Tarea3

ocorrales

April 2023

Si$\theta : G \to H$ es un homomorfismo :

$$Kernel(\theta) = \{x\epsilon G : \theta x = 1\}$$

$$Img(\theta) = \{y\epsilon H : \theta x = y\}$$

1 Kernel(θ)

1.1 Cerrada

Sea a,b en Kernel(θ), es decir:

$$\theta(a) = \theta(b) = 1$$

Entonces $\theta(ab) = \theta(a)\theta(b) = 1 * 1 = 1$ por lo que ab también esta en Kernel(θ), lo que quiere decir que Kernel(θ) es cerrado bajo la operación del grupo G.

1.2 Inversa

Si a esta en Kernel(θ), entonces $tTheta(a) = 1$, por lo que , $\theta(a^{-1}) = (\theta(a))^{-1} = 1^{-1} = 1$. Esto quiere decir que el inverso de a también esta en Kernel(θ), y Kernel(θ) es cerrado bajo inversos.

1.3 Elemento neutro

El elemento neutro del grupo G, denotado como 1G, está en Kernel(θ) porque (θ)(1G) = 1H (ya que es un homomorfismo), y por lo tanto kernel(θ) contiene el elemento neutro.

2 Img(θ)

2.1 Cerrada

Sea c,d en Img(θ) es decir, existen a,b en G tales que $\theta(a) = c$ y $\theta(b) = d$. Entonces :

$\theta(ab^{-1}) = \theta(a)\theta(b^{-1}) = c\theta(b)^{-1} = cd^{-1}$. esto quiere decir que ab^{-1} también esta en G y $\theta(ab^{-1})$ está en Img(θ), lo que implica que Img(θ) es cerrado bajo la operación del grupo H.

2.2 Inversa

Si c está en Img(θ), entonces existe a en G tal que $\theta(a) = c$. Como θ es un homomorfismo, $\theta(a^{-1}) = (\theta(a))^{-1} = c^{-1}$. Por lo tanto el inverso de c también esta en Img(θ).

2.3 Neutro

El elemento neutro del grupo H, denotado como 1H, esta en Img(θ) porque $\theta(1G) = 1H$ esto debido a que es un homomorfismo, y por lo tanto Img(θ) contiene elemento neutro.

Entonces, Img(θ) cumple todas las condiciones de un subgrupo y por lo tanto es un subgrupo de H.