计算几何选讲

riteme

浮点数

- float：4 字节，23 位精度。
- double：8 字节，52 位精度。
- long double：16 字节。在 Intel 的 CPU 上只有最低的 10 个字节（80bits）是有用的，有 64 位精度。

浮点数

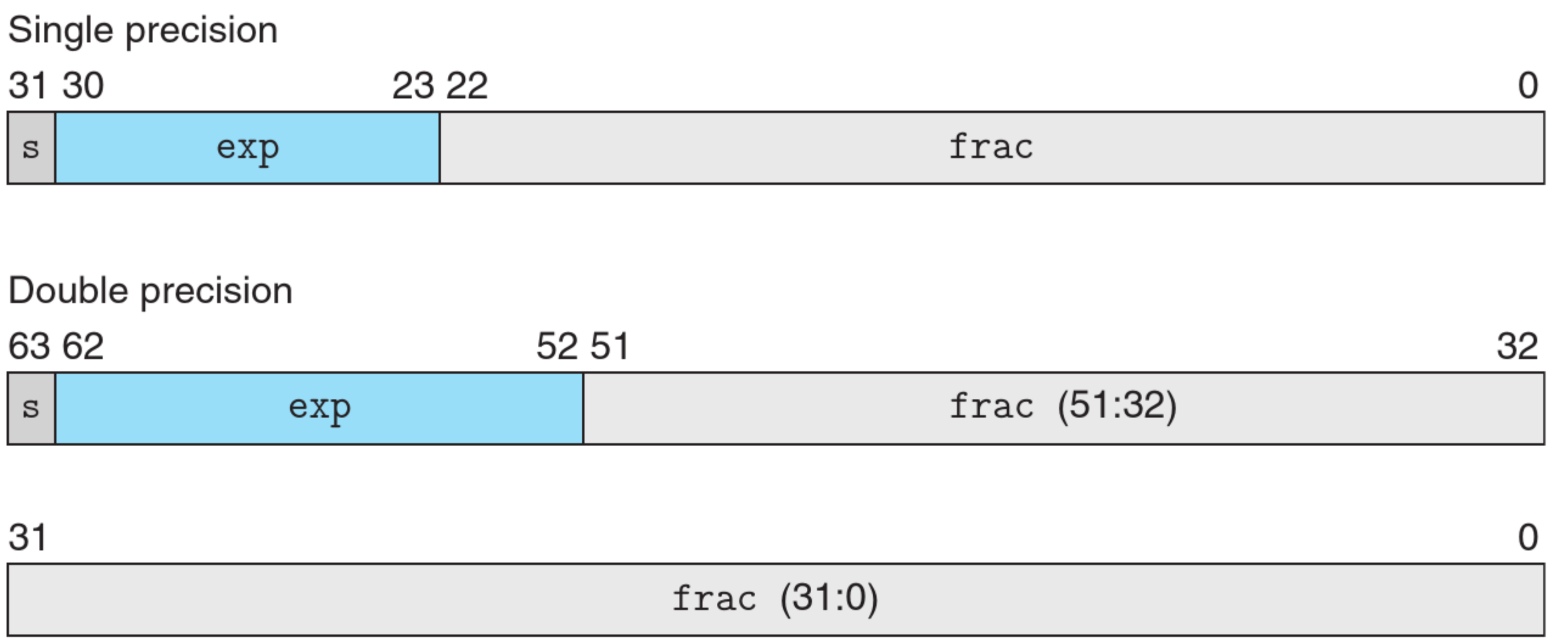
- float：4 字节，23 位精度。
- double：8 字节，52 位精度。
- long double：16 字节。在 Intel 的 CPU 上只有最低的 10 个字节（80bits）是有用的，有 64 位精度。

计算机中用 $(-1)^s \cdot 2^E \cdot M$ 的方式表示浮点数。

浮点数

- float：4 字节，23 位精度。
- double：8 字节，52 位精度。
- long double：16 字节。在 Intel 的 CPU 上只有最低的 10 个字节（80bits）是有用的，有 64 位精度。

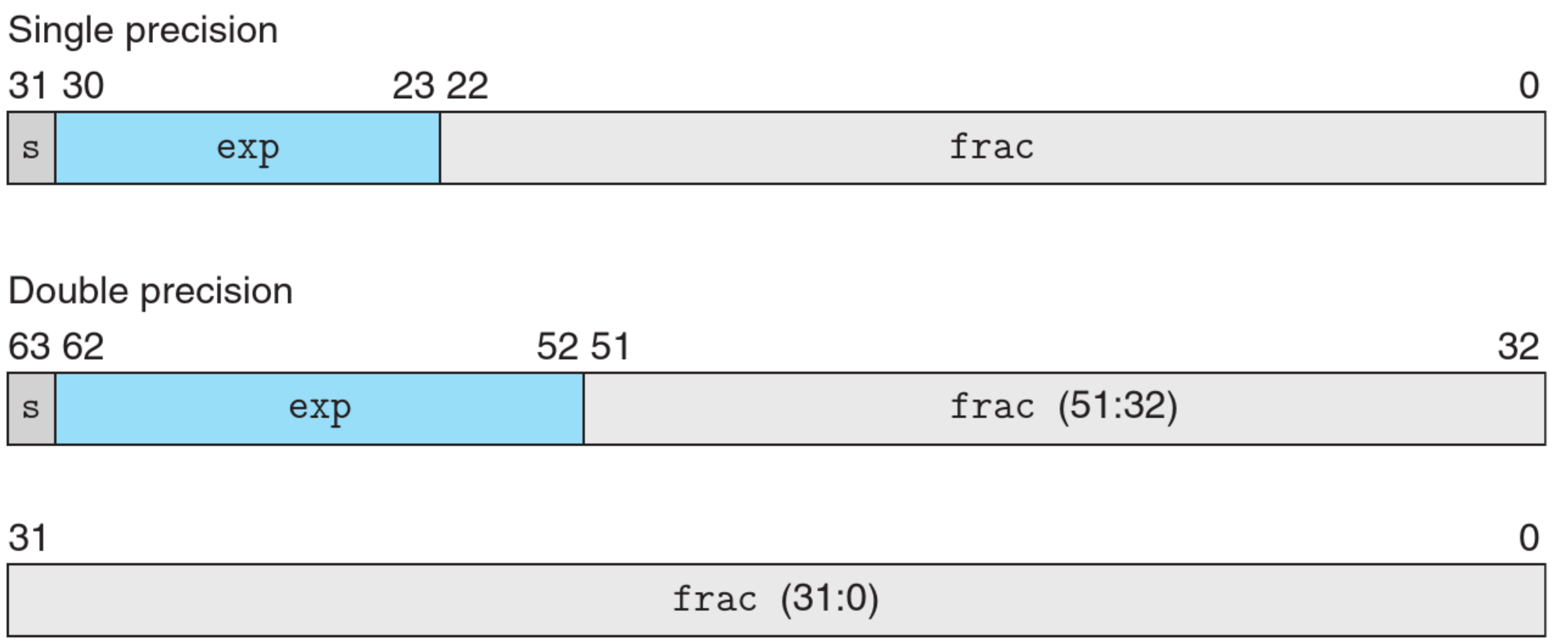
计算机中用 $(-1)^s \cdot 2^E \cdot M$ 的方式表示浮点数。



浮点数

- float：4 字节，23 位精度。
- double：8 字节，52 位精度。
- long double：16 字节。在 Intel 的 CPU 上只有最低的 10 个字节（80bits）是有用的，有 64 位精度。

计算机中用 $(-1)^s \cdot 2^E \cdot M$ 的方式表示浮点数。



浮点数的存储分为三段：符号位 s（编码 s），指数位 exp（编码 E）以及有效位 frac（编码 M）。

编码方式

当 exp 非全 0 或者全 1 时，此时 $E = \texttt{exp} - B$，其中 $B = 2^{k-1} - 1$，因此 E 的变化范围为 $2 - 2^{k-1}$ 至 $2^{k-1} - 1$（例如 float 就是 -126 至 127）。frac 此时编码的是 M 的小数部分。即认为 $1 \leqslant M < 2$，那么 M 一定是 $1.m_0m_1m_2...$ 的形式，于是 frac 记录的就是 $m_0m_1m_2...$，最前面的 1 忽略了。

编码方式

当 exp 非全 0 或者全 1 时，此时 $E = \texttt{exp} - B$，其中 $B = 2^{k-1} - 1$，因此 E 的变化范围为 $2 - 2^{k-1}$ 至 $2^{k-1} - 1$（例如 float 就是 -126 至 127）。frac 此时编码的是 M 的小数部分。即认为 $1 \leqslant M < 2$，那么 M 一定是 $1.m_0m_1m_2...$ 的形式，于是 frac 记录的就是 $m_0m_1m_2...$，最前面的 1 忽略了。

当 exp 全 0 时，E 设置为 $2 - 2^{k-1}$。此时认为 $0 \leqslant M < 1$，此时 $M = 0.m_0m_1m_2...$，然后 frac 记录 $m_0m_1m_2...$。

编码方式

当 exp 非全 0 或者全 1 时，此时 $E = \texttt{exp} - B$，其中 $B = 2^{k-1} - 1$，因此 E 的变化范围为 $2 - 2^{k-1}$ 至 $2^{k-1} - 1$（例如 float 就是 -126 至 127）。frac 此时编码的是 M 的小数部分。即认为 $1 \leqslant M < 2$，那么 M 一定是 $1.m_0m_1m_2...$ 的形式，于是 frac 记录的就是 $m_0m_1m_2...$，最前面的 1 忽略了。

当 exp 全 0 时，E 设置为 $2 - 2^{k-1}$。此时认为 $0 \leqslant M < 1$，此时 $M = 0.m_0m_1m_2...$，然后 frac 记录 $m_0m_1m_2...$。

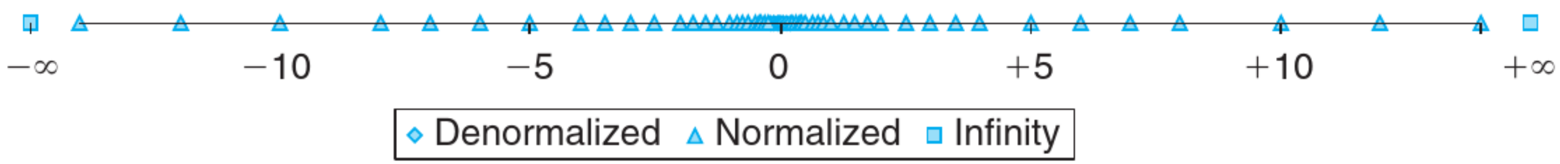
当 exp 全 1 时，一般用于记录一些特殊值，如正负无穷、NaN 之类。

编码方式

当 exp 非全 0 或者全 1 时，此时 $E = \texttt{exp} - B$，其中 $B = 2^{k-1} - 1$，因此 E 的变化范围为 $2 - 2^{k-1}$ 至 $2^{k-1} - 1$（例如 float 就是 -126 至 127）。frac 此时编码的是 M 的小数部分。即认为 $1 \leqslant M < 2$，那么 M 一定是 $1.m_0m_1m_2...$ 的形式，于是 frac 记录的就是 $m_0m_1m_2...$，最前面的 1 忽略了。

当 exp 全 0 时，E 设置为 $2 - 2^{k-1}$。此时认为 $0 \leqslant M < 1$，此时 $M = 0.m_0m_1m_2...$，然后 frac 记录 $m_0m_1m_2...$。

当 exp 全 1 时，一般用于记录一些特殊值，如正负无穷、NaN 之类。



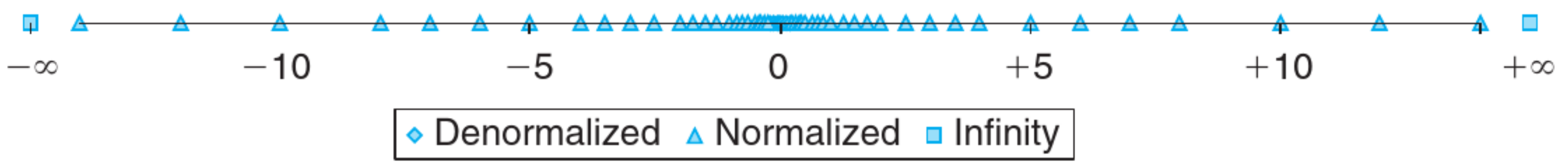
绝对值越小越精确。计算过程中尽可能避免出现过大的值，否则容易出现浮点数误差。

编码方式

当 exp 非全 0 或者全 1 时，此时 $E = \mathtt{exp} - B$，其中 $B = 2^{k-1} - 1$，因此 E 的变化范围为 $2 - 2^{k-1}$ 至 $2^{k-1} - 1$（例如 float 就是 -126 至 127）。frac 此时编码的是 M 的小数部分。即认为 $1 \leqslant M < 2$，那么 M 一定是 $1.m_0m_1m_2...$ 的形式，于是 frac 记录的就是 $m_0m_1m_2...$，最前面的 1 忽略了。

当 exp 全 0 时，E 设置为 $2 - 2^{k-1}$。此时认为 $0 \leqslant M < 1$，此时 $M = 0.m_0m_1m_2...$，然后 frac 记录 $m_0m_1m_2...$。

当 exp 全 1 时，一般用于记录一些特殊值，如正负无穷、NaN 之类。



绝对值越小越精确。计算过程中尽可能避免出现过大的值，否则容易出现浮点数误差。

- float：一般 7~8 位有效数字。
- double：一般 15~17 位有效数字。
- long double：一般 19~20 位有效数字。

浮点数误差

浮点数误差是不可避免的。因此一般情况下直接判断两个浮点数是否相同不太可靠。可以设定一个可以容忍的阈值 ε，当 $|x-y|<\varepsilon$ 时认为 $x=y$。

浮点数误差

浮点数误差是不可避免的。因此一般情况下直接判断两个浮点数是否相同不太可靠。可以设定一个可以容忍的阈值 ε，当 $|x-y|<\varepsilon$ 时认为 $x=y$。

```
#define EPS 1e-10
bool equal1(double x, double y) {
    return std::abs(x - y) < EPS;  // std::abs 来自 <algorithm>
}
bool equal2(double x, double y) {
    return x - EPS < y && y < x + EPS;
}
// x < y ⇒ x + EPS <= y, x > y ⇒ x - EPS >= y
```

实际上从汇编的角度来讲 equal1 比 equal2 要快（开 O2 的情况下），因为 equal1 少一次加减法和判断。

浮点数误差

浮点数误差是不可避免的。因此一般情况下直接判断两个浮点数是否相同不太可靠。可以设定一个可以容忍的阈值 ε，当 $|x-y|<\varepsilon$ 时认为 $x=y$。

```
#define EPS 1e-10
bool equal1(double x, double y) {
    return std::abs(x - y) < EPS;  // std::abs 来自 <algorithm>
}
bool equal2(double x, double y) {
    return x - EPS < y && y < x + EPS;
}
// x < y ⇒ x + EPS <= y, x > y ⇒ x - EPS >= y
```

实际上从汇编的角度来讲 equal1 比 equal2 要快（开 O2 的情况下），因为 equal1 少一次加减法和判断。

注意 C 语言中的 abs 函数的是给 int 的，不能给浮点数用，不是 C++ 中的 std::abs。

浮点数误差

浮点数误差是不可避免的。因此一般情况下直接判断两个浮点数是否相同不太可靠。可以设定一个可以容忍的阈值 ε，当 $|x-y|<\varepsilon$ 时认为 $x=y$。

```
#define EPS 1e-10
bool equal1(double x, double y) {
    return std::abs(x - y) < EPS;  // std::abs 来自 <algorithm>
}
bool equal2(double x, double y) {
    return x - EPS < y && y < x + EPS;
}
// x < y ⇒ x + EPS <= y, x > y ⇒ x - EPS >= y
```

实际上从汇编的角度来讲 equal1 比 equal2 要快（开 O2 的情况下），因为 equal1 少一次加减法和判断。

注意 C 语言中的 abs 函数的是给 int 的，不能给浮点数用，不是 C++ 中的 std::abs。

由于有浮点数误差，因此浮点数的之间的运算严格上讲不满足结合率和分配率。所以编译器对于浮点数的计算的优化会非常谨慎。例如 x * y + x * z 理论上可以优化成 x * (y + z)，但是实际上编译器对于 int 会做这个事情，而对 double 不会做这个事情。

因此公式尽可能简洁，有利于程序的常数。

浮点数误差

浮点数误差是不可避免的。因此一般情况下直接判断两个浮点数是否相同不太可靠。可以设定一个可以容忍的阈值 ε，当 $|x-y|<\varepsilon$ 时认为 $x=y$。

```
#define EPS 1e-10
bool equal1(double x, double y) {
    return std::abs(x - y) < EPS;  // std::abs 来自 <algorithm>
}
bool equal2(double x, double y) {
    return x - EPS < y && y < x + EPS;
}
// x < y ⇒ x + EPS <= y, x > y ⇒ x - EPS >= y
```

实际上从汇编的角度来讲 equal1 比 equal2 要快（开 O2 的情况下），因为 equal1 少一次加减法和判断。

注意 C 语言中的 abs 函数的是给 int 的，不能给浮点数用，不是 C++ 中的 std::abs。

由于有浮点数误差，因此浮点数的之间的运算严格上讲不满足结合率和分配率。所以编译器对于浮点数的计算的优化会非常谨慎。例如 x * y + x * z 理论上可以优化成 x * (y + z)，但是实际上编译器对于 int 会做这个事情，而对 double 不会做这个事情。

因此公式尽可能简洁，有利于程序的常数。

因为浮点数误差，如果答案为 0，某些时候是有可能输出 -0 的。

浮点数误差

浮点数误差是不可避免的。因此一般情况下直接判断两个浮点数是否相同不太可靠。可以设定一个可以容忍的阈值 ε，当 $|x-y|<\varepsilon$ 时认为 $x=y$。

```
#define EPS 1e-10
bool equal1(double x, double y) {
    return std::abs(x - y) < EPS;  // std::abs 来自 <algorithm>
}
bool equal2(double x, double y) {
    return x - EPS < y && y < x + EPS;
}
// x < y ⇒ x + EPS <= y, x > y ⇒ x - EPS >= y
```

实际上从汇编的角度来讲 equal1 比 equal2 要快（开 O2 的情况下），因为 equal1 少一次加减法和判断。

注意 C 语言中的 abs 函数的是给 int 的，不能给浮点数用，不是 C++ 中的 std::abs。

由于有浮点数误差，因此浮点数的之间的运算严格上讲不满足结合率和分配率。所以编译器对于浮点数的计算的优化会非常谨慎。例如 x * y + x * z 理论上可以优化成 x * (y + z)，但是实际上编译器对于 int 会做这个事情，而对 double 不会做这个事情。

因此公式尽可能简洁，有利于程序的常数。

因为浮点数误差，如果答案为 0，某些时候是有可能输出 -0 的。

cmath 中的很多数学函数都是有定义域的（例如 acos(x)，要求 $x\in[-1,1]$，以及 sqrt）。为了防止出现 NaN，可以写成 acos(max(-1.0, min(1.0, x)))。

向量

向量 (x, y) 既可以用于表示一个点，也可以表示一个方向（从原点指向终点的方向）。

向量

向量 $(x,\ y)$ 既可以用于表示一个点，也可以表示一个方向（从原点指向终点的方向）。

向量的长度（模长）：逆时针到向量的转角。

$$|(x_1,\ y_1)| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

C++ 中可以使用 hypot(x, y) 来计算模长。

向量

向量 (x, y) 既可以用于表示一个点，也可以表示一个方向（从原点指向终点的方向）。

向量的长度（模长）：逆时针到向量的转角。

$$|(x_1, y_1)| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

C++ 中可以使用 hypot(x, y) 来计算模长。

向量的极角：从 x 正方向与向量之间的夹角。可以用 atan2(y, x) 计算，结果在 $[-\pi, \pi]$ 之间。

向量

向量 $(x,\ y)$ 既可以用于表示一个点，也可以表示一个方向（从原点指向终点的方向）。

向量的长度（模长）：逆时针到向量的转角。

$$|(x_1,\ y_1)| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

C++ 中可以使用 hypot(x, y) 来计算模长。

向量的极角：从 x 正方向与向量之间的夹角。可以用 atan2(y, x) 计算，结果在 $[-\pi,\ \pi]$ 之间。

向量减法 $u - v$：是从 v 的终点指向 u 的终点的向量。

向量

向量 (x, y) 既可以用于表示一个点，也可以表示一个方向（从原点指向终点的方向）。

向量的长度（模长）：逆时针到向量的转角。

$$|(x_1, y_1)| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

C++ 中可以使用 hypot(x, y) 来计算模长。

向量的极角：从 x 正方向与向量之间的夹角。可以用 atan2(y, x) 计算，结果在 $[-\pi, \pi]$ 之间。

向量减法 $u - v$：是从 v 的终点指向 u 的终点的向量。

向量点积（内积）：

$$u \cdot v = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2 = |u||v| \cos\theta$$

θ 是 u、v 间夹角。

高维空间中是类似的。

向量

向量 (x, y) 既可以用于表示一个点，也可以表示一个方向（从原点指向终点的方向）。

向量的长度（模长）：逆时针到向量的转角。

$$|(x_1, y_1)| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

C++ 中可以使用 hypot(x, y) 来计算模长。

向量的极角：从 x 正方向与向量之间的夹角。可以用 atan2(y, x) 计算，结果在 $[-\pi, \pi]$ 之间。

向量减法 $u - v$：是从 v 的终点指向 u 的终点的向量。

向量点积（内积）：

$$u \cdot v = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2 = |u||v| \cos\theta$$

θ 是 u、v 间夹角。

高维空间中是类似的。

如果要计算夹角，可以点积后用 acos。

向量

向量 (x, y) 既可以用于表示一个点，也可以表示一个方向（从原点指向终点的方向）。

向量的长度（模长）：逆时针到向量的转角。

$$|(x_1, y_1)| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

C++ 中可以使用 hypot(x, y) 来计算模长。

向量的极角：从 x 正方向与向量之间的夹角。可以用 atan2(y, x) 计算，结果在 $[-\pi, \pi]$ 之间。

向量减法 $u - v$：是从 v 的终点指向 u 的终点的向量。

向量点积（内积）：

$$u \cdot v = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = x_1x_2 + y_1y_2 = |u||v| \cos\theta$$

θ 是 u、v 间夹角。

高维空间中是类似的。

如果要计算夹角，可以点积后用 acos。

其中 $|u| \cos\theta$ 相当于是 u 往 v 上的投影长度。

向量

向量叉积:

$$u \times v = (x_1,\ y_1) \times (x_2,\ y_2) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2 = |u||v| \sin\theta$$

由于 $\sin x$ 在 $[0,\ \pi]$ 上不单调，一般不用叉积计算夹角。

向量

向量叉积:

$$u \times v = (x_1,\ y_1) \times (x_2,\ y_2) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2 = |u||v| \sin\theta$$

由于 $\sin x$ 在 $[0,\ \pi]$ 上不单调，一般不用叉积计算夹角。

叉积是分正负的，并且 $u \times v = -v \times u$。判断叉积的正负可以用右手定则：四指从 u 转向 v，如果大拇指朝外则为正，否则为负。

向量

向量叉积:

$$u \times v = (x_1,\ y_1) \times (x_2,\ y_2) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1y_2 - y_1x_2 = |u||v|\sin\theta$$

由于 $\sin x$ 在 $[0,\ \pi]$ 上不单调，一般不用叉积计算夹角。

叉积是分正负的，并且 $u \times v = -v \times u$。判断叉积的正负可以用右手定则：四指从 u 转向 v，如果大拇指朝外则为正，否则为负。

三维空间的叉积 $u \times v$ 定义为垂直于 u、v 所处平面的法向量:

$$\begin{aligned} u \times v = (x_1,\ y_1,\ z_1) \times (x_2,\ y_2,\ z_2) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ &= (y_1z_2 - z_1y_2)\boldsymbol{i} + (z_1x_2 - x_1z_2)\boldsymbol{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别是 x 轴、y 轴、z 轴三个方向的单位向量。

向量

向量叉积:

$$u \times v = (x_1,\ y_1) \times (x_2,\ y_2) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - y_1 x_2 = |u||v| \sin\theta$$

由于 $\sin x$ 在 $[0,\ \pi]$ 上不单调，一般不用叉积计算夹角。

叉积是分正负的，并且 $u \times v = -v \times u$。判断叉积的正负可以用右手定则：四指从 u 转向 v，如果大拇指朝外则为正，否则为负。

三维空间的叉积 $u \times v$ 定义为垂直于 u、v 所处平面的法向量:

$$\begin{aligned} u \times v = (x_1,\ y_1,\ z_1) \times (x_2,\ y_2,\ z_2) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ &= (y_1 z_2 - z_1 y_2)\boldsymbol{i} + (z_1 x_2 - x_1 z_2)\boldsymbol{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2)\boldsymbol{k} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别是 x 轴、y 轴、z 轴三个方向的单位向量。

二维叉积的结果相当于是两个向量所夹平行四边形的**有向面积**。对于三维叉积，三个向量 u、v、w，$(u \times v) \cdot w$ 是柱体的有向体积。

判断方向

v 在 u 的逆时针一侧：$u \times v > 0$。可以表示一个半平面。

判断方向

v 在 u 的逆时针一侧：$u \times v > 0$。可以表示一个半平面。

判断 p 是否在 u、v 所成夹角的中间：

- 如果三个向量等长，则可以判断 $p - u$ 是否在 $v - u$ 朝外的一侧。需要考虑 u、v 之间的极角顺序。

判断方向

v 在 u 的逆时针一侧：$u \times v > 0$。可以表示一个半平面。

判断 p 是否在 u、v 所成夹角的中间：

- 如果三个向量等长，则可以判断 $p-u$ 是否在 $v-u$ 朝外的一侧。需要考虑 u、v 之间的极角顺序。
- 如果不等长，可以先看夹角的是怎么夹的，然后用两个半平面来判断。

判断方向

v 在 u 的逆时针一侧：$u \times v > 0$。可以表示一个半平面。

判断 p 是否在 u、v 所成夹角的中间：

- 如果三个向量等长，则可以判断 $p - u$ 是否在 $v - u$ 朝外的一侧。需要考虑 u、v 之间的极角顺序。
- 如果不等长，可以先看夹角的是怎么夹的，然后用两个半平面来判断。

判断两个向量是否同向或者反向，可以检查点积的符号。

判断方向

v 在 u 的逆时针一侧：$u \times v > 0$。可以表示一个半平面。

判断 p 是否在 u、v 所成夹角的中间：

- 如果三个向量等长，则可以判断 $p - u$ 是否在 $v - u$ 朝外的一侧。需要考虑 u、v 之间的极角顺序。
- 如果不等长，可以先看夹角的是怎么夹的，然后用两个半平面来判断。

判断两个向量是否同向或者反向，可以检查点积的符号。

两个相连垂直则点积为 0。两个向量平行则叉积为 0。

判断方向

v 在 u 的逆时针一侧：$u \times v > 0$。可以表示一个半平面。

判断 p 是否在 u、v 所成夹角的中间：

- 如果三个向量等长，则可以判断 $p - u$ 是否在 $v - u$ 朝外的一侧。需要考虑 u、v 之间的极角顺序。
- 如果不等长，可以先看夹角的是怎么夹的，然后用两个半平面来判断。

判断两个向量是否同向或者反向，可以检查点积的符号。

两个相连垂直则点积为 0。两个向量平行则叉积为 0。

极角排序：

- 一种是使用 `atan2` 直接计算极角。可能有精度误差。

判断方向

v 在 u 的逆时针一侧：$u \times v > 0$。可以表示一个半平面。

判断 p 是否在 u、v 所成夹角的中间：

- 如果三个向量等长，则可以判断 $p - u$ 是否在 $v - u$ 朝外的一侧。需要考虑 u、v 之间的极角顺序。
- 如果不等长，可以先看夹角的是怎么夹的，然后用两个半平面来判断。

判断两个向量是否同向或者反向，可以检查点积的符号。

两个相连垂直则点积为 0。两个向量平行则叉积为 0。

极角排序：

- 一种是使用 `atan2` 直接计算极角。可能有精度误差。
- 另一种是利用叉积。但是叉积不能直接在 $[0, 2\pi]$ 内判断，需要提前先分象限。

旋转与对称

将向量顺时针旋转 90°：

$$(x,\ y) \to (y,\ -x)$$

旋转与对称

将向量顺时针旋转 90°：

$$(x,\ y) \to (y,\ -x)$$

将向量逆时针旋转 90°：

$$(x,\ y) \to (-y,\ x)$$

旋转与对称

将向量顺时针旋转 90°:

$$(x,\ y) \to (y,\ -x)$$

将向量逆时针旋转 90°:

$$(x,\ y) \to (-y,\ x)$$

将向量 p 关于 u 对称（假设两向量共起点），则先利用投影长度求出垂线方向的差:

$$v = p - \frac{p \cdot u}{|u|^2} u$$

然后对称向量就是:

$$p' = p - 2v = 2\frac{p \cdot u}{|u|^2} u - p$$

旋转与对称

将向量顺时针旋转 90°:

$$(x,\ y) \to (y,\ -x)$$

将向量逆时针旋转 90°:

$$(x,\ y) \to (-y,\ x)$$

将向量 p 关于 u 对称（假设两向量共起点），则先利用投影长度求出垂线方向的差:

$$v = p - \frac{p \cdot u}{|u|^2} u$$

然后对称向量就是:

$$p' = p - 2v = 2\frac{p \cdot u}{|u|^2} u - p$$

一般角度的旋转：将向量 u 以原点为中心逆时针旋转 θ 个弧度:

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} u$$

可以考虑一下分别把 $(1,\ 0)$ 和 $(0,\ 1)$ 旋转的结果。

直线

直线可以用两个点表示，也可以用一个点加一个方向向量来表示。

直线

直线可以用两个点表示，也可以用一个点加一个方向向量来表示。

点 u 到直线 p, v 的最短距离就是平行四边形的高：$|v \times (u-p)|/|v|$。

直线

直线可以用两个点表示，也可以用一个点加一个方向向量来表示。

点 u 到直线 p, v 的最短距离就是平行四边形的高：$|v \times (u - p)|/|v|$。

若两直线分别为 $p_1, v_1 = (x_1, y_1)$ 和 $p_2, v_2 = (x_2, y_2)$。考虑求直线交点：

$$p_1 + t_1 v_1 = p_2 + t_2 v_2$$

直线

直线可以用两个点表示，也可以用一个点加一个方向向量来表示。

点 u 到直线 p, v 的最短距离就是平行四边形的高：$|v \times (u-p)|/|v|$。

若两直线分别为 p_1，$v_1 = (x_1,\ y_1)$ 和 p_2，$v_2 = (x_2,\ y_2)$。考虑求直线交点：

$$p_1 + t_1 v_1 = p_2 + t_2 v_2$$

这是一个线性方程组：

$$\begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \\ y_1 & -y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

其中 $p_2 - p_1 = (\Delta x,\ \Delta y)$。

直线

直线可以用两个点表示，也可以用一个点加一个方向向量来表示。

点 u 到直线 p, v 的最短距离就是平行四边形的高：$|v \times (u-p)|/|v|$。

若两直线分别为 p_1，$v_1 = (x_1, y_1)$ 和 p_2，$v_2 = (x_2, y_2)$。考虑求直线交点：

$$p_1 + t_1 v_1 = p_2 + t_2 v_2$$

这是一个线性方程组：

$$\begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \\ y_1 & -y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

其中 $p_2 - p_1 = (\Delta x, \Delta y)$。

解就是：

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{v_1 \times v_2} \begin{bmatrix} y_2 & -x_2 \\ y_1 & -x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

因此 $t_1 = ((p_2 - p_1) \times v_2)/(v_1 \times v_2)$。交点就是 $p_1 + t_1 v_1$。

直线

直线可以用两个点表示，也可以用一个点加一个方向向量来表示。

点 u 到直线 p, v 的最短距离就是平行四边形的高：$|v \times (u-p)|/|v|$。

若两直线分别为 p_1，$v_1 = (x_1, y_1)$ 和 p_2，$v_2 = (x_2, y_2)$。考虑求直线交点：

$$p_1 + t_1 v_1 = p_2 + t_2 v_2$$

这是一个线性方程组：

$$\begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \\ y_1 & -y_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

其中 $p_2 - p_1 = (\Delta x, \Delta y)$。

解就是：

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{v_1 \times v_2} \begin{bmatrix} y_2 & -x_2 \\ y_1 & -x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{bmatrix}$$

因此 $t_1 = ((p_2 - p_1) \times v_2)/(v_1 \times v_2)$。交点就是 $p_1 + t_1 v_1$。

实际上就是 v_1 到 v_2 的高与 $p_2 - p_1$ 到 v_2 的高之比。

线段

一般用两个端点表示线段。

线段

一般用两个端点表示线段。

点 u 到线段 ab 的最短距离先要判断垂足是否在线段上。其实就是判断 $u-a$ 和 $b-a$ 以及 $u-b$ 和 $a-b$ 是否同向，因此两个点积即可。之后要么是点到直线的距离，要么是点到某个端点的距离。

$$
\begin{aligned}
&\textbf{if } (u-a)\cdot(b-a)<0:\\
&\quad \textbf{return } |u-a|\\
&\textbf{else if } (u-b)\cdot(a-b)<0:\\
&\quad \textbf{return } |u-b|\\
&\textbf{else}:\\
&\quad \textbf{return } |(a-b)\times(u-b)|/|a-b|
\end{aligned}
$$

线段

一般用两个端点表示线段。

点 u 到线段 ab 的最短距离先要判断垂足是否在线段上。其实就是判断 $u-a$ 和 $b-a$ 以及 $u-b$ 和 $a-b$ 是否同向，因此两个点积即可。之后要么是点到直线的距离，要么是点到某个端点的距离。

$$
\begin{aligned}
&\textbf{if } (u-a)\cdot(b-a) < 0:\\
&\quad \textbf{return } |u-a|\\
&\textbf{else if } (u-b)\cdot(a-b) < 0:\\
&\quad \textbf{return } |u-b|\\
&\textbf{else}:\\
&\quad \textbf{return } |(a-b)\times(u-b)|/|a-b|
\end{aligned}
$$

判断线段 p_1p_2 与线段 p_3p_4 是否相交。首先检查 p_1、p_2 是否分居 p_3p_4 两侧，即设 $d_1=(p_4-p_3)\times(p_1-p_3)$，$d_2=(p_4-p_3)\times(p_2-p_3)$，检查 d_1d_2 是否小于 0。如果不是则说明不相交。如果 d_1 为 0，则说明 p_1 在直线 p_3p_4 上，此时只需检查是否在线段上，对 d_2 同理。另外还需要检查 p_3、p_4 是否跨立线段 p_1p_2。

线段

一般用两个端点表示线段。

点 u 到线段 ab 的最短距离先要判断垂足是否在线段上。其实就是判断 $u-a$ 和 $b-a$ 以及 $u-b$ 和 $a-b$ 是否同向，因此两个点积即可。之后要么是点到直线的距离，要么是点到某个端点的距离。

$$
\begin{aligned}
&\textbf{if } (u-a)\cdot(b-a) < 0:\\
&\quad \textbf{return } |u-a|\\
&\textbf{else if } (u-b)\cdot(a-b) < 0:\\
&\quad \textbf{return } |u-b|\\
&\textbf{else}:\\
&\quad \textbf{return } |(a-b)\times(u-b)|/|a-b|
\end{aligned}
$$

判断线段 p_1p_2 与线段 p_3p_4 是否相交。首先检查 p_1、p_2 是否分居 p_3p_4 两侧，即设 $d_1=(p_4-p_3)\times(p_1-p_3)$，$d_2=(p_4-p_3)\times(p_2-p_3)$，检查 d_1d_2 是否小于 0。如果不是则说明不相交。如果 d_1 为 0，则说明 p_1 在直线 p_3p_4 上，此时只需检查是否在线段上，对 d_2 同理。另外还需要检查 p_3、p_4 是否跨立线段 p_1p_2。

$$
\begin{aligned}
&d_1 := (p_4-p_3)\times(p_1-p_3)\\
&d_2 := (p_4-p_3)\times(p_2-p_3)\\
&d_3 := (p_2-p_1)\times(p_3-p_1)\\
&d_4 := (p_2-p_1)\times(p_4-p_1)\\
&\\
&\textbf{if } d_1d_2 < 0 \textbf{ and } d_3d_4 < 0:\\
&\quad \textbf{return true}\\
&\textbf{else } \text{检查 } d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4 \text{ 是否为 } 0\text{，并检查对应点是否在线段上}
\end{aligned}
$$

线段

一般用两个端点表示线段。

点 u 到线段 ab 的最短距离先要判断垂足是否在线段上。其实就是判断 $u-a$ 和 $b-a$ 以及 $u-b$ 和 $a-b$ 是否同向，因此两个点积即可。之后要么是点到直线的距离，要么是点到某个端点的距离。

$$
\begin{array}{l}
\textbf{if } (u-a)\cdot(b-a)<0: \\
\quad \textbf{return } |u-a| \\
\textbf{else if } (u-b)\cdot(a-b)<0: \\
\quad \textbf{return } |u-b| \\
\textbf{else}: \\
\quad \textbf{return } |(a-b)\times(u-b)|/|a-b|
\end{array}
$$

判断线段 p_1p_2 与线段 p_3p_4 是否相交。首先检查 p_1、p_2 是否分居 p_3p_4 两侧，即设 $d_1=(p_4-p_3)\times(p_1-p_3)$，$d_2=(p_4-p_3)\times(p_2-p_3)$，检查 d_1d_2 是否小于 0。如果不是则说明不相交。如果 d_1 为 0，则说明 p_1 在直线 p_3p_4 上，此时只需检查是否在线段上，对 d_2 同理。另外还需要检查 p_3、p_4 是否跨立线段 p_1p_2。

如果已经知道线段相交了，求线段交点可以直接用面积之比分点。设交点为 p，则：

$$
\frac{|pp_1|}{|pp_2|}=\frac{|(p_3-p_1)\times(p_4-p_1)|}{|(p_3-p_2)\times(p_4-p_2)|}
$$

简单多边形

简单多边形就是不自交并且没有洞的多边形。就是一堆线段的集合。一般多边形中的点按照逆时针顺序或者是顺时针顺序存储。

简单多边形分为凸多边形和凹多边形两种。

简单多边形

简单多边形就是不自交并且没有洞的多边形。就是一堆线段的集合。一般多边形中的点按照逆时针顺序或者是顺时针顺序存储。

简单多边形分为凸多边形和凹多边形两种。

三角形 abc 的面积：$\frac{1}{2}|(a-b)\times(c-b)|$。

简单多边形

简单多边形就是不自交并且没有洞的多边形。就是一堆线段的集合。一般多边形中的点按照逆时针顺序或者是顺时针顺序存储。

简单多边形分为凸多边形和凹多边形两种。

三角形 abc 的面积：$\frac{1}{2}|(a-b)\times(c-b)|$。

多边形的面积：在平面上**任意选取**一个点 u（最方便的就是原点），然后按点的顺序枚举每条边 p_ip_j，则所有三角形 p_ip_ju 的有向面积之和的绝对值就是多边形的面积。

$$\frac{1}{2}\left|\sum_{i,\,j}(p_i-u)\times(p_j-u)\right|$$

原因在于多边形外的面积会被有向面积一加一减后消去了。多边形外面的部分的贡献和多边形内部的贡献是相反的。

简单多边形

简单多边形就是不自交并且没有洞的多边形。就是一堆线段的集合。一般多边形中的点按照逆时针顺序或者是顺时针顺序存储。

简单多边形分为凸多边形和凹多边形两种。

三角形 abc 的面积：$\frac{1}{2}|(a-b)\times(c-b)|$。

多边形的面积：在平面上**任意选取**一个点 u（最方便的就是原点），然后按点的顺序枚举每条边 p_ip_j，则所有三角形 p_ip_ju 的有向面积之和的绝对值就是多边形的面积。

$$\frac{1}{2}\left|\sum_{i,j}(p_i-u)\times(p_j-u)\right|$$

原因在于多边形外的面积会被有向面积一加一减后消去了。多边形外面的部分的贡献和多边形内部的贡献是相反的。

三角形 abc 的重心：$(a+b+c)/3$。

简单多边形

简单多边形就是不自交并且没有洞的多边形。就是一堆线段的集合。一般多边形中的点按照逆时针顺序或者是顺时针顺序存储。

简单多边形分为凸多边形和凹多边形两种。

三角形 abc 的面积：$\frac{1}{2}|(a-b)\times(c-b)|$。

多边形的面积：在平面上**任意选取**一个点 u（最方便的就是原点），然后按点的顺序枚举每条边 p_ip_j，则所有三角形 p_ip_ju 的有向面积之和的绝对值就是多边形的面积。

$$\frac{1}{2}\left|\sum_{i,j}(p_i-u)\times(p_j-u)\right|$$

原因在于多边形外的面积会被有向面积一加一减后消去了。多边形外面的部分的贡献和多边形内部的贡献是相反的。

三角形 abc 的重心：$(a+b+c)/3$。

多边形的重心?

简单多边形

简单多边形就是不自交并且没有洞的多边形。就是一堆线段的集合。一般多边形中的点按照逆时针顺序或者是顺时针顺序存储。

简单多边形分为凸多边形和凹多边形两种。

三角形 abc 的面积：$\frac{1}{2}|(a-b)\times(c-b)|$。

多边形的面积：在平面上**任意选取**一个点 u（最方便的就是原点），然后按点的顺序枚举每条边 p_ip_j，则所有三角形 p_ip_ju 的有向面积之和的绝对值就是多边形的面积。

$$\frac{1}{2}\left|\sum_{i,j}(p_i-u)\times(p_j-u)\right|$$

原因在于多边形外的面积会被有向面积一加一减后消去了。多边形外面的部分的贡献和多边形内部的贡献是相反的。

三角形 abc 的重心：$(a+b+c)/3$。

可以将多边形三角剖分，每个三角形自己有一个重量（自己的面积）和重心位置，之后就变成是一堆质点求重心了。

非常奇妙的是，即使不是凸多边形，如果允许三角形拥有负质量，那么直接用有向面积也是正确的。

简单多边形

简单多边形就是不自交并且没有洞的多边形。就是一堆线段的集合。一般多边形中的点按照逆时针顺序或者是顺时针顺序存储。

简单多边形分为凸多边形和凹多边形两种。

三角形 abc 的面积：$\frac{1}{2}|(a-b)\times(c-b)|$。

多边形的面积：在平面上**任意选取**一个点 u（最方便的就是原点），然后按点的顺序枚举每条边 p_ip_j，则所有三角形 p_ip_ju 的有向面积之和的绝对值就是多边形的面积。

$$\frac{1}{2}\left|\sum_{i,\,j}(p_i-u)\times(p_j-u)\right|$$

原因在于多边形外的面积会被有向面积一加一减后消去了。多边形外面的部分的贡献和多边形内部的贡献是相反的。

三角形 abc 的重心：$(a+b+c)/3$。

可以将多边形三角剖分，每个三角形自己有一个重量（自己的面积）和重心位置，之后就变成是一堆质点求重心了。

非常奇妙的是，即使不是凸多边形，如果允许三角形拥有负质量，那么直接用有向面积也是正确的。

设第 i 个质点的重量为 w_i，则质点组 p_1，p_2，...，p_n 的重心就是加权平均：

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} w_ip_i}{\sum_{i=1}^{n} w_i}$$

简单多边形

判断点 u 是否在多边形内部：从 u 做一条向右的水平射线（其实任意方向均可），数一下有多条边与射线有交点。奇数个交点则说明在内部，否则在外部。

简单多边形

判断点 u 是否在多边形内部：从 u 做一条向右的水平射线（其实任意方向均可），数一下有多条边与射线有交点。奇数个交点则说明在内部，否则在外部。

射线如果穿过多边形的顶点，则顶点处算两次（实际上就是允许射线与边在端点相交）。如果多边形有边与射线完全重合，则需要检查这条边前后的边的位置来决定是算 1 次还是不算。如果有连续几条重合的边，它们需要视为一个整体。

圆

圆用圆心 u 和半径 R 表示。

判断直线、线段与圆相切、相交都很简单。计算距离即可。

圆

圆用圆心 u 和半径 R 表示。

判断直线、线段与圆相切、相交都很简单。计算距离即可。

直线与圆的交点：先算出圆心 u 到直线 p, v 的距离 d 和垂足 x：

$$x = p + \frac{(u-p)\cdot v}{|v|^2} v$$

$$L = \sqrt{R^2 - d^2}$$

圆

圆用圆心 u 和半径 R 表示。

判断直线、线段与圆相切、相交都很简单。计算距离即可。

直线与圆的交点：先算出圆心 u 到直线 p, v 的距离 d 和垂足 x：

$$x = p + \frac{(u-p)\cdot v}{|v|^2} v$$

$$L = \sqrt{R^2 - d^2}$$

之后两个交点就是 $x + (L/|v|)v$ 和 $x - (L/|v|)v$。

圆

圆用圆心 u 和半径 R 表示。

判断直线、线段与圆相切、相交都很简单。计算距离即可。

直线与圆的交点：先算出圆心 u 到直线 p, v 的距离 d 和垂足 x：

$$x = p + \frac{(u-p)\cdot v}{|v|^2} v$$

$$L = \sqrt{R^2 - d^2}$$

之后两个交点就是 $x + (L/|v|)v$ 和 $x - (L/|v|)v$。

圆与圆的交点：设两个圆的半径分别为 R 和 r，交点到圆心连线的距离 h，以及两个圆心到中心线的距离 L 和 l，圆心距离为 d，则需要解方程：

$$\begin{cases} R^2 = L^2 + h^2 \\ r^2 = l^2 + h^2 \\ L + l = d \end{cases}$$

圆

圆用圆心 u 和半径 R 表示。

判断直线、线段与圆相切、相交都很简单。计算距离即可。

直线与圆的交点：先算出圆心 u 到直线 p, v 的距离 d 和垂足 x：

$$x = p + \frac{(u - p) \cdot v}{|v|^2} v$$

$$L = \sqrt{R^2 - d^2}$$

之后两个交点就是 $x + (L/|v|)v$ 和 $x - (L/|v|)v$。

圆与圆的交点：设两个圆的半径分别为 R 和 r，交点到圆心连线的距离 h，以及两个圆心到中心线的距离 L 和 l，圆心距离为 d，则需要解方程：

$$\begin{cases} R^2 = L^2 + h^2 \\ r^2 = l^2 + h^2 \\ L + l = d \end{cases}$$

令 $t = L - l = (R^2 - r^2)/d$，则 $L = (d + t)/2$，$l = (d - t)/2$，以及 $h = \sqrt{R^2 - L^2}$。然后操作向量就可以得出两个交点了。

圆

圆用圆心 u 和半径 R 表示。

判断直线、线段与圆相切、相交都很简单。计算距离即可。

直线与圆的交点：先算出圆心 u 到直线 p, v 的距离 d 和垂足 x：

$$x = p + \frac{(u-p)\cdot v}{|v|^2} v$$

$$L = \sqrt{R^2 - d^2}$$

之后两个交点就是 $x + (L/|v|)v$ 和 $x - (L/|v|)v$。

圆与圆的交点：设两个圆的半径分别为 R 和 r，交点到圆心连线的距离 h，以及两个圆心到中心线的距离 L 和 l，圆心距离为 d，则需要解方程：

$$\begin{cases} R^2 = L^2 + h^2 \\ r^2 = l^2 + h^2 \\ L + l = d \end{cases}$$

令 $t = L - l = (R^2 - r^2)/d$，则 $L = (d+t)/2$，$l = (d-t)/2$，以及 $h = \sqrt{R^2 - L^2}$。然后操作向量就可以得出两个交点了。

给定圆上两个点 u 和 v，以及圆心 p 和半径 r，求 u 沿逆时针方向到 v 的圆心角的话就是求 $u - p$ 和 $v - p$ 的夹角 t，但是要根据两者之间的左右顺序确定具体是 t 还是 $2\pi - t$。

圆

圆与圆的切线：情况比较多。当两个圆相离时，有两条外公切线和两条内公切线。

圆

圆与圆的切线：情况比较多。当两个圆相离时，有两条外公切线和两条内公切线。

设大圆的半径为 R，小圆的半径为 r，d 为圆心距。对于一条切线，设 H 是大圆上切点到轴线的距离，L 是轴线上垂足到圆心的距离，对小圆设类似的 h 和 l。则实际上 $h = Hr/R$，$l = Lr/R$。

圆

圆与圆的切线：情况比较多。当两个圆相离时，有两条外公切线和两条内公切线。

设大圆的半径为 R，小圆的半径为 r，d 为圆心距。对于一条切线，设 H 是大圆上切点到轴线的距离，L 是轴线上垂足到圆心的距离，对小圆设类似的 h 和 l。则实际上 $h = Hr/R$，$l = Lr/R$。

求解 H 和 L 可以直接用相似三角形。

圆

圆与圆的切线：情况比较多。当两个圆相离时，有两条外公切线和两条内公切线。

设大圆的半径为 R，小圆的半径为 r，d 为圆心距。对于一条切线，设 H 是大圆上切点到轴线的距离，L 是轴线上垂足到圆心的距离，对小圆设类似的 h 和 l。则实际上 $h = Hr/R$，$l = Lr/R$。

求解 H 和 L 可以直接用相似三角形。

结论：记一个参数 t。对于外公切线令 $t = (R-r)/d$，对于内公切线令 $t = (R+r)/d$。然后：

$$H = R\sqrt{1-t^2}$$

$$L = Rt$$

圆

圆与圆的切线：情况比较多。当两个圆相离时，有两条外公切线和两条内公切线。
设大圆的半径为 R，小圆的半径为 r，d 为圆心距。对于一条切线，设 H 是大圆上切点到轴线的距离，L 是轴线上垂足到圆心的距离，对小圆设类似的 h 和 l。则实际上 $h = Hr/R$，$l = Lr/R$。
求解 H 和 L 可以直接用相似三角形。
结论：记一个参数 t。对于外公切线令 $t = (R-r)/d$，对于内公切线令 $t = (R+r)/d$。然后：

$$H = R\sqrt{1-t^2}$$

$$L = Rt$$

特别的，如果 $r = 0$（此时就是点与圆的切线，这个公式也能正常工作。

圆

圆与圆的切线：情况比较多。当两个圆相离时，有两条外公切线和两条内公切线。

设大圆的半径为 R，小圆的半径为 r，d 为圆心距。对于一条切线，设 H 是大圆上切点到轴线的距离，L 是轴线上垂足到圆心的距离，对小圆设类似的 h 和 l。则实际上 $h = Hr/R$，$l = Lr/R$。

求解 H 和 L 可以直接用相似三角形。

结论：记一个参数 t。对于外公切线令 $t = (R - r)/d$，对于内公切线令 $t = (R + r)/d$。然后：

$$H = R\sqrt{1 - t^2}$$

$$L = Rt$$

特别的，如果 $r = 0$（此时就是点与圆的切线，这个公式也能正常工作。

模板题：【定向越野】http://uoj.ac/problem/277

圆面积并

给定一些平面上的圆，求这些圆的并的面积。

圆面积并

给定一些平面上的圆，求这些圆的并的面积。

首先可以去除被其它圆包含的圆。

圆面积并

给定一些平面上的圆，求这些圆的并的面积。

首先可以去除被其它圆包含的圆。

直观上这个面积是内部一个多边形和外面一圈弓形组成。弓形对应的弧没有被其它的圆所盖住，而被盖住的弧一律计入多边形的面积。因此需要求每个圆和其它的圆的交点，这样就变成是圆上有许多的区间，要求寻找没有被覆盖的弧的部分。

圆面积并

给定一些平面上的圆，求这些圆的并的面积。

首先可以去除被其它圆包含的圆。

直观上这个面积是内部一个多边形和外面一圈弓形组成。弓形对应的弧没有被其它的圆所盖住，而被盖住的弧一律计入多边形的面积。因此需要求每个圆和其它的圆的交点，这样就变成是圆上有许多的区间，要求寻找没有被覆盖的弧的部分。

求交点后在每个圆上做极角排序，统计一下每一段被覆盖了多少次。

圆面积并

给定一些平面上的圆，求这些圆的并的面积。

首先可以去除被其它圆包含的圆。

直观上这个面积是内部一个多边形和外面一圈弓形组成。弓形对应的弧没有被其它的圆所盖住，而被盖住的弧一律计入多边形的面积。因此需要求每个圆和其它的圆的交点，这样就变成是圆上有许多的区间，要求寻找没有被覆盖的弧的部分。

求交点后在每个圆上做极角排序，统计一下每一段被覆盖了多少次。

对于多边形的部分，直接累加所有边的有向面积。

圆面积并

给定一些平面上的圆，求这些圆的并的面积。

首先可以去除被其它圆包含的圆。

直观上这个面积是内部一个多边形和外面一圈弓形组成。弓形对应的弧没有被其它的圆所盖住，而被盖住的弧一律计入多边形的面积。因此需要求每个圆和其它的圆的交点，这样就变成是圆上有许多的区间，要求寻找没有被覆盖的弧的部分。

求交点后在每个圆上做极角排序，统计一下每一段被覆盖了多少次。

对于多边形的部分，直接累加所有边的有向面积。

这个算法奇妙的地方在于，最终的图形中，多边形可能是有洞的。但是由于洞上的边的方向和外圈多边形的方向是相反的，因此在累加有向面积时会自动消去。

时间复杂度 $\mathrm{O}(n^2 \log n)$。

CIRUT

https://www.spoj.com/problems/CIRUT/en/

给定 n 个不同的圆，问恰好被 1 个圆、2 个圆、3 个圆……n 个圆覆盖的面积。

$n \leqslant 1000$。

CIRUT

https://www.spoj.com/problems/CIRUT/en/

给定 n 个不同的圆，问恰好被 1 个圆、2 个圆、3 个圆……n 个圆覆盖的面积。

$n \leqslant 1000$。

实际上之前的算法中，如果一段圆弧被其他圆覆盖了 k 次，那么这段圆弧就对应于被至少 $k+1$ 个圆覆盖的区域的一段边界。

CIRUT

https://www.spoj.com/problems/CIRUT/en/

给定 n 个不同的圆，问恰好被 1 个圆、2 个圆、3 个圆……n 个圆覆盖的面积。

$n \leqslant 1000$。

实际上之前的算法中，如果一段圆弧被其他圆覆盖了 k 次，那么这段圆弧就对应于被至少 $k+1$ 个圆覆盖的区域的一段边界。

所以每段圆弧都会参与计算。覆盖次数为 k 的圆弧的贡献计入覆盖大于等于 $k+1$ 次的答案中。最后做一个差分就得到了原答案。

凸包

包围平面上一些图形的面积最小的图形，称为凸包。n 个点的凸包一定是一个凸多边形，并且顶点来自这 n 个点。

凸包

包围平面上一些图形的面积最小的图形，称为凸包。n 个点的凸包一定是一个凸多边形，并且顶点来自这 n 个点。

求凸包的两种基本算法都需要先排序：

凸包

包围平面上一些图形的面积最小的图形，称为凸包。n 个点的凸包一定是一个凸多边形，并且顶点来自这 n 个点。

求凸包的两种基本算法都需要先排序：

- Graham 算法：旋转扫描线。
  - 先选取横坐标最小（当有多个横坐标最小时，选取纵坐标最小的）的点 o，这个点一定在凸包上。
  - 然后以 o 为原点对其它点做极角排序。注意这个地方由于其它点一定在一个半平面内，所以极角排序不需要分象限，可以直接叉积。对于共线的点，模长短的点优先。
  - 之后用一个栈维护凸包上的点。按极角序依次加入，每次加入时检查栈顶的点是否满足凸包的要求，根据实际情况将不在凸包上的点弹出。

凸包

包围平面上一些图形的面积最小的图形，称为凸包。n 个点的凸包一定是一个凸多边形，并且顶点来自这 n 个点。

求凸包的两种基本算法都需要先排序：

- Graham 算法：旋转扫描线。
  - 先选取横坐标最小（当有多个横坐标最小时，选取纵坐标最小的）的点 o，这个点一定在凸包上。
  - 然后以 o 为原点对其它点做极角排序。注意这个地方由于其它点一定在一个半平面内，所以极角排序不需要分象限，可以直接叉积。对于共线的点，模长短的点优先。
  - 之后用一个栈维护凸包上的点。按极角序依次加入，每次加入时检查栈顶的点是否满足凸包的要求，根据实际情况将不在凸包上的点弹出。
- 竖直扫描线：
  - 将所有点按照横坐标排序。
  - 然后做两次扫描线，第一次算出上凸包，第二次算出下凸包。

凸包

包围平面上一些图形的面积最小的图形，称为凸包。n 个点的凸包一定是一个凸多边形，并且顶点来自这 n 个点。

求凸包的两种基本算法都需要先排序：

- Graham 算法：旋转扫描线。
  - 先选取横坐标最小（当有多个横坐标最小时，选取纵坐标最小的）的点 o，这个点一定在凸包上。
  - 然后以 o 为原点对其它点做极角排序。注意这个地方由于其它点一定在一个半平面内，所以极角排序不需要分象限，可以直接叉积。对于共线的点，模长短的点优先。
  - 之后用一个栈维护凸包上的点。按极角序依次加入，每次加入时检查栈顶的点是否满足凸包的要求，根据实际情况将不在凸包上的点弹出。
- 竖直扫描线：
  - 将所有点按照横坐标排序。
  - 然后做两次扫描线，第一次算出上凸包，第二次算出下凸包。

如果只有加点，水平序和极角序都可以用于维护动态凸包。水平序分上下两个凸包来维护，一般要更直观一些。

模板题：https://codeforces.com/problemset/problem/70/D

平面最远点对

问题 给定平面上 n 个点，求这 n 个点中的最远点对。

平面最远点对

问题 给定平面上 n 个点，求这 n 个点中的最远点对。

首先最远点对一定在凸包上。凸包上做旋转卡壳是一种基本操作：枚举一条直线贴在凸包的一边，同时维护另外一边平行的直线，贴在凸包的另一边，这样用两个条直线夹住了整个凸包。此时只要用被直线夹住的点（或者边）之间的距离来更新最大点对即可。

平面最远点对

问题 给定平面上 n 个点，求这 n 个点中的最远点对。

首先最远点对一定在凸包上。凸包上做旋转卡壳是一种基本操作：枚举一条直线贴在凸包的一边，同时维护另外一边平行的直线，贴在凸包的另一边，这样用两个条直线夹住了整个凸包。此时只要用被直线夹住的点（或者边）之间的距离来更新最大点对即可。

旋转卡壳能求一堆东西吧，但都不是特别难（就是难调 QAQ）。

平面最近点对

这个可以用分治解决。

平面最近点对

这个可以用分治解决。

首先，如果有位置相同的点，则最近点对距离为 0。

平面最近点对

这个可以用分治解决。

首先，如果有位置相同的点，则最近点对距离为 0。

之后将所有点按照 x 坐标排序。然后每次选择最中间的点的横坐标 x_m 将点集分为两半，分别分治下去，各自求得一个最小值 δ_1 和 δ_2。令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$。

平面最近点对

这个可以用分治解决。

首先，如果有位置相同的点，则最近点对距离为 0。

之后将所有点按照 x 坐标排序。然后每次选择最中间的点的横坐标 x_m 将点集分为两半，分别分治下去，各自求得一个最小值 δ_1 和 δ_2。令 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$。

然后只用考虑横跨分割线 x_m 的点对。首先只有 $[x_m - \delta, x_m + \delta]$ 范围内的点是有用的。对于这些点，将其按照纵坐标排序，然后对于每边依次检查每个点 (x, y)，那么我们只用检查对面一个大小为 $\delta \times \delta$ 的矩形内的其它点更新答案即可。

平面最近点对

这个可以用分治解决。

首先，如果有位置相同的点，则最近点对距离为 0。

之后将所有点按照 x 坐标排序。然后每次选择最中间的点的横坐标 x_m 将点集分为两半，分别分治下去，各自求得一个最小值 δ_1 和 δ_2。令 $\delta = \min\{\delta_1,\ \delta_2\}$。

然后只用考虑横跨分割线 x_m 的点对。首先只有 $[x_m - \delta,\ x_m + \delta]$ 范围内的点是有用的。对于这些点，将其按照纵坐标排序，然后对于每边依次检查每个点 $(x,\ y)$，那么我们只用检查对面一个大小为 $\delta \times \delta$ 的矩形内的其它点更新答案即可。

由于知道每边点与点之间的最短距离不小于 δ，那么这个小矩形内部最多只有 4 个待选点，因此全部枚举一遍即可。

平面最近点对

这个可以用分治解决。

首先，如果有位置相同的点，则最近点对距离为 0。

之后将所有点按照 x 坐标排序。然后每次选择最中间的点的横坐标 x_m 将点集分为两半，分别分治下去，各自求得一个最小值 δ_1 和 δ_2。令 $\delta = \min\{\delta_1,\ \delta_2\}$。

然后只用考虑横跨分割线 x_m 的点对。首先只有 $[x_m - \delta,\ x_m + \delta]$ 范围内的点是有用的。对于这些点，将其按照纵坐标排序，然后对于每边依次检查每个点 $(x,\ y)$，那么我们只用检查对面一个大小为 $\delta \times \delta$ 的矩形内的其它点更新答案即可。

由于知道每边点与点之间的最短距离不小于 δ，那么这个小矩形内部最多只有 4 个待选点，因此全部枚举一遍即可。

直接实现是 $\mathrm{O}(n \log^2 n)$ 的。如果在分治的过程中做纵坐标的归并排序，复杂度就是 $\mathrm{O}(n \log n)$

。

信用卡凸包

https://www.lydsy.com/JudgeOnline/show.php?id=2829

平面上摆放了 n 张信用卡，信用卡可以以任意角度摆放在任意位置。所有信用卡的规格都是一样的，长为 a，宽为 b，并且四角各有一个 $1/4$ 的圆角，圆角的半径为 r。问这些信用卡的凸包的周长。

$n \leqslant 10^4$。

信用卡凸包

https://www.lydsy.com/JudgeOnline/show.php?id=2829

平面上摆放了 n 张信用卡，信用卡可以以任意角度摆放在任意位置。所有信用卡的规格都是一样的，长为 a，宽为 b，并且四角各有一个 $1/4$ 的圆角，圆角的半径为 r。问这些信用卡的凸包的周长。

$n \leqslant 10^4$。

相当于 $4n$ 个圆的凸包。由于圆的周长是一样的，因此就是圆心的凸包外加一圈圆弧。最后的答案就是圆心凸包的周长加上 $2\pi r$。

合金

https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1027

有 n 种原材料合金由铁、铝、铜三种金属按一定比例混合而成，第 i 种合金三种金属的百分比分为 x_i、y_i、z_i，并且满足 $x_i+y_i+z_i=1$。现在顾客有 m 种目标合金，并且每种目标合金的混合比例也已经给出。问最少使用多少种原材料合金才能够合成出所有的目标合金。

$n,\ m \leqslant 500$。

合金

https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1027

有 n 种原材料合金由铁、铝、铜三种金属按一定比例混合而成，第 i 种合金三种金属的百分比分为 x_i、y_i、z_i，并且满足 $x_i + y_i + z_i = 1$。现在顾客有 m 种目标合金，并且每种目标合金的混合比例也已经给出。问最少使用多少种原材料合金才能够合成出所有的目标合金。

n，$m \leqslant 500$。

首先由于有 $x_i + y_i + z_i = 1$ 的限制，所以其实可以不用考虑 z_i。

合金

https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1027

有 n 种原材料合金由铁、铝、铜三种金属按一定比例混合而成，第 i 种合金三种金属的百分比分为 x_i、y_i、z_i，并且满足 $x_i+y_i+z_i=1$。现在顾客有 m 种目标合金，并且每种目标合金的混合比例也已经给出。问最少使用多少种原材料合金才能够合成出所有的目标合金。

n，$m \leqslant 500$。

首先由于有 $x_i+y_i+z_i=1$ 的限制，所以其实可以不用考虑 z_i。

实际上对于两种合金的合成，相当于是可以合成平面上两点间的线段上的所有品种。同理，对于三种合金的合成，就是能合成一个三角形内部的所有品种。因此，n 种原材料能合成出的合金种类一定在它们的凸包内。

合金

https://www.lydsy.com/JudgeOnline/problem.php?id=1027

有 n 种原材料合金由铁、铝、铜三种金属按一定比例混合而成，第 i 种合金三种金属的百分比分为 x_i、y_i、z_i，并且满足 $x_i+y_i+z_i=1$。现在顾客有 m 种目标合金，并且每种目标合金的混合比例也已经给出。问最少使用多少种原材料合金才能够合成出所有的目标合金。

n，$m \leqslant 500$。

首先由于有 $x_i+y_i+z_i=1$ 的限制，所以其实可以不用考虑 z_i。

实际上对于两种合金的合成，相当于是可以合成平面上两点间的线段上的所有品种。同理，对于三种合金的合成，就是能合成一个三角形内部的所有品种。因此，n 种原材料能合成出的合金种类一定在它们的凸包内。

所以问题变成找 n 个点中最少的点，使得它们的凸包包含 m 个点。这个凸包有点像一个环。对于点 u 和 v，如果 m 个点都在线段 uv 的某一侧，则 u 和 v 之间连一条边，边权为 1。之后在这张图上跑最小环即可。

Angle Beats

http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=6731

平面上有 n 个点 P_i。之后有 q 次询问，每次询问给出一个点 A，问有多少对 $1 \leqslant i < j \leqslant n$ 满足 A、P_i、P_j 构成一个非退化的直角三角形。

n，$q \leqslant 2000$。保证所有给定点和询问点均两两不同。

Angle Beats

http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=6731

平面上有 n 个点 P_i。之后有 q 次询问，每次询问给出一个点 A，问有多少对 $1 \leqslant i < j \leqslant n$ 满足 A、P_i、P_j 构成一个非退化的直角三角形。

n，$q \leqslant 2000$。保证所有给定点和询问点均两两不同。

考虑离线所有询问。如果询问点是直角点，则只需要以询问点为中心做旋转扫描线，统计所有垂直方向上的前 n 个点的对数即可。

Angle Beats

http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=6731

平面上有 n 个点 P_i。之后有 q 次询问，每次询问给出一个点 A，问有多少对 $1 \leqslant i < j \leqslant n$ 满足 A、P_i、P_j 构成一个非退化的直角三角形。

n，$q \leqslant 2000$。保证所有给定点和询问点均两两不同。

考虑离线所有询问。如果询问点是直角点，则只需要以询问点为中心做旋转扫描线，统计所有垂直方向上的前 n 个点的对数即可。

如果询问点不是直角点，则枚举给定点做旋转扫描线。那么当扫描到一个询问点时，就把垂直方向上的给定点数量加给询问点即可。

Angle Beats

http://acm.hdu.edu.cn/showproblem.php?pid=6731

平面上有 n 个点 P_i。之后有 q 次询问，每次询问给出一个点 A，问有多少对 $1 \leqslant i < j \leqslant n$ 满足 A、P_i、P_j 构成一个非退化的直角三角形。

n，$q \leqslant 2000$。保证所有给定点和询问点均两两不同。

考虑离线所有询问。如果询问点是直角点，则只需要以询问点为中心做旋转扫描线，统计所有垂直方向上的前 n 个点的对数即可。

如果询问点不是直角点，则枚举给定点做旋转扫描线。那么当扫描到一个询问点时，就把垂直方向上的给定点数量加给询问点即可。

时间复杂度 $\mathrm{O}((n+q)^2 \log(n+q))$。

Fair Distribution

https://codeforces.com/gym/102365/problem/F

给定平面上 n 个不同的点。现在随机一个加点的顺序，然后记录 A_i 为加入点 i 时凸包面积的增量（注意不是加入第 i 个点时）。求 A_1 到 A_n 的期望值。

$n \leqslant 200$。

Fair Distribution

https://codeforces.com/gym/102365/problem/F

给定平面上 n 个不同的点。现在随机一个加点的顺序，然后记录 A_i 为加入点 i 时凸包面积的增量（注意不是加入第 i 个点时）。求 A_1 到 A_n 的期望值。

$n \leqslant 200$。

想象一下每加入一个点时，凸包是怎么变化的。相当于是要弹出一堆的边，每弹出一条边，凸包的面积就会增加对应的三角形的面积。因此可以直接枚举所有的三角形，然后考虑有多少个点会影响这个三角形不会贡献。那么这三个点一定要出现在有影响的点之前。之后就只用求有多少个满足要求的排列了。

时间复杂度 $O(n^3)$。

Thanks!