Primer Parcial

(Justifique formalmente las respuestas o proporcione resultados parciales)

Ejercicio 1 **(3 puntos)**

Dados los lenguajes:

$$L_1 = \{x \in \{a,b\}^* \ : \ |x|_a \neq |x|_b\}$$
$$L_2 = \{a^i b^j \ : \ i,j \geq 0\}.$$

Describa los lenguajes obtenidos como resultado de realizar las siguientes operaciones:

(a) L_1^*.

Solución:

$L_1^* = \{a,b\}^*$

(b) $(ab)^{-1}L_2$.

Solución:

$(ab)^{-1}L_2 = \{b^i \ : \ i \geq 0\}$

(c) $L_1 \cap L_2$.

Solución:

$L_1 \cap L_2 = \{a^i b^j \ : \ i \neq j\}$

(d) L_2^2.

Solución:

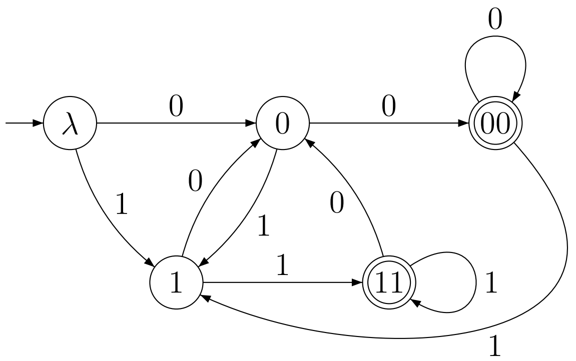
$L_2^2 = \{a^i b^j a^k b^l \ : \ i,j,k,l \geq 0\}$

Ejercicio 2 **(3 puntos)**

Proporcione un AFD para cada uno de los siguientes lenguajes:

(a) $L = \{x \in \{0,1\}^* \ : \ 00 \in Suf(x) \vee 11 \in Suf(x)\}$.

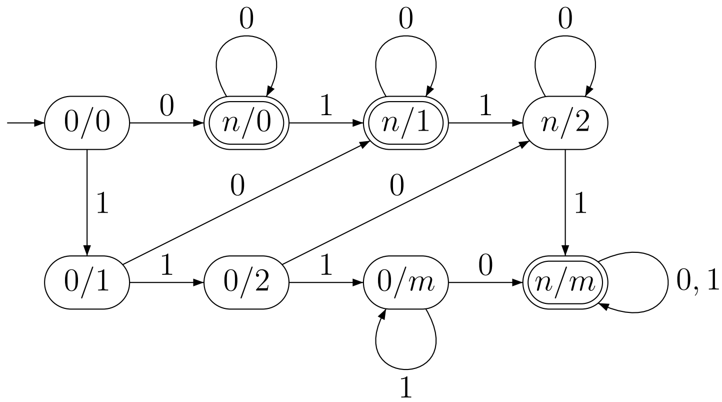
Solución:



Nombramos cada estado con el sufijo de las palabras que lo alcanzan.

(b) $L = \{x \in \{0,1\}^* \ : \ |x|_0 > 0 \wedge |x|_1 \neq 2\}$.

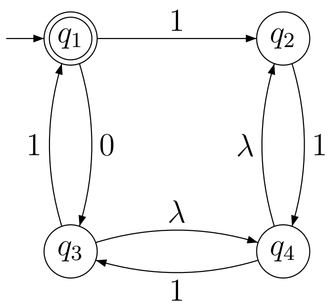
Solución:



Nótese que cada estado está nombrado con el número de simbolos 0 y 1 analizados hasta el momento.

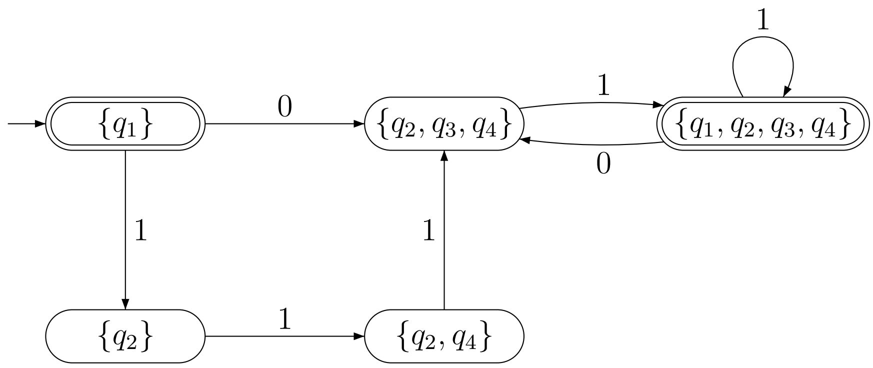
Ejercicio 3 **(2 puntos)**

Obtener un AFD equivalente al siguiente autómata:



Solución:

Aplicando los algoritmos vistos en clase, se obtiene el siguiente autómata:



Ejercicio 4 **(2 puntos)**

Dados dos lenguajes $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ y un símbolo cualquiera $a \in \Sigma$, determine si las siguientes afirmaciones son ciertas o no.

(a) Si $a^{-1}L_1 = a^{-1}L_2$, entonces $L_1 = L_2$.

Solución:

La afirmación es falsa. Considerese como contraejemplo el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, y los lenguajes $L_1 = \{a\}$ y $L_2 = \{a, b\}$. Ambos lenguajes son tales que $a^{-1}L_1 = a^{-1}L_2 = \{\lambda\}$ y sin embargo distintos.

(b) Si $L_1 \subseteq L_2$, entonces $a^{-1}L_1 \subseteq a^{-1}L_2$.

Solución:

La afirmación es cierta. Para demostrarlo probaremos que cualquier palabra $x \in a^{-1}L_1$ pertenece también a $a^{-1}L_2$.

Si $x \in a^{-1}L_1$ entonces, por definición de cociente, $ax \in L_1$. Como $L_1 \subseteq L_2$, entonces $ax \in L_2$ y de nuevo por definición de cociente $x \in a^{-1}L_2$, que demuestra el enunciado.

Segundo Parcial

(Justifique formalmente las respuestas o proporcione resultados parciales)

Ejercicio 1 **(2 puntos)**

Dado $\Sigma = \{a, b\}$ y el lenguaje $L = \{a^n b^n \ : \ n \geq 1\}$, determine si los siguientes lenguajes son regulares:

(a) $L\Sigma^*$.

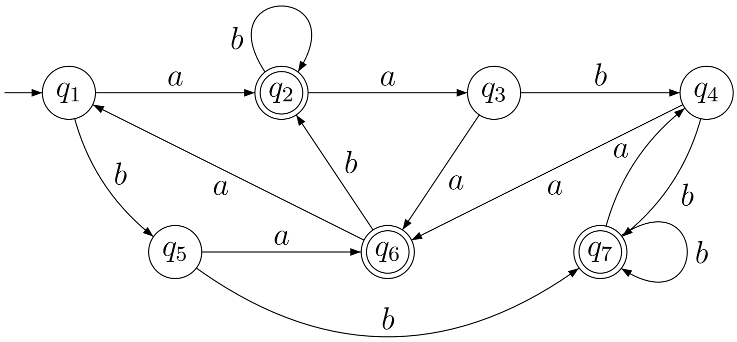
> **Solución:**
>
> Sea el lenguaje infinito $C = \{a^n \ : \ n \geq 1\}$, y considerese un par cualesquiera de palabras de C distintas $u = a^i$ y $v = a^j$ $(i \neq j)$. Al ser distintas podemos considerar indistintamente una de longitud menor que otra, tomamos $i < j$.
>
> Independientemente de las palabras escogidas, existe una palabra $w = b^i$, tal que $uw = a^i b^i$ pertenece al lenguaje L y $vw = a^j b^i$ no pertenece a L (notamos que cualquier palabra de la forma $a^i b^j$ sí pertenece al lenguaje).
>
> Por lo tanto, en un posible autómata finito para L, las palabras u y v deberían alcanzar estados distintos. Dado que la elección de las palabras es indistinta y que el tamaño de C es infinito, no es posible que el autómata para el lenguaje tenga un número finito de estados, por lo que el lenguaje no es regular.
>
> De forma equivalente, por el mismo argumento, cada una de las palabras de C pertenece a una clase distinta de la relación R_L, por lo que esta relación no es de índice finito, llegando a la misma conclusión de que L no es regular.

(b) $\Sigma^* L \Sigma^*$.

> **Solución:**
>
> Considerando la descripción del lenguaje como producto de tres lenguajes, podemos redescribir el lenguaje como:
>
> $$\Sigma^* L \Sigma^* = \{xaby \ : \ x, y \in \{a, b\}^*\}.$$
>
> que es un lenguaje regular ya que podemos describirlo con la expresión regular $(a + b)^* ab(a + b)^*$.

Ejercicio 2 **(2 puntos)**

Obtenga el AFD mínimo equivalente al siguiente autómata:



Solución:

Una traza del algoritmo de minimización de Moore para el autómata del ejercicio es la siguiente:

$$\pi_0 = \{\{q_1, q_3, q_4, q_5\}, \{q_2, q_6, q_7\}\}$$

	π_0	a	b
$[1]_{\pi_0}$	q_1	$[2]_{\pi_0}$	$[1]_{\pi_0}$
	q_3	$[2]_{\pi_0}$	$[1]_{\pi_0}$
	q_4	$[2]_{\pi_0}$	$[2]_{\pi_0}$
	q_5	$[2]_{\pi_0}$	$[2]_{\pi_0}$
$[2]_{\pi_0}$	q_2	$[1]_{\pi_0}$	$[2]_{\pi_0}$
	q_6	$[1]_{\pi_0}$	$[2]_{\pi_0}$
	q_7	$[1]_{\pi_0}$	$[2]_{\pi_0}$

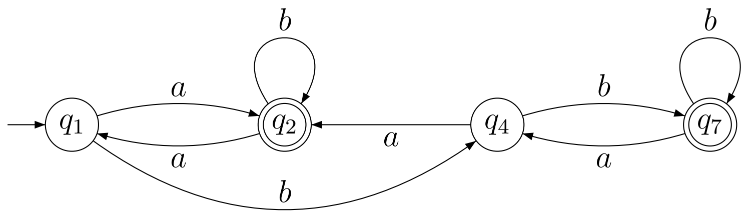
$$\pi_1 = \{\{q_1, q_3\}, \{q_2, q_6, q_7\}, \{q_4, q_5\}\}$$

	π_1	a	b
$[1]_{\pi_1}$	q_1	$[2]_{\pi_1}$	$[4]_{\pi_1}$
	q_3	$[2]_{\pi_1}$	$[4]_{\pi_1}$
$[2]_{\pi_1}$	q_2	$[1]_{\pi_1}$	$[2]_{\pi_1}$
	q_6	$[1]_{\pi_1}$	$[2]_{\pi_1}$
	q_7	$[4]_{\pi_1}$	$[2]_{\pi_1}$
$[4]_{\pi_1}$	q_4	$[2]_{\pi_1}$	$[2]_{\pi_1}$
	q_5	$[2]_{\pi_1}$	$[2]_{\pi_1}$

$$\pi_2 = \{\{q_1, q_3\}, \{q_2, q_6\}, \{q_4, q_5\}, \{q_7\}\}$$

	π_2	a	b
$[1]_{\pi_2}$	q_1	$[2]_{\pi_2}$	$[4]_{\pi_2}$
	q_3	$[2]_{\pi_2}$	$[4]_{\pi_2}$
$[2]_{\pi_2}$	q_2	$[1]_{\pi_2}$	$[2]_{\pi_2}$
	q_6	$[1]_{\pi_2}$	$[2]_{\pi_2}$
$[4]_{\pi_2}$	q_4	$[2]_{\pi_2}$	$[7]_{\pi_2}$
	q_5	$[2]_{\pi_2}$	$[7]_{\pi_2}$
$[7]_{\pi_2}$	q_7	$[4]_{\pi_2}$	$[7]_{\pi_2}$

con lo que el autómata mínimo equivalente es el siguiente:

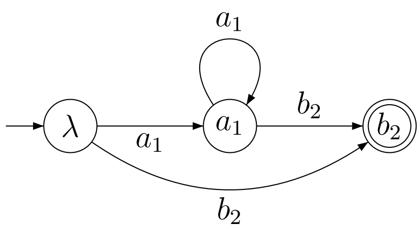


Ejercicio 3 **(2½ puntos)**

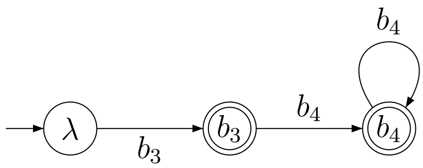
Obtenga los autómatas de posición y follow para la expresión $\alpha = (a^*b + bb^*)aa^*$.

Solución:

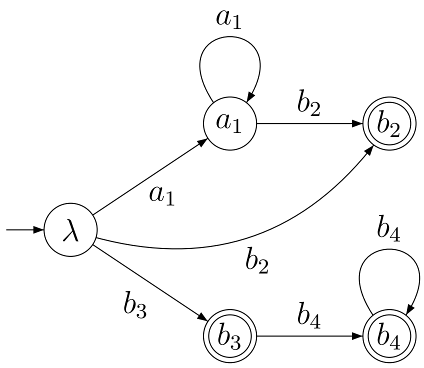
Considerando la expresión linearizada $\overline{\alpha} = (a_1^*b_2 + b_3b_4^*)a_5a_6^*$, el autómata local estandar para la subexpresión $a_1^*b_2$ es el siguiente:



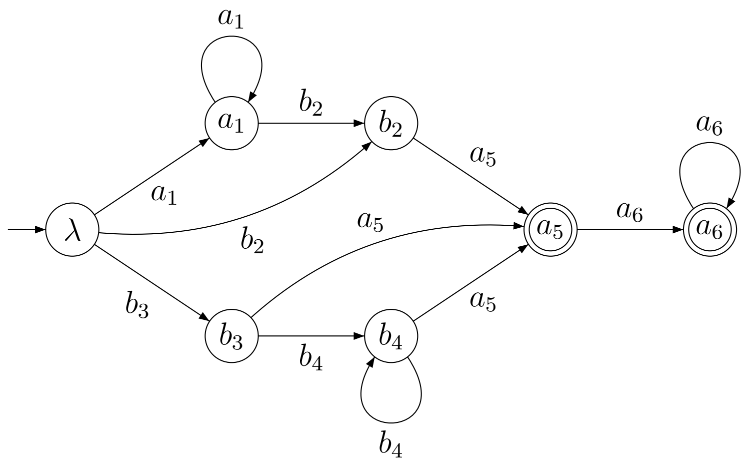
y el automata local estandar para la subexpresión $b_3b_4^*$ es el siguiente:



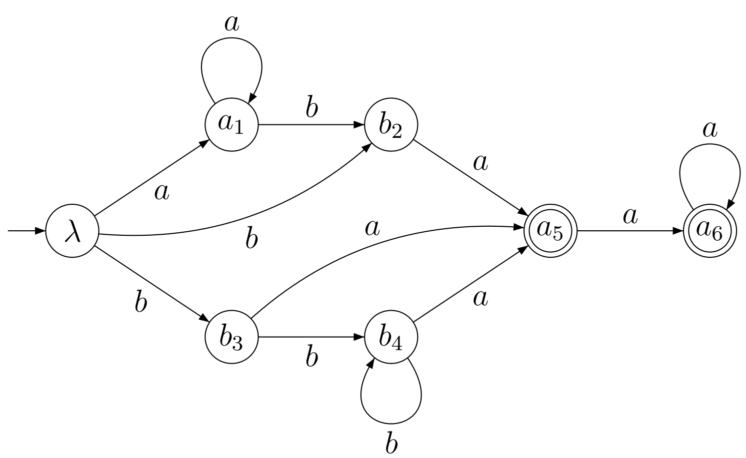
con lo que el autómata local estandar para la subexpresión $(a_1^*b_2+b_3b_4^*)$ es el siguiente:



y el autómata local estandar de que acepta $L(\overline{r})$ es:



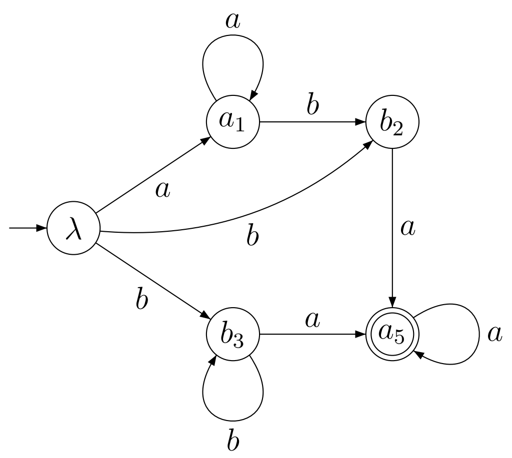
y el autómata de posición para α:



La relación $follow$ para este autómata se resume en la siguiente tabla:

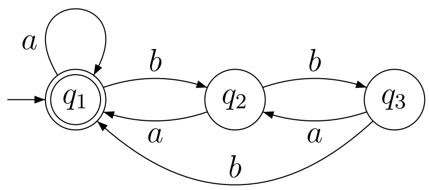
	$\in F$	*sucesores*
λ	F	$\{a_1, b_2, b_3\}$
a_1	F	$\{a_1, b_2\}$
b_2	F	$\{a_5\}$
a_3	F	$\{b_4, a_5\}$
b_4	F	$\{b_4, a_5\}$
b_5	T	$\{a_6\}$
a_6	T	$\{a_6\}$

con lo que el autómata follow es el siguiente:



Ejercicio 4 **(2 puntos)**

Utilice el método visto en clase para analizar el siguiente autómata y obtener una expresión regular que describa el lenguaje aceptado por él.



Solución:

El sistema de ecuaciones en expresiones regulares asociado al autómata es:

$$\begin{cases} X_1 = aX_1 + bX_2 + \lambda \\ X_2 = aX_1 + bX_3 \\ X_3 = aX_2 + bX_1 \end{cases}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación el valor de X_3 obtenemos:

$$\begin{cases} X_1 = aX_1 + bX_2 + \lambda \\ X_2 = aX_1 + baX_2 + bbX_1 = baX_2 + (a + bb)X_1 \end{cases}$$

Aplicando el Lema de Arden en la segunda ecuación se obtiene que:

$$X_2 = (ba)^*(a + bb)X_1,$$

con lo que sustituyendo en la ecuación de X_1 se obtiene:

$$X_1 = aX_1 + b(ba)^*(a + bb)X_1 + \lambda = (a + b(ba)^*(a + bb))X_1 + \lambda$$

y aplicando por última vez el lema de Arden se obtiene:

$$X_1 = (a + b(ba)^*(a + bb))^*$$

Ejercicio 5 **(1½ puntos)**

Dados dos lenguajes cualesquiera L_1 y L_2 sobre el mismo alfabeto Σ, la operación P se define como:

$$P(L_1, L_2) = \{x \ : \ (x \notin L_1 \wedge x \notin L_2) \vee (x \in L_1 \wedge x \in L_2)\}.$$

Determine si P es una operación de cierre para la clase de los lenguajes regulares.

Solución:

La operación P puede describirse como composición de operaciones booleanas sobre lenguajes como sigue:

$$P(L_1, L_2) = (\overline{L_1} \cap \overline{L_2}) \cup (L_1 \cap L_2),$$

por lo que, al ser todas las operaciones booleanas de cierre en la clase de los lenguajes regulares, la operación P también lo es.