Generalitats sobre llenguatges.

U.D. Computació

DSIC - UPV

Índex

- Definicions: Alfabets, paraules i llenguatges
- Operacions amb llenguatges
  - Operacions booleanes
  - Operacions específiques
- Classes de Llenguatges

Definicions: *Alfabets, paraules i llenguatges*

- *Alfabet*: Conjunt finit de símbols
  - $\Sigma = \{a, b, c\}$
  - $\Gamma = \{0, 1\}$
  - $\Delta_1 = \{\triangle, \square, \bigcirc\}$
  - $\Delta_2 = \{N, S, E, W\}$
- No són alfabets:
  - $\emptyset$
  - $\mathbb{N}$

Definicions: *Alfabets, paraules i llenguatges*

- *Paraula, cadena* o *frase* sobre un alfabet: seqüència finita i ordenada de símbols de l'alfabet
  - Sobre $\{a, b\}$: $x = aaba$, $y = aa$
  - Sobre $\{0, 1, 2\}$: $x = 2110$, $y = 0101$
- Cadena buida: λ.

Definicions: *Alfabets, paraules i llenguatges*

- *Longitud* d'una paraula: nombre de símbols que conté. Siguen x i y paraules sobre Σ, siga $a \in \Sigma$, es defineix:

$$| x |= \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = \lambda \\ | y | +1 & \text{si} \quad x = ya \end{cases}$$

- $| x |_a$ és el nombre de vegades que a apareix en x.

Definicions: *Alfabets, paraules i llenguatges*

- Σ^n representa el conjunt de paraules de longitud n sobre l'alfabet Σ

Siga $\Sigma = \{0, 1\}$

- $\Sigma^0 = \{\lambda\}$
- $\Sigma^1 = \{0, 1\}$
- $\Sigma^2 = \{00, 01, 10, 11\}$
- $\dots$

- $\Sigma^* = \bigcup_{i \geq 0} \Sigma^i$ conté totes les paraules sobre Σ de qualsevol longitud.
- $\Sigma^+ = \bigcup_{i > 0} \Sigma^i$ conté totes les paraules sobre Σ de qualsevol longitud excepte la cadena buida.

Definicions: *Alfabets, paraules i llenguatges*

Concatenació

Donades $x = a_1 a_2 \cdots a_m$, $y = b_1 b_2 \cdots b_n, \quad a_i, b_j \in \Sigma$, definim *concatenació* de x i y com:

$$x \cdot y = a_1 a_2 \cdots a_m b_1 b_2 \cdots b_n$$

Considerant la concatenació, definim *potència* d'una paraula com:

$$x^n = \begin{cases} \lambda & \text{si } n = 0 \\ x \cdot x^{n-1} = x^{n-1} \cdot x & \text{en cas contrari} \end{cases}$$

Definicions: *Alfabets, paraules i llenguatges*

Propietats de la concatenació:

Siguen $x, y, z \in \Sigma^*$ i $a \in \Sigma$

1. *Associativa*: $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
2. *Element neutre*: $x\lambda = \lambda x = x$.
3. $|xy| = |x| + |y|$

Definicions: *Alfabets, paraules i llenguatges*

Segment, prefix i sufix

Donats $x, u, t, v \in \Sigma^*$, definim:

- t és un *segment* de x si $x = u \cdot t \cdot v$.
- Si $u = \lambda \quad (v = \lambda) \quad t$ és un *prefix* (*sufix*) de x.

Siguen $\Sigma = \{0, 1\}$, $x = 011$

$Prefix(x) = \{\lambda, 0, 01, 011\}$
$Sufix(x) = \{\lambda, 1, 11, 011\}$

Definicions: *Alfabets, paraules i llenguatges*

- L'ordre alfabètic no permet una enumeració efectiva de les paraules sobre un alfabet Σ
- Donades dos paraules x, y sobre un alfabet Σ, definim *ordre canònic* com:

$$x < y \text{ si } \begin{cases} |x| < |y| \\ (|x| = |y|) \wedge (x = uav,\ y = ubw,\ a <_{\Sigma} b) \end{cases}$$

Definicions: *Alfabets, paraules i llenguatges*

Llenguatge

Un *Llenguatge L* és un subconjunt de Σ^*.

- $\emptyset$ (llenguatge buit, no conté cap paraula).
- Σ^*.
- Un llenguatge es denomina finit si té un nombre finit de paraules.
- Cas contrari és infinit numerable

Operacions booleanes

Siguen L_1, L_2 llenguatges sobre un alfabet Σ.

- *Unió*: $L_1 \cup L_2 = \{x \in \Sigma^* : x \in L_1 \vee x \in L_2\}$
- *Intersecció*: $L_1 \cap L_2 = \{x \in \Sigma^* : x \in L_1 \wedge x \in L_2\}$

Propietats Unió i Intersecció

- Associativa
- Conmutativa
- Element neutre $(\emptyset, \Sigma^*)$
  - Unió: $\emptyset$
  - Intersecció: Σ^*
- Distributives:
  - $L_1 \cup (L_2 \cap L_3) = (L_1 \cup L_2) \cap (L_1 \cup L_3)$
  - $L_1 \cap (L_2 \cup L_3) = (L_1 \cap L_2) \cup (L_1 \cap L_3)$

Operacions booleanes

Siga L un llenguatge sobre un alfabet Σ.
Complementació: $\overline{L} = \{x \in \Sigma^* : x \notin L\}$.

Propietats Complementació

- $\overline{\Sigma^*} = \emptyset$
- $\overline{\emptyset} = \Sigma^*$
- $\overline{\overline{L}} = L$

Lleis de De Morgan

- $\overline{L_1 \cup L_2} = \overline{L_1} \cap \overline{L_2}$
- $\overline{L_1 \cap L_2} = \overline{L_1} \cup \overline{L_2}$

Operacions definides a partir de les anteriors

- *Diferència*: $L_1 - L_2 = L_1 \cap \overline{L}_2$.
- *Diferència simétrica*: $L_1 \ominus L_2 = \left(L_1 \cap \overline{L}_2\right) \cup \left(\overline{L}_1 \cap L_2\right)$.

Operacions específiques: *Producte*

Siguen dos llenguatges L_1 i L_2. Definim el *Producte (Concatenació)* com:
$L_1 \cdot L_2 = \{x \cdot y \in \Sigma^* : x \in L_1 \wedge y \in L_2\}$

Propietats

- (No conmutativa). $L_1 \cdot L_2$ no necessariament igual a $L_2 \cdot L_1$
- (Associativa) $(L_1 \cdot L_2) \cdot L_3 = L_1 \cdot (L_2 \cdot L_3)$
- (Element neutre) $L \cdot \{\lambda\} = \{\lambda\} \cdot L = L$
- (Anul.lador) $L \cdot \emptyset = \emptyset \cdot L = \emptyset$
- $\lambda \in L_1 \cdot L_2 \Leftrightarrow \lambda \in L_1 \wedge \lambda \in L_2$
- $L_1 \cdot (L_2 \cup L_3) = L_1 \cdot L_2 \cup L_1 \cdot L_3$
- $L_1 \cdot (L_2 \cap L_3) \subseteq L_1 \cdot L_2 \cap L_1 \cdot L_3$
  - Exemple: $L_1 = \{a, ab\}$, $L_2 = \{a\}$, $L_3 = \{ba\}$.

Operacions específiques: *Potència, Estrella i Clausura positiva*

Definim l'operació *Potència* d'un llenguatge com:

$$L^n = \begin{cases} \{\lambda\} & \text{si } n = 0 \\ L^{n-1} \cdot L & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Definim les operacions *Estrella i Clausura positiva* d'un llenguatge com:

- Estrella: $L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$
- Clausura positiva $L^+ = \bigcup_{i > 0} L^i$

Operacions específiques: *Potència, Estrella i Clausura positiva*

Definim l'operació *Potència* d'un llenguatge com:

$$L^n = \begin{cases} \{\lambda\} & \text{si } n = 0 \\ L^{n-1} \cdot L & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Definim les operacions *Estrella i Clausura positiva* d'un llenguatge com:

- Estrella: $L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i$
- Clausura positiva $L^+ = \bigcup_{i > 0} L^i$

Relació entre ambdues

$$L^+ = \begin{cases} L^* & \text{si } \lambda \in L \\ L^* - \{\lambda\} & \text{si } \lambda \notin L \end{cases}$$

Operacions específiques: *Potència, Estrella i Clausura positiva*

Propietats Estrella i Clausura positiva

1. $L \subseteq L^+ \subseteq L^*$ (ja que $L = L^1$).
2. $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L_1^n \subseteq L_2^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$).
3. $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow L_1^* \subseteq L_2^* \ \left(L_1^+ \subseteq L_2^+\right)$
4. $(L^*)^* = L^*$
5. $(L^+)^+ = L^+$
6. $L^+ = L^*L = LL^*$
7. $(L^+)^* = L^*$
8. $(L^*)^+ = L^*$

Operacions específiques: *Quocient d'un llenguatge per una paraula*

Quocients per la dreta i per l'esquerra

- Per la dreta $u^{-1}L = \{v \in \Sigma^* : uv \in L\}$
- Per l'esquerra $Lu^{-1} = \{v \in \Sigma^* : vu \in L\}$

Operacions específiques: *Quocient d'un llenguatge per una paraula*

Propietats ($u, v \in \Sigma^*$, $a \in \Sigma$)

- $L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow u^{-1}L_1 \subseteq u^{-1}L_2$
- $u^{-1}(L_1 \cup L_2) = u^{-1}L_1 \cup u^{-1}L_2$
- $u^{-1}(L_1 \cap L_2) = u^{-1}L_1 \cap u^{-1}L_2$
- $a^{-1}(L_1 L_2) = \begin{cases} \left(a^{-1}L_1\right) L_2 & \text{si } \lambda \notin L_1 \\ \left(a^{-1}L_1\right) L_2 \cup a^{-1}L_2 & \text{si } \lambda \in L_1 \end{cases}$
- $a^{-1}L^* = \left(a^{-1}L\right) L^*$
- $(uv)^{-1} L = v^{-1}\left(u^{-1}L\right)$

Operacions específiques: *Revers*

Revers d'una paraula

$x \in \Sigma^*,\ x = a_1 a_2 ... a_{n-1} a_n,\ a_i \in \Sigma \Rightarrow x^r = a_n a_{n-1} ... a_2 a_1$

De manera recursiva:

$$x^r = \begin{cases} x & \text{si } x = \lambda \\ ay^r & \text{si } x = ya \quad y \in \Sigma^*, a \in \Sigma \end{cases}$$

Propietats

- $\forall a \in \Sigma,\ a^r = a$
- $\forall a \in \Sigma,\ (a^n)^r = a^n$
- $\forall x, y \in \Sigma^*,\ (xy)^r = y^r x^r$

Operacions específiques: *Revers d'un llenguatge*

Revers d'un llenguatge

$L^r = \{x^r : x \in L\}$

Propietats

- Si $\Sigma = \{a\}$, $L^r = L$.
- $\Sigma^r = \Sigma$
- $(L_1 L_2)^r = L_2^r L_1^r$
- $\left(L^i\right)^r = (L^r)^i$
- $(L^*)^r = (L^r)^*$
- $(\Sigma^*)^r = (\Sigma^r)^* = \Sigma^*$
- $(L^r)^r = L$

Operacions específiques: *Homomorfisme*

homomorfisme

Donats dos alfabets Σ i Γ, un *homomorfisme* és una funció $h : \Sigma \to \Gamma^*$.

Extensió a paraules, $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$:

$$\begin{cases} h(\lambda) & = & \lambda \\ h(xa) & = & h(x)h(a) \end{cases}$$

Extensió a llenguatges:

$$h(L) = \{h(x) : x \in L\}$$

Operacions específiques: *Homomorfisme*

Exemples

$$L_1 = \{\lambda, aa, bab, bbba\}$$

$$L_2 = \{x \in \{a,b\}^* \ : \ aa \notin Seg(x)\}$$

$$\begin{cases} h(a) = \lambda \\ h(b) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} g(a) = 01 \\ g(b) = 1 \end{cases}$$

1. $h(L_1) = \{\lambda, 11, 111\}$
2. $h(L_2) = \{1\}^*$
3. $g(L_2) = \{x \in \{0,1\}^* \ : \ 00 \notin Seg(x) \wedge 0 \notin Suf(x)\}$

Operacions específiques: *Homomorfisme invers*

homomorfisme invers

Donat $h : \Sigma^* \to \Gamma^*$, definim l'homomorfisme invers sobre $y \in \Gamma$ com:

$$h^{-1}(y) = \{x \in \Sigma^* : h(x) = y\}$$

Estenem l'operació a llenguatges com:

$$h^{-1}(L) = \{x \in \Sigma^* : h(x) \in L\}$$

Operacions específiques: *Homomorfisme invers*

Generalitats sobre llenguatges
U.D. Computació
Definicions: Alfabets, paraules i llenguatges.
Operacions amb llenguatges
Operacions booleanes
Operacions específiques
Classes de llenguatges

Exemples

$$L_1 = \{\lambda, aa, abab, bbba\}$$

$$L_2 = \{x \in \{a,b\}^* \ : \ aa \notin Seg(x)\}$$

$$\begin{cases} h(0) = ab \\ h(1) = ba \end{cases} \qquad \begin{cases} g(0) = aa \\ g(1) = bab \end{cases}$$

1. $h^{-1}(L_1) = \{\lambda, 00\}$
2. $g^{-1}(L_2) = \{x \in \{0,1\}^* \ : \ |x|_0 = 0\} = \{1\}^*$
3. $h^{-1}(L_2) = \{x \in \{0,1\}^* \ : \ 10 \notin Seg(x)\}^*$

Quan una operació definida sobre paraules torna un llenguatge, l'extensió a llenguatges és:

$$Seg(L) = \bigcup_{x \in L} Seg(x)$$

$$Pref(L) = \bigcup_{x \in L} Pref(x)$$

$$Suf(L) = \bigcup_{x \in L} Suf(x)$$

Classes de llenguatges

Una *classe de llenguatges* és un conjunt no buit de llenguatges.

Exemples

1. $\mathcal{L}_{FIN}$ Classe dels llenguatges finits
2. $\mathcal{L}_{PAL} = \{L \subseteq \Sigma^* \ : \ x \in L \rightarrow x^r \in L\}$
   (classe dels llenguatges capicua)
3. $\mathcal{L}_{PAR} = \{L \subseteq \Sigma^* \ : \ x \in L \rightarrow |x| mod2 = 0\}$
   (classe dels llenguatges parells)
4. $\mathcal{L}_{no\lambda} = \{L \subseteq \Sigma^* \ : \ \lambda \notin L\}$
   (classe dels llenguatges que no contenen λ)