нелинейности.

Отношение диаметров определяется необходимой для обеспечения заданного градиента площадью сечения катушек возбуждения. В работе [130] проведено сравнение квадрупольных линз, профиль полюсных наконечников которых имеет форму оборванной гиперболы и форму отрезка прямой (плоские полюса с подавленной шестой гармоникой). Рассмотрение показывает, что при одинаковой апертуре и  $G_M$  внешние размеры линз с плоскими полюсами всегда меньше. Использование их безусловно более выгодно, если допустимая нелинейность поля на краю апертуры 5%.

Тогда можно полностью использовать апертуру линз с плоскими полюсами. Если допустимая нелинейность поля имеет величину порядка долей процента, то приходится применять либо линзу с гиперболическими полюсами и далеко расположенной точкой обрыва (что приводит к большим размерам линзы), либо использовать только часть апертуры линзы с плоскими полюсами. Однако при этом значительно возрастает число ее ампервитков.

Как уже говорилось относительно безжелезных магнитных линз, их преимуществом по сравнению с описанными выше линзами с железом является большая простота изготовления, меньший вес, линейная связь поля с током и т. д. Недостаток — слишком маленькие значения предельно достижимых градиентов и меньшая возможная точность изготовления.

Ввиду сравнительно малой фокусирующей силы безжелезные квадрупольные линзы находят применение в основном в электронно-лучевых трубках и других установках, в которых энергия заряженных частиц сравнительно невелика [131, 132]. Конструктивно они выполняются в форме двух или четырех прямоугольных рамок с током (рис. 12) или в виде секционированного тороида, витки которого имеют вытянутую форму. Тороид имеет четыре секции, причем токи в соседних секциях текут в противоположных направлениях.

Большие возможности открывает использование в безжелезных магнитных линзах новых сверхпроводящих материалов. Описаны первые сверхпроводящие линзы, работающие при гелиевых температурах, в которых достигается поле порядка нескольких десятков килоэрстед. В работе [133], например, описана линза, состоящая из двух соленоидов небольшой длины, изготовленных из сверхпроводящего сплава  $Nb_3Sn$ . При согласном включении соленоидов получается поле напряженностью до 60 кэрст, при включении их навстречу градиент напряженности поля достигает 26 кэрст/см.

Предварительные измерения на специально сконструированных сверхпроводящих квадрупольных линзах показали [134], что в них могут быть получены градиенты 10 кэрст/см и больше. В этих линзах использовались катушки из сплава ниобия с оловом, охлаждаемые жидким гелием до температуры 4° К.

Таким образом, в линзах с катушками из сверхпрово-

дящих материалов градиенты напряженности поля по крайней мере на порядок больше, чем в рассмотренных квадрупольных линзах с железом. Это дает возможность построить квадрупольные линзы очень большой силы (с малым фокусным расстоянием) при сравнительно небольших размерах и малой потребляемой мощности.

Один из основных параметров квадрупольной линзы — ее эффективная длина  $L$ . Она зависит от длины электродов или полюсов и от таких конструктивных особенностей линз, как отношение апертуры линзы к ее длине, форма электродов (или полюсов), форма торцов линзы и т. д. Все эти параметры определяют форму кривой спада поля вдоль оси  $z$ , а следовательно, и эффективную длину.

Выражение для определения эффективной длины поля по зависимости поперечной составляющей напряженности от координаты приведено в гл. 1 [формулы (1.71), (1.72)].

На рис. 58 даны измеренные зависимости напряженности поля от координаты  $z$  для магнитной линзы [8]. Измерения проведены для квадрупольной линзы обычной конструкции (см. рис. 1,б). Профиль полюсных наконечников имеет форму части окружности радиусом  $R/r_M = 1,15$ . Величина  $r_M = 4$  см, ширина полюса равна 10 см. Длина полюсов  $l = 15$  см. На рис. 58,а приведены кривые распределений  $H_y(z)$  в плоскости  $xOz$  при разных величинах расстояния от оси. На рис. 58,б даны кривые  $H_r(z)$  в диагональной плоскости  $x = y$ , также на разных расстояниях от оси. Как видно из рисунков, при малых расстояниях от оси зависимости поперечных составляющих напряженности поля в обоих плоскостях одинаковы. В центральной части кривых имеется плато длиной примерно 0,5 $l$ . Затем начинается постепенный спад поля. Характер зависимости  $H_y(z)$  в плоскости  $xOz$  остается практически неизменным и для больших расстояний от оси. Характер кривой  $H_r(z)$  в плоскости  $x = y$  при  $r > 0,5 r_M$  изменяется (рис. 58,б). Вблизи краев полюсов наблюдается рост поля, а затем более резкий спад его. На рис. 58,в даны кривые  $H_z(z)$  в плоскости  $xOz$ . Они показывают изменение продольной составляющей поля рассеяния, образующегося на краях линзы.

Как видно из сравнения рис. 58,а и б с рис. 13,б, кривые, представляющие зависимость поперечной составляющей напряженности поля от  $z$  в приосевой области линзы, близки по форме к составному колоколу (1.78). Поэтому эффективная длина подобного типа линз довольно хорошо описывается

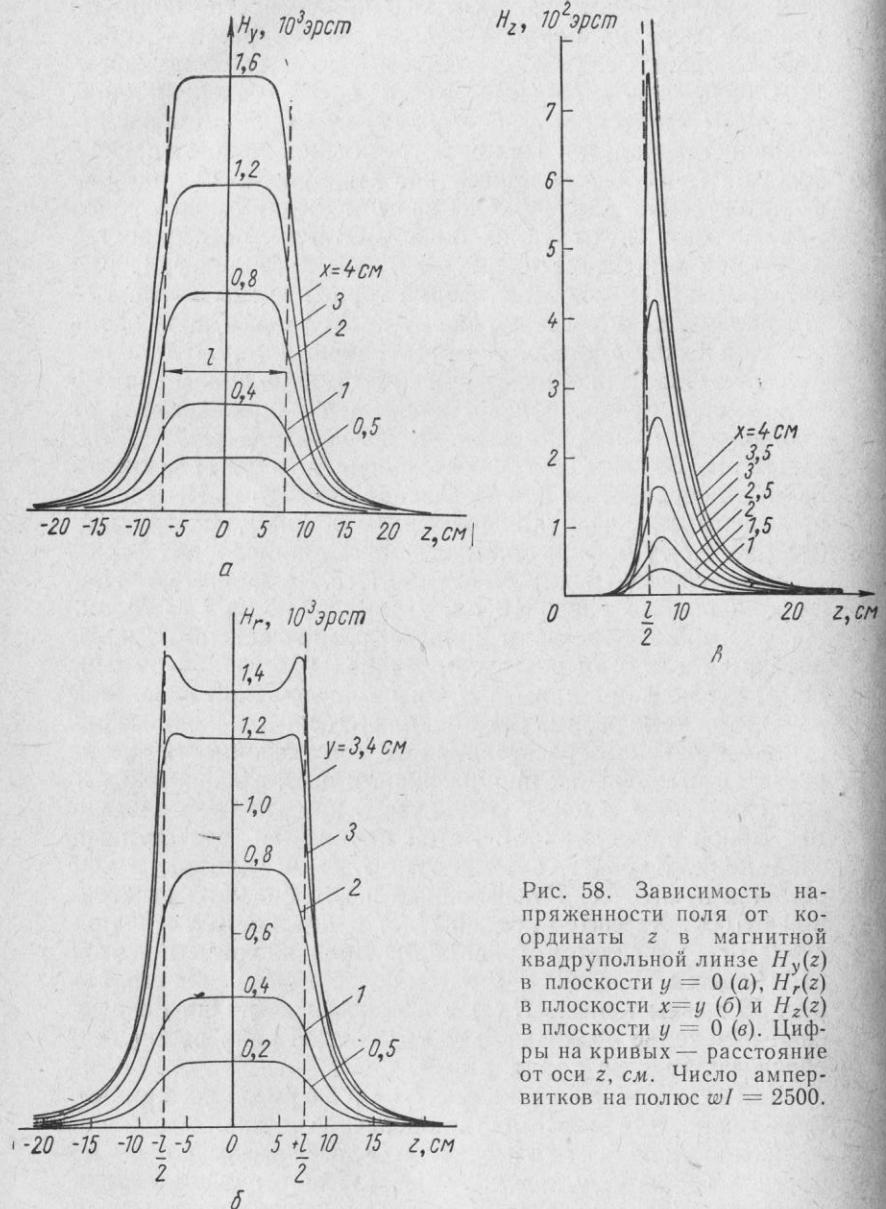


Рис. 58. Зависимость напряженности поля от координаты  $z$  в магнитной квадрупольной линзе  $H_y(z)$  в плоскости  $y = 0$  (а),  $H_r(z)$  в плоскости  $x = y$  (б) и  $H_z(z)$  в плоскости  $y = 0$  (в). Цифры на кривых — расстояние от оси  $z$ , см. Число ампервитков на полюс  $wl = 2500$ .

формулой (1.79). Типичные значения  $z_k$  и  $d$ , полученные в результате измерений, таковы [16]:  $2z_k = l - 1,25 r_M$ ;  $d = 1,47 r_M$ . При этом

$$L = l(1 + 1,06 r_M/l). \quad (6.7)$$

Измерения, проведенные в неявнополюсной магнитной линзе с прямоугольной апертурой при помощи гибкого проводника с током, показали, что ее эффективная длина  $L = l + 2b$  (см. работу [40]), где  $l$  — механическая длина линзы, а  $2b$  — меньший размер апертуры (см. рис. 9в).

В некоторых конструкциях линз эффективная длина поля равна механической длине линзы ( $L = l$ ). Это имеет место в электрических линзах с вогнутыми электродами и в магнитных безжелезных линзах, составленных из рамок с отогнутыми краями (см. гл. 1). Если в системе квадрупольных линз расстояния между ними недостаточно велики, то происходит наложение полей. Линзы расположены таким образом, что их собирающие и рассеивающие плоскости чередуются, поэтому поперечные составляющие напряженности полей соседних линз имеют разный знак. Зависимость результирующих поперечных составляющих поля от  $z$  в интервалах между линзами приближается к линейной.

Аналогичного результата можно добиться, помещая недалеко от краев электрической линзы пластины металлические (заземленные при симметричном питании линз) или ферромагнитные для магнитной линзы. Эти пластины выполняют роль зеркал, между ними и линзой создается поле, эквивалентное полюсу, создаваемому расположенными симметрично за ними линзами с противоположной полярностью электродов или полюсов.

В магнитной линзе распределение поля в краевых зонах при этом близко к линейному, если закруглить торцы ее полюсных наконечников по гиперболе или окружности (как указано в работе [18]), что предотвращает также возможность их насыщения.

Отверстия в пластинах, необходимые для прохода пучка, должны быть не слишком большими, чтобы не искажать линейность поля. Эффективная длина такого поля равна сумме длин параллельного оси  $z$  участка кривой  $H(z)$  и одного линейного участка.

Для определения параметров квадрупольных линз можно использовать как расчетные, так и экспериментальные ме-

тоды. Иногда оба метода применяют совместно, например измеряют поле и на основании этого измерения рассчитывают электронно-оптические свойства линзы. Иногда приближенный расчет применяют для получения первоначальных ориентировочных данных, а затем проверяют и уточняют результаты измерениями на готовой линзе.

Как следует из гл. I, расчет полей квадрупольных линз в аналитическом виде возможен только для небольшого числа случаев. Численные методы расчета обладают большой общностью, но очень громоздки. К тому же в обоих случаях принимают, как правило, ряд упрощающих предположений (например, магнитную проницаемость железа считают бесконечно большой). Поэтому для определения полей большое значение имеют экспериментальные методы.

Эти методы применяют часто также для нахождения траекторий заряженных частиц в линзах. Существуют экспериментальные методики измерения электронно-оптических характеристик линз. Разработаны методы измерения поля и траекторий на моделях и непосредственно на линзах (в случае магнитных линз). Рассмотрим методы, наиболее часто используемые для квадрупольных линз.

Моделирующим устройством служит электролитическая ванна, резиновая мембрана, а также электроинтеграторы на сетке сопротивлений и проводящей бумаге (иногда вместо бумаги используют тонкие металлические пластиинки).

Моделирование на электролитической ванне — один из наиболее эффективных способов нахождения распределения поля. Его можно применять для определения трехмерных полей и полей с учетом пространственного заряда.

Метод электролитической ванны основан на подобии эквидистантных поверхностей в однородном электролите и в вакууме (или в воздухе) при сохранении подобия формы электродов электрических систем или полюсов магнитных систем и одинаковом относительном распределении на них скалярных потенциалов. Если моделируют магнитные поля, то принимают, что магнитная проницаемость железа бесконечна. Насыщение железа отсутствует, и поверхности полюсов эквидистантны.

В вакууме, в областях, где отсутствуют заряды и токи, электрический и магнитный потенциалы определяются уравнением Лапласа  $\Delta\phi = 0$ ,  $\Delta\omega = 0$  и граничными условиями, которые определяются формой электродов и полюсов, а также потенциалами на них. Потенциал в однородном элек-

тролите также удовлетворяет уравнению Лапласа. Это следует из закона непрерывности тока (в стационарном случае)  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$  и дифференциального закона Ома  $\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E}$ . Здесь  $\mathbf{j}$  — плотность тока;  $\lambda$  — постоянная удельная проводимость электролита;  $\mathbf{E}$  — напряженность поля в электролите. Отсюда имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = \lambda \operatorname{div} \mathbf{E} = -\lambda \operatorname{div} \operatorname{grad} \phi = -\lambda \nabla^2 \phi = 0. \quad (6.8)$$

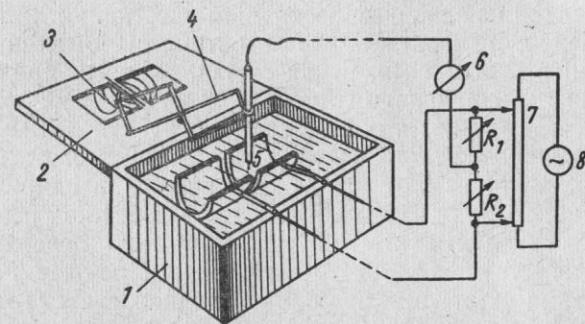


Рис. 59. Общий вид электролитической ванны:

1 — корпус ванны; 2 — чертежная доска; 3 — карандаш; 4 — пантомограф; 5 — острие зонда; 6 — регистрирующий прибор; 7 — потенциометр; 8 — источник переменного напряжения;  $R_1$  и  $R_2$  — переменные сопротивления для регулировки подаваемого на зонд напряжения.

Ввиду единственности решения уравнения Лапласа для заданных граничных условий распределения потенциалов в электролите и в вакууме при одинаковых граничных условиях совпадают.

Благодаря однородности уравнения Лапласа относительно потенциала и координат моделирование полей возможно с изменением масштаба и пропорциональным изменением потенциалов на электродах модели. Картина распределения поля от этого не меняется.

Общий вид электролитической ванны схематически представлен на рис. 59. Модель системы погружают в электролит и подают на нее заданные потенциалы. Потенциал в различных точках электролита меряют зондом, представляющим собой металлическую проволочку, изолированную, за исключением ее конца, стеклянной трубкой. Обычно применяют компенсационный метод измерения по-

тенциала. На зонд подается определенный потенциал от мостиковой схемы. Затем зонд перемещают до тех пор, пока ток в регистрирующем приборе не станет равным нулю. Очевидно, что потенциал электролита в точке, где находится острье зонда, равен потенциальному на зонд.

На ванне можно измерять не только распределение потенциала, но и напряженность поля, что весьма существенно при исследовании квадрупольных линз. Для этого зонд должен иметь два острия, изолированных один от другого, находящихся на заданном небольшом расстоянии. Разность потенциалов, измеряемых этими остриями, отнесенная к расстоянию между ними, равна составляющей напряженности поля в направлении прямой, соединяющей острия.

Как стенки ванны, так и поверхность электролита влияют на распределение поля, создаваемое в ванне исследуемой моделью. Если стенки ванны сделаны из изолирующего материала, то линии тока вблизи нее, так же как и вблизи поверхности электролита, идут параллельно поверхности. Это соответствует тому, что поверхности служат как бы плоскостями симметрии поля. Электродная система модели дополняется ее зеркальными отражениями в стенах и на границе электролита с воздухом.

Если стенки ванны металлические, то линии тока перпендикулярны к ним. В этом случае влияние стенки соответствует добавлению симметрично расположенной электродной системы с равными по величине, но противоположными по знаку потенциалами (потенциал стенки считается равным нулю).

Явление зеркального отражения можно использовать, если моделируются симметричные системы. Тогда можно изготовить половину модели, разрезанную по ее плоскости симметрии, и совместить эту плоскость с поверхностью электролита. При этом измерение поля в плоскости симметрии значительно упрощается. Если связать зонд с карандашом или другим каким-либо отметчиком (как это показано на рис. 59), то можно сразу вычерчивать на бумаге экви-потенциали поля.

Использование явления зеркального отражения от поверхности электролита и изолирующего дна позволяет применять неглубокую ванну для моделирования плоских (двумерных) полей. Длина электродов модели должна быть равна или несколько больше глубины ванны, а ось двумерной системы—перпендикулярна дну. Вследствие многократ-

ного отражения от дна ванны и поверхности электролита, представляющих собой систему, аналогичную двум параллельным зеркалам, на поверхности электролита создается исследуемое поле.

В качестве электролита используют обычно водопроводную воду, электроды делают из листового железа. Хорошие результаты получены также с электродами из графитированной латуни в электролите, представляющем собой 0,5%-ный раствор  $\text{NaOH}$  или  $\text{Na}_2\text{CO}_3$ . Острие зонда обычно изготавливают из платиновой или никелевой проволоки.

Для уменьшения явления поляризации у электродов (оно нарушает постоянство  $\lambda$  и тем самым искажает поле) питание ванны осуществляется переменным током с частотой 300—1000 Гц. Напряжение на электродах обычно составляет 4—50 в. Питание переменным током облегчает усиление сигнала с зонда и тем самым дает возможность увеличить точность измерений. Однако использование переменного тока требует наличия в мостиковой схеме дополнительных переменных емкостей, соответствующих межэлектродным емкостям. Иначе в нулевой цепи прибора останется реактивная компонента тока. Желательно также заэкранировать зонд от внешних помех.

Электролитическая ванна может быть использована для нахождения распределения потенциала при наличии пространственного заряда. Последний имитируется либо заданием определенного рельефа дна ванны, либо размещением в электролите дополнительных источников тока.

На основе электролитической ванны сконструированы приборы, автоматически производящие расчет и построение траекторий заряженных частиц (траектографы). По этому вопросу имеется подробный обзор [135].

Для моделирования двумерных полей электролитическую ванну можно заменить электропроводной бумагой, представляющей собой слой бумаги, покрытой однородным слоем вещества с высоким сопротивлением. Вместо электропроводной бумаги можно использовать пластинку из металла с большим сопротивлением. Профиль электродов или полюсов вырезают из медной фольги и наклеивают на бумагу токопроводящим клеем. Техника измерений такая же, как на ванне. Вопросы, связанные с моделированием на электропроводной бумаге, и сконструированные на ее основе электроинтеграторы детально рассмотрены в работе [136].

Для моделирования полей вместо непрерывной проводящей среды можно применить сетку из сопротивлений, расположенных определенным образом. При достаточном числе ячеек сетки погрешность от замены ею сплошной среды получается незначительной.

Двумерное поле моделируют на двумерной сетке, составляемой обычно из одинаковых по величине сопротивлений, расположенных по сторонам квадратов. Для задания граничных условий узлы сетки, расположение которых соответствует форме электродов, соединяют друг с другом и подают на эти узлы сетки необходимое напряжение. Исследуемое поле находят, измеряя потенциалы в остальных узлах сетки.

Для измерения полей с плоскостью симметрии можно моделировать только половину системы, совместив ее ось симметрии с прямолинейной границей сетки. Величины сопротивлений, расположенных на этой границе должны быть удвоены. В этом можно убедиться, представив себе мысленно, что линия симметрии проходит по узловым точкам сетки. Предположим, что между этими узлами расположено не одно сопротивление величиной  $R$ , а эквивалентное ему сопротивление, состоящее из двух параллельно соединенных сопротивлений, по  $2R$  каждое. Так как по условиям симметрии ток по проводникам, соединяющим в параллель сопротивления  $2R$ , не идет, то проводники можно разрезать и удалить одну половину сетки, никак не изменив баланса токов во второй половине. Поэтому распределение потенциала в ней не изменится.

Если исследуемое поле имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии, то можно решать задачу для четверти области, совместив оси с границами сетки, сопротивления на которых также должны быть удвоены. Это позволяет для сетки той же величины взять более крупный масштаб и тем самым лучше использовать ее возможности.

Сетки из сопротивлений обеспечивают большую точность измерений (до 0,1—0,01 %) и более просты в работе, чем электролитическая ванна. Они могут быть применены также для решения задачи с пространственным зарядом (уравнения Пуассона). Для этого в узлы сетки подключают источники тока, имитирующие объемный заряд. На основе сеток из сопротивлений созданы некоторые электроинтеграторы, предназначенные для решения краевых задач математической физики. Они описаны подробно в книге [43].

Рассмотрим еще вкратце метод моделирования двумерных полей, основанный на использовании свойств равномерно натянутой резиновой мембраны. Если к равномерно натянутой горизонтальной мемbrane приложить модели электродов или полюсов и надавить на них так, чтобы высоты мембраны в местах приложения электродов были пропорциональны потенциалам системы, то рельеф мембраны будет соответствовать распределению скалярного потенциала исследуемой системы. Так можно показать из условия равновесия отдельных участков мембраны и малости их наклонов, что высота каждой ее точки  $h$  подчиняется уравнению, аналогичному уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0. \quad (6.9)$$

И измеряя распределение высот мембраны, получим распределение соответствующего электрического или магнитного поля.

Если перпендикулярно поверхности мембраны приложить дополнительно распределенную силу, то величина смещения элементов мембраны будет удовлетворять следующему уравнению:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = -\frac{P}{T}. \quad (6.10)$$

Здесь  $P$  — нормальная к мемbrane сила, отнесенная к единице поверхности, а  $T$  — величина растягивающей силы, отнесенная к единице длины. Уравнение (6.10) по форме совпадает с двумерным уравнением Пуассона. Таким образом, резиновая мембра может быть использована для выяснения распределения поля в присутствии пространственного заряда.

При помощи мембраны можно моделировать не только поля, но и траектории заряженных частиц в них. Довольно быстрый, хотя и не очень точный способ заключается в том, что по мемbrane катят маленькие шарики, фотографируемые в прерывистом свете. При надлежащим образом подобранных начальных условиях (положении и скорости) проекции шариков на горизонтальную плоскость подобны плоским траекториям заряженных частиц в соответствующем поле.

Конструктивно установку для моделирования выполняют в виде резинового листа, натянутого на прямоугольную или

круглую раму. Толщина резины порядка 1 м.м. Площадь листа 1—2 м<sup>2</sup>. Чтобы обеспечить равномерность растяжения резины, на ее поверхности перед растяжением вычерчивается квадратная сетка. После растяжения этот рисунок увеличивается на 20—50%, сохраняя подобие. Шарики используют обычно стальные из шарикоподшипников, диаметром 4—10 мм. Для точности моделирования траектории большую роль играет механизм пуска шарика. Он может быть механическим или электромагнитным.

Вопрос о моделировании на резиновой мемbrane подробно освещен в работе [12].

При исследовании различного рода магнитных полей широко распространены прямые их измерения, выполняемые относительно просто и точно. Кроме того, если измерения производятся непосредственно на изучаемом магните, то в них учитываются все влияющие в действительности на магнитное поле факторы (как, например, конечность величины магнитной проницаемости, насыщение отдельных частей магнитопровода и пр.).

Рассмотрим методы измерения магнитного поля, основанные на явлении электромагнитной индукции.

Для измерения поля применяют небольшие катушки с намотанными на них витками провода. При баллистическом методе измерения катушку помещают в исследуемое магнитное поле, а концы ее присоединяют к баллистическому гальванометру или флюксметру. Чтобы измерить поле, необходимо изменить магнитный поток, пронизывающий плоскость витков катушки. Для этого катушку или поворачивают на 180°, или выдергивают из поля; можно также резко изменить поле исследуемой системы. В измерительной катушке при этом индуцируется э. д. с.  $\epsilon$ , и в измерительной цепи проходит ток  $i$ , баланс которого можно записать в следующем виде:

$$\epsilon = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = iR + L \frac{di}{dt}, \quad (6.11)$$

где

$$\Phi = \sum_{k=1}^w S_k \bar{H}_{nk}. \quad (6.12)$$

Здесь  $\Phi$  — магнитный поток через катушку;  $S_k$  — площадь ее  $k$ -го витка;  $w$  — число витков;  $\bar{H}_{nk}$  — напряженность перпендикулярной плоскости витков составляющей маг-

нитного поля, усредненная по площади витка;  $R$  и  $L$  — омическое и индуктивное сопротивления цепи.

Интегрируя уравнение (6.11) по периоду  $t$ , за время которого происходит все изменение поля и, следовательно, тока, получим

$$RQ = -\frac{1}{c} (\Phi_2 - \Phi_1). \quad (6.13)$$

Здесь  $Q = \int_0^t idt$  равно количеству электричества, протекшему через измерительный прибор, а  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  — значения магнитного потока, проходящего через катушку в начале и в конце измерения.

Согласно соотношениям (6.12) и (6.13), измеряемая прибором величина  $Q$  однозначно связана с напряженностью магнитного поля в охватываемой катушкой области. Если площади всех витков катушки одинаковы ( $S_k = S$ ), а размеры ее столь малы, что поле в ее пределах можно считать однородным, то

$$\Phi = wSH_n \quad (6.14)$$

и

$$H_n = \alpha Q. \quad (6.15)$$

Измеряя составляющие напряженности магнитного поля в трех взаимно перпендикулярных направлениях, можно определить как величину напряженности поля, так и ее направление. В случае известного направления силовых линий для определения полной величины напряженности достаточно одного измерения, при котором плоскость витков катушки располагается перпендикулярно направлению поля.

Если площади витков катушки нельзя считать одинаковыми, то в выражении (6.14) вместо  $S$  должно стоять некоторое  $\bar{S}$ , такое, что

$$w\bar{S} = \sum_{k=1}^w S_k. \quad (6.16)$$

Величину  $\bar{S}$  обычно находят калибровкой, путем измерения в известном магнитном поле, например в поле соленоида, напряженность которого вдали от концов равна

$$H = 0,4 \pi nI. \quad (6.17)$$

Здесь  $nI$  — число ампервитков на 1 см длины соленоида, а  $H$  — напряженность его поля, эрст.

Постоянную  $\alpha$ , в которую входит  $\bar{S}$  и  $R$ , трудно рассчитать точно, поэтому лучше не калибровать отдельно катушки, а проградуировать всю измерительную установку в целом. При этом непосредственно определяется связь между показанием прибора и величиной напряженности поля. Градуировка установки позволяет увеличить точность до десятых долей процента.

При измерении двумерного поля можно значительно увеличить чувствительность метода увеличением размера витков катушки в направлении, в котором поле не меняется.

Если желательно измерить среднее значение напряженности поля  $\bar{H}$  в какой-то области, то витки измерительной катушки должны охватывать эту область. Тогда, согласно уравнению (6.12), при  $S_k = S$

$$\Phi = w\bar{SH}. \quad (6.17a)$$

Недостаток баллистического метода состоит в сравнительно большом времени на каждый отсчет и непригодности его для непрерывного измерения магнитного поля. От этих недостатков свободен метод вращающейся катушки. Калиброванную катушку, вращающуюся с постоянной скоростью, помещают в исследуемое магнитное поле. Ось вращения проходит через центр катушки параллельно плоскости витков. Измеряют электродвижущую силу, индуцируемую в катушке, которая пропорциональна напряженности магнитного поля. Вращающаяся катушка соединяется с измерительным прибором щетками. Возможен съем напряжения на коллектор или на сплошные кольца. В обоих случаях большое значение имеет качество трущихся поверхностей. Для повышения точности измерений (равной обычно примерно 0,5 %) необходимо, чтобы скорость вращения щеток была строго постоянна. Точность измерений можно повысить (до 0,01 % в относительных измерениях), применив две катушки, одна из которых располагается в поле с известной и регулируемой величиной напряженности. Соединение катушек, вращающихся с одинаковой частотой и подбор напряженности вспомогательного поля таковы, что индуцированные в катушках э. д. с. находятся в противофазе и компенсируют друг друга по величине. Тогда становится необязательным поддерживать частоту вращения строго постоянной.

Существуют специальные методы измерения градиентов напряженности полей и их высших гармоник при помощи катушек.

Градиент напряженности поля можно измерить при помощи вибрирующей катушки. Маленькая катушка вибрирует с постоянной частотой и амплитудой поперек неоднородного поля (рис. 60). Напряжение на выходе из катушки пропорционально разности значений напряженности поля  $\Delta H$  в ее крайних положениях и имеет синусоидальный характер с амплитудой  $U_m$ , равной

$$U_m = 2\pi f \Delta x Na \frac{\Delta H}{\Delta x}, \quad (6.18)$$

где  $f$  — частота вибрации;  $\Delta x$  — ее амплитуда;  $Na$  — постоянная катушки (произведение числа ее витков на площадь витка). Большую точность дает не вычисление  $U_m$ , а градуировка прибора в поле с известным градиентом. При  $f = 85$  гц и  $2\Delta x = 2,5$  мм чувствительность достигала  $10^{-5}$  в на 1 эрст/см (см. работу [8]).

Для непосредственного измерения коэффициентов разложения магнитного поля применяют специальные гармонические катушки (описанные в работе [29]). Эти катушки при сравнительно больших размерах позволяют измерять величины коэффициентов непосредственно в их центре (предполагается, что по длине катушки поле не меняется, т. е. метод пригоден для исследования двумерных полей).

Гармоническая катушка представляет собой цилиндр, на поверхности которого расположены витки. Две стороны витка совпадают с образующими цилиндра, две другие перпендикулярны им (рис. 61). Длина образующей цилиндра  $l$ , радиус  $R$ , угловой размер витка  $\pi (2k + 1)/p$ , где  $k$  и  $p$  — целые числа. Витки на цилиндре расположены по гармоническому закону

$$\frac{dN}{d\psi} = \frac{1}{4} N_0 \cos p\psi. \quad (6.19)$$

Здесь  $N_0$  — полное число витков катушки. Если витки катушки соединены последовательно, то изменение поля от нуля до максимальной величины индуцирует в них э. д. с., равную

$$\mathcal{C} = \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\psi}^{\psi + \pi(2k+1)/\rho} H_r(\psi) R l d\psi \right] \frac{dN}{d\psi} d\psi. \quad (6.20)$$

Эту же э. д. с. можно получить при постоянном поле поворотом катушки на угол  $2\pi/\rho$ .

Подставляя в уравнение (6.20) выражение для  $H_r(\psi)$ , найденное из соотношения (1.24) для  $v = 0$ , и интегрируя, получим для случая, когда величина  $\rho$  совпадает с одним из значений  $2(2n - 1)$ :

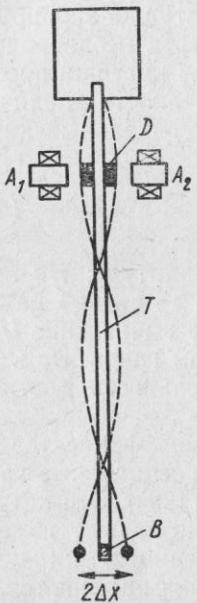


Рис. 60. Вибрирующая катушка:

$T$  — стержень из плексигласа;  $A_1$  и  $A_2$  — магниты;  $D$  — диски из железа;  $B$  — измерительная катушка.

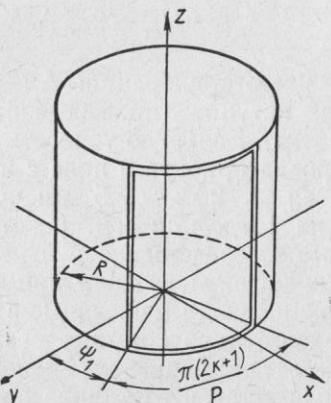


Рис. 61. Гармоническая катушка (двойная линия — контур витка).

$$\mathcal{C} = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{\pi}{2} I N_0 R^2 (2n-1) \Omega_{2(2n-1)} \right]. \quad (6.21)$$

Возникающий в катушке ток можно измерять баллистическим методом, описанным выше.

Таким образом, катушка, плотность витков которой меняется пропорционально  $\cos 2(2n - 1)\psi$ , чувствительна только к  $2(2n - 1)$  гармонике поля. Это дает возможность, используя катушки с соответствующими намотками, изме-

216

рять по отдельности коэффициенты разложения поля. Точность измерений отдельных гармоник составляет несколько процентов. Так как первая гармоника, соответствующая линейному полю, имеет наибольшую величину, то из-за неточности изготовления катушек ее влияние может сказываться при измерении высших гармоник. Для устранения этой погрешности необходимо проводить с каждой катушкой  $2(2n - 1)$  измерений, в каждом из которых со средней плоскостью линзы совмещают начало нового периода намотки. Все результаты затем усредняют.

О величине магнитного поля можно судить также по изменению электрического сопротивления находящейся в нем висмутовой проволоки, которое увеличивается примерно на 50% с изменением напряженности поля от нуля до 20 кэрст. При этом в области изменения поля от 3 до 25 кэрст изменение сопротивления приблизительно линейно. Обычно сопротивление имеет вид плоской спирали. Его величину измеряют при помощи мостиковой схемы. Точность измерений порядка 2%. Это связано с большой температурной зависимостью сопротивления и его чувствительностью к механическим деформациям. Соответствующая механическая защита и термостатирование повышают точность метода [137].

Широкое распространение получил метод измерения магнитного поля, основанный на эффекте Холла. Эффект Холла заключается в следующем. В образце с током, помещенном в поперечное магнитное поле, возникает разность потенциалов в направлении, перпендикулярном направлению тока. Величина разности потенциалов растет с увеличением магнитного поля приблизительно линейно. Она особенно велика в полупроводниках, например в германии и арсениде индия. Чувствительность датчиков 4 — 20 мкв/эрст. Точность измерения поля этим методом порядка 1% и ограничивается в основном ошибкой, связанной с зависимостью э. д. с. Холла от температуры. Магнетометр, основанный на измерении э. д. с. Холла, описан в работе [138].

Достоинства двух рассмотренных выше методов заключаются в отсутствии движущихся частей, возможности непрерывных (в том числе дистанционных) измерений, безынерционности и в малых размерах датчиков.

Существует еще большое количество методов измерения магнитного поля (см., например, работы [10, 12]), но в

квадрупольных линзах они применяются мало, и мы не будем на них останавливаться.

О моделировании траекторий заряженных частиц траекториографом на ванне и катящимися по мемbrane шариками уже говорилось. Для моделирования траекторий в магнитном поле может быть применен легкий гибкий проводник с током. Такой проводник, помещенный в магнитное поле, принимает форму траектории заряженной частицы, проходящей в этом поле [139, 140]. Это следует из одинакового вида уравнений для заряженной частицы и проводника в магнитном поле.

Из уравнения движения заряженной частицы (2.1) при  $E = 0$  имеем

$$dp - \frac{e}{c} [d\mathbf{R}\mathbf{H}] = 0. \quad (6.22)$$

Здесь  $d\mathbf{R}$  — дифференциал радиус-вектора движущейся частицы, абсолютная величина которого равна  $|d\mathbf{R}| = ds$ , где  $ds$  — элемент длины траектории.

Так как импульс частицы  $\mathbf{p}$  касателен к траектории и совпадает по направлению с ее элементом  $d\mathbf{R}$ , то  $\mathbf{p} = p \frac{d\mathbf{R}}{ds}$ . Величина импульса  $p$  в магнитном поле постоянна. Отсюда, учитывая соотношение (6.22), имеем

$$d\left(\frac{d\mathbf{R}}{ds}\right) - \frac{e}{cp} [d\mathbf{R}\mathbf{H}] = 0. \quad (6.23)$$

Сила действующая на элемент гибкого провода в магнитном поле, уравновешивается векторной разностью натяжений на концах элемента. Обозначим натяжение провода  $T$ . Оно постоянно по абсолютной величине и поэтому  $T = T \frac{d\mathbf{R}_H}{ds_H}$ , где  $ds_H$  — длина элемента, а  $\mathbf{R}_H$  — радиус-вектор, определяющий его положение. Если  $i$  — ток, протекающий по проводу, то

$$d\left(\frac{d\mathbf{R}_H}{ds_H}\right) + \frac{i}{cT} [d\mathbf{R}_H \mathbf{H}] = 0. \quad (6.24)$$

При выводе этого уравнения мы пренебрегли всеми другими силами, действующими на проводник (его весом, упругостью и силами электромагнитного взаимодействия различных частей проводника друг с другом и с железом исследуемого магнита).

Сравнивая выражения (6.23) и (6.24), видим, что они будут полностью идентичны, если

$$\frac{e}{p} = -\frac{i}{T}. \quad (6.25)$$

Соответствие между формой провода и траекторией частицы обеспечивается при одинаковых начальных условиях подбором силы тока и натяжения нити.

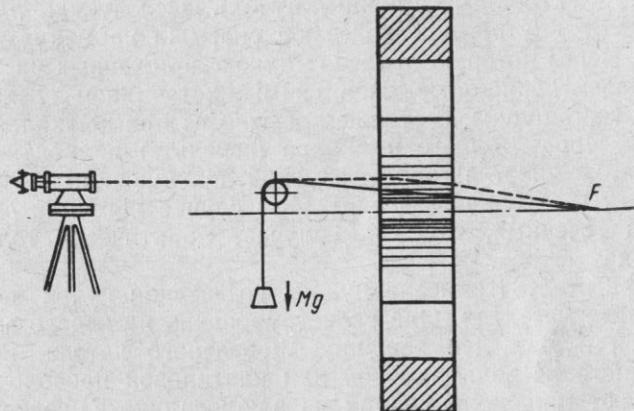


Рис. 62. Метод гибкого проводника с током. (Сплошная линия — ток в линзе равен нулю; штриховая — ток линзы соответствует заданному положению фокуса.)

На рис. 62 схематически показано применение метода к определению зависимости тока  $I$  в линзе от положения фокуса [141]. Для заданного положения фокуса (закрепленной точки пересечения провода с осью линзы) и определенного импульса частицы (заданы  $i$  и  $T$ ) необходимо увеличивать ток  $I$  до тех пор, пока в пространстве перед линзой проводник не станет параллельным оси.

При моделировании целесообразно применять по возможности более тонкую проволоку, так как это уменьшает ее вес, пропорциональный площади сечения, и упругость (пропорциональную квадрату площади). Допустимая сила тока уменьшается не столь резко, так как относительное охлаждение проволоки улучшается. Обычно применяют серебряную или медную проволоку диаметром несколько сотых миллиметра. Точность моделирования увеличивается с ростом магнитного поля.

Заданное натяжение проводника удобнее всего осуществлять грузом, который подвешен к проволоке, переброшенной через блок. В случаях, когда проводник находится в неустойчивом равновесии, нужное натяжение осуществляется пружиной.

Экспериментальное исследование квадрупольных линз можно проводить на электронно-оптической скамье (ее называют иногда ионно-оптической, если в ней используется не электронный, а ионный пучок). Исследуемую линзу помещают внутрь или надевают снаружи на вакуумную трубу, через которую проходит пучок заряженных частиц.

В электронно-оптической скамье источником электронов служит пушка, состоящая обычно из прямонакального катода, управляющего цилиндра (венельта) и анода. Катод изготавливают из вольфрамовой проволочки, которой придают V-образную форму. В этом случае источник электронов точечный, так как излучает практически только вершина катода.

В работе [8] описана пушка, создающая пучок ионов щелочных металлов. Она сконструирована на основе электронной пушки. На вершину V-образного катода, изготовленного из вольфрамовой или платиновой проволочки, помещают маленький шарик из алюмосиликата, содержащего щелочной металл. Шарик диаметром 1–2 мм при нагреве до 1000–1500° С эмиттирует однозарядные ионы с начальной энергией несколько десятых электронвольт. Сила тока 20–100 мкА. При необходимости за пушкой располагают дополнительную, ускоряющую ионы систему. Тяжелые ионы средней энергии могут быть использованы для испытания работы квадрупольных линз при больших возбуждениях вместо более легких ионов высокой энергии.

В ионно-оптических скамьях используют также другие источники разнообразных конструкций.

Форму пучка заряженных частиц наблюдают обычно на экране, флуоресцирующем под их воздействием. Экраном может быть стеклянная пластинка, покрытая сначала полу-прозрачным проводящим слоем (для отвода заряда), а затем слоем флуоресцирующего вещества типа виллемита. Чтобы можно было исследовать пучок на различных расстояниях от источника, экран делают подвижным. Перемещение экрана в вакууме осуществляют при помощи штока, проходящего через уплотнение Вильсона.

Если энергия заряженных частиц в пучке невелика, а расстояние, проходимое ими в вакуумной камере, довольно большое, то на траекториях частиц оказывается влияние магнитного поля Земли. Для устранения этого влияния применяют экраны в виде железных труб, надеваемых на вакуумную камеру, или корректирующие катушки, которые создают магнитное поле такой же величины, но противоположно направленное.

Для данного расстояния  $a$  между источником и линзой (или системой из линз) и определенной величины возбуж-

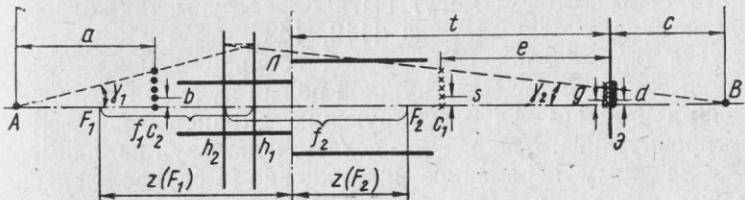


Рис. 63. Определение оптических характеристик электронных линз на электронно-оптической скамье теневым методом:  
A—источник электронов; B—его изображение;  $C_1$  и  $C_2$ —сетки;  $L$ —линза;  
 $\vartheta$ —экран.

дения линзы положение изображения  $g$  определяется перемещением экрана. Зная  $a$  и  $g$ , можно по формулам гл. 2 определить эффективную длину линзы  $L$ , а также кардиальны элементы  $f$  и  $z(F)$ . В последнем случае необходимо проделать два измерения  $g$  при разных значениях  $a$ .

Для неподвижного экрана положение изображения и увеличение можно найти при помощи двух сеток (теневой метод, работа [142]). Одну из сеток располагают между линзой и экраном. Зная положение их, а также расстояние между проволочками сетки и измерив расстояние между отбрасываемыми ими тенями на экране, легко вычислить положение изображения (рис. 63):

$$c = \frac{e}{s/g \pm 1}. \quad (6.26)$$

Знак плюс соответствует случаю, когда плоскость изображения находится между экраном и сеткой, а знак минус — когда она лежит за экраном. Вторую сетку помещают

между источником и линзой. Измерив расстояние между тенями, отбрасываемыми на экран ее проволочками, находят угловое увеличение  $\Gamma$ :

$$\Gamma = \frac{\operatorname{tg} \gamma_2}{\operatorname{tg} \gamma_1} = \frac{ad}{bc}. \quad (6.27)$$

Отсюда можно вычислить остальные характеристики линзы.

Отметим, что при исследовании квадрупольных линз измерения проводятся отдельно для каждой из плоскостей  $xOz$  и  $yOz$ .

Теневым методом могут быть определены также aberrации квадрупольных линз [142, 143].

Для определения сферической aberrации может быть использован создаваемый пушкой полый пучок электронов.

При помощи флуоресцирующих экранов производят юстировку линз. Удобнее это делать, используя накладываемое на линзу переменное напряжение (в случае электрических линз) или переменный ток (в случае магнитных). При этом рассеивающая и собирающая плоскости квадрупольной линзы непрерывно меняются местами с частотой переменного питания. При хорошей юстировке линзы на экране, расположенному в плоскости изображения, которая соответствует максимальному значению возбуждения, наблюдается равноконечный прямоугольный крест, образованный тонкими штрихами [132, 144]. Смещение центра квадруполя относительно оси пучка, наклон линзы по отношению к оси и другие дефекты установкиказываются в том, что крест становится неравноконечным. Если средние плоскости отдельных линз в системе повернуты друг относительно друга, то соответствующим образом будут повернуты кrestы, создаваемые каждой из линз в отдельности.

Для визуального наблюдения оси магнитного поля линзы нужно поместить во включенную линзу сосуд с коллоидным раствором окислов железа [145]. Тогда между скрещенными поляризатором и анализатором будет виден темный крест, пересечение которого совпадает с осью. Точность определения положения оси порядка 0,1 мм.

Форму пучка, а также положение и форму изображений исследуют зачастую прямо на установке при помощи сцинтилляционных счетчиков небольших размеров (до 0,5—2 мм).

## ГЛАВА 7

### НЕКОТОРЫЕ РАЗНОВИДНОСТИ КВАДРУПОЛЬНЫХ ЛИНЗ

Мы рассмотрели ранее квадрупольные линзы со статическими электрическими и магнитными полями, обладающими двумя плоскостями симметрии и двумя плоскостями антисимметрии (четыре плоскости симметрии у электродов и полюсов). Однако существуют и другие типы линз, которые не входят в эту группу, но также называются квадрупольными. К ним относятся квадрупольные линзы с переменными высокочастотными полями, несимметричные квадрупольные линзы и линзы со спиральной симметрией. Эти линзы имеют ряд особенностей, обеспечивающих им новые возможности применения. Поэтому мы опишем их в этой главе.

Предположим, что поле электрической квадрупольной линзы зависит от времени. Ограничимся случаем нерелятивистских скоростей частиц. Тогда уравнение движения можно записать так [см. выражение (2.3)]:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = e\mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \quad (7.1)$$

Рассмотрим линзу с распределением потенциала [146, 147]:

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{r_E^2} (x^2 - y^2) (V + V_1 \cos \omega t); \quad (7.2)$$

оно соответствует распределению потенциала двумерной квадрупольной линзы с гиперболическими электродами, напряжение на которых представляет собой сумму постоянного напряжения  $\pm V$  и периодического переменного  $\pm V_1 \cos \omega t$ .

Если электроды линзы имеют не гиперболическую форму, то выражение (7.2) остается верным только для параксиальной области линзы. При этом правую часть уравнения (7.2) нужно домножить на коэффициент  $K_2$  [см. выражение (1.12)].

Если длина линзы и частота изменения поля таковы, что частица заданной скорости в пределах поля проходит последовательно участки с разным знаком потенциала (это возможно, если  $|V_1| > |V|$ ), то получается система с пространственно-периодической жесткой фокусировкой.

Из соотношений (7.1) и (7.2) имеем

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} + \frac{2e}{mr_E^2} (V + V_1 \cos \omega t) x = 0; \\ \ddot{y} - \frac{2e}{mr_E^2} (V + V_1 \cos \omega t) y = 0; \\ \ddot{z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Решением последнего уравнения в системе (7.3) будет  $\dot{z} = v_z = \text{const}$ . Первые два уравнения при замене переменной  $t$  на  $\zeta = \frac{\omega t}{2}$  переходят в уравнения Маттье [79, 80]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{d\zeta^2} + (\lambda + 2q \cos 2\zeta) x = 0; \\ \frac{d^2 y}{d\zeta^2} - (\lambda + 2q \cos 2\zeta) y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{8eV}{mr_E^2 \omega^2}; \quad q = \frac{4eV_1}{mr_E^2 \omega^2}. \quad (7.5)$$

Общее решение уравнения Маттье (для проекции на плоскость  $xOz$ ) имеет вид

$$x = Ae^{\mu\zeta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\zeta} + Be^{-\mu\zeta} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-in\zeta}. \quad (7.6)$$

Здесь  $A$  и  $B$  — постоянные, определяемые начальными условиями, а параметр  $\mu$  зависит от  $\lambda$  и  $q$ . Аналогичный вид имеет решение для проекции траектории на плоскость  $yOz$  с учетом замены  $\lambda$  на  $-\lambda$ .

Как следует из решения (7.6), если  $\mu$  — величина действительная или комплексная, то смещение траектории от оси  $z$  растет экспоненциально с увеличением  $\zeta$ , и траектория становится нестабильной.

Проекции траектории на плоскости  $xOz$  и  $yOz$  ограничены по величине для любого  $\zeta$ , если  $\mu$  имеет мнимое значение. При этом траектория стабильна. Таким образом,

условия стабильности траектории зависят только от  $\lambda$  и  $q$  и не связаны с начальными условиями.

На плоскости с координатами  $\lambda$  и  $q$  можно построить области с ограниченной траекторией. Если  $\lambda = 0$ , то условия стабильности одинаковы для обеих плоскостей. Первая область стабильности простирается от  $q = 0$  до  $q = 0,92$  (рис. 64). Затем траектория становится нестабильной.

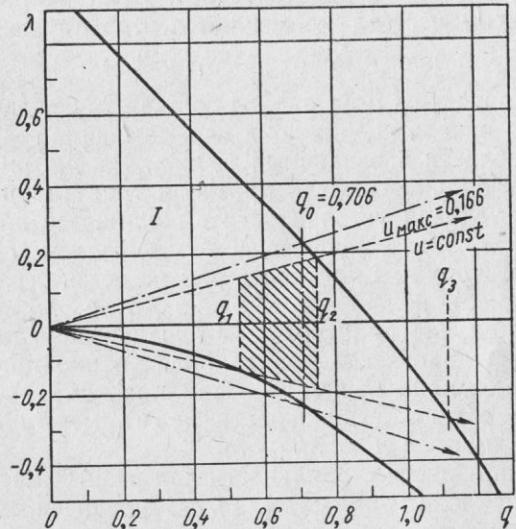


Рис. 64. Первая область стабильности (I) траектории в квадрупольной линзе с переменным напряжением на электродах. Кривые — границы областей стабильности.

Вторая область стабильности значительно уже первой. Она лежит от  $q = 7,50$  до  $q = 7,52$ . Дальше области стабильности и нестабильности чередуются.

Для данных значений амплитуды переменного напряжения  $V_1$  и частоты  $\omega$  параметр  $q$  зависит только от отношения  $e/m$  (радиус апертуры линзы  $r_E$  — величина постоянная). Первая область стабильности соответствует значениям  $m > \frac{4eV_1}{0,92r_E^2\omega^2}$ . Частицы с такими массами проходят линзу. Таким образом, в этой области при  $\lambda = 0$  линза служит полосовым фильтром масс. Во второй области пропускаются

только частицы со значением масс, лежащим в узком интервале  $\Delta m = \frac{\Delta q}{q} m \approx 1\% m$ . Работа во второй области затруднительна, так как требуются большие значения  $V_1$ .

Если  $\lambda \neq 0$ , то условия стабильности становятся различными для плоскостей  $xOz$  и  $yOz$ . Плоскости  $xOz$  соответствуют область с положительными значениями  $\lambda$  на рис. 64, плоскости  $yOz$  — с отрицательными. Если напряжение на электродах и частота не меняются, то отношение  $\pm \lambda/q$  постоянно, независимо от величины  $m$ :  $\frac{\lambda}{2q} = \frac{V}{V_1} = u$ . Каждому значению  $u$  на рис. 64 соответствуют две прямые, идущие из начала координат и пересекающие границы стабильной области в различных точках. Рассмотрим первую область стабильности. Для проекции траектории на плоскость  $xOz$  условия устойчивости выполняются при  $q < q_2$ , т. е.  $m > m_2$  [ $m_i$  и  $q_i$  связаны соотношением (7.5)]. Проекция траектории на плоскость  $yOz$  остается ограниченной по величине в области  $q_1 < q < q_3$ , т. е.  $m_1 > m > m_3$ . Так как в случае произвольных начальных условий заряженная частица может пройти поле только при условии ограниченности по величине обеих проекций, то результирующая область стабильности лежит между  $q_1$  и  $q_2$  (в интервале масс  $\Delta m = m_1 - m_2$ ).

Ширина области стабильности для разных масс зависит от угла наклона прямых  $\lambda/2q$ . С увеличением  $V$  угол наклона растет и полоса пропускаемых масс сужается. Для соотношения  $\lambda/2q = \frac{V}{V_1} = 0,166 = u_{\max}$  полоса пропускаемых масс становится бесконечно узкой, а  $q = q_0 = 0,706$ . Выше линии  $u_{\max}$  условий стабильности не существует. Каждому значению  $m$  соответствует величина  $u = \frac{V}{V_1}$  или частота  $\omega$ , для которой величина  $q = q_0$ .

Выражение для разрешающей силы линзы  $m/\Delta m$  имеет следующий вид [147]:

$$\frac{m}{\Delta m} = \frac{0,75}{1 - (u/u_{\max})}. \quad (7.7)$$

Необходимо учесть, что амплитуда колебаний нестабильных частиц растет экспоненциально, а разрешающая сила улучшается с ее ростом, т. е. с увеличением числа колебаний. Поэтому желательно использовать линзу большой длины  $L$  или ионы с малыми скоростями  $v(2\pi v/\omega \ll L)$ .

На основе описанной линзы были разработаны и изготовлены масс-спектрометры [147—149]. Масс-спектры можно получать, меняя величину  $V_1$  или частоту  $\omega$ . Большое преимущество данного метода разделения по массам состоит в независимости условий стабильности от скорости частиц и от начальных условий для траекторий.

Остановимся теперь на свойствах несимметричных квадрупольных линз с постоянными во времени полями.

Отказ от симметрии в положении и форме электродов и полюсов квадрупольных линз приводит, как правило, к исчезновению плоскостей симметрии и антисимметрии поля. Возможны, конечно, варианты, когда несимметрия геометрической формы линзы не отражается на поле. Примером этому служит неявнополюсная магнитная линза с прямоугольным ярмом. Остановимся на случаях сохранения симметрии поля только одного рода.

Если повернуть навстречу один другому разноименные электроды или полюса квадрупольной линзы при неизменной их форме и расстоянии от центра (рис. 65), то плоскости симметрии поля исчезнут, а плоскости антисимметрии сохраняются. Распределение поля линзы меняется. В разложении потенциала появятся добавочные члены.

Учитывая условия симметрии для скалярного магнитного потенциала (рис. 65, a), из уравнения Лапласа получим [131]:

$$\frac{\omega(x, y, z)}{2W} = \frac{n_2(z)}{r_M^2} xy + \frac{n_{13}(z)}{6r_M^4} xy^3 + \frac{n_{31}(z)}{6L_M^4} x^3 y + \dots, \quad (7.8)$$

где  $n_{13}(z)$  и  $n_{31}(z)$  — некоторые функции

$$n_{13} = \frac{3r_M^4}{W} \left. \frac{\partial^4 \omega}{\partial x \partial y^3} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}}, \quad n_{31} = \frac{3r_M^4}{W} \left. \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^3 \partial y} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}},$$

связанные между собой следующим образом:

$$n_{13}(z) + n_{31}(z) + n_2''(z) r_M^2 = 0. \quad (7.9)$$

В обычной квадрупольной линзе с плоскостями симметрии поля

$$n_{13}(z) = n_{31}(z) = -\frac{1}{2} n_2''(z) r_M^2 \quad (7.10)$$

и разложение потенциала (7.8) переходит в соотношение (1.6).

Из сравнения соотношений (7.8) и (1.6) видно, что первый член у них совпадает, и они отличаются только членами высшего порядка. Следовательно, в параксиальной области линзы, у которой отсутствуют плоскости симметрии поля, распределение потенциала остается прежним. Таким образом, электронно-оптические свойства первого порядка у этих линз не изменяются. Появляющиеся дополнительные члены в распределении потенциала влияют только на aberrации линзы.

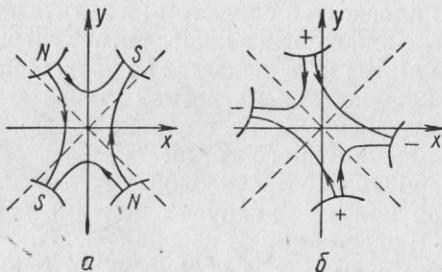


Рис. 65. Квадрупольные линзы с повернутыми полюсами (а) и электродами (б).

Аналогичные результаты получаются и для электрической линзы с повернутыми электродами (рис. 65, б). Распределение ее потенциала имеет вид [94]

$$\frac{\varphi(x, y, z)}{V} = \frac{k_2(z)}{r_E^2} (x^2 - y^2) - \frac{k''_2(z)}{12 r_E^2} (x^4 - y^4) + \\ + \frac{1}{6 r_E^4} [k_{13}(z) - k_{31}(z)] (x^3 y - y^3 x) \dots \quad (7.11)$$

причем функции  $k_{13}(z)$  и  $k_{31}(z)$  связаны соотношением

$$k_{13}(z) + k_{31}(z) + k''_2(z) r_E^2 = 0. \quad (7.12)$$

В полностью симметричной линзе

$$k_{13}(z) = k_{31}(z) = -\frac{1}{2} k''_2(z) r_E^2, \quad (7.13)$$

и уравнение (7.11) переходит в выражение (1.4). В параксиальной области распределение потенциала остается прежним [см. соотношение (1.12)]. Несимметрия вносит изменения только в aberrации линзы.

Исследование aberrаций несимметричных линз представляет двойкий интерес. Во-первых, таким образом можно оценить влияние неточности изготовления и сборки на траектории в пучке и тем самым определить требуемые допуски. Во-вторых, можно попытаться с помощью новых членов в разложении потенциала скомпенсировать сферическую aberrацию квадрупольной линзы (см. работы [131, 94]).

Эти новые члены имеют тот же порядок, что и другие слагаемые в разложении потенциала, влияющие на геометрические aberrации третьего порядка. Весьма существенно, что, меняя степень несимметрии поля, можно влиять на величину коэффициентов в разложении ( $n_{13}/n_2$  и  $n_{31}/n_2$  — в случае магнитной линзы,  $k_{13}/k_2$  и  $k_{31}/k_2$  — в случае электрической).

Уравнения траектории с точностью до третьего порядка, полученные таким же образом, как в случае симметричной линзы, имеют вид

$$x'' + \beta^2 u(z) x = X; \\ y'' - \beta^2 u(z) y = Y. \quad (7.14)$$

Для магнитного поля (см. работу [131])

$$X = -\beta^2 \left[ \frac{1}{2} ux (3x'^2 + y'^2) - ux' yy' - u' xyy' + \right. \\ \left. + \frac{1}{2N_2 r_M^2} x \left( n_{13} y^2 + \frac{1}{3} n_{31} x^2 \right) \right]; \\ Y = \beta^2 \left[ \frac{1}{2} uy (x'^2 + 3y'^2) - uxx' y' - u' xx' y + \right. \\ \left. + \frac{1}{2N_2 r_M^2} y \left( \frac{1}{3} n_{13} y^2 + n_{31} x^2 \right) \right]. \quad (7.15)$$

В случае электрического поля [94]

$$X = -\beta^2 \left[ \beta^2 ux (x^2 - y^2) + ux (x'^2 + y'^2) - \frac{1}{2} u' x' \times \right. \\ \times (x^2 - y^2) - \frac{1}{6} u'' x^3 + \frac{(k_{13} - k_{31})}{12 K_2 r_E^2} y (3x^2 - y^2) \left. \right]; \\ Y = \beta^2 \left[ \beta^2 uy (x^2 - y^2) + uy (x'^2 + y'^2) + \frac{1}{2} u' y' \times \right. \\ \times (x^2 - y^2) - \frac{1}{6} u'' y^3 - \frac{(k_{13} - k_{31})}{12 K_2 r_E^2} x (x^2 - 3y^2) \left. \right]. \quad (7.16)$$

Выражения (7.16) написаны в нерелятивистском приближении.

Если квадрупольная линза кроме плоскостей антисимметрии имеет еще две плоскости симметрии, то, согласно уравнениям (7.9), (7.10) и (7.13), члены с  $k_{13}$ ,  $k_{31}$ ,  $n_{13}$  и  $n_{31}$  в соотношениях (7.15) и (7.16) исчезают, и уравнения (7.14) переходят в выражения (4.6).

Метод решения дифференциальных уравнений (7.14) таков же, как и уравнений (4.6). Аберрации линзы по-прежнему определяются как разности решений уравнений (7.14) и соответствующих однородных дифференциальных уравнений. Уравнения (7.14) решаются методом возмущений, при котором в правую часть вместо  $x$ ,  $y$  и их производных в первом приближении подставляются решения уравнения без правой части, взятые при тех же начальных условиях. Тогда соотношения (7.14) превращаются в линейные неоднородные дифференциальные уравнения, которые решаются методом вариации произвольных постоянных.

Так как уравнения (7.14) отличаются от выражений (4.6) только несколькими дополнительными членами в правой части, то к ним можно применить все методы интегрирования, примененные в гл. 4, для нахождения геометрических аберраций симметричной линзы. Остановимся здесь только на одном из наиболее простых случаев — двумерном электрическом поле (см. работу [94]).

В двумерном поле все производные по  $z$  в распределении потенциала обращаются в нуль, а  $u(z) = 1$ . Из соотношения (7.12) следует

$$k_{13} = -k_{31}. \quad (7.17)$$

Обозначив  $\frac{k_{13} - k_{31}}{12 K_2 r_E^2} = \frac{k_{13}}{6 K_2 r_E^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$ , где  $\alpha$  — некоторая постоянная, связанная с формой и расположением электродов, получим из выражений (7.14) и (7.16):

$$\left. \begin{aligned} x'' + \beta^2 x &= -\beta^4 x(x^2 - y^2) - \beta^2 x(x'^2 + y'^2) - \alpha y(3x^2 - y^2); \\ y'' - \beta^2 y &= \beta^4 y(x^2 - y^2) + \beta^2 y(x'^2 + y'^2) - \alpha x(x^2 - 3y^2). \end{aligned} \right\} \quad (7.18)$$

Параксиальная траектория заряженной частицы в двумерном поле дается выражениями (2.27), а линейно независимые частные решения уравнений (7.18) без правой части имеют вид соотношений (4.60).

Подставив соотношения (2.27) в уравнения (7.18) и решив последние методом вариации произвольных постоянных, найдем траектории заряженных частиц с точностью до третьего порядка. В случае точечного источника, лежащего на оси линзы ( $x_0 = y_0 = 0$ ), получим выражения для сферической аберрации:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_3 x(z) &= \frac{1}{2} x'_0 (x_0'^2 + y_0'^2) (z \cos z - \sin z) + \\ &+ \frac{1}{10} \lambda y'_0 \{y_0'^2 \operatorname{sh} z (\operatorname{sh}^2 z - 3) + \\ &+ 3x_0'^2 [2 \sin z (\operatorname{ch} z \cos z - \operatorname{sh} z \sin z) - 3 \operatorname{sh} z \cos^2 z]\}; \\ \Delta_3 y(z) &= \frac{1}{2} y'_0 (x_0'^2 + y_0'^2) (z \operatorname{ch} z - \operatorname{sh} z) + \\ &+ \frac{1}{10} \lambda x'_0 \{x_0'^2 \sin z (\sin^2 z + 3) - \\ &- 3y_0'^2 [2 \operatorname{sh} z (\operatorname{ch} z \cos z + \operatorname{sh} z \sin z) - 3 \operatorname{ch}^2 z \sin z]\}. \end{aligned} \right\} \quad (7.19)$$

Здесь за единицу измерения всех длин принята величина  $\beta^{-1}$ , а  $\lambda = \alpha/\beta^4$ .

При  $\lambda = 0$  система (7.19) переходит в выражения для  $\Delta x_3$  и  $\Delta y_3$  из уравнений (4.61), если положить в последних  $n = -1$ .

Отметим, что в  $\Delta_3 x(z)$  за постоянной  $\lambda$  стоит множитель  $y'_0$ . Следовательно, несимметрия линзы не влияет на величину аберрации ширины  $\Delta x$  для траекторий, лежащих в плоскости  $xOz$ . Так как в  $\Delta_3 y(z)\lambda$  множится на  $x'_0$ , то величина этой аберрации для траекторий, лежащих в плоскости  $yOz$ , не зависит от несимметрии линзы.

Из соотношений (7.19) можно найти величину  $\lambda$ , которая сферическую аберрацию обращает в нуль. В гауссовой плоскости изображений ( $z = \pi$ ) для  $\Delta x = 0$  имеем условие

$$\lambda = 1,360 x'_0/y'_0 \frac{(x'_0/y'_0)^2 + 1}{130,5 - 9(x'_0/y'_0)^2}, \quad (7.20)$$

из которого видно, что  $\lambda$  зависит от начальных углов наклона траектории. Следовательно,  $\Delta x$  может обратиться в нуль только для определенных значений  $x'_0/y'_0$ , т. е. для каких-то отдельных траекторий пучка. В средней плоскости величина сферической аберрации остается неизменной.

Если при фиксированном отношении  $x_0/y_0$  менять величину  $\lambda$ , то сферическая aberrация  $\Delta x$  меняет знак, проходя через нуль.

Нетрудно найти поле двумерной квадрупольной линзы, образованной четырьмя бесконечно длинными цилиндрическими электродами, считая радиусы цилиндров  $r_s$  много меньшими, чем расстояние между ними. Если расстояние от электродов до оси линзы обозначить  $r_E$ , а угол между плоскостями, проходящими через центры разноименно заряженных электродов,  $2\gamma$ , то получим

$$K_2 = \frac{2 \sin 2\gamma}{\ln r_E/r_s}; \quad k_{13} = -k_{31} = \frac{12 \sin 4\gamma}{\ln r_E/r_s}. \quad (7.21)$$

При наличии у линзы плоскостей симметрии  $2\gamma = \pi/2$  и  $k_{13} = -k_{31} = 0$ , а  $K_2 = \frac{2}{\ln r_E/r_s}$ .

Из уравнений (7.21) найдем величину  $\lambda$  для этого поля:

$$\lambda = \frac{\Phi}{V} \operatorname{ctg} 2\gamma \ln r_E/r_s. \quad (7.22)$$

Меняя величину  $\gamma$ , можно компенсировать сферическую aberrацию для траекторий с различными значениями  $x_0/y_0$ . Аналогичный результат можно получить и в более общем случае, не ограничиваясь двумерным полем, а также для магнитной квадрупольной линзы без плоскостей симметрии.

Возможность изменения знака сферической aberrации в несимметричной магнитной квадрупольной линзе с плоскостями антисимметрии была проверена экспериментально (см. работу [131]). Измерения проводились с безжелезной тороидальной секционированной линзой на электронно-лучевой трубке. Изменение степени асимметрии достигалось включением секций обмотки в различных

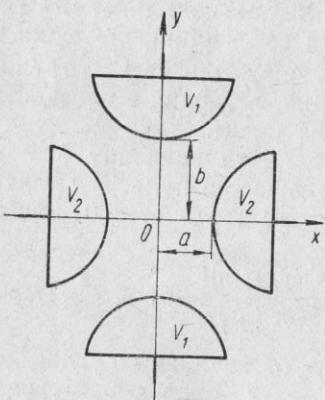


Рис. 66. Электрическая квадрупольная линза с раздвинутыми электродами.

сочетаниях. В результате для определенных траекторий пучка был получен различный знак сферической aberrации.

В квадрупольную линзу можно ввести и другой вид несимметрии. Предположим, что плоскости симметрии у линзы сохраняются, а плоскости антисимметрии отсутствуют. Пример такой линзы — изображенная на рис. 66 электрическая квадрупольная линза с разными расстояниями между одноименными электродами.

Необходимо отметить существенное различие между квадрупольными линзами с двумя описанными выше вариантами несимметрии. В первом варианте (при отсутствии плоскостей симметрии) распределение потенциала вблизи оси не изменяется и параксиальные уравнения поэтому также остаются неизменными. Во втором случае потенциал на оси линзы уже не равен нулю, а так как в пространстве за линзой он спадает до нуля, то появляется продольная составляющая поля на оси.

Для линзы, изображенной на рис. 66, распределение потенциала имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) = & \Phi_0(z) + \Phi_{20}(z)x^2 + \Phi_{02}(z)y^2 + \\ & + \Phi_{22}(z)x^2y^2 + \Phi_{40}(z)x^4 + \Phi_{04}(z)y^4 + \dots \end{aligned} \quad (7.23)$$

Здесь первых три коэффициента ряда связаны следующим соотношением:

$$\Phi''(z) + 2\Phi_{20}(z) + 2\Phi_{02}(z) = 0. \quad (7.24)$$

Параксиальные уравнения в нерелятивистском приближении для электрической линзы приобретают вид (см. работу [12])

$$\left. \begin{aligned} x'' + \frac{\Phi'_0(z)}{2\Phi(z)}x' - \frac{\Phi_{20}(z)}{\Phi(z)}x &= 0; \\ y'' + \frac{\Phi'_0(z)}{2\Phi(z)}y' - \frac{\Phi_{02}(z)}{\Phi(z)}y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

Как следует из системы (7.25), уравнения существенно изменились. Появилась добавочная фокусировка первого порядка от возникшего осесимметричного поля. Это добавочное осесимметричное поле можно не учитывать, если только квадрупольная линза достаточно длинная и мы находимся вдали от ее концов, т. е. в предположении двумерности

поля. Остановимся вкратце на рассмотрении этого случая [150].

Распределение поля вблизи линзы можно записать следующим образом:

$$\varphi(x, y) = \Phi_0 + \Phi_2(x^2 - y^2) + \Phi_4(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \dots \quad (7.26)$$

Уравнения траекторий заряженных частиц с точностью до членов, необходимых для вычисления aberrаций третьего порядка, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x'' + \beta^2 x &= -\beta^2 x [x'^2 + y'^2 + \beta^2(x^2 - y^2) + 2\eta\beta^2(x^2 - 3y^2)]; \\ y'' - \beta^2 y &= \beta^2 y [x'^2 + y'^2 + \beta^2(x^2 - y^2) + 2\eta\beta^2(3x^2 - y^2)], \end{aligned} \right\} \quad (7.27)$$

где

$$\beta^2 = -\frac{\Phi_2}{\Phi_0}; \quad \eta = \frac{\Phi_4}{\beta^2 \Phi_2}. \quad (7.28)$$

Уравнения траектории первого порядка остались такими же, как и для обычной симметричной линзы. Решением их будут параксиальные траектории (2.27). Подставив эти значения  $x$  и  $y$  в правую часть уравнений (7.27), получим линейные дифференциальные уравнения второго порядка с правой частью. Решим их методом вариации произвольных постоянных. В результате для сферической aberrации третьего порядка получим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_3 x &= \frac{1}{2\beta} x'_0 (x'^2_0 + y'^2_0) (\beta z \cos \beta z - \sin \beta z) - \\ &- \frac{1}{4\beta} \eta x'_0 \{x'^2_0 [(2 + \cos^2 \beta z) \sin \beta z - 3\beta z \cos \beta z] + 3y'^2_0 \times \\ &\times [(2 - \operatorname{ch}^2 \beta z) \sin \beta z + (\operatorname{sh} \beta z \operatorname{ch} \beta z - 2\beta z) \cos \beta z]\}; \\ \Delta_3 y &= \frac{1}{2\beta} y'_0 (x'^2_0 + y'^2_0) (\beta z \operatorname{ch} \beta z - \operatorname{sh} \beta z) - \\ &- \frac{1}{4\beta} \eta y'_0 \{y'^2_0 [(2 + \operatorname{ch}^2 \beta z) \operatorname{sh} \beta z - 3\beta z \operatorname{ch} \beta z] + 3x'^2_0 \times \\ &\times [(2 - \cos^2 \beta z) \operatorname{sh} \beta z + (\sin \beta z \cos \beta z - 2\beta z) \operatorname{ch} \beta z]\}. \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$

В симметричной квадрупольной линзе  $\eta = 0$ , и члены в фигурных скобках отсутствуют.

В гауссовой плоскости изображения ( $\beta z = \pi$ ) величина сферической aberrации  $\Delta x = 0$ , если

$$\eta = \frac{2}{3} \frac{(x'_0/y'_0)^2 + 1}{40,61 - (x'_0/y'_0)^2}. \quad (7.30)$$

В этом случае несимметрии величина  $\eta$  зависит также от начальных углов наклона траектории. Следовательно, сферическая aberrация может быть скомпенсирована не для всего пучка одновременно, а только для траекторий с одинаковым значением  $x'_0/y'_0$ .

Если электроды линзы имеют форму коробки с прямоугольным сечением  $2a \times 2b$ , вытянутой вдоль оси  $z$ , то распределение потенциала таково [32]:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y) &= V_1 + \frac{4(V_2 - V_1)}{\pi} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\operatorname{ch} \frac{2k+1}{2b} \pi x}{\operatorname{ch} \frac{2k+1}{2b} \pi a} \cdot \frac{\cos \frac{2k+1}{2b} \pi y}{2k+1}, \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

где  $V_1$  — потенциал пластин, параллельных оси  $x$ ;  $V_2$  — потенциал пластин, параллельных оси  $y$ ;  $2a$  и  $2b$  — длины соответствующих пластин.

Выражение (7.31) получено при условии, что зазоры между электродами пренебрежимо малы. Если  $a = b = r_E$ ,  $V_2 = -V_1 = V$ , то выражение (7.31) переходит в ряд (1.45).

Коэффициенты  $\Phi_0$ ,  $\Phi_2$  и  $\Phi_4$  в разложении потенциала имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= V_1 + \frac{4(V_2 - V_1)}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left( \operatorname{ch} \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{\pi a}{b} \right)^{-1}; \\ \Phi_2 &= \frac{\pi}{2b^2} (V_2 - V_1) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) \left( \operatorname{ch} \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{\pi a}{b} \right)^{-1}; \\ \Phi_4 &= \frac{\pi^3}{96b^4} (V_2 - V_1) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1)^3 \left( \operatorname{ch} \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{\pi a}{b} \right)^{-1}. \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

Из выражений (7.28) и (7.32) можно определить  $\beta^2$  и  $\eta$  и по формуле (7.30) найти условия коррекции сферической aberrации для данного случая.

Подробное рассмотрение свойств несимметричных электрических квадрупольных линз дано в работе [21].

Введение несимметрии в квадрупольную линзу выражается появлением дополнительных членов в разложении скалярных потенциалов, начиная с четвертой степени и выше. Такого же результата можно добиться, применяя дополнительные октупольные линзы. Октупольные (или восьмиполюсные) линзы — это также линзы с поперечными полями, но симметрия у них выше. Они имеют четыре плоскости симметрии и четыре плоскости антисимметрии поля. Разложение потенциала у таких линз начинается с четвертой степени координат. Поэтому в сочетании с квадрупольами октуполи не влияют на электронно-оптические свойства первого порядка. Они могут использоваться как корректоры аберраций третьего порядка. Преимущество применения октуполей для коррекции аберраций заключается в возможности независимого регулирования силы этих линз.

В работе [96] экспериментально показано, что совместное использование квадрупольной и октупольной магнитных линз может свести к нулю коэффициент сферической аберрации  $C_p$  или  $C_s$ . Однако уменьшение одного коэффициента вызывает увеличение другого. Для полной компенсации сферической аберрации квадрупольной линзы или системы из них необходимо несколько октуполей, расположенных определенным образом. Сочетанием квадрупольей и октуполей можно также скомпенсировать сферическую аберрацию осесимметричной линзы, но используемая электронно-оптическая система в обоих случаях очень сложна [151]—[153].

Если с изменением координаты  $z$  полюса и электроды обычной симметричной квадрупольной линзы будут равномерно поворачиваться вокруг оси линзы, то мы получим линзу со спиральной симметрией или так называемую спиральную квадрупольную линзу [154—157].

В каждом поперечном сечении линзы картина поля остается неизменной, но от одного сечения к другому силовые линии и эквипотенциали закручиваются по спирали. Появляются составляющие электрического и магнитного полей, параллельные оси  $z$ . Если шаг спирали  $h$  много больше радиуса апертуры линзы, то продольные составляющие полей малы.

Сpirальная линза — как бы предел системы из очень большого количества расположенных последовательно очень тонких одинаковых линз, каждая из которых повернута относительно предыдущей на одинаковый угол. Если длина каждой линзы  $L$ , а угол поворота  $2\pi/m$ , где  $m$  — некоторая постоянная, то  $h = mL$ .

Если не учитывать спада поля на краях линзы, то в приосевой области распределения скалярных потенциалов в каждом сечении  $z = \text{const}$  можно описывать первыми членами в (1.26a) и (1.26b). Однако начало отсчета угла  $\psi$  в соотношении (1.26) от сечения к сечению будет меняться. Чтобы учесть это, в выражении для спирально-симметричного поля вместо  $\psi$  должна стоять величина  $\psi \pm \frac{2\pi z}{h}$ . Знак плюс соответствует вращению электродов и полюсов против часовой стрелки (левая спираль), знак минус — вращению в противоположную сторону.

Распределения потенциалов в параксиальной области спиральной линзы при этом имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \varphi(r, \psi, z) &= \Phi_2 r^2 \cos 2 \left( \psi \pm \frac{2\pi z}{h} \right); \\ \omega(r, \psi, z) &= \Omega_2 r^2 \sin 2 \left( \psi \pm \frac{2\pi z}{h} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

Значения  $\Phi_2$  для спиральной линзы с вогнутыми электродами даны в работе [155].

В дальнейшем для простоты будем рассматривать только один вариант, когда электроды и полюса описывают левую спираль, т. е. сохраним в выражениях (7.33) только знак плюс.

В декартовой системе координат распределения потенциалов для приосевой области линзы запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \Phi_2 \left[ (x^2 - y^2) \cos \frac{4\pi z}{h} - 2xy \sin \frac{4\pi z}{h} \right]; \\ \omega(x, y, z) &= \Omega_2 \left[ 2xy \cos \frac{4\pi z}{h} + (x^2 - y^2) \sin \frac{4\pi z}{h} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

При  $h \rightarrow \infty$  соотношения (7.34), с учетом выражений (1.25), переходят в уравнения (1.12) и (1.13).

Найдем отсюда напряженности электрического и магнитного полей и подставим полученные выражения в соот-

ношения (2.4). Так как рассматривается параксиальное приближение, то мы ограничимся в уравнениях (2.4) только первыми степенями величин  $x$ ,  $y$ ,  $x'$  и  $y'$ . В этом случае  $v \approx v_z$  и весь вывод аналогичен проведенному в гл. 2 при нахождении параксиального уравнения квадрупольной линзы.

В результате получим

$$\left. \begin{aligned} x'' + \beta^2 \left( x \cos \frac{4\pi z}{h} - y \sin \frac{4\pi z}{h} \right) &= 0; \\ y'' - \beta^2 \left( y \cos \frac{4\pi z}{h} + x \sin \frac{4\pi z}{h} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.35)$$

Выражение для  $\beta^2$  дается такими же формулами (2.11) и (2.12), что и для обычной квадрупольной линзы. Предполагаем, что рассматриваемая линза (как и комбинированная квадрупольная) состоит из наложенных электрической и магнитной линз. Обе линзы обладают спиральной симметрией, угол между прямыми, проходящими через ось и центры электродов и полюсов, составляет по-прежнему  $45^\circ$  (см. рис. 4). Если  $h \rightarrow \infty$ , дифференциальные уравнения (7.35) переходят в выражения (2.10) с  $u(z)=1$ .

Как видно из соотношений (7.35), переменные в параксиальных уравнениях не разделились.

На основании уравнений (7.35), используя выражения для  $\beta^2$  можно найти условия, при которых спиральная квадрупольная линза ахроматична, т. е. ее электронно-оптические свойства первого порядка не зависят от небольшого изменения энергии заряженных частиц. Для этого необходимо, чтобы уравнения (7.35) в первом приближении не менялись с изменением  $(-e\Phi)$ , т. е. чтобы

$$\frac{d \beta^2}{d(-e\Phi)} = 0. \quad (7.36)$$

Это условие совпадает с условием ахроматичности обычной квадрупольной линзы. Поэтому необходимые соотношения напряженностей электрического и магнитного полей даются по-прежнему выражениями (5.6)–(5.9) (см. работу [156]).

Уравнения (7.35) заменой переменных (см. работу [154])

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= x \cos \frac{2\pi z}{h} - y \sin \frac{2\pi z}{h}; \\ \tau &= x \sin \frac{2\pi z}{h} + y \cos \frac{2\pi z}{h} \end{aligned} \right\} \quad (7.37)$$

можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} \sigma'' + \frac{4\pi}{h} \tau' - \left( \frac{4\pi^2}{h^2} - \beta^2 \right) \sigma &= 0; \\ \tau'' - \frac{4\pi}{h} \sigma' - \left( \frac{4\pi^2}{h^2} + \beta^2 \right) \tau &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.38)$$

Введение новых переменных (7.37) соответствует рассмотрению траекторий во вращающейся с периодом  $h$  системе координат.

Система дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами (7.38) имеет следующие решения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= C_1 \omega_1 \sin \omega_1 z + C_2 \omega_1 \cos \omega_1 z + \\ &\quad + C_3 \frac{2\pi}{h} \sin \omega_2 z + C_4 \frac{2\pi}{h} \cos \omega_2 z; \\ \tau &= -C_1 \frac{2\pi}{h} \cos \omega_1 z + C_2 \frac{2\pi}{h} \sin \omega_1 z - \\ &\quad - C_3 \omega_2 \cos \omega_2 z + C_4 \omega_2 \sin \omega_2 z, \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

где

$$\omega_1 = \left( \frac{4\pi^2}{h^2} + \beta^2 \right)^{1/2}; \quad \omega_2 = \left( \frac{4\pi^2}{h^2} - \beta^2 \right)^{1/2}, \quad (7.40)$$

а  $C_i$  — постоянные, связанные с начальными условиями.

Очевидно, что траектория имеет осциллирующий характер и ограничена по величине при условии

$$\frac{2\pi}{h} > |\beta|. \quad (7.41)$$

Как и в ранее рассмотренных периодических системах, здесь имеется свое условие устойчивости колебаний, выражаемое соотношением (7.41). Поэтому спиральную квадрупольную линзу можно также использовать как фильтр, пропускающий заряженные частицы с энергией больше определенной величины.

Из равенств (7.37) можно выразить  $x$  и  $y$  через  $\sigma$  и  $\tau$  и при помощи выражений (7.39) написать вид проекций траектории на плоскости  $xOz$  и  $yOz$  в спиральной квадрупольной линзе.

Для исследования оптических свойств линзы удобно пользоваться выражениями (7.39) с подставленными в них начальными значениями  $\sigma_0$ ,  $\tau_0$ ,  $\sigma'_0$  и  $\tau'_0$ :

$$\begin{aligned} \beta^2 \sigma = & \sigma_0 \left( \frac{4\pi^2}{h^2} \cos \omega_2 z - \frac{\omega_2^2}{h^2} \cos \omega_1 z \right) + \\ & \sigma'_0 \left( \omega_1 \sin \omega_1 z - \frac{4\pi^2}{h^2 \omega_2} \sin \omega_2 z \right) + \\ & + \tau_0 \frac{2\pi}{h} \left( \omega_1 \sin \omega_1 z - \frac{\omega_1^2}{\omega_2} \sin \omega_2 z \right) + \\ & + \tau'_0 \frac{2\pi}{h} (\cos \omega_1 z - \cos \omega_2 z); \end{aligned} \quad (7.42)$$

$$\begin{aligned} \beta^2 \tau = & \sigma_0 \frac{2\pi}{h} \left( \omega_2 \sin \omega_2 z - \frac{\omega_2^2}{\omega_1} \sin \omega_1 z \right) + \\ & + \sigma'_0 \frac{2\pi}{h} (\cos \omega_2 z - \cos \omega_1 z) + \tau_0 \left( \omega_1^2 \cos \omega_2 z - \right. \\ & \left. - \frac{4\pi^2}{h^2} \cos \omega_1 z \right) + \tau'_0 \left( \frac{4\pi^2}{h^2 \omega_1} \sin \omega_1 z - \omega_2 \sin \omega_2 z \right). \end{aligned}$$

Линза фокусирует параллельный пучок в точку, если в каком-либо сечении  $z = \text{const}$  выполняется соотношение

$$\sigma/\sigma' = \tau/\tau' = \text{const} < 0. \quad (7.43)$$

Из уравнений (7.42) следует, что условие (7.43) выполняется только для  $\beta^2 = 0$ . Следовательно, спиральная квадрупольная линза не создает точечного изображения параллельного пучка. Можно подобрать параметры линзы таким образом, чтобы выполнялись условия  $\sigma/\sigma' < 0$  и  $\tau/\tau' < 0$ . При этом система фокусирует пучок во всех направлениях, однако она астигматична.

Возможность использования спиральной квадрупольной линзы как канала для пучков  $\mu$ -мезонов была исследована в работе [157], где отмечена большая светосила системы.

В заключение остановимся на вопросе об учете пространственного заряда пучка при фокусировке его квадрупольными линзами.

Пространственный заряд пучка играет большую роль в различного рода электронно-оптических системах, используемых в приборах сверхвысоких частот. Его влияние скажется также на поведении пучка заряженных частиц в линейных ускорителях. Ввиду использования в этих системах квадрупольных линз, необходимо рассмотреть поведение интенсивного пучка частиц в их полях.

Значительное усложнение по сравнению с осесимметричными и двумерными полями вносится в данном случае из-за того, что сечение пучка имеет эллиптическую форму. Поэтому нельзя ограничиться его рассмотрением только в одной плоскости. Необходимо учитывать, что размеры пучка меняются по-разному в обеих координатных плоскостях.

В присутствии пространственного заряда поле, в котором распространяется пучок, определяется не только внешним полем, создаваемым электродами и полюсами линз. На него влияет также собственное поле, создаваемое заряженными частицами пучка и зависящее от параметров пучка, формы и распределения в нем зарядов. Поэтому при строгом исследовании распространения в электромагнитном поле интенсивного пучка заряженных частиц необходимо рассматривать самосогласованную задачу о создаваемом поле и движении в нем заряженных частиц. В этом случае нужно решать совместно уравнения Максвелла для поля и уравнения движения для частиц.

Рассмотрению вопроса о распространении интенсивного пучка эллиптического сечения в квадрупольных линзах посвящены работы [20, 158–162]. Параксиальные уравнения для граничных траекторий пучка в квадрупольных линзах с учетом собственного пространственного заряда имеют вид

$$\left. \begin{aligned} R_x'' + \beta^2 R_x - \frac{\alpha^2}{R_x + R_y} &= 0; \\ R_y'' - \beta^2 R_y - \frac{\alpha^2}{R_x + R_y} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.44)$$

где  $R_x$  и  $R_y$  — полуоси эллипса;  $\beta^2$  — по-прежнему возбуждение квадрупольной линзы;  $\alpha^2$  — параметр, связанный с пространственным зарядом. В системе единиц МКСА

$$\alpha^2 = \frac{l}{2\sqrt{2}\pi\varepsilon_0(e/m)^{1/2}\Phi^{3/2}}. \quad (7.45)$$

Уравнения (7.44), которые описывают в нерелятивистском приближении изменение с координатой  $z$  большой и

малой полуосей эллиптического сечения пучка, дают полную информацию о пучке. Они получены при следующих упрощающих предположениях, которые обычно принимаются в подобных расчетах: пучок ламинарен, плотность пространственного заряда  $\rho$  постоянна в любом поперечном сечении, однако она может меняться вдоль оси пучка. Для вычисления силы расталкивания пространственного заряда можно пренебречь изменением поперечного сечения и плотности заряда с изменением  $z$ . Не учитывается влияние пространственного заряда на изменение продольного поля и продольной скорости частиц. Пренебрегаем также тепловыми скоростями частиц и изменением распределения потенциала из-за зеркального отражения зарядов в металлических стенах камеры, а также полюсах и электродах линз.

При этих предположениях напряженность электрического поля, создаваемая пространственным зарядом пучка с эллиптической формой сечения, на его границе записывается следующим образом:

$$\mathbf{E} = \frac{I}{\pi \epsilon_0 v (R_x + R_y)} (\mathbf{i} \cos \psi + \mathbf{j} \sin \psi). \quad (7.46)$$

Если сечение имеет форму круга  $R_x = R_y = R$ , то абсолютная величина напряженности поля принимает хорошо известный вид

$$E = \frac{I}{2\pi \epsilon_0 v R}. \quad (7.47)$$

На вершинах эллипса напряженность поля пространственного заряда направлена по его осям и равна

$$E = \frac{I}{\pi \epsilon_0 v (R_x + R_y)}. \quad (7.48)$$

Учет расталкивающей силы, обусловленной этим полем, в уравнении движения граничных частиц и приводит к уравнениям (7.44). Они представляют собой систему нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Переменные в уравнениях (7.44) не разделяются, и в общем виде эти уравнения не решаются. При  $I = 0$   $\alpha^2 = 0$  и выражения (7.44) переходят в параксиальные уравнения квадрупольных линз (2.10).

Если  $\beta^2 = 0$ , то соотношения (7.44) описывают распыление интенсивного пучка с эллиптической формой сечения

в свободном от внешних полей пространстве. Заменой переменных [162]

$$\varepsilon = R_x + R_y; \quad v = R_x - R_y \quad (7.49)$$

уравнения (7.44) при  $\beta^2 = 0$  можно свести к виду

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon'' - \frac{2\alpha^2}{\varepsilon} &= 0; \\ v'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.50)$$

Первое из уравнений (7.50) для  $\varepsilon$  имеет такой же вид, как уравнение, описывающее расплывание осесимметричного пучка под действием собственного пространственного заряда при отсутствии внешних полей [163]. Его решение таково:

$$z = \frac{\epsilon_0}{\alpha} e^{-\left(\frac{\epsilon'_0}{2\alpha}\right)^2} \int_{\epsilon'_0/2\alpha}^{\sqrt{\ln \varepsilon/\epsilon_0 + (\epsilon'_0/2\alpha)^2}} e^{m^2 dm}. \quad (7.51)$$

Решение второго уравнения (7.50) имеет вид

$$v = \epsilon'_0 z + v_0. \quad (7.52)$$

Здесь  $\epsilon_0 = R_{xo} + R_{yo}$ ;  $\epsilon'_0 = R'_{xo} + R'_{yo}$ ;  $v_0 = R_{xo} - R_{yo}$ ;  $v'_0 = R'_{xo} - R'_{yo}$ .

Определив поведение пучка с эллиптическим сечением в пространстве без внешних полей, можно решить задачу о проведении его на значительное расстояние при помощи системы из тонких квадрупольных линз. Подобная задача для интенсивного пучка заряженных частиц, фокусируемого системой из тонких осесимметричных линз, рассмотрена в работе [163].

Расположим ряд тонких квадрупольных линз таким образом, чтобы они по очереди то фокусировали, то дефокусировали пучок. Назовем периодом область, охватывающую две линзы (собирающую и рассеивающую) и пространство между ними, а также пространство от второй линзы до третьей. Задача состоит в том, чтобы найти такие условия, при которых граничные траектории пучка не изменялись бы от одного периода к другому. Так как линзы предполагаются тонкими, то в их пределах можно считать попереч-

ное смещение траектории неизменным и не учитывать действие на него пространственного заряда. Поэтому воздействие тонких линз оказывается только на изменении наклона траектории, которое описывается выражениями (2.38), (2.39) гл. 2. Траектория в системе определяется сшиванием граничных условий в переходе между областью, свободной от внешнего поля, и линзой. В этих точках должны быть равны поперечные смещения и углы наклона. На основе построенных таким образом траекторий можно подобрать параметры системы так, чтобы их начальные значения от периода к периоду совпадали.

Например, рассмотрим линзы с равной абсолютной величиной фокусного расстояния  $f$ , расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга  $s$ . В частном случае, когда траектория в плоскости  $yOz$  отличается от траектории в плоскости  $xOz$  только сдвигом на величину  $s$  вдоль оси  $z$ , условия периодичности будут такими:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha s}{2\varepsilon_0} &= e^{-\left(\frac{\varepsilon'_0}{2\alpha}\right)^2} \int_0^{\varepsilon'_0/2\alpha} e^{m^2} dm; \\ v_0 &= -\frac{\varepsilon'_0 s}{2}; \\ -\frac{\varepsilon'_0}{v_0} &= -\frac{\varepsilon'_0}{\varepsilon_0} = 2f. \end{aligned} \right\} \quad (7.53)$$

Прохождение пучка заряженных частиц через систему тонких линз представлено рис. 67.

Если считать величину  $\alpha^2$  небольшой, что обычно выполняется на практике, то уравнения граничных траекторий в квадрупольной линзе с учетом пространственного заряда (7.44) можно решать методом последовательных приближений [160]. Для этого член с  $\alpha^2$  переносится в правую часть и вместо  $R_x$  и  $R_y$  в него подставляются решения уравнений с  $\alpha^2 = 0$  ( $R_{xp}$  и  $R_{yp}$ ). Полученные линейные дифференциальные уравнения с правой частью решаются методом вариации произвольных постоянных. Весь метод решения аналогичен тому, который применяют для вычисления aberrаций квадрупольных линз.

При использовании прямоугольной модели распределения поперечного поля по оси линзы  $R_{xp}$  и  $R_{yp}$  имеют вид уравнения (2.27). Тогда получим на выходе из линзы

$$\left. \begin{aligned} R_x - R_{xp} &= p(\beta L) \cos \beta L + t(\beta L) \sin \beta L; \\ R'_x - R'_{xp} &= \beta [-p(\beta L) \sin \beta L + t(\beta L) \cos \beta L], \end{aligned} \right\} \quad (7.54)$$

где

$$\left. \begin{aligned} p(\beta L) &= -\frac{\alpha^2}{\beta^2} \int_0^{\beta L} \frac{\sin \beta z \, d\beta z}{R_{xp}(\beta z) + R_{yp}(\beta z)}; \\ t(\beta L) &= \frac{\alpha^2}{\beta^2} \int_0^{\beta L} \frac{\cos \beta z \, d\beta z}{R_{xp}(\beta z) + R_{yp}(\beta z)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.55)$$

Выражения для  $R_y(\beta L)$  и  $R'_y(\beta L)$  имеют аналогичный вид. Интегралы (7.55) в элементарных функциях не выражаются.

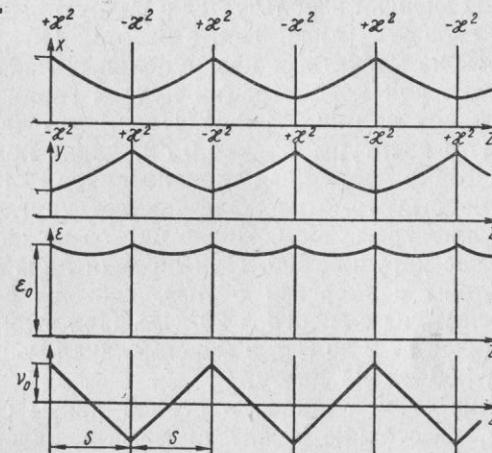


Рис. 67. Прохождение интенсивного пучка заряженных частиц через периодическую систему из тонких квадрупольных линз.

В работе [160] уравнения (7.44) были решены также методом численного интегрирования и результаты сравниены с полученными приближенным методом.

Учет пространственного заряда имеет значение для линейных ускорителей, поэтому в работах [160, 161] решались уравнения для граничных траекторий интенсивного пучка с учетом полей магнитных квадрупольных и осесимметричных электрических линз.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перечислим коротко возможные варианты использования квадрупольных линз с некоторыми конкретными примерами.

Первое применение квадрупольных линз связано с ускорителями заряженных частиц. Для фокусировки частиц высоких энергий используется в полную меру большая оптическая сила этих линз. Так, в работах [164, 165] описаны дублеты из магнитных квадрупольных линз, которые употребляются для концентрации пучков заряженных частиц, выходящих из циклотронов. Параметры линз таковы [165]: диаметр апертуры  $2r_m = 4,0 \text{ см}$ , длина полюсов  $l = 10 \text{ см}$ , форма полюсных наконечников — гиперболические цилиндры. Ярмо из железа имеет круглую форму с внешним диаметром 25 см. Число витков каждой надеваемой на полюс катушки 600. При помощи линз фокусировались протоны с энергией 5 Мэв, deutоны с энергией 10 Мэв и  $\alpha$ -частицы с энергией 20 Мэв. При этом ток в катушках менялся от 2 до 6 а, а максимальная мощность питания была 300 вт на линзу.

Расстояние от источника до первой линзы составляло  $a = 235 \text{ см}$ , расстояние между линзами менялось от 30 до 120 см, а положение изображения  $g = 77 \div 411 \text{ см}$ . В оптимальном варианте пучок, имеющий на входе в дублет размеры  $2,5 \times 1,25 \text{ см}$ , собирался в пятно диаметром 6 мм. Использование дублета позволяло увеличить интенсивность пучка на мишени примерно в восемь раз.

В работе [164] для концентрации пучка применяли два дублета, диаметр апертуры линз был 5 см, интенсивность пучка возрастила в 30 раз.

Использование квадрупольных линз в области физики частиц высоких энергий все расширяется. В трудах конференций по ускорителям и по физике высоких энергий имеются многочисленные описания оптических схем, од-

ним из элементов которых являются квадрупольные линзы (см. работы [166—171]).

Системы из квадрупольных линз применяют при переводе пучка заряженных частиц из одного ускорителя в другой, например из протонного линейного ускорителя в синхрофазотрон. Их роль заключается в согласовании фазовых объемов для уменьшения потерь частиц на стенах ускорителя.

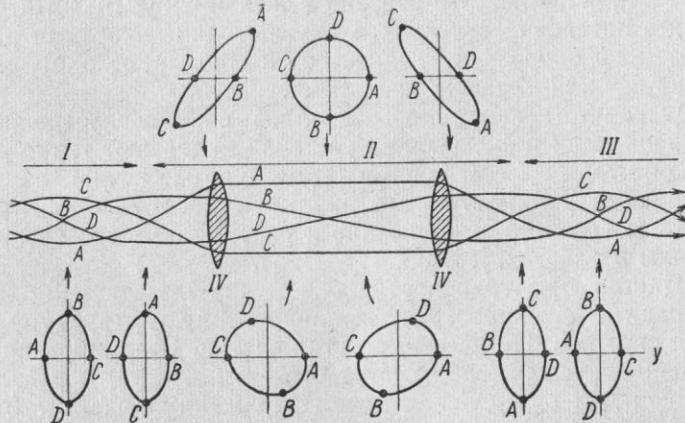


Рис. 68. Фазовые диаграммы пучка заряженных частиц, проходящего из одного ускорителя в другой:  
I — выход из первого ускорителя; II — пространство между ускорителями;  
III — вход во второй ускоритель; IV — квадрупольные линзы.

В пространстве между ускорителями, свободном от поля, фазовый объем пучка искажается: смещение частиц от оси увеличивается, а поперечный импульс частиц остается неизменным. При этом эллипсы, характеризующие фазовые объемы, вытягиваются (см. рис. 20, а). Квадрупольные линзы изменяют угол наклона траекторий. Если линзы можно рассматривать как тонкие, то угол наклона изменяется пропорционально поперечному смещению траектории, которое остается постоянным (см. рис. 20, б). Прохождение пучка заряженных частиц в пространстве между ускорителями, в котором размещены квадрупольные линзы, схематически показано на рис. 68.

Описание ионопровода и системы ввода пучка из электростатического генератора в синхрофазотрон дано в работе [172].

Очень многочисленны системы для транспортировки пучков от ускорителей к экспериментальным установкам. Они содержат, как правило, магнитные квадрупольные линзы и отклоняющие магниты. К оптическим схемам этих систем предъявляются специфичные требования. Обеспечивая высокое качество фокусировки, они в некоторых случаях должны отклонять или смещать немонохроматические пучки заряженных частиц без разделения их по импульсу в конечной точке. Это связано с желанием уменьшить потери в интенсивности пучков, обладающих некоторым разбросом по скоростям. Такие системы называют ахроматическими, или бездисперсионными.

Параметры квадрупольных линз в бездисперсионных отклоняющих и смещающих системах подбирают таким образом, чтобы совместно с магнитами они обеспечивали симметричные или антисимметричные относительно центра системы траектории. Описание и расчет таких систем приведены в работах [18, 53, 173—176].

Иногда при транспортировке пучка бывает полезным сохранить его пространственно-временную структуру в виде сгустков. Например, сгустки частиц, сформированные линейным ускорителем, могут быть использованы в дальнейшем для определения массы заряженных частиц. Для того чтобы, проходя через магнитный канал, сгустки заряженных частиц не расплывались, последний должен быть изохронным. Это значит, что длины всех траекторий в нем между двумя заданными точками должны быть постоянными, независимо от начальных условий и небольшого разброса в импульсах. Описание изохронных систем, использующих квадрупольные линзы, приведено в работе [18].

О принципах построения жесткофокусирующих каналов из квадрупольных линз уже говорилось в гл. 3. Действующий канал для  $\mu$ -мезонов описан в работе [177]. В нем  $\mu$ -мезоны образуются при распаде  $\pi$ -мезонов с импульсами от 420 до 230 Мэв/с. Источником  $\pi$ -мезонов является пучок протонов с энергией 600 Мэв из фазotronа. Специфическая задача канала заключается в создании интенсивного пучка  $\mu$ -мезонов с малым фоном сильно взаимодействующих  $\pi$ -мезонов. Для этого длина канала должна быть сравнимой с распадной длиной  $\pi$ -мезонов, что составляет большую величину в случае значительного импульса последних. В результате в канале

получается протяженный источник с довольно большим угловым раствором. Такой канал состоит из 24 квадрупольных линз и имеет протяженность 13 м. Апертура линз равна 20 см, а максимальная величина градиента напряженности магнитного поля составляет  $G_M = 1$  кэрст/см. В конце канала расположен магнит, поворачивающий частицы на угол в  $70^\circ$  и производящий их анализ по импульсам.



Рис. 69. Схема канала с электростатическим сепаратором и траектории в нем:  
— мишень;  $BR$  — железная труба для экранировки пучка от внешних полей;  $C$  — коллиматоры;  $Q$  — квадрупольные линзы;  $M$  — отклоняющие магниты;  $ES$  — электростатические сепараторы;  $RM$  — импульсный магнит;  $NBC$  — пузырьковая камера. На прямой черточками показано положение центров всех элементов.

В настоящее время применяется много методов сепарации пучков высоких энергий, вызванных необходимостью иметь чистые пучки для таких детекторов, как пузырьковая камера. Один из методов заключается в использовании для сепарации частиц по массам однородного электростатического поля. Необходимая часть такого сепаратора — системы из квадрупольных линз, оптическая схема которых рассмотрена в гл. 3. Вся система в целом довольно сложна. Она содержит отклоняющие магниты, квадрупольные лин-

зы и электростатические дефлекторы, совмещенные с катушками, создающими однородное магнитное поле.

Существует несколько электростатических сепараторов. Сепаратор для  $K$ -мезонов с импульсом 1,17 Гэв/с, используемый в течение ряда лет на беватроне, подробно описан в работах [15, 178]. Имеется описание [119] построенного в ЦЕРНе канала для сепарации пучков  $K$ -мезонов с импульсами порядка 5 Гэв/с. Схема канала и траектории заряженных частиц в нем приведены на рис. 69. Длина между мишенью и пузырьковой камерой в этом канале составляет 180 м. Используются стандартные квадрупольные линзы и отклоняющие магниты ЦЕРНа. Расстояние от оси до края пучка на всем протяжении не превышает 5 см. Это избавляет от необходимости специального шиммирования магнитов для уменьшения aberrаций. В первой части системы до сепаратора предусмотрена возможность бездисперсионного прохождения пучка. Сепаратор состоит из трех ступеней. Квадрупольные линзы  $Q_{16}$  и  $Q_{17}$  можно использовать для создания в пузырьковой камере линейного изображения, которое при помощи импульсного магнита  $RM$  перемещается попере $k$  камеры. Линзы могут также создавать расходящийся пучок. Однако распределение треков в камере при этом менее однородно.

Об использовании квадрупольных линз в линейных ускорителях для компенсации в них радиальных дефокусирующих сил уже упоминалось.

Имеются и другие области применения квадрупольных линз. Их астигматичность используется в бета- и масс-спектрометрах. Для многих масс-спектрометров, например с секторными магнитами, требуются ионные источники, дающие ленточные ионные пучки. Хорошее разрешение в таких масс-спектрометрах получается при достаточно малой ширине предмета, которым является выходная щель источника. Это условие ограничивает ток ионного пучка. Если за источником поместить дублет из квадрупольных линз, то можно превратить ионный пучок прямоугольного сечения в плоский, ленточный. Это позволяет увеличивать светосилу установки без снижения ее разрешающей способности.

Ионные источники с электрическими квадрупольными линзами описаны в работах [179—182]. Дублет настраивается таким образом, чтобы преобразовать параллельный на входе в него пучок с прямоугольным сечением в

клинообразный. При этом проекции траекторий на одну плоскость, параллельную щели спектрометра, остаются параллельными, а в перпендикулярной ей плоскости собираются в точку. Получающееся линейное изображение служит предметом для масс-спектрометра.

Результаты расчета такого дублета для различных его параметров представлены в виде графиков в работе [181]. Испытания ионных источников с квадрупольными линзами показали, что они работают удовлетворительно и дают большое увеличение тока в пучке. Конструкция таких источников проста и требуемые для квадрупольных линз потенциалы невелики.

В ряде работ описывается применение магнитных квадрупольных линз в спектрометрах заряженных частиц, что дает возможность повысить их светосилу и разрешение [183—186].

О попытках использовать квадрупольные линзы в электронной микроскопии уже говорилось. Они связаны с большой силой линз, возможностью получать различные увеличения в двух направлениях, созданием ахроматических линз и попыткой корректировать в линзах сферическую aberrацию. Одной из первых работ в этом направлении было использование дублета в качестве проекционной линзы электронного микроскопа [8, 57].

Как известно, в отражательном электронном микроскопе из-за наклонного расположения предмета увеличение в плоскости падения значительно отличается от увеличения в перпендикулярной ей плоскости. В работе [187] для устранения этой дисторсии изображения использована магнитная квадрупольная линза.

В работах [68, 69] описан объектив электронного микроскопа, составленный из пяти электрических квадрупольных линз. Приведены полученные с применением этого объектива микрофотографии поверхности меди и бактерий.

Принцип работы масс-спектрометра на электрической квадрупольной линзе с дополнительно наложенным на электроды высокочастотным полем описан в гл. 7. Его достоинство — простота конструкции и независимость в широких пределах разрешающей способности от разброса ионов по энергии и начальным углам вылета.

Масс-анализатор состоит из ионного источника, квадрупольной линзы и коллектора ионов. Электроды линзы — это обычно четыре круглых длинных стержня. Описан масс-

анализатор, являющийся как бы четвертью квадрупольной линзы. Он состоит из двух электродов: одного в форме сегмента круглого цилиндра и другого, имеющего форму угольника [188].

Разрешающая способность масс-спектрометра в большой мере зависит от количества периодов высокой частоты, в течение которых ионы находятся в поле. При длине электродов 50 см и 75 периодах разрешающая способность равна 250 [147]. В масс-анализаторе с длиной электродов 1 м и количеством периодов 140 разрешающая способность достигает 1500 [148]. Описан масс-спектрометр с разрешающей способностью 20 000 при длине электродов 5,82 м и пребывании ионов в поле в течение 500 периодов высокой частоты [189]. Подробный обзор по квадрупольным масс-спектрометрам дан в работе [149].

Можно указать еще много применений квадрупольных линз, аналогичных применению анаморфотных систем в световой оптике. Например, с увеличением отклонения луча осциллографа при помощи квадрупольной линзы только в одном требуемом направлении потеря в интенсивности не столь велика [190].

В работе [191] описано использование магнитной квадрупольной линзы совместно с электронно-оптическим преобразователем изображения для спектральных исследований плазмы. Резкое сжатие изображения в одном направлении увеличивает светосилу прибора и позволяет разворачивать изображение во времени. Расширение изображения в другом направлении эквивалентно увеличению линейной дисперсии спектрального прибора.

Иногда плоский «ножевой» пучок используется для сканирования какой-либо площади, например, в пузырьковой камере [119].

Интересна область применения квадрупольных линз к частицам, обладающим не зарядом, а дипольным моментом. В настоящее время большое внимание уделяют управлению движением, фокусировке и сепарации таких частиц.

Сила, действующая в магнитном поле на частицу с магнитным моментом  $\mu$ , равна  $F = -\mu \text{ grad } H$ . В квадрупольной линзе с гиперболическими полюсами (или в приосевой области линз с другой формой полюсов) величина напряженности поля пропорциональна расстоянию от оси  $z$ , а  $\text{grad } H$  постоянен (см. гл. 1). Если магнитный момент частиц ли-

нейно зависит от величины напряженности поля  $\mu \sim H$ , то действующая на него сила пропорциональна расстоянию от оси и направлена по радиусу.

Таким образом, квадрупольная линза действует на такие частицы аналогично тому, как осесимметричная линза — на заряженные частицы [192].

Аналогичную роль по отношению к частицам, которые обладают электрическим дипольным моментом, линейно зависящим от величины напряженности электрического поля, играет электрическая квадрупольная линза. В этом случае также сила пропорциональна  $r$  и направлена по радиусу и линза фокусирует одинаково во всех направлениях [193].

Следует сказать еще несколько слов о многополюсных электрических и магнитных линзах. Это также линзы с поперечными полями, однако количество плоскостей симметрии и антисимметрии у них больше. Если  $2N$  — число полюсов или электродов линзы, то число плоскостей симметрии (и антисимметрии) равно  $N$ . Разложение потенциалов таких линз вокруг оси  $z$  начинается со степеней, равных  $N$ : в шестиполюсной линзе с третьей, в восьмиполюсной с четвертой. Ввиду отсутствия в разложении потенциалов членов с поперечными координатами во второй степени эти линзы не обладают фокусирующим эффектом первого порядка.

Об использовании октуполей для коррекции сферической aberrации мы уже упоминали в гл. 7. Оно связано с тем, что первые члены в разложении его поля имеют тот же порядок, что члены, определяющие сферическую aberrацию в осесимметричных и квадрупольных линзах.

Секступольную линзу применяют для коррекции хроматической aberrации [194—196]. Если каким-либо образом, например отклоняющим магнитом, в одной плоскости создано упорядоченное расположение траекторий с различными импульсами, то возможна коррекция хроматической aberrации пучка в другой, перпендикулярной ей плоскости. Секступоль располагают так, чтобы в плоскости коррекции уравнение, описывающее траекторию в нем, имело вид  $y'' + 2Kxy = 0$ , где  $K$  — некоторая постоянная. Таким образом, воздействие на частицу в этой плоскости пропорционально ее смещению от оси в другой плоскости. При определенных параметрах шестиполюсника это приводит к компенсации aberrации.

Шестиполюсные линзы также могут быть использованы для фокусировки частиц с постоянным дипольным моментом [197] и для коррекции сферической aberrации в секторных магнитных полях [198].

Возможно пространственное совмещение квадрупольной линзы и отклоняющего поля. Для этого в случае электрической линзы на два противолежащих электрода дополнительно подается разность потенциалов. В случае магнитной линзы разность скалярных магнитных потенциалов между противолежащими полюсами создается изменением токов в их обмотках: увеличением в одной и уменьшением в другой. Такая несимметрия питания приводит в первом приближении к дополнительному смещению пучка в целом относительно геометрической оси линзы. Этот эффект полезен, если наряду с фокусировкой необходимо небольшое управляемое отклонение пучка [199, 200].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Melkisch A. Sitzungsber. Akad. Wiss., Wien, Math. Naturwiss. Kl., Abt. 11 a, 155, 393 (1947).
2. Сонгант Е. Д., Livingston M. S., Snyder H. S., Blewett J. P. Phys. Rev., 91, 202 (1953).
3. Courant E. D., Livingston M. S., Snyder H. S., Phys. Rev., 88, 1190 (1952).
4. Blewett J. P. Phys. Rev., 88, 1197 (1952).
5. Glaser W. Elektronen und Ionoptik. Handbuch der Physik herausg. S. Flügge, Berlin, 33, 123 (1956).
6. Страшевич А. М. Электронная оптика электростатических полей, не обладающих осевой симметрией. М., Физматгиз, 1959.
7. Grivet P., Septier A. Les Lentilles Quadrupolaires Magnétiques. Nucl. Instr. Meth., 6, № 2, 126; № 3, 243 (1960).
- 7a. Chamberlain O. Optics of High Energy Beams. Ann. Rev. Nucl. Sci. 10, 161 (1960).
8. Septier A. Strong Focusing Lenses. Advances in Electronics and Electron Physics. L. Marton ed. N. Y. — Lond., Academic Press, 14, 85 (1961).
9. Luckey D. Beam Optics. Techniques of High Energy Physics. D. M. Riston ed. N. Y., Interscience, 1961, p. 403.
10. Livingston M. S., Blewett J. P. Particle Accelerators. N. Y. — San Francisco — Toronto — Lond. McGraw-Hill, 1962.
11. Ливингстон Дж. Принципы работы циклических ускорителей. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
12. Кельман В. М., Явор С. Я. Электронная оптика. М. — Л., Изд-во АН СССР, 1963.
13. Stegner R. M. Beam Transport Systems. Methods of Exper. Phys. N. Y. — Lond., Academic Press, 5B, 691 (1963).
14. Миллер В. В. Расчет магнитных фокусирующих систем для пучков частиц высокой энергии. «Приборы и техника эксперимента», № 6, 3 (1964).
15. Вагин В. А., Котов В. И., Семенюшин И. Н. Методы сепарации частиц высоких энергий. «Успехи физ. наук», 82, 707 (1964).

16. King N. M. Theoretical Techniques of High Energy Beam Design. Progr. in Nuclear Phys. Oxford — Lond. — N. Y. — Paris, Pergamon Press, 9, 73 (1964).
17. Власов А. Д. Теория линейных ускорителей. М., Атомиздат, 1965.
18. Steffen K. G. High Energy Beam Optics. N. Y. — Lond. — Sydney, Interscience, 1965.
19. Grivet P. Electron Optics. Oxford, Pergamon Press, 1965.
20. Капчинский И. М. Динамика частиц в линейных резонансных ускорителях. М., Атомиздат, 1966.
21. Страшевич А. М. Электронная оптика электростатических систем. М. — Л., «Энергия», 1966.
22. Hawkes P. W. Quadrupole Optics. Berlin, N. Y., Heidelberg, Springer Verlag, 1966.
23. Глазер В. Основы электронной оптики. М. Гостехиздат, 1957.
24. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958.
25. Шукейло И. А. «Ж. техн. физ.», 29, 1225 (1959).
26. Dayton I. E., Shoemaker F. C., Mozley R. F. Rev. Sci. Instrum., 25, № 5, 485 (1954).
27. Плотников В. К. «Приборы и техника эксперимента», № 2, 29 (1962).
28. Плотников В. К. «Приборы и техника эксперимента», № 1, 32 (1966).
29. Данильцев Е. Н., Плотников В. К. «Приборы и техника эксперимента», № 3, 20 (1963).
30. Вегнад М. Y. Compt. Rend. Acad. Sci., 236, 185 (1953).
31. Вегнад М. Y. Annales de Physique, 9, 633 (1954).
32. Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С. Сборник задач по математической физике. М., Гостехиздат, 1955.
33. Шпак Е. В., Явор С. Я. «Ж. техн. физ.», 35, 947 (1965).
34. Фишкова Т. Я., Силади М., Явор С. Я. «Радиотехника и электроника» 12, 1311 (1967).
35. Абрагам-Беккер. Теория электричества. М.—Л., Гостехиздат, 1939.
36. Septier A. J. Phys. et Radium, 21, № 3, suppl. 1 (1960).
37. Бадалин Г. В. «Ж. техн. физ.», 33, № 3, 345 (1963).
38. Азатян А. А. и др. «Приборы и техника эксперимента», № 3, 142 (1963).
39. Blewett M. N., Danby G. T. В сб.: «Труды Международной конференции по ускорителям. Дубна, 1963». М., Атомиздат, 1964, стр. 767.
40. Hand L. N., Rapoport W. K. H. Rev. Sci. Instrum., 30, № 10, 927 (1959).
41. Шпак Е. В., Явор С. Я. «Ж. техн. физ.», 34, 1037 (1964).
42. Вегнад М. Y. Compt. Rend. Acad. Sci., 240, 1612 (1955).
43. Волынский Б. А., Бухман В. Е. Модели для решения краевых задач. М., Физматгиз, 1960.
44. Гринберг Г. А. Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М. — Л., Изд-во АН СССР, 1968.
45. Миллер В. В. «Приборы и техника эксперимента» № 4, 23 (1964).
46. Цуккерман И. И. «Ж. техн. физ.», 28, 1809 (1958).
47. Glaser W. Zeitschr. für Physik, 117, 285 (1941).
48. Hawkes P. W. Optik, 23, 145 (1965—1966).
49. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М., «Наука», 1966.
50. Герцбергер М. Современная геометрическая оптика. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
51. Стэррок П. Статическая и динамическая электронная оптика. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
52. Власов А. Д. «Атомная энергия», 1, № 5, 20 (1956).
53. Реппер S. Rev. Sci. Instrum., 32, 150, 1068 (1961).
54. Ландау Л. Д., Лишиц Е. М. Механика. М., Физматгиз, 1958.
55. Епげ Н. А. Rev. Sci. Instrum., 30, № 4, 248 (1959).
56. Дымников А. Д., Овсянникова Л. П., Явор С. Я. «Ж. техн. физ.», 33, № 4, 393 (1963).
57. Septier A. Compt. Rend. Acad. Sci., 246, 1983 (1958).
58. Веников Н. И., Миронов Е. С. «Ж. техн. физ.», 34, № 3, 530 (1964).
59. Дымников А. Д., Фишкова Т. Я., Явор С. Я. «Радиотехника и электроника», 12, № 4 (1967).
60. Regenstreif E. CERN, № 2 (1964).
61. Епге Н. А. Rev. Sci. Instrum., 32, № 6, 662 (1961).
62. Явор С. Я. Proc. Sympos. on Electron and Vacuum Physics. Hungary, 1962.
63. Дымников А. Д., Явор С. Я. «Ж. техн. физ.» 33 № 7, 851 (1963).
64. Дымников А. Д., Фишкова Т. Я., Явор С. Я. «Ж. техн. физ.», 35, № 3, 431 (1965).
65. Dymnikov A. D., Fishkova T. Ya., Yavor S. Ya. Proc. 111 Europ. Region. Conf. on Electron Microscopy. Prague 1964, p. 43.
66. Дымников А. Д., Фишкова Т. Я., Явор С. Я. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 27, № 9, 1131 (1963).
67. Дымников А. Д., Фишкова Т. Я., Явор С. Я. «Радиотехника и электроника», 9, 1828 (1964).
68. Ваасег Н. Д. Naturwissenschaften, 51, № 24, 632 (1964).
69. Ваасег Н. Д. Optik, 23, 596 (1965—1966).
70. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. II. М., Физматгиз, 1960.
71. Фельбаум А. А., «Автоматика и телемеханика», 17, № 11, 1046 (1956).
72. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л. «Докл. АН СССР», 137, № 2, 295 (1961).
73. Meads P. F., Jr. Nucl. Instr. Meth., 40, № 1, 166 (1966).
74. Bassetti M., Biopatti R. M., Placidi M. Nucl. Instr. Meth., 45, № 1, 93 (1966).
75. Тетельбаум И. М. Электрическое моделирование. М., Физматгиз, 1959.
76. Good R. H., Piccioni O. Rev. Sci. Instrum., 31, 1035 (1960).

77. Cougant E. D., Marshall L. Rev. Sci. Instrum., 31, № 2, 193 (1960).  
 78. Ерофеев И. А. «Приборы и техника эксперимента», № 5, 146 (1963).  
 79. МакЛахлан Н. В. Теория и приложения функций Матье. М., Изд-во иностр. лит., 1953.  
 80. Стокер Д. Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М., Изд-во иностр. лит., 1953.  
 81. Абросимов Н. К. и др. «Ж. техн. физ.», 34, № 2, 313 (1964).  
 82. Каретников Д. В., Сливков И. Н., Тепляков В. А. и др. Линейные ускорители ионов. М., Атомиздат, 1962.  
 83. Степанов К. Н., Шаршанов А. А. «Ж. техн. физ.», 27, 1863 (1957).  
 84. Зейдлиц П. М., Болотин Л. И. и др. «Атомная энергия», 8, № 2, 127 ((1960)).  
 85. Дымников А. Д., Фишкова Т. Я., Явор С. Я. «Ж. техн. физ.», 34, 1711 (1964).  
 86. Страшкевич А. М. «Радиотехника и электроника», 6, № 9, 1562 (1961).  
 87. Вандакуров Ю. В. «Ж. техн. физ.», 27, 1850 (1957).  
 88. Овсянникова Л. П., Явор С. Я. «Ж. техн. физ.», 35, 940 (1965).  
 89. Овсянникова Л. П., Явор С. Я., «Радиотехника и электроника», 12, № 3, 489 (1967).  
 90. Burgfoot J. C. Proc. Phys. Soc., B67, 523 (1954).  
 91. Дымников А. Д., Фишкова Т. Я., Явор С. Я. «Ж. техн. физ.», 35, 759 (1965).  
 92. Дымников А. Д., Фишкова Т. Я., Явор С. Я. «Ж. техн. физ.», 35, 1068 (1965).  
 93. Дымников А. Д., Фишкова Т. Я., Явор С. Я. «Докл. АН СССР», 162, № 6, 1265 (1965).  
 94. Страшкевич А. М. «Ж. техн. физ.», 33, № 5, 512, (1963).  
 95. Дымников А. Д., Фишкова Т. Я., Явор С. Я. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 30, 739 (1966).  
 96. Deltrap J. H. M., Cosslett V. E. Proc. V Intern. Congr. on Electron Microscopy. v. I. N. Y. — Lond., Academic, Press 1962.  
 97. Septier A., van Acker J. Compt. Rend. Acad., Sci., 251, 346 (1960).  
 98. Gregory B. C., Sandor K. F. J. Electronics and Control, 13, № 2, 123 (1962).  
 99. Думпиков А. Д., Fishkova T. Ya., Ovsyanikova L. P., Yavor S. Ya. Nucl. Instr. Meth., 42, № 2, 293 (1966).  
 100. Septier A., van Acker J. Nucl. Instr., 13, № 3, 335 (1961).  
 101. Фишкова Т. Я., Баранова Л. А., Явор С. Я. «Ж. техн. физ.», 38, № 4 (1968).  
 102. Овсянникова Л. П., Явор С. Я. «Докл. АН СССР. 173, № 1, 76 (1967).  
 103. Archard G. D. Brit. J. Appl. Phys., 11, 521 (1960).  
 104. Hawkes P. W., Phil. Trans. Roy. Soc., Lond., Ser. A., 257, 479 (1965).  
 105. Hawkes P. W. Proc. III Europ. Region. Conf. on Electron Microscopy. v. A. Prague, 1964, p. 5.  
 106. Hawkes P. W. Optik, 22, 543 (1965).  
 107. Кельман В. М., Явор С. Я. «Ж. техн. физ.», 31, № 12, 1439 (1961).  
 108. Scherzer O. Zeitschr. für Physik, 101, 539 (1936).  
 109. Aston F. W., Phil. Mag., 38, 709, 1919; Астон Ф. В. Масс-спектры и изотопы. М., Изд-во иностр. лит., 1948.  
 110. Кельман В. М., Явор С. Я. «Ж. техн. физ.», 33, № 3, 368 (1963).  
 111. Кельман В. М. и др. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 27, № 9, 1135 (1963).  
 112. Явор С. Я., Дымников А. Д., Овсянникова Л. П. «Ж. техн. физ.», 34, 99 (1964).  
 113. Шпак Е. В., Явор С. Я. «Ж. техн. физ.», 35, № 5, 947 (1965).  
 114. Шпак Е. В., Явор С. Я. «Ж. техн. физ.», 34, 2003 (1964).  
 115. Yavor S. Ya., Dumplikov A. D., Fishkova T. Ya., Shpak E. V. Proc. III Europ. Region. Conf. on Electron Microscopy, v. A. Prague, 1964, p. 35.  
 116. Дымников А. Д., Явор С. Я. «Ж. техн. физ.», 34, 2008 (1964).  
 117. Тудоровский А. И. Теория оптических приборов. Ч. I. Изд. 2, М. — Л., Изд-во АН СССР, 1948.  
 118. Дойников Н. И. Электрофизическая аппаратура. Вып. 4. 1966, стр. 84.  
 119. Keil E., Neale W. W. В сб.: «Труды Международной конференции по ускорителям. Дубна, 1963», М., Атомиздат, 1964, стр. 782.  
 120. Карапашев В. П., Котов В. И. «Ж. техн. физ.», 36, № 9, 1569 (1966).  
 121. Bullough M. L. Amer. J. Phys., 23, № 5, 264 (1955).  
 122. Hubbard E. L., Kelly E. L. Rev. Sci. Instrum., 25, № 8, 737 (1954).  
 123. Johnson C. H., Judish J. P., Snyder C. W. Rev. Sci. Instrum., 28, N 11, 942 (1957).  
 124. Самойлов В. М. «Приборы и техника эксперимента», № 6, 190 (1965).  
 125. Matsuda K., Mikumo T., Nisimura K. et al. Inst. Nucl. Study. Univ., Tokyu, Jan. 15 (1959).  
 126. Wenzel W. A. В сб.: «Труды Международной конференции по ускорителям. Дубна, 1963». М., Атомиздат, 1964, стр. 698.  
 127. Ашпаг F., Andreev R. et al. В сб.: «Труды Международной конференции по ускорителям. Дубна, 1963». М., Атомиздат, 1964, стр. 249.  
 128. Ашпаг А., Bossard P., Rohner F. A. Scient. Rept. CERN, № 5 (1964).  
 129. Электрофизическая аппаратура промышленного изготовления. М., Атомиздат, 1963.  
 130. Капчинский И. М., Плотников В. К. «Приборы и техника эксперимента», № 3, 15 (1953).

131. Маркович М. Г., Цуккерман И. И. «Ж. техн. физ.», 30, 1362 (1960).
132. Дутов Г. Г., Соловьев А. М., Топорков С. А. «Изв. АН СССР. Сер. физ.», 27, № 9, 1154 (1963).
133. Sampson W. B., Krieger P. G. Rev. Sci. Instrum., 36, № 8, 1081 (1965).
134. Chemical and Engineering News, 43, № 37, 55 (1965).
135. Левин Г. Э., Прудковский Г. П. «Приборы и техника эксперимента», № 1, 7 (1962).
136. Фильчаков П. Ф., Панчишин В. И. Интеграторы ЭГДА. Моделирование потенциальных полей на электропроводной бумаге. Киев, Изд-во АН УССР, 1961.
137. Dols C. G., Skiff E. W., Watson R. G. Rev. Sci. Instrum., 29, 349 (1958).
138. Василевская Д. П., Денисов Ю. Н. «Приборы и техника эксперимента», № 3, 144 (1959).
139. Loeb J. L'onde Electr., 27, 27 (1947).
140. Козодаев М. С., Тяпкин А. А. «Приборы и техника эксперимента», № 1, 21 (1956).
141. Weidemann W. Nucl. Instr. Meth., 9, № 3, 347 (1960).
142. Spangenberg K., Field L. M. Proc. Inst. Radio Engineer., 30, 138 (1942).
143. Heise F. Optik, 5, 479 (1949).
144. Anders B., Hiekmann S., Odrich H., Tautmann H. Kernenergie, 6, № 2 63 (1963).
145. Gouiran. CERN, MPS (Int) A LO, 62-4.
146. Paul W. Steinwedel H. Zeitschr. Naturforsch., 8a, 448 (1953).
147. Paul W., Raether M., Zeitschr. für Physik, 140, 262 (1955).
148. Paul W., Reinhard H. P., von Zahn U., Zeitschr. für Physik, 152, 143 (1958).
149. Рафальсон А. Э. «Ж. техн. физ.», 35, № 1, 1 (1965).
150. Дымников А. Д., Фишкова Т. Я., Явор С. Я. «Докл. АН СССР», 154, № 6, 1321 (1964).
151. Archaard G. D. Proc. Phys. Soc., B68, 156 (1955).
152. Archaard G. D. Proc. Phys. Soc., 72, № 1, 135 (1958).
153. Deltrap J. H., Proc. III Europ. Region. Conf. V. A. Prague, 1964 p. 45.
154. Симонян Х. А. «Приборы и техника эксперимента», № 3, 27 (1962).
155. Страшкевич А. М. «Радиотехника и электроника», 10, № 2, 341 (1965).
156. Страшкевич А. М., Троцюк Н. И. «Ж. техн. физ.», 37, № 4, 645 (1967).
157. Могригро М. CERN SC, 141 bis (1957).
158. Karachinskij I. M., Vladimirovskij V. V. Internat. Conf. on High Energy Accel. Geneva, CERN 1959, p. 274.
159. Капчинский И. М. «Радиотехника и электроника», 8, № 6, 985 (1963).
160. Birgert G. Nucl. Instr. Meth., 27, № 1, 77 (1964).
161. Birgert G., Lafoucierre J. Nucl. Instr. Meth., 32, № 2, 287 (1965).
162. Bick J. H. Trans. I. E. E. E., Electronic Devices, 12, № 7, 408 (1965).
163. Пирс Дж. Р. Теория и расчет электронных пучков. М., «Сов. радио», 1956.
164. Cork B., Zajec E. Phys. Rev., 92, 853 (A) (1953).
165. Shull F. B., McFarland C. E., Bretscher M. M. Rev. Sci. Instrum., 25, № 4, 364 (1954).
166. Proc. Internat. Conf. on High Energy Accelerators and Instrumentation. Geneva, CERN, 1959.
167. Proc. Internat. Conf. on Instruments for High Energy Physics. Lawrence Rad. Lab., 1960.
168. Proc. Internat. Conf. on High Energy Accelerators. Brockhaven Lab., 1961.
169. Proc. Internat. Conf. on Instruments for High Energy Physics. Geneva, 1962.
170. Сб. «Международная конференция по ускорителям. Дубна, 1963». М., Атомиздат, 1964.
171. Сб. «ХII. Международная конференция по физике высоких энергий. Дубна, 1964». М., Атомиздат, 1966.
172. Владимирский В. В., Кошкарев Д. Г., Оносовский К. К. «Приборы и техника эксперимента», № 4, 70 (1962).
173. Panofsky W. K. H., McIntyre J. A. Rev. Sci. Instrum., 25, 287 (1954).
174. Владимирский В. В., Кошкарев Д. Г. «Приборы и техника эксперимента», № 6, 46 (1958).
175. Barbier M., Dowell J. D., Kalmus P. I. P. et al. Nucl. Instr. Meth., 20, 66 (1963).
176. Swenson D. A. Rev. Sci. Instrum., 35, 608 (1964).
177. Citron A., Delorme C., Farley F. J. M. et al. Proc. Internat. Conf. on Instrumentation for High Energy Physics. Berkeley, California, 1960, p. 286.
178. Eberhard P., Good M. L., Ticho H. K. Rev. Sci. Instrum., 31, № 10, 1054 (1960).
179. Giese C. F. Rev. Sci. Instrum., 30, № 4, 260 (1959).
180. Kinzer E. T., Carr H. Rev. Sci. Instrum., 30, 1132 (1959).
181. Lu Chuh Shun, Carr H. E. Rev. Sci. Instrum., 33, № 8, 823 (1962).
182. Дымовиц В. И., Осипов Г. А., «Физ. электроника». Вып. 2, 33, М., Атомиздат, 1965.
183. Engle H. A. Rev. Sci. Instrum., 29, 885 (1958).
184. Burman R. L., Yavin A. L. Nucl. Instr. Meth., 7, 101 (1960).
185. Haddock R. P. Rev. Sci. Instrum., 34, 745 (1963).
186. Yagyu K. Nucl. Instr. Meth., 31, № 2, 173 (1964).
187. Fert C., Saporte R. Compt. Rend. Acad. Sci., 246, № 16, 1107 (1956).
188. Von Zahn U. Rev. Sci. Instrum., 34, № 1, 1 (1963).
189. Von Zahn U. Zeitschr. für Physik, 168, № 2, 129 (1962).
190. El-Kageh A. B. Rev. Sci. Instrum., 32, № 4, 421 (1961).
191. Бутлов М. М., Плахов А. Г., Шапкин В. В. «Оптика и спектроскопия», 12, № 3, 419 (1962).

192. Веннепиц H. G., Paul W. Zeitschr. für Physik, 139, 489 (1954).  
 193. Веннепиц H. G., Paul W., Schlier C. Zeitschr. für Physik, 141, 6 (1955).  
 194. Van der Meer S. CERN, 22 (1960).  
 195. King N. M. CERN, MPS/EP-26 (1962).  
 196. Карташев В. П., Котов В. И. «Ж. техн. физики», 36, № 9, 1727 (1966).  
 197. Friedburg H., Zeitschr. für Physik, 130, 493 (1951).  
 198. Басаргин Ю. Г. «Ж. техн. физики», 36, № 6, 1075 (1966).  
 199. Koltay E. Nucl. Instr. Meth., 35, 88 (1965).  
 200. Banford A. P. The Transport of Charged Particle Beams. London, 1966.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	3
Глава 1. Поля квадрупольных линз . . . . .	8
Глава 2. Оптические свойства первого порядка . . . . .	41
Глава 3. Системы из квадрупольных линз . . . . .	75
Глава 4. Геометрические aberrации квадрупольных линз	119
Глава 5. Хроматическая aberrация и погрешности юстировки . . . . .	159
Глава 6. Конструкции и методы исследования квадрупольных линз . . . . .	182
Глава 7. Некоторые разновидности квадрупольных линз	223
Заключение . . . . .	246
Литература . . . . .	255

Стелла Яковлевна Явор

**ФОКУСИРОВКА ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ  
КВАДРУПОЛЬНЫМИ ЛИНЗАМИ**

Редактор О. А. Степеннова  
 Переплет художника В. Н. Тикунова  
 Художественный редактор А. С. Александров  
 Технический редактор С. А. Бирюкова  
 Корректор М. И. Дунаевская

Сдано в набор 18/I 1968 г.  
 Подписано в печать 3/VII 1968 г. Т-10420  
 Формат 84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>. Бумага типографская № 2  
 Усл. печ. л. 13,86. Уч. изд. л. 13,25  
 Тираж 1850 экз. Заказ изд. 1717  
 Цена 1 р. 39 к. Заказ тип. 1925  
 Атомиздат, Москва, К-31, ул. Жданова, 5/7.  
 Московская типография № 4 Главполиграфпрома  
 Комитета по печати при Совете Министров СССР  
 Б. Переяславская, 46.

## **ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ!**

**Имеется в наличии:**

Гольдин Л.Л. и др. **Магнитные измерения в ускорителях заряженных частиц.** 1962, 56 стр., 14 коп.

Излагаются методика и теория магнитных измерений, проводимых на современных ускорителях с большой степенью точности. Брошюра представляет интерес не только для специалистов в области ускорителей, но и для широких кругов инженеров и научных сотрудников, занятых измерениями магнитных полей.

Чтение брошюры не требует специальных знаний по теории ускорителей или методам магнитных измерений.

**Заказы на книги  
направляйте по адресу:**

Москва, Центр, ул. Петровка, 15.

Книжный магазин № 8.

**Атомиздат**