Pogetto Robust Control Natale Marco (a.a. 24/25)   07/10

Per il progetto è stato scelto il problema benchmark **IFAC #90-10 "Regulation of a ship's heading"**, in cui viene chiesto di progettare un controllore per la regolazione dell'angolo di rotta di una nave.

Nel seguente progetto vengono proposte due soluzioni di controllori H_∞ per il sistema incerto in esame, utilizzando il comando `hinfsyn`, del Robust Control Toolbox, con conseguente μ-analysis per stimare la stabilità robusta del sistema incerto.

Sono state considerate le seguenti specifiche:

- Nessuna sovraelongazione nella risposta y del sistema;
- Stabilità robusta del sistema incerto;

Sono state ignorate le richieste *(b)* e *(c)* originariamente proposte nel problema benchmark IFAC.

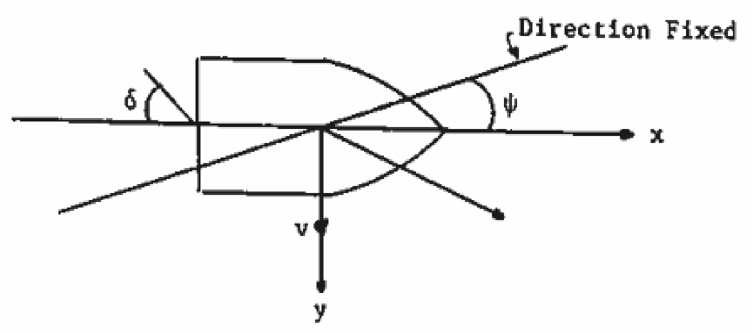


Figure 1: Notation used to describe ship's motion

It is desired to find a controller for the system to regulate the heading angle of the ship to a desired angle y_{ref}, such that the following constraints are satisfied:

(a) No overshoot occurs in the output response of y.

(b) The rudder motion is constrained:

$$\|u\| \leq 40^\circ$$

(c) The rate of rudder motion is constrained:

$$\|\dot{u}\| \leq 10^\circ/\text{sec}$$

The turning rate $\dot{\psi}$ of the vessel may be measured, and used in the controller. The data for this problem is given in normalized units as follows:

length unit = length of ship

time unit = time required for ship to travel a ship's length

where the structure of A, b, c is given by:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad c = (0 \ \ 0 \ \ 1)$$

Modello e Incertezze

Il problema propone 5 modelli, dei quali 3 sono stati utilizzati per lo sviluppo del progetto (*Tanker#1, Tanker#2, Tanker#3*), scegliendo il terzo modello come nominale e considerando gli altri due come bounds degli intervalli per i parametri incerti. Sono stati scelti 3 parametri incerti dei 6 totali proposti, i quali sono: a_{11}, a_{21} e b_1.

Le equazioni per il modello linearizzato in spazio di stato sono:

$$\begin{aligned} \dot{x_1} &= a_{11_u}x_1 + a_{12}x_2 + b_{1_u}u \\ \dot{x_2} &= a_{21_u}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u \\ \dot{x_3} &= x_2 \\ y &= x_3 \end{aligned}$$

dove:

- a_{11_u} è il parametro incerto $a_{11} \in [-0.597, -0.298]$
- a_{21_u} è il parametro incerto $a_{21} \in [-4.37, -3.651]$
- b_{1_u} è il parametro incerto $b_1 \in [0.097, 0.116]$

Definizione Incertezze e Sistema

```
% Considero Tanker 3 come sistema nominale
clc; close all;

% Incertezze considerate: a_11 a_21 b1_u
a11_nom = -0.454;
a21_nom = -4.005;
b1_nom = 0.103 ;

a11_u = ureal('a11_u', a11_nom, 'Range', [-0.597, -0.298]);

a21_u = ureal('a21_u', a21_nom, 'Range', [-4.37, -3.651]);
b1_u = ureal('b1_u', b1_nom, 'Range', [0.097, 0.116]);

a12 = -0.433;
a22 = -0.807;
b2 = -0.807;
```

Sistema

```
A = [a11_u a12 0; a21_u a22 0; 0 1 0];

B = [b1_u b2 0]';

C = [0 0 1];
D = 0;

% modello di spazio di stato incerto
G_ss = ss(A, B, C, D);
disp("Sistema Nominale pazio di Stato:  ")
```

```
Sistema Nominale pazio di Stato:
```

```
G0_ss = G_ss.NominalValue
```

```
G0_ss =

  A =
          x1      x2      x3
```

```
  x1  -0.454  -0.433       0
  x2  -4.005  -0.807       0
  x3       0       1       0

 B =
          u1
  x1   0.103
  x2  -0.807
  x3       0

 C =
      x1  x2  x3
  y1   0   0   1

 D =
      u1
  y1   0

Continuous-time state-space model.
Model Properties
```

```
G_ss;

% f.d.t.
G_tf = tf(G_ss)
```

```
G_tf =

      -0.807 s - 0.7789
  -------------------------
  s^3 + 1.261 s^2 - 1.368 s

Continuous-time transfer function.
Model Properties
```

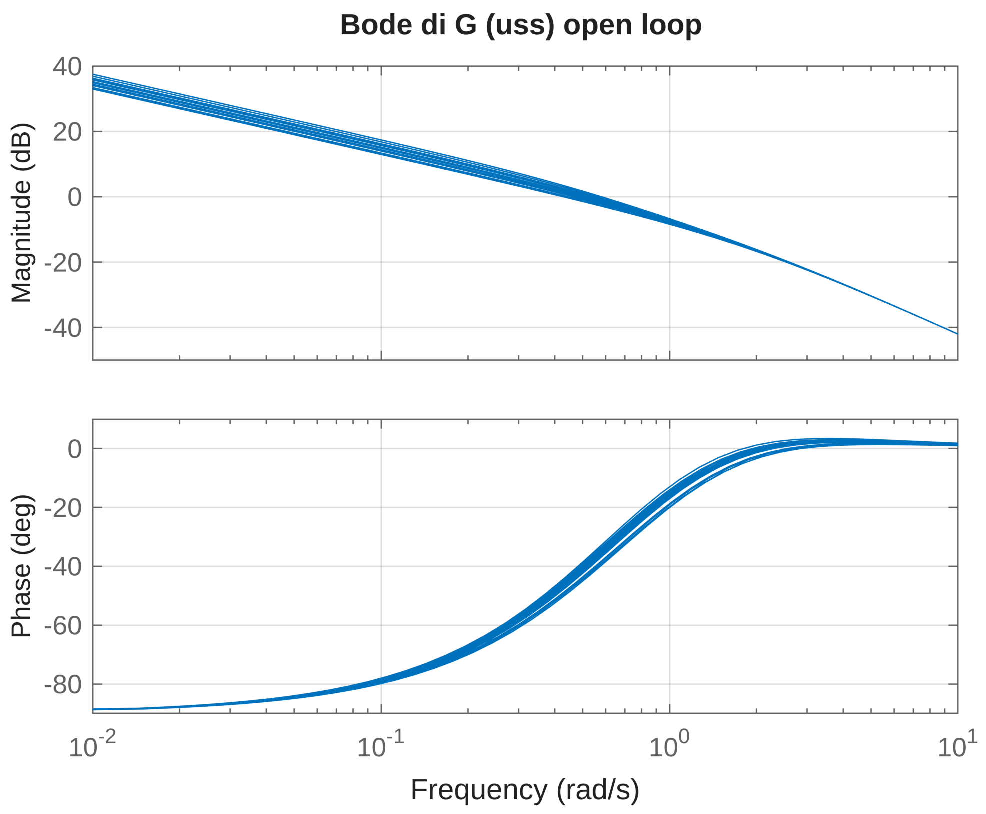
```
G0_tf = minreal(tf(G0_ss));
disp("I poli del sistema open loop sono: ")
```

```
I poli del sistema open loop sono:
```

```
disp(pole(G_tf))
```

```
         0
   -1.9592
    0.6982
```

```
bode(G_ss)
grid on
title("Bode di G (uss) open loop ")
```

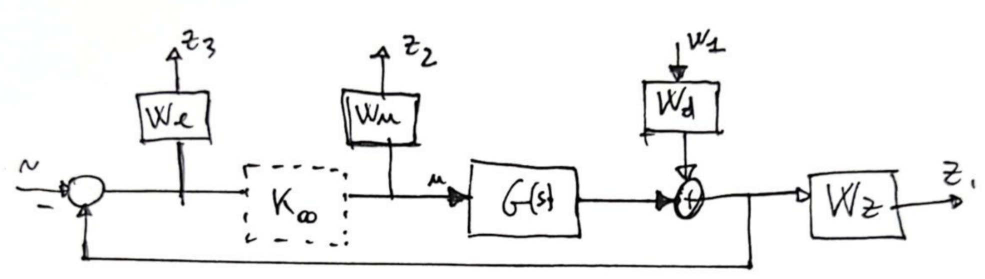


Forma TITO P1

$$P = \begin{bmatrix} W_z(s)W_d(s) & W_zG(s) \\ 0 & W_u(s) \\ -W_z(s)W_e(s) & -G(s)W_e(s) \\ -W_d(s) & -G(s) \end{bmatrix}$$

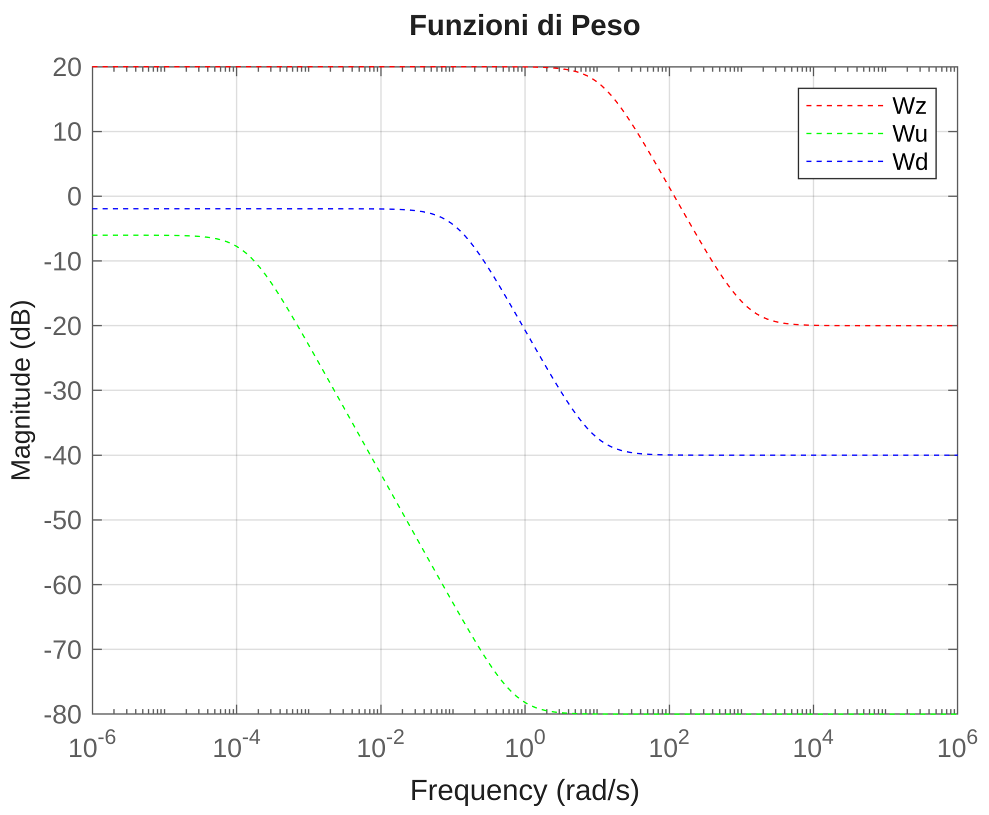
La forma TITO *P1* è stata ricavata a mano scegliendo i pesi:

- *Wz* per portare l'uscita di interesse y (= z) a zero
- *Wu* per cercare di limitare lo sforzo di controllo
- *Wd* per reiettare i disturbi in bassa frequenza
- *We* per limitare l'errore y-r



```
% Wu = makeweight(Wu_static, [10 Wu_static/10], Wu_static/1000);
% Wz = makeweight(20, 0.01, 0.01); VERI OG
% Wu = makeweight(1, [10 .1], Wu_static/1000);
% Wz = makeweight(50 ,[0.05 1],0.01);
% Wd = makeweight(50, [1 0.01], 0.001);
% We = makeweight(10, [1 1], 0);

Wu_static = 1 / (40 * pi / 180);
Wz = makeweight(10, [12 7], .1);
Wu = makeweight(.5, [0.005 Wu_static/100], 0.0001);
Wd = makeweight(0.8, [0.2 0.4], 0.01);
We = makeweight(1, [1 0.5], 0.1); % PESI PER OVERSHOOT 1.4 %

% Wn = makeweight(.1, [1,1], 10);
```

```
% PLOT PESI
bw1 = bodeplot(Wz,'r--', Wu, 'g--', Wd,'b--');
bw1.PhaseVisible = "off";
bw1.Title.String = "Funzioni di Peso";
bw1.Responses(1).Name = "Wz ";
bw1.Responses(2).Name = "Wu";
bw1.Responses(3).Name = "Wd";
bw1.LegendVisible = "on";
grid on
```




```
P = [Wz*Wd Wz*G0_tf;
    0 Wu;
    -Wd*We -G0_tf*We;
    -Wd -G0_tf]; % P per errore e

P = minreal(P);
```

```
10 states removed.
```

CONTROLLORE H_∞ (1)

Viene calcolato il controllore `Kinf` tramite l'apposito comando `hinfsyn` e si costruiscono il ciclo chiuso incerto e nominale

```
[Kinf, ~, gamInf]= hinfsyn(P, 1, 1);
gamInf
```

```
gamInf =
0.0161
```

```
Kinf=minreal(Kinf);
```

```
1 state removed.
```

```
disp("Il controllore Kinf risultante: ")
```

```
Il controllore Kinf risultante:
```

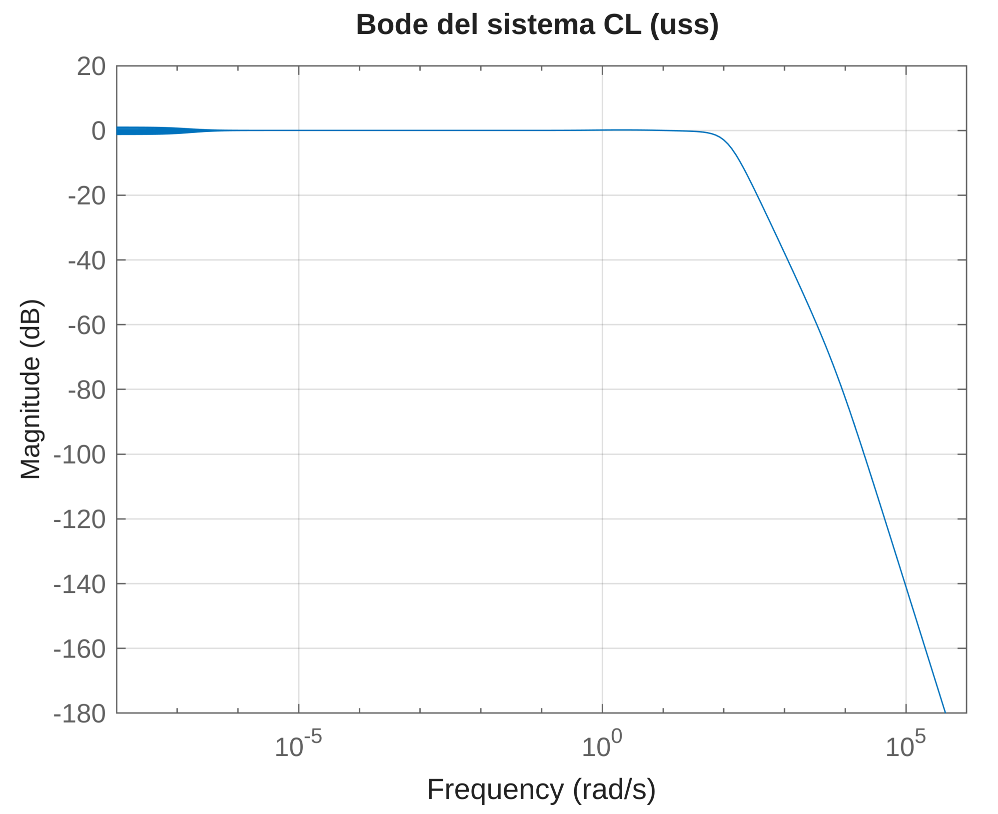
```
(ss(Kinf))
```

```
ans =

  A = 
               x1          x2          x3          x4          x5          x6
   x1  -9.136e+04   5.406e+05  -4.296e+05  -3.294e+05   1.129e+07   3.653e+05
   x2        -155       726.1      -531.5      -507.8   1.479e+04       496.3
   x3       194.1       -1151       913.4       702.1  -2.403e+04      -777.7
   x4       38.71      -229.5       191.2       129.7       -4922        -155
   x5      -9.289       55.08       -43.8      -33.52        1150       37.21
   x6   -2.03e+04   1.204e+05  -9.572e+04  -7.327e+04   2.514e+06   8.133e+04

  B = 
           u1
   x1    4029
   x2   -4682
   x3   37.75
   x4  -43.09
   x5   3.544
   x6    7258

  C = 
               x1          x2          x3          x4          x5          x6
   y1  -4.826e+04   2.855e+05  -2.269e+05   -1.74e+05   5.961e+06   1.929e+05

  D = 
       u1
   y1   0

Continuous-time state-space model.
Model Properties
```

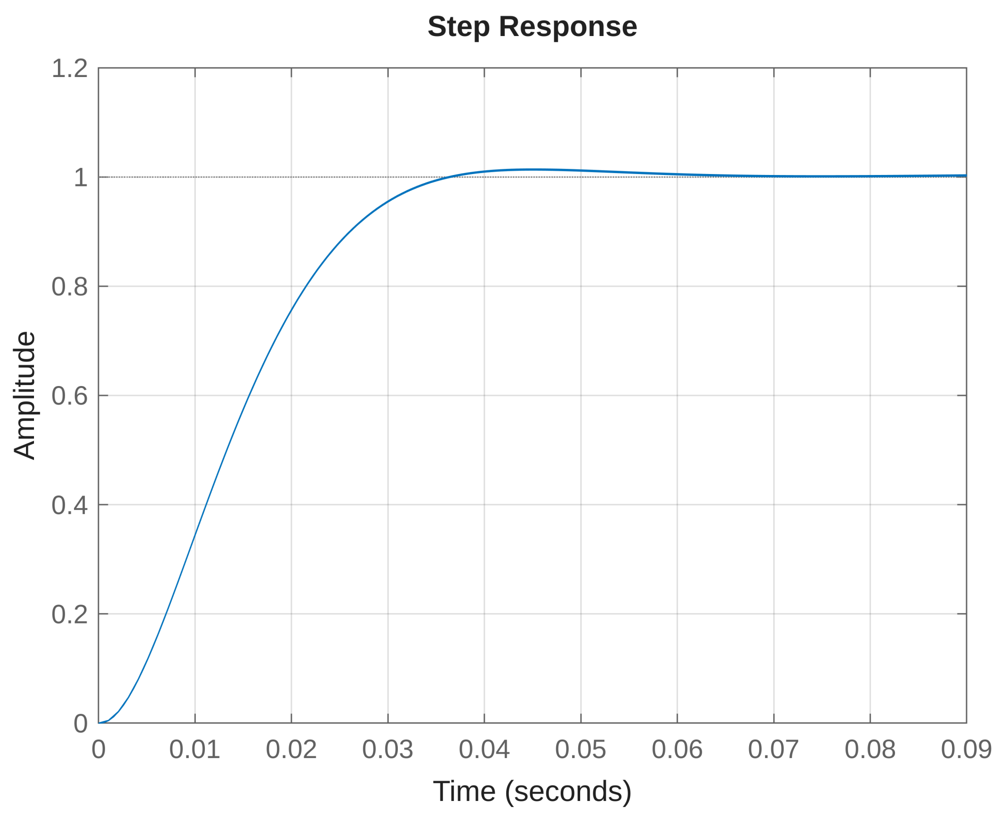
```
CL = minreal(feedback(G_ss * Kinf, 1));
CL0 = CL.NominalValue;
```

Si procede con la **risposta al gradino** e il calcolo della **sovraelongazione** per `CL0`, il sistema a ciclo chiuso nominale con il controllore *`Kinf`*.

```
close all

bodemag(CL)
grid on
title("Bode del sistema CL (uss) ")
```




```
step(CL)
grid on
```

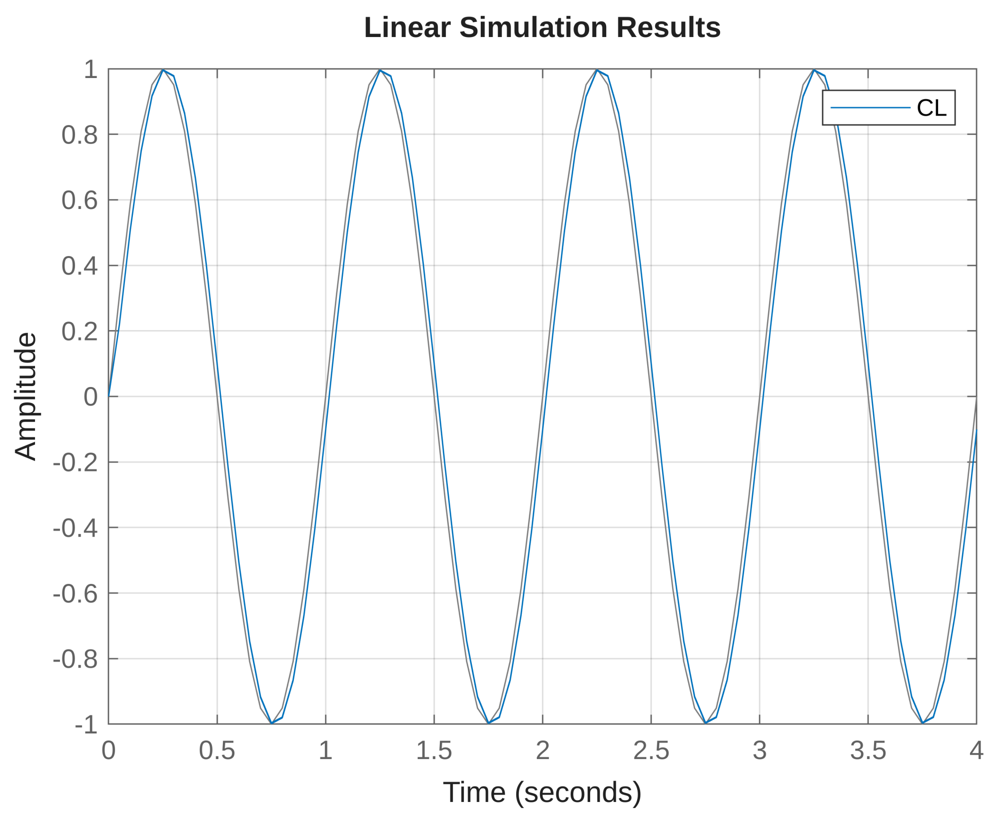



```
tfin=50;
[y_step, ~] = step(CL0, tfin);

% Calcolo overhsoot
overshoot_nom = (max(y_step) - y_step(end)) / y_step(end) * 100;
fprintf('Overshoot nominale (%%) = %.2f\n', overshoot_nom); % Nominale overshoot
```

```
Overshoot nominale (%) = 1.46
```

Risposta ad una sinusoide

```
% [u,t] = gensig("sine", 20, 10, 0.05);
[u,t] = gensig("sine",1,4,0.05);
lsim(CL,u,t)
legend
grid on
```



Dal grafico della risposta a gradino del sistema incerto si possono dedurre due cose:

- il sistema incerto per i sample che il comando *`step()`* ha casualmente scelto nel range di incertezze, il sistema incerto risulta stabile;
- il sistema presenta dinamiche molto veloci, in qanto si porta a regime in meno di 0.1 *s*

Inoltre, dal clcolo effettuato, si ottiene una **sovraelongazione percentuale** dell' **1.46 % ,** che è il miglior risultato ottenuto con la variazione dei pesi a discapito di un grande sforzo di controllo.

Margini di stabilità robusta

Si ottengono i margini di stabilità robusta attraverso il comando *`robstab()`*

```
opts = robOptions('VaryFrequency','on','Display','on');
[stabmarg,wcu,info] = robstab(CL, opts);
```

```
Computing bounds... Points completed: 67/67
Computing peak...  Percent completed: 100/100
System is robustly stable for the modeled uncertainty.
 -- It can tolerate up to 271% of the modeled uncertainty.
```

```
-- There is a destabilizing perturbation amounting to 271% of the modeled uncertainty.
-- This perturbation causes an instability at the frequency 114 rad/seconds.
```

```
disp(stabmarg)
```

```
       LowerBound: 2.7068
       UpperBound: 2.7130
CriticalFrequency: 113.8553
```

```
semilogx(info.Frequency,info.Bounds)
title('Margini di stabilità ')
grid on
ylabel('Margini')
xlabel('Frequenza')
legend('Lower bound','Upper bound')
xlim([stabmarg.CriticalFrequency-100 stabmarg.CriticalFrequency+100])
```

Dall'output si deduce che il sistema è in grado di tollerare fino al 271% delle incertezze modellate (*Lower Bound e Upper Bound*), e presenta un'instabilità alla frequenza critica di 114 rad/s; quindi il sistema risulta abbastanza **stabile in modo robusto.**

Test Worst Case System

Si va a testare come il sistema risponde nel caso peggiore di incertezze, dove ci si aspetta che il sistema sia al limite di stabilità.

```
% Test Worst Case (wcu)
close all
hold on
Gwcu = usubs(G_ss, wcu); % modello di spazio di stato incerto worst case
figure(1)

CLwcu = minreal(feedback(Gwcu * Kinf, 1));
```

```
4 states removed.
```

```
% xlim([0 10]);
% ylim([-2,2]) PER MOTIVI DIDDATTICI CHIEDERE A CAVALLO SE VUOLE CONTATTARE
% MATLAB E SCRIVERE UN ARTICOLO

step(CLwcu, 1)
step(CL,1)
grid on
legend( 'Sistema worst case', 'Sistema Nominale')
if(isstable(Gwcu))
    disp('Il sistema wcu è: stabile')
else
    disp('Il sistema wcu è: Instabile')
end
```

```
Il sistema wcu è: Instabile
```

Il sistema, come previsto, si porta al limite di stabilità

Funzioni di Sensitività

```
S_nom = minreal(feedback(1, G0_ss *Kinf));          % sensitivity
```

```
2 states removed.
```

```
T_nom = minreal(1 - S_nom);                        % complementary sensitivity
```

```
1 state removed.
```

```
Q_nom = minreal(Kinf * S_nom);            % control sens
```

```
6 states removed.
```

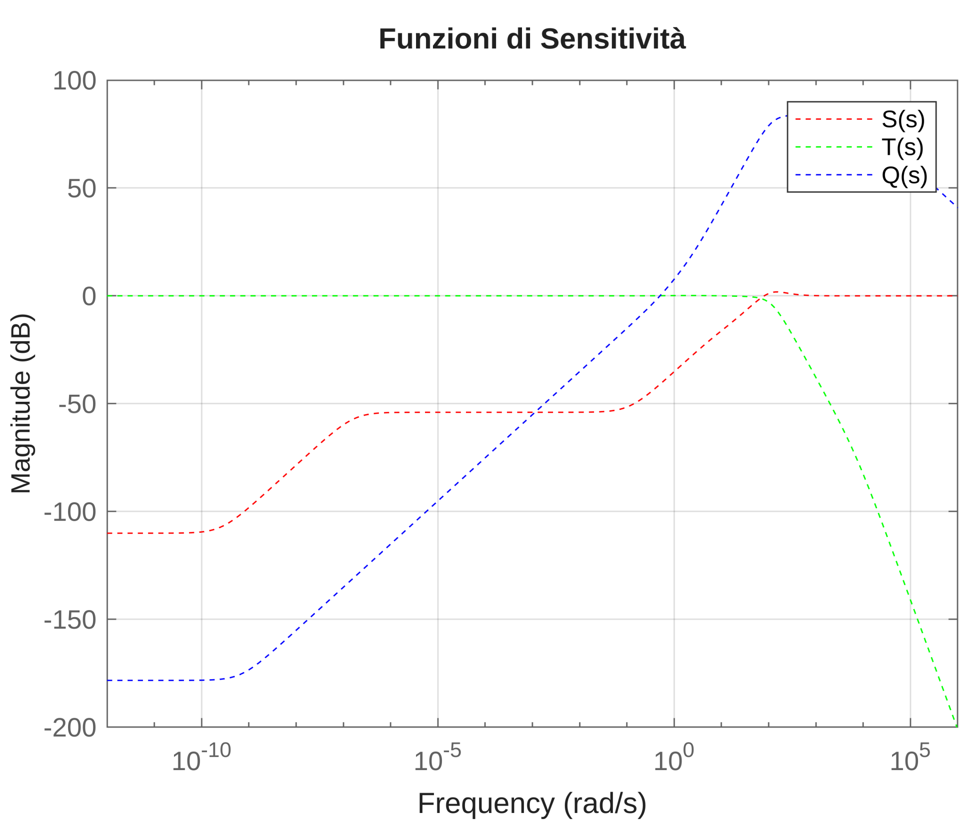
```
fprintf('||S||_inf = %.3g\n', norm(S_nom,Inf));
```

```
||S||_inf = 1.24
```

```
fprintf('||T||_inf = %.3g\n', norm(T_nom,Inf));
```

```
||T||_inf = 1.01
```

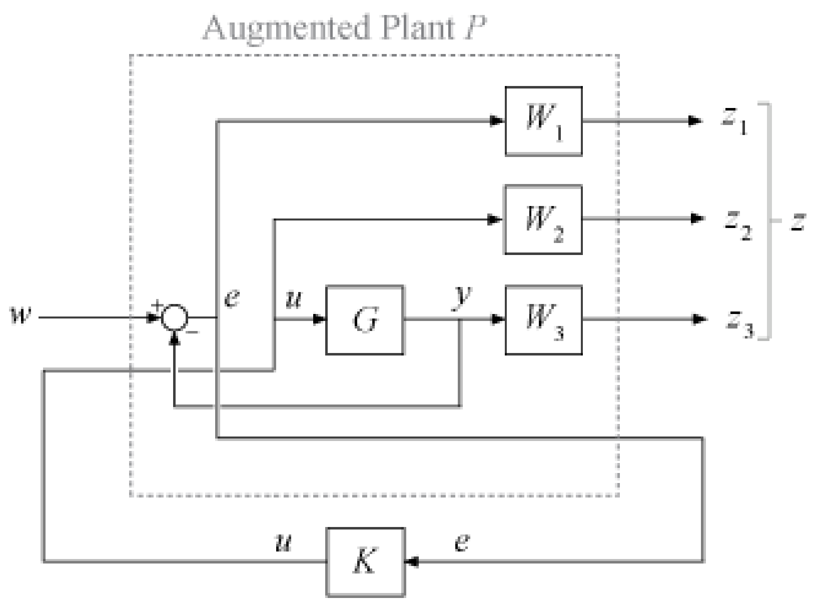
```
close all
% PLOT
bpp = bodeplot(S_nom,'r--', T_nom, 'g--', Q_nom, 'b--');
bpp.PhaseVisible = "off";
bpp.Title.String = "Funzioni di Sensitività";
bpp.Responses(1).Name = "S(s) ";
bpp.Responses(2).Name = "T(s)";
bpp.Responses(3).Name = "Q(s)";
bpp.LegendVisible = "on";
grid on
```




```
norm(CL, 'inf')
```

```
ans =
1.0186
```

Forma TITO P2 (augw)



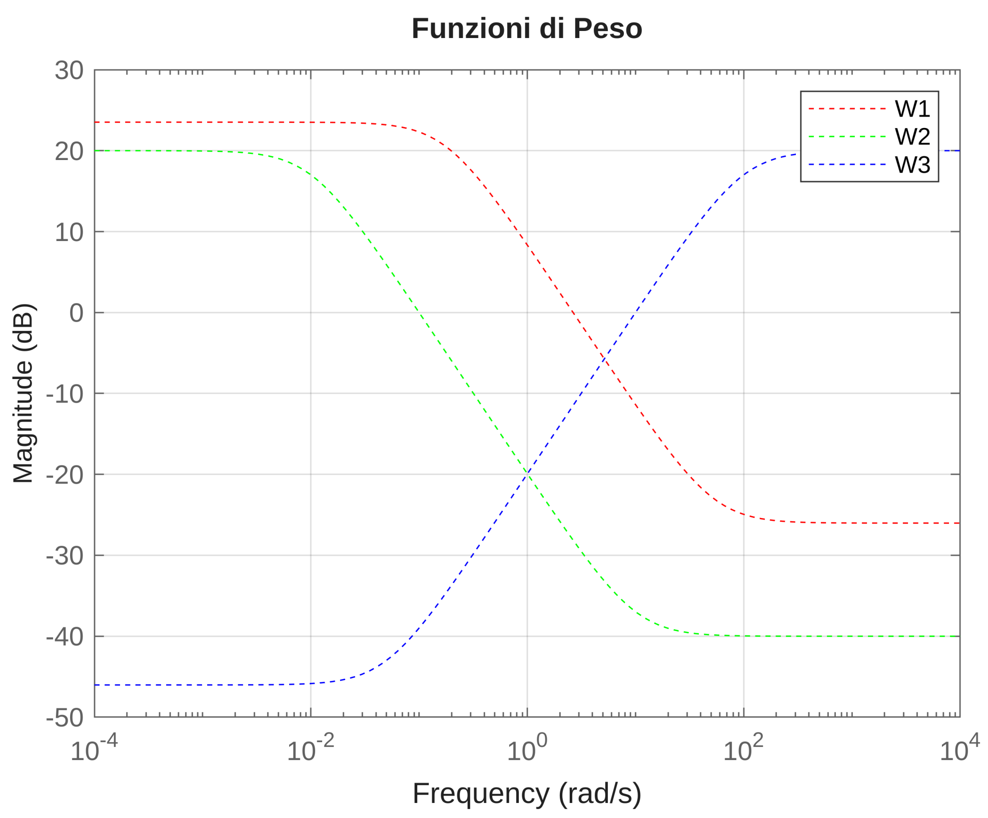
Si è scelto, per esperimento, di provare anche una nuova forma TITO, utilizzando il comando `augw` , che presenta una forma matriciale diversa da quella vista in precedenza.

$$P(s) = \begin{bmatrix} W_1 & -W_1G \\ 0 & W_2 \\ 0 & W_3G \\ I & -G \end{bmatrix}$$

In questo caso:

- W_1 per l'inseguimento del riferimento e la reiezione dei disturbi in bassa frequenza
- W_2 per lo sforzo di controllo
- W_3 per la robustezza e l'attenuazione del rumore

```
W1 = makeweight(15, [0.5 5], 0.05);   % peso su S (tracking)
W2 = makeweight(10,  [0.1 1], 0.01);   % peso su KS (sforzo controllo)
% W3 = makeweight(0.5,[  0.2], 0.02); % rumore e robust

% W1 = makeweight(10, [3 5], 0.05);
% W2 = makeweight(2,  [3 1], 0.01);
W3 = makeweight(.005, 10, 10); %

% P2
P2 = augw(G_ss, W1, W2, W3);
P2 = minreal(P2);

close all
figure
% PLOT PESI
bw2 = bodeplot(W1,'r--', W2, 'g--', W3,'b--');
bw2.PhaseVisible = "off";
bw2.Title.String = "Funzioni di Peso";
bw2.Responses(1).Name = "W1 ";
bw2.Responses(2).Name = "W2";
bw2.Responses(3).Name = "W3";
bw2.LegendVisible = "on";
grid on
```



Controllore H_∞ (2)

Si progetta il nuovo controllore per la P2

```
[Kinf2,Tzw2 ,gam] = hinfsyn(P2,1,1); % Hinf syn
Kinf2 = minreal(Kinf2);
fprintf('gamma ottenuto: %.3f\n', gam);
```

```
gamma ottenuto: 0.942
```

```
% closed loop Nominale nuovo controllore
CL0 = feedback(G0_tf*Kinf2,1);
CL_2 = minreal(feedback(G_ss * Kinf2, 1));
norm(CL_2,'inf')
```

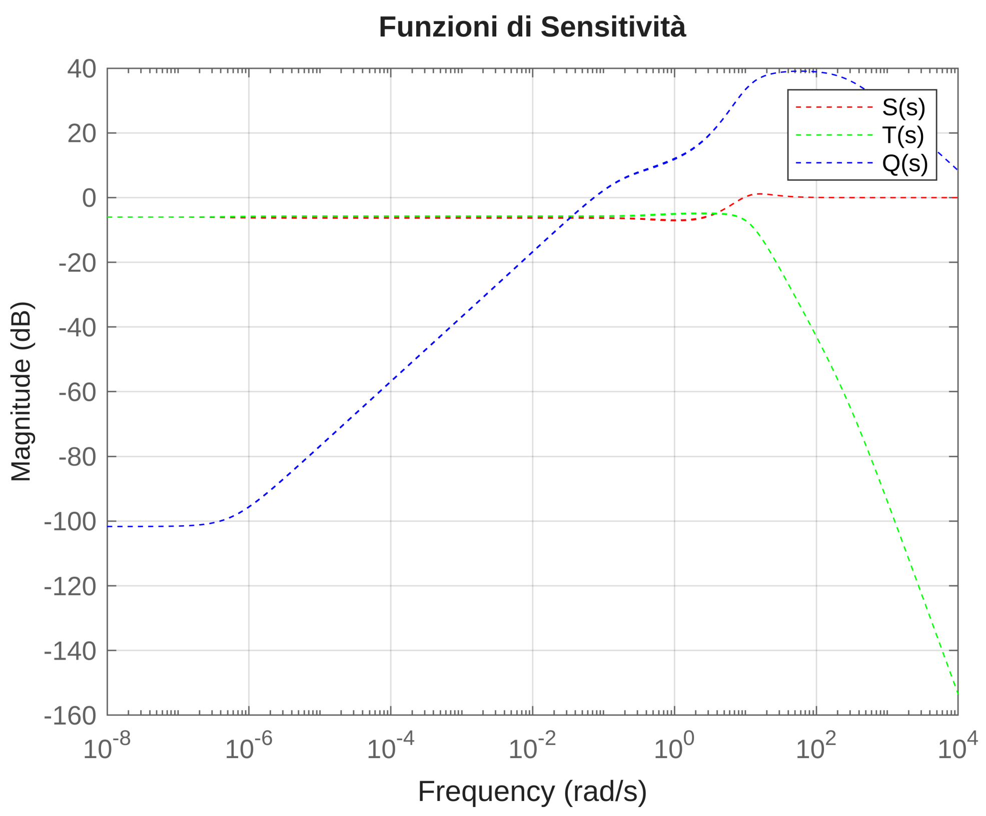
```
ans =
1.2652
```

```
S_nom = minreal(feedback(1, CL_2));        % sensitivity
T_nom = minreal(1 - S_nom);                % complementary sensitivity
Q_nom = minreal(Kinf2 * S_nom);            % control sens
fprintf('||S||_inf=%.3f, ||T||_inf=%.3f, ||T_ur||_inf=%.3f\n', ...
    norm(S_nom,Inf), norm(T_nom,Inf), norm(Q_nom,Inf));
```

```
||S||_inf=1.142, ||T||_inf=0.569, ||T_ur||_inf=90.021
```

```
close all
% PLOT Sensitività
```

```
bpp = bodeplot(S_nom,'r--', T_nom, 'g--', Q_nom, 'b--');
bpp.PhaseVisible = "off";
bpp.Title.String = "Funzioni di Sensitività";
bpp.Responses(1).Name = "S(s) ";
bpp.Responses(2).Name = "T(s)";
bpp.Responses(3).Name = "Q(s)";
bpp.LegendVisible = "on";
grid on
```



Margini di stabilità robusta (`Kinf2`)

Si vanno a controllare i margini di stabilità robusta per il nuovo sistema ciclo chiuso `CL2`, col nuovo controllore `Kinf2`

```
disp('Margini di stabilità robusta:  ')
```

```
Margini di stabilità robusta:
```

```
opts = robOptions('VaryFrequency','on', 'Display','on');
[stabmarg,wcu,info] = robstab(CL_2, opts);
```

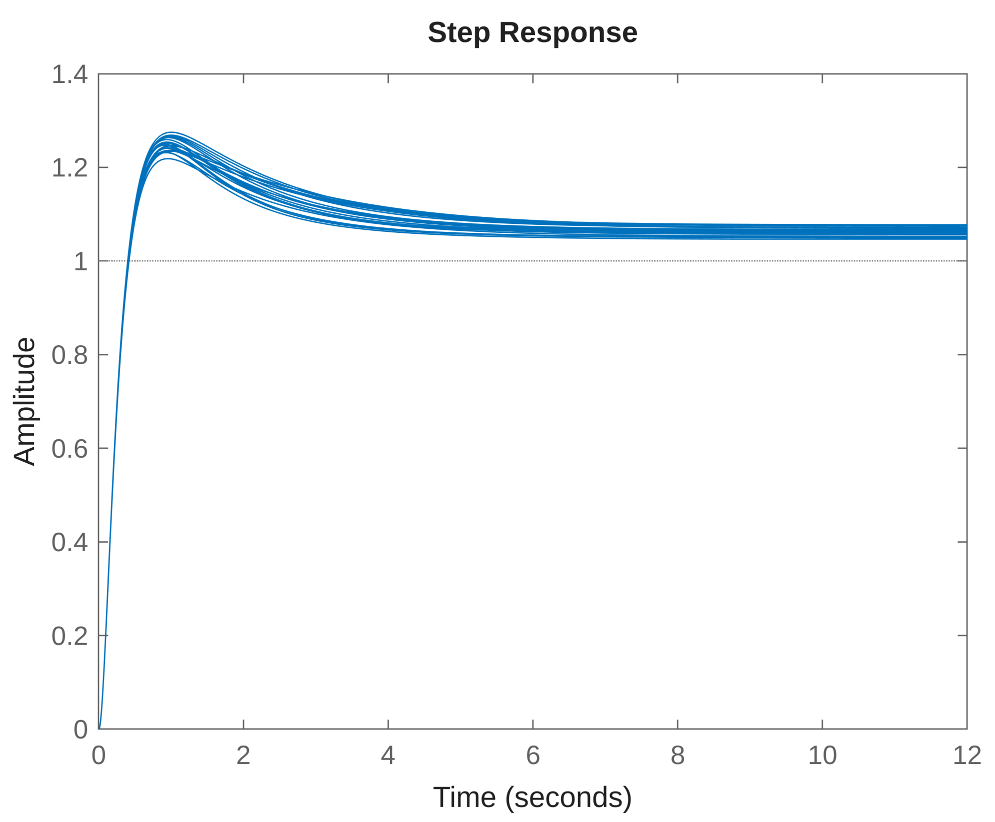
```
Computing bounds... Points completed: 62/62
Computing peak...  Percent completed: 100/100
System is robustly stable for the modeled uncertainty.
 -- It can tolerate up to 269% of the modeled uncertainty.
 -- There is a destabilizing perturbation amounting to 269% of the modeled uncertainty.
 -- This perturbation causes an instability at the frequency 8.31 rad/seconds.
```

```
semilogx(info.Frequency,info.Bounds)
title('Margini di stabilità ')
ylabel('Margini')
xlabel('Frequenza')
legend('Lower bound','Upper bound')
xlim([.1 stabmarg.CriticalFrequency+100])
```

Anche in questo caso si ottengono **ottimi margini di stabilità robusta.**

Si controlla la **step response** del sistema incerto e si stima la sovraelongazione del sistema nominale per valutarne le performance (nominali)

```
close all
step(CL_2);
```




```
[y_step, ~] = step(CL_2.NominalValue, tfin);

overshoot_nom = (max(y_step) - y_step(end)) / y_step(end) * 100; %  in Percentuale
fprintf('Overshoot nominale (%%) = %.2f\n', overshoot_nom);
```

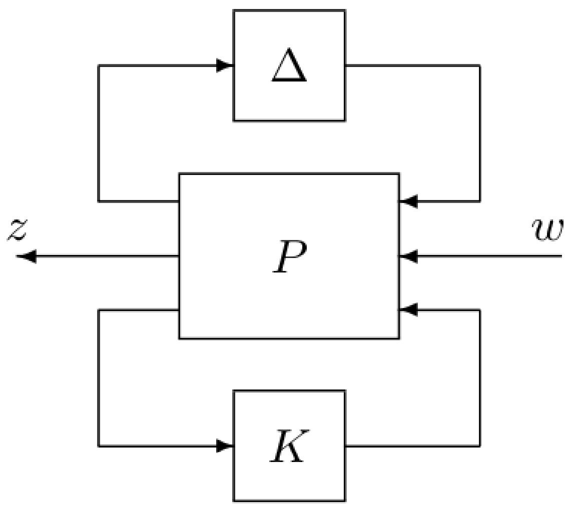
```
Overshoot nominale (%) = 16.93
```

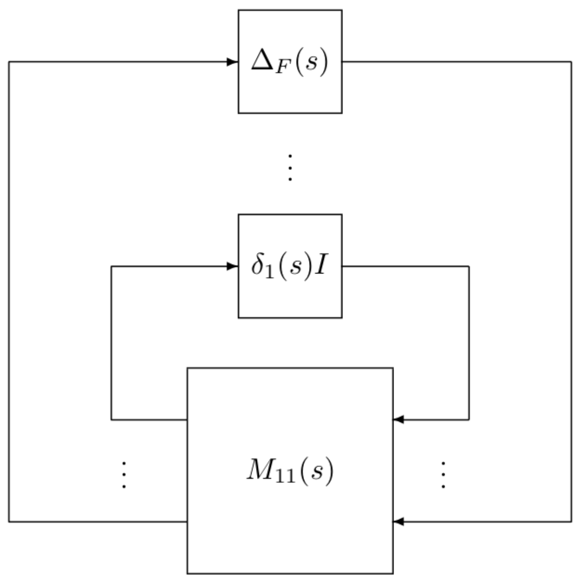
```
bodemag(CL_2)
grid on
title("Bode del sistema CL_2 (uss) ")
```

Con i pesi scelti si ottengono dei risultati peggiori rispetto al caso precedente, per quanto riguarda la sovraelongazione, il tempo di risposta, errore a regime.

Analisi di Stabilità robusta con $\mu - \text{Analysis}$ (1 e 2)

Si procede con lo studio della stabilità robusta attraverso la stima dell' `ssv` *(Structured Singular Value).*





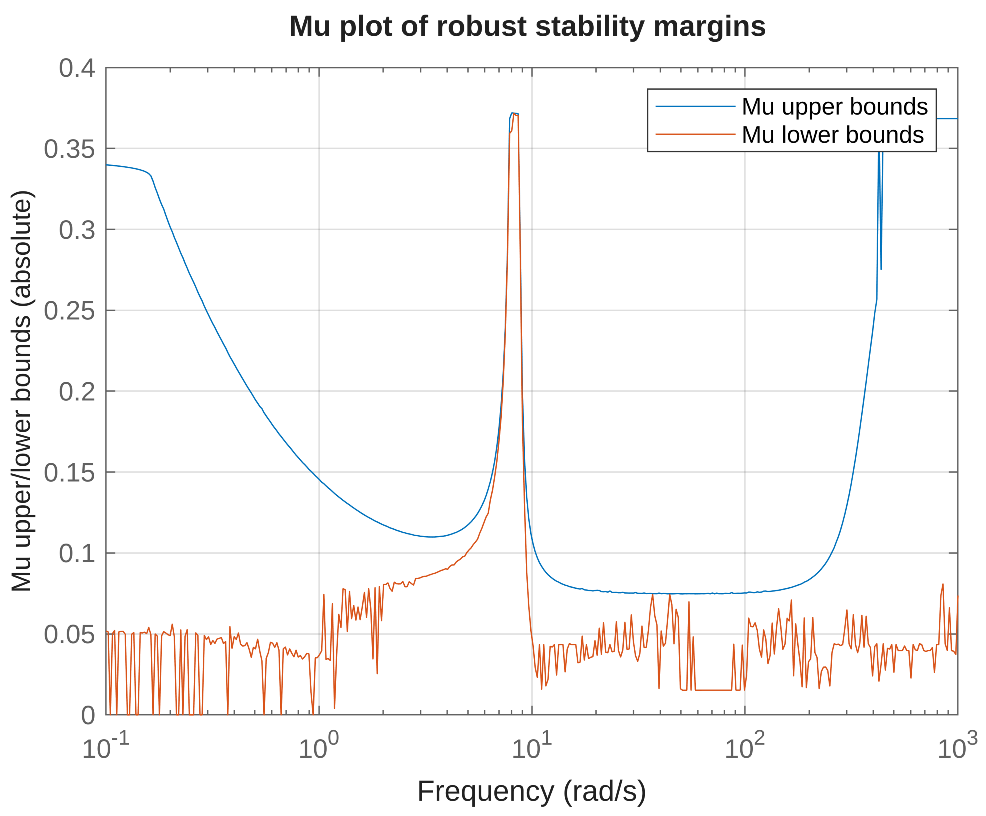
Attraverso il valor singolare strutturato, si controlla la stabilità robusta rispetto ad un intervallo di frequenze.

Si ha che, se $\mu(M(j\omega)) < 1 \; \forall \, \omega$, il sistema risulta robustamente stabile per le incertezze modellate, in particolare si procede con la stima del Lower Bound ed Upper bound di μ

Si procede inizialmente con l'analisi per il sistema `CL2`, con l'ausilio dei comandi: `lftdata, mussv`

```
% forse bisogna modificare di nuovo i pesi

close all
[M2,Delta2,BlkStruct] = lftdata(CL_2);
% verificaCompl = norm(CL_2-lft(Delta,M),'inf');
szDelta2 = size(Delta2);
M11_2 = M2(1:szDelta2(2),1:szDelta2(1));
axislimit = [-1 3]; % Esponente Range di calcolo e visualizzazione
% axislimit = [stabmarg.CriticalFrequency-1e-2 stabmarg.CriticalFrequency+1e3]; % Esponente Range di calcolo e visualizzazione

omega = logspace(axislimit(1),axislimit(2),400);

M11_g2 = frd(M11_2,omega);
mubnds2 = mussv(M11_g2,BlkStruct,'s');
mumax = [max(mubnds2(1,1).ResponseData) max(mubnds2(1,2).ResponseData)]; % max di upper e lower bound di mu
```

```
bp2 = bodeplot(mubnds2(1,1),mubnds2(1,2));
bp2.PhaseVisible = 'off';
bp2.MagnitudeUnit = 'abs';
bp2.XLimits = [10^axislimit(1),10^axislimit(2)];
bp2.XLabel.String = "Frequency";
bp2.YLabel.String(1) = "Mu upper/lower bounds";
bp2.Title.String = ("Mu plot of robust stability margins ");
legend("Mu upper bounds", "Mu lower bounds")
grid on
```




```
fprintf('Max Mu upper bound = %.3g\n Min Mu lower bound = %.3g\n', mumax(1), mumax(2));
```

```
Max Mu upper bound = 0.372
 Min Mu lower bound = 0.372
```

Si evince dal grafico che il valore del `ssv` rimane inferiore a 1, quindi garantendo la stabilità robusta (anche in questo caso) per le incertezze modellate.

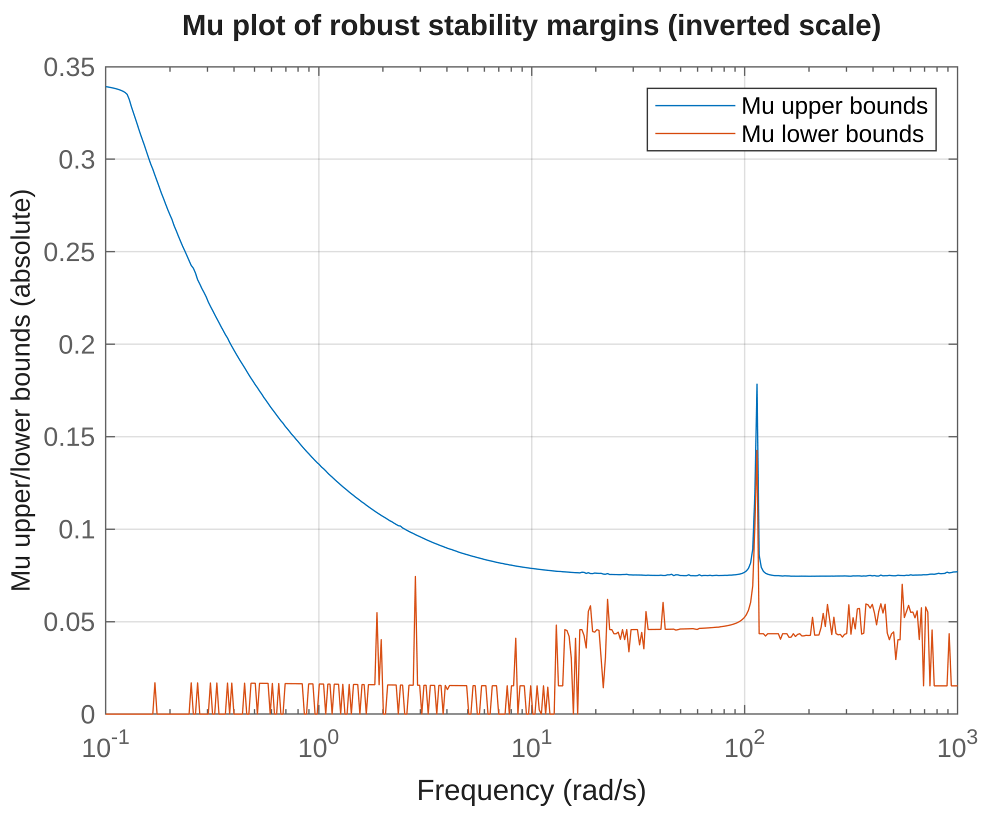
Analisi stabiltà Robusta CL (1)

Si procede ora con l'analisi di stabilità robusta, utilizzando lo stesso metodo cui sopra, per il sistema `CL`

```
close all
% P1
[M1,Delta1,BlkStruct] = lftdata(CL);
% verificaCompl = norm(CL_2-lft(Delta,M),'inf');
szDelta1 = size(Delta1);
M11_1 = M1(1:szDelta1(2),1:szDelta1(1));
axislimit = [-1 3]; % Esponente Range di calcolo e visualizzazione
% axislimit = [stabmarg.CriticalFrequency-1e-2 stabmarg.CriticalFrequency+1e3]; % Esponente Range di calcolo e visualizzazione

omega = logspace(axislimit(1),axislimit(2),400);


M11_g1 = frd(M11_1,omega);
mubnds1 = mussv(M11_g1,BlkStruct,'s');
mumax = [max(mubnds1(1,1).ResponseData) max(mubnds1(1,2).ResponseData)]; % max di upper e lower bound di mu
```

```
bp1 = bodeplot(mubnds1(1,1),mubnds1(1,2));
bp1.PhaseVisible = 'off';
bp1.MagnitudeUnit = 'abs';
bp1.XLimits = [10^axislimit(1),10^axislimit(2)];
bp1.XLabel.String = "Frequency";
bp1.YLabel.String(1) = "Mu upper/lower bounds";
```

```
bp1.Title.String = "Mu plot of robust stability margins (inverted scale)";
grid on;
legend("Mu upper bounds", "Mu lower bounds");
```




```
fprintf('Max Mu upper bound = %.3g\n', mumax(1));
```

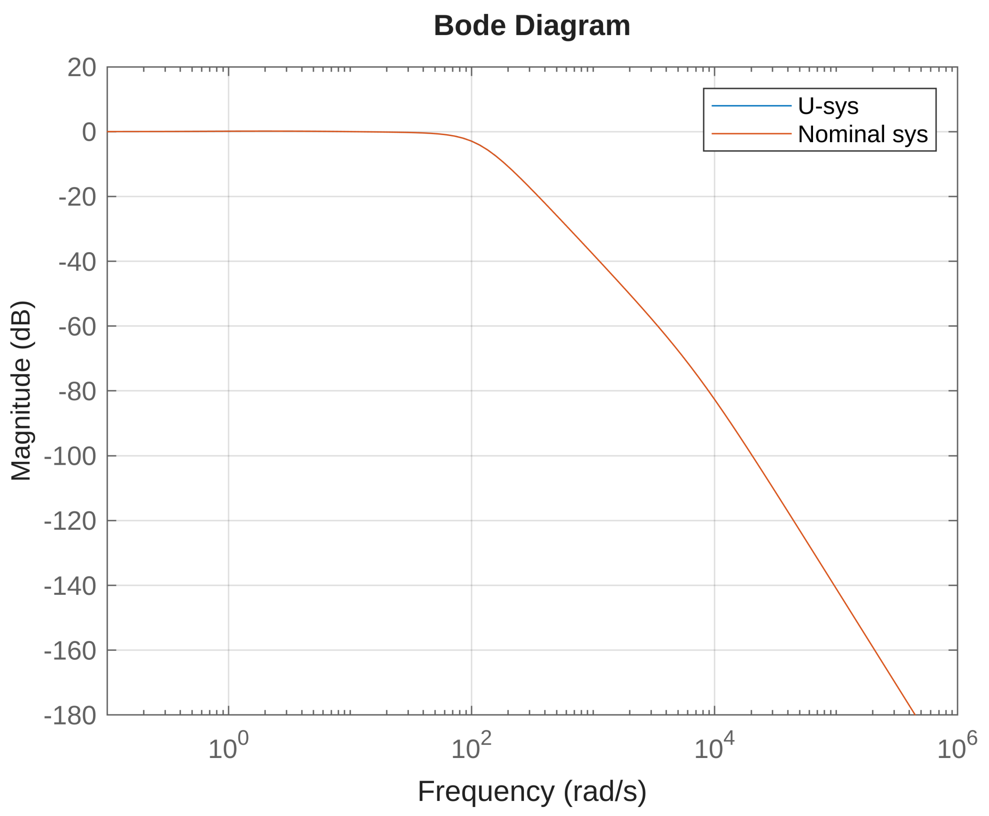
```
Max Mu upper bound = 0.339
```

```
fprintf('Max Mu lower bound = %.3g\n', mumax(2));
```

```
Max Mu lower bound = 0.143
```

Anche nel caso di `CL1`, si ha che il valore del `ssv` rimane inferiore a 1, rispetto alle incertezze modellate

```
bodemag(CL, CL.NominalValue)
legend('U-sys', 'Nominal sys')
grid on
```



Analisi di prestazioni robuste (`robgain`)

Dopo l'analisi di stabilità robusta, è stata condotta un'analisi di prestazioni robuste mediante la funzione `robgain`.

Questa funzione calcola i margini di performance robusta per un sisema incerto, le quali sono misurate sottoforma di massimo valor singolare, ed è relativo ad un livello di incertezza specificato (nel nostro caso 2).

Verranno analizzati i margini per entrambi i sistemi (`CL, CL2`)

```
[perfmarg1,wcu1, info1] = robgain(CL, 2, opts)
```

```
Computing bounds... Points completed: 67/67
Computing peak...  Percent completed: 100/100
The performance level 2 is robust to the modeled uncertainty.
 -- The gain remains below 2 for up to 211% of the modeled uncertainty.
 -- There is a bad perturbation amounting to 271% of the modeled uncertainty.
 -- This perturbation causes a gain of 2 at the frequency 71.4 rad/seconds.
perfmarg1 = struct with fields:
           LowerBound: 2.1138
           UpperBound: 2.7078
    CriticalFrequency: 71.4026
wcu1 = struct with fields:
    a11_u: -0.3952
    a21_u: -4.9754
     b1_u: 9.3858
info1 = struct with fields:
                Model: 1
            Frequency: [69×1 double]
               Bounds: [69×2 double]
    WorstPerturbation: [69×1 struct]
          Sensitivity: [1×1 struct]
```

```
[perfmarg2,wcu2, info2] = robgain(CL_2, 2, opts)
```

```
Computing bounds... Points completed: 62/62
Computing peak...  Percent completed: 100/100
The performance level 2 is robust to the modeled uncertainty.
 -- The gain remains below 2 for up to 258% of the modeled uncertainty.
 -- There is a bad perturbation amounting to 258% of the modeled uncertainty.
 -- This perturbation causes a gain of 2 at the frequency 3.73 rad/seconds.
perfmarg2 = struct with fields:
           LowerBound: 2.5772
           UpperBound: 2.5821
    CriticalFrequency: 3.7308
wcu2 = struct with fields:
    a11_u: -0.0200
    a21_u: -4.9712
     b1_u: 0.5382
info2 = struct with fields:
                Model: 1
            Frequency: [64×1 double]
               Bounds: [64×2 double]
    WorstPerturbation: [64×1 struct]
          Sensitivity: [1×1 struct]
```

```
CLmax = usubs(CL,wcu1);
```

```
getPeakGain(CLmax,1e-6)
```

```
ans =
2.0004
```

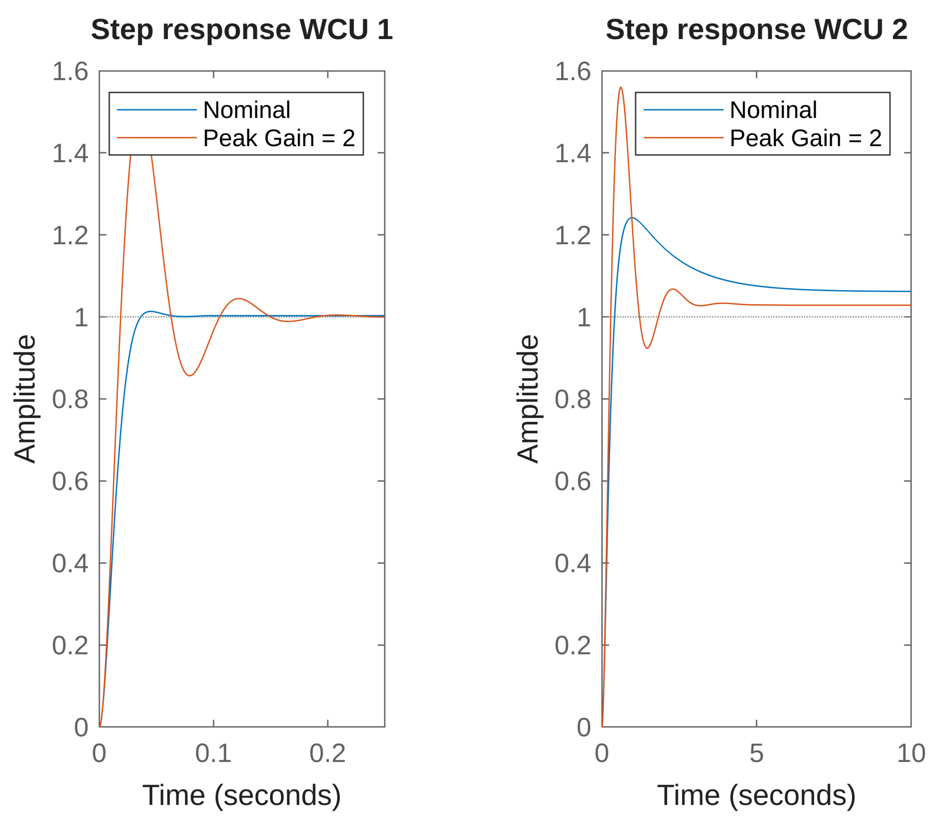
Examine the disturbance rejection of the system with these values.

```
close all
subplot(1, 2, 1)
grid on
step(CL.NominalValue,CLmax)
title("Step response WCU 1")
legend('Nominal','Peak Gain = 2')
```

```
CLmax2 = usubs(CL_2,wcu2);
getPeakGain(CLmax2,1e-6)
```

```
ans =
1.9999
```

```
subplot(1, 2, 2)
grid on
step(CL_2.NominalValue,CLmax2)
title("Step response WCU 2")
legend('Nominal','Peak Gain = 2')
```



Tentativo di μ-synthesis (extra)

Questo controllore viene sviluppato con una D-K iteration, viene progettato, per ogni iterazione un controllore H_∞, restringendo sempre di più (utilizzando `uscale`) il range di incertezze per le quali valutare la robustezza con il valore singolare strutturato

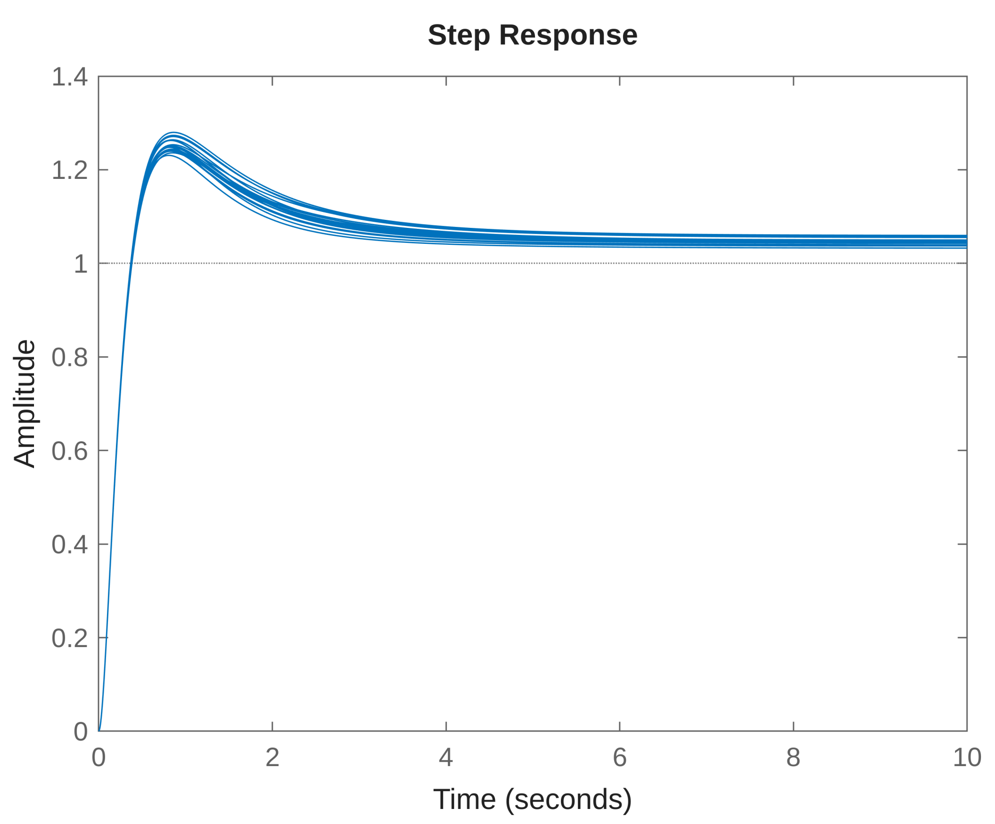
```
% TEST NEW
% mu-sintesi

[Kmu, rp ] = musyn(P2, 1,1);
```

```
D-K ITERATION SUMMARY:
-----------------------------------------------------------------
                       Robust performance               Fit order
-----------------------------------------------------------------
  Iter         K Step       Peak MU       D Fit             D
    1           20.7         3.719         3.73            12
    2          1.112         1.109        1.116            12
    3          1.024         1.023        1.032            18
    4          1.018         1.016        1.025            14
    5          1.021         1.019        1.028            14

Best achieved robust performance: 1.02
```

```
Kmu=minreal(Kmu);
```

```
3 states removed.
```

```
CLmu = feedback(G_ss*(Kmu),1);
CLmu_nom=CLmu.NominalValue;
close all
step(CLmu)
```




```
[y_step,t] = step(CLmu_nom,50);
overshoot_nom = (max(y_step)-y_step(end))/y_step(end)*100;
fprintf('Overshoot nominale = %.2f %%\n', overshoot_nom);
```

```
Overshoot nominale = 19.57 %
```

```
% Robust stability
opts = robOptions('VaryFrequency','on','Display','on');
[stabmarg_mu,wcu_mu,info_mu] = robstab(CLmu, opts);
```

```
Computing bounds... Points completed: 52/52
Computing peak...  Percent completed: 100/100
System is robustly stable for the modeled uncertainty.
 -- It can tolerate up to 269% of the modeled uncertainty.
 -- There is a destabilizing perturbation amounting to 269% of the modeled uncertainty.
 -- This perturbation causes an instability at the frequency 8.29 rad/seconds.
```

```
fprintf('Robust Stability Margin LowerBound = %.2f (%.0f%% tolleranza)\n',...
    stabmarg_mu.LowerBound, (stabmarg_mu.LowerBound-1)*100);
```

```
Robust Stability Margin LowerBound = 2.69 (169% tolleranza)
```

```
% μ-analysis (Structured Singular Value)
[Mmu,Delta_mu,BlkStruct_mu] = lftdata(CLmu);
omega = logspace(-2,3,200);
M11_mu = Mmu(1:size(Delta_mu,2),1:size(Delta_mu,1));
mubnds = mussv(frd(M11_mu,omega),BlkStruct_mu,'s');
mu_upper = max(mubnds(1,1).ResponseData);
mu_lower = max(mubnds(1,2).ResponseData);
fprintf('Max μ upper bound = %.3f\n', mu_upper);
```

```
Max μ upper bound = 0.372
```

```
fprintf('Max μ lower bound = %.3f\n', mu_lower);
```

```
Max μ lower bound = 0.371
```

```
% Robust performance
[perfmarg_mu,wcu_mu,~] = robgain(CLmu,2,opts);
```

```
Computing bounds... Points completed: 52/52
Computing peak...  Percent completed: 100/100
The performance level 2 is robust to the modeled uncertainty.
 -- The gain remains below 2 for up to 257% of the modeled uncertainty.
 -- There is a bad perturbation amounting to 258% of the modeled uncertainty.
 -- This perturbation causes a gain of 2 at the frequency 3.85 rad/seconds.
```

```
fprintf('Robust Performance Margin Upepr bound (livello=2) = %.3f\n', perfmarg_mu.UpperBound);
```

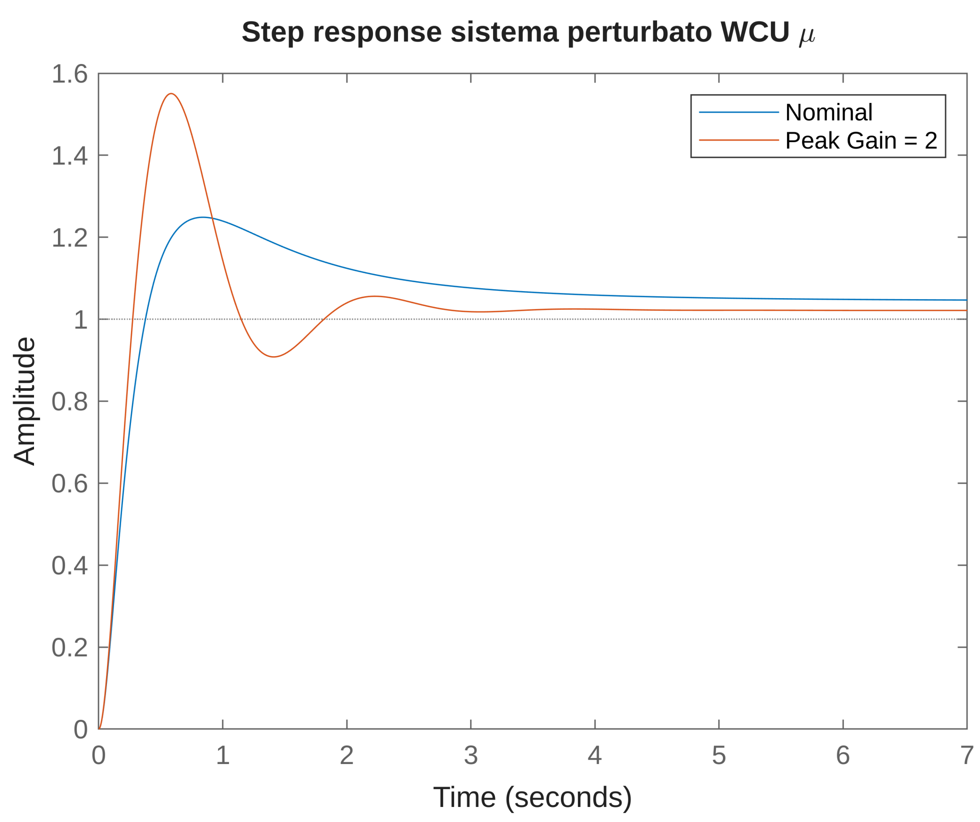
```
Robust Performance Margin Upepr bound (livello=2) = 2.575
```

Caso perturbazioni con peak 2

```
CLmumax = usubs(CLmu,wcu_mu);
getPeakGain(CLmumax,1e-6)
```

```
ans =
1.9999
```

```
close all
figure
grid on
step(CLmu.NominalValue,CLmumax)
title("Step response sistema perturbato WCU \mu ")
legend('Nominal','Peak Gain = 2')
```



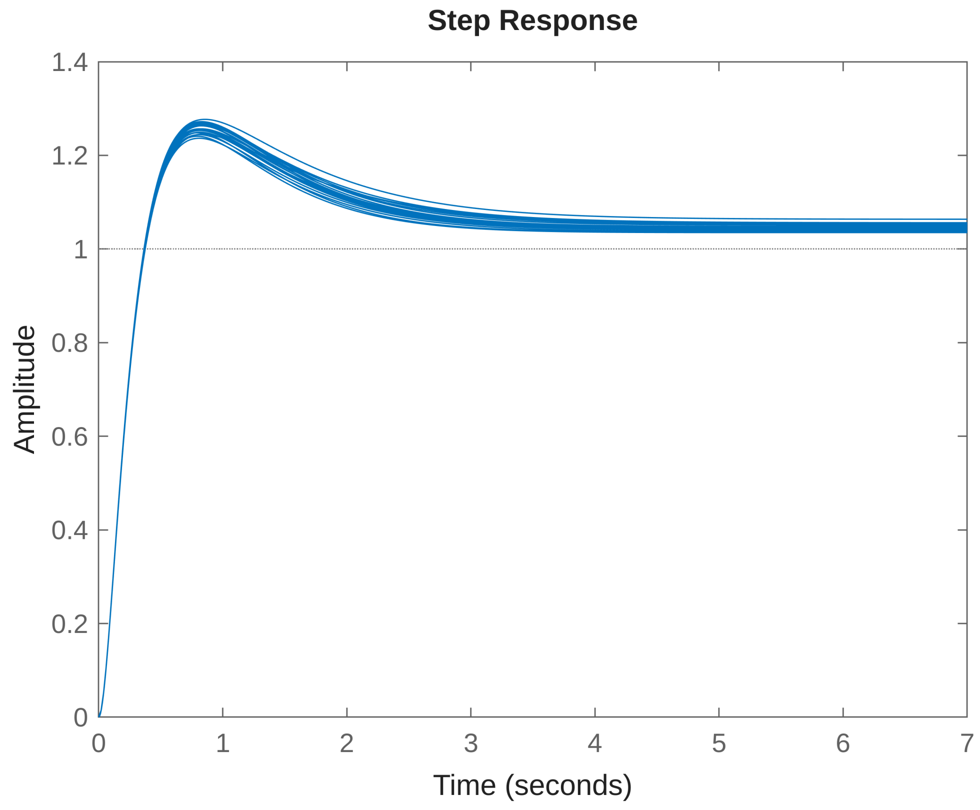
Riduzione Ordine Controllore (μ)

È stata fatta una prova per ridurre l'ordine del controllore μ al terzo ordine, visto l'ordine elevato del precedente (22° ordine)

```
C0 = tunableSS('C0',3,1,1);
CL0 = lft(P2,C0);
[CLmu2,CLmuperf,info] = musyn(CL0);
```

```
D-K ITERATION SUMMARY:
-----------------------------------------------------------------
                       Robust performance               Fit order
-----------------------------------------------------------------
  Iter         K Step       Peak MU       D Fit             D
    1           20.7         9.43         9.607            16
    2           1.09         1.049         1.06            12
    3          1.033         1.029        1.035            12
    4          1.033         1.027        1.033            12
    5          1.033         1.026        1.033            12

Best achieved robust performance: 1.03
```

```
Kmu2 = getBlockValue(CLmu2, 'C0');

CLmuReduced = feedback(G_ss*Kmu2,1);  % ciclo chiuso nominale
step(CLmuReduced)
```




```
%  Analisi Robustezza

[stabmarg_mu,~,info_mu] = robstab(CLmuReduced, opts);
```

```
Computing bounds... Points completed: 47/47
Computing peak...  Percent completed: 100/100
System is robustly stable for the modeled uncertainty.
 -- It can tolerate up to 268% of the modeled uncertainty.
 -- There is a destabilizing perturbation amounting to 269% of the modeled uncertainty.
 -- This perturbation causes an instability at the frequency 8.34 rad/seconds.
```

```
fprintf('Robust Stability Margin LowerBound = %.2f (%.0f%% tolleranza)\n',...
    stabmarg_mu.LowerBound, (stabmarg_mu.LowerBound-1)*100);
```

```
Robust Stability Margin LowerBound = 2.68 (168% tolleranza)
```

```

% μ-analysis (Structured Singular Value)
[Mmu,Delta_mu,BlkStruct_mu] = lftdata(CLmuReduced);
omega = logspace(-2,3,200);
M11_mu = Mmu(1:size(Delta_mu,2),1:size(Delta_mu,1));
mubnds = mussv(frd(M11_mu,omega),BlkStruct_mu,'s');
mu_upper = max(mubnds(1,1).ResponseData);
mu_lower = max(mubnds(1,2).ResponseData);
fprintf('Max μ upper bound = %.3f\n', mu_upper);
```

```
Max μ upper bound = 0.372
```

```
fprintf('Max μ lower bound = %.3f\n', mu_lower);
```

```
Max μ lower bound = 0.371
```

```

% Robust performance
[perfmarg_mu,wcu_mu,~] = robgain(CLmuReduced,2,opts);
```

```
Computing bounds... Points completed: 47/47
Computing peak...  Percent completed: 100/100
The performance level 2 is robust to the modeled uncertainty.
 -- The gain remains below 2 for up to 257% of the modeled uncertainty.
 -- There is a bad perturbation amounting to 257% of the modeled uncertainty.
 -- This perturbation causes a gain of 2 at the frequency 3.83 rad/seconds.
```

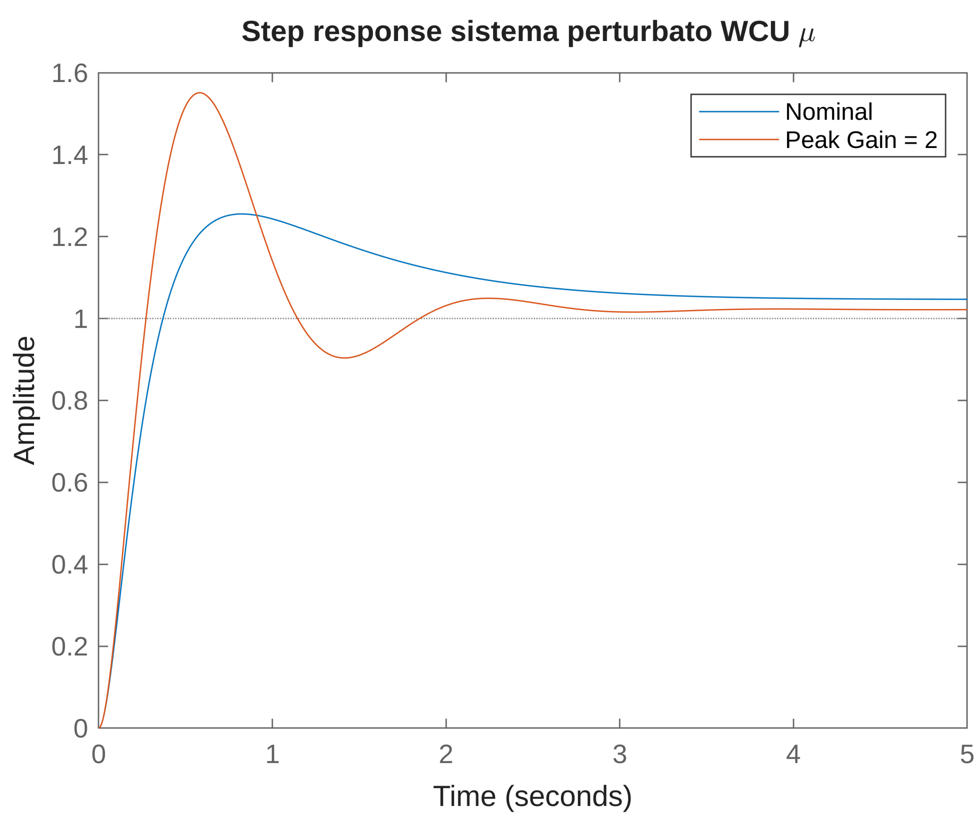
```
fprintf('Robust Performance Margin Upepr bound (livello=2) = %.3f\n', perfmarg_mu.UpperBound);
```

```
Robust Performance Margin Upepr bound (livello=2) = 2.572
```

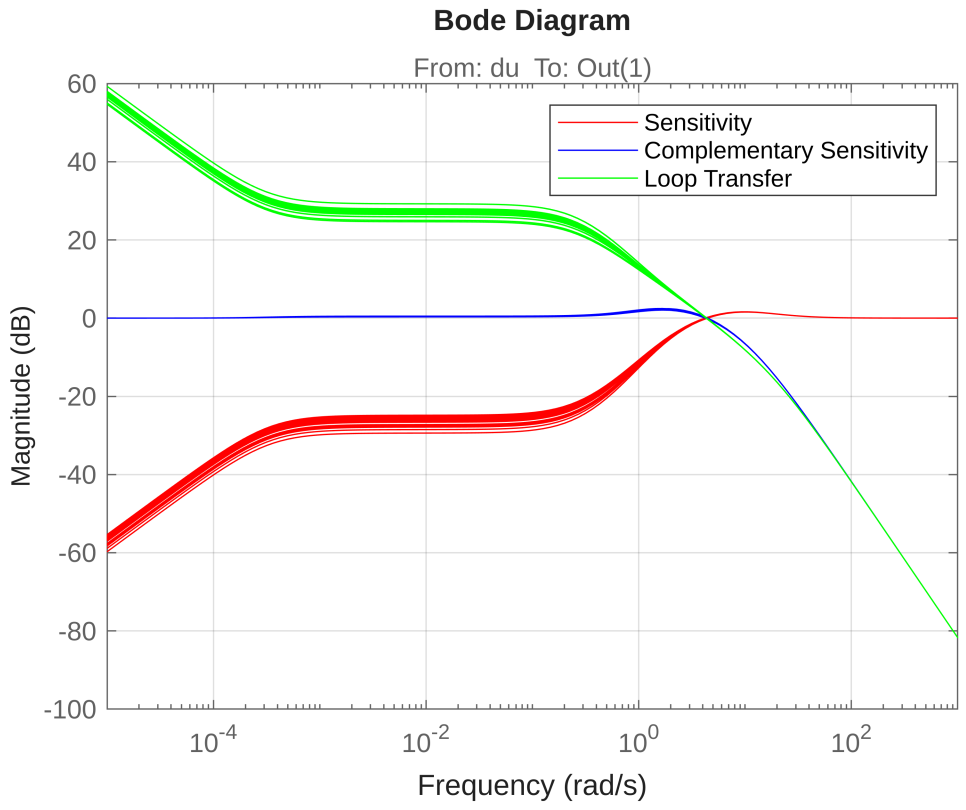
```

CLmumax = usubs(CLmuReduced,wcu_mu);
getPeakGain(CLmumax,1e-6)
```

```
ans =
2.0000
```

```

close all
figure
grid on
step(CLmuReduced.NominalValue,CLmumax)
title("Step response sistema perturbato WCU \mu ")
legend('Nominal','Peak Gain = 2')
```




```

loops = loopsens(G_ss,Kmu2);
bodemag(loops.Si,'r',loops.Ti,'b',loops.Li,'g')
legend('Sensitivity','Complementary Sensitivity','Loop Transfer')
grid on
```



Riferimenti:

- MathWorks, Inc. , "*Robust Control Toolbox User's Guide" (* https://it.mathworks.com/help/pdf_doc/robust/robust_ug.pdf)
- Examples: "Robust Control of Active Suspension" , "Robust Stability, Robust Performance, and Mu Analysis".
- Qiu, Li. (2002). Essentials of robust control: Kemin Zhou, John C. Doyle Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1998, ISBN: 0-13-790874-1.. Automatica. 38. 910-912.