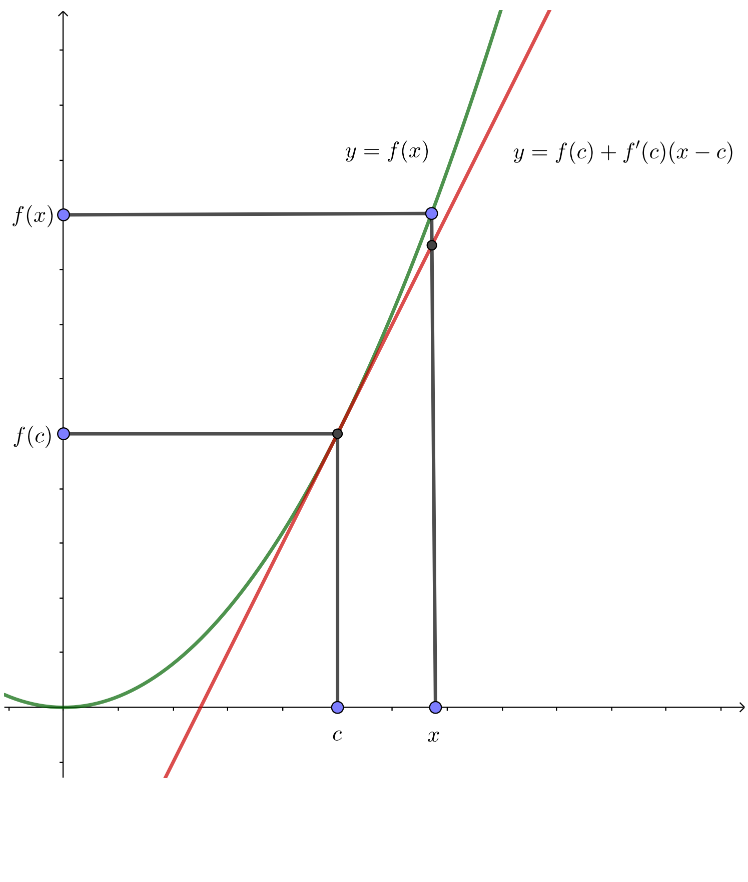
Giáo trình Vi tích phân 1

Bộ môn Giải tích
(Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên,
Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh

Bản ngày 3 tháng 10 năm 2021



Mục lục

Giới thiệu

Đây là giáo trình cho các môn toán Vi tích phân 1 cho khối B và C (các ngành ngoài toán) do Bộ môn Giải tích (Khoa Toán - Tin học, Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh) chủ trì biên soạn.

- Tham gia biên soạn: Vũ Đỗ Huy Cường, Lý Kim Hà, Nguyễn Vũ Huy, Bùi Lê Trọng Thanh, Nguyễn Thị Thu Vân, Huỳnh Quang Vũ
- Tham gia đánh máy LaTeX: Hồ Thị Kim Vân
- Tham gia vẽ hình: Nguyễn Hoàng Hải
- Người biên tập hiện nay: Huỳnh Quang Vũ. Liên hệ: `hqvu@hcmus.edu.vn`

Trang web Tài liệu hỗ trợ môn học của Bộ môn Giải tích có ở:
`https://sites.google.com/view/math-hcmus-edu-vn-giaitich`

Đây là bản thảo, đang được tiếp tục chỉnh sửa bổ sung. Các góp ý vui lòng gởi về cho người biên tập.

Đối tượng của giáo trình

Sinh viên các ngành khoa học dữ liệu, nhóm ngành máy tính và công nghệ thông tin, điện tử - viễn thông, hải dương, khoa học vật liệu, vật lý, ... (môn toán B), và địa chất, hóa học, môi trường, sinh học, công nghệ sinh học, ... (môn toán C). Sinh viên ngành toán cũng có thể dùng giáo trình này làm tài liệu tham khảo.

Mục tiêu của giáo trình

Giáo trình nhằm dùng làm tài liệu giảng và học phép tính vi phân và phép tính tích phân của hàm một biến, với trình độ tương đồng với một số giáo trình vi tích phân phổ biến quốc tế như [Ste16], sát với chương trình đào tạo hiện hành của Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh. Mục tiêu chính gồm: trang bị hiểu biết khoa học đại cương, rèn luyện khả năng tư duy chính xác và tính toán định lượng, cung cấp công cụ toán học cho các ngành khoa học kỹ thuật.

Việc giảng dạy của giảng viên trên lớp cũng như việc học và tự học của sinh viên không nhất thiết theo hết nội dung giáo trình. Để phục vụ nhiều đối tượng sinh viên, giáo trình đã chứa nhiều chứng minh chính xác cho các mệnh đề, nhiều ví dụ và bài tập từ dễ hơn tới khó hơn, và một số phần nâng cao. Mỗi giảng viên và sinh viên có thể chọn bỏ qua một số nội dung, để những phần còn lại để tự học thêm. Đối với toán C có thể giảm bớt mức độ chặt chẽ và chi tiết trong các lý luận và có thể giảm các bài tập về các phần này.

Sử dụng giáo trình

Mục tiêu sư phạm của giáo trình và môn học nhấn mạnh: hiểu khái niệm, tăng cường năng lực tư duy và năng lực tính toán, tiếp xúc với một số ứng dụng. Việc giảng dạy và học tập nhắm tới cả 3 tiêu chí trên, không quá tập trung một tiêu chí mà bỏ qua một tiêu chí nào:

(a) Hiểu các khái niệm, kết quả và phương pháp chính;

(b) Phát triển tư duy bằng việc thảo luận một số lý luận toán học chặt chẽ. Các khái niệm khác khi có thể sẽ giải thích ở mức độ nhất định. Bổ sung các giải thích trực quan, định lượng và miêu tả ý tưởng;

(c) Tăng cường kỹ năng tính toán, hướng dẫn sinh viên sử dụng phần mềm tính toán;

(d) Giới thiệu một số ví dụ ứng dụng cụ thể.

Một phần lớn nội dung của môn học này sinh viên đã được học ở trung học (trừ phần Chuỗi), và tham khảo lại sách giáo khoa trung học [SGKTH] rất bổ ích cho sinh viên, tuy nhiên giáo trình và môn học này yêu cầu cao hơn rõ rệt ở các tiêu chí trên.

Mỗi mục cấp hai trong giáo trình (ví dụ như mục 1.1) ứng với khoảng 3 tiết trên lớp.

Các mục có dấu * là tương đối nâng cao, không bắt buộc.

Về dạy và học ứng dụng

Việc giới thiệu các ứng dụng vào ngành khoa học kỹ thuật cụ thể được quan tâm trong giáo trình và môn học, xuất hiện như trong giải thích về khái niệm đạo hàm, mô hình dân số, bài toán cực trị, ... Tuy nhiên cần lưu ý những điểm sau:

(a) Hàm lượng ứng dụng được thảo luận trên lớp bị hạn chế bởi thời lượng dành cho môn học, vì vậy sinh viên cần dành thời gian tự học.

(b) Để có thể ứng dụng được toán học thường cần trình độ chuyên môn tương đối cao trong ngành khoa học kỹ thuật. Chẳng hạn, muốn áp dụng được phép tính vi tích phân vào một ngành thì phải ở trình độ có thể xét những mô hình có tính liên tục trong ngành đó.

(c) Toán học có chức năng chính là nghiên cứu chung những quan hệ số lượng, hình dạng, cấu trúc bằng phương pháp suy luận logic. Việc áp dụng các hiểu biết chung đó vào từng lĩnh vực thực tế cụ thể thường là công việc của những chuyên gia trong các lĩnh vực này.

Vì thế sinh viên các ngành khoa học kỹ thuật nên học tốt các môn toán vi tích phân để có thể ứng dụng chúng vào ngành của mình khi học các môn chuyên ngành nâng cao về sau.

Chương 1
Số thực và Hàm số thực

1.1 Số thực

1.1.1 Tập hợp và ánh xạ

Trong toán học đương đại tập hợp được coi là một trong những khái niệm ban đầu, thỏa những tính chất nhất định, từ đó dùng một số qui tắc suy luận nhất định người ta xây dựng các kết quả mới. Trong mục này ta nhắc lại một số tính chất và qui tắc này mà người học đã phần lớn người học đã học ở chương trình trung học.

Có thể hình dung một tập hợp là một sự ghép nhóm các đối tượng có tính chất chung nào đó, các đối tượng đó gọi là các phần tử của tập hợp đang xét.

Ta ký hiệu x là một phần tử của tập hợp A bằng $x \in A$ và đọc là "x thuộc A". Nếu x không là một phần tử của tập hợp A ta kí hiệu là $x \notin A$ và đọc là "x không thuộc A". Tập hợp không chứa phần tử nào được gọi là ***tập hợp rỗng***, kí hiệu là $\emptyset$.

Để mô tả một tập hợp người ta thường dùng hai cách sau:

(a) Liệt kê các phần tử của tập hợp đó. Ví dụ nếu tập hợp A chứa đúng 4 phần tử x, y, z và t thì ta viết $A = \{x, y, z, t\}$. Hay tập hợp B gồm các ngày trong tuần được viết là

$$B = \{\text{thứ hai, thứ ba, thứ tư, thứ năm, thứ sáu, thứ bảy, chủ nhật}\}.$$

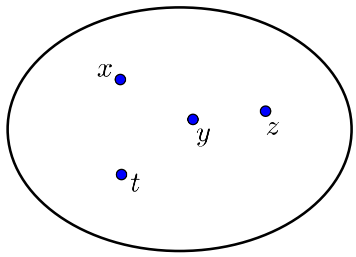
Cách này thường được dùng để mô tả các tập hợp có ít phần tử.

(b) Chỉ ra những tính chất mà các phần tử của tập hợp đó có và chỉ các phần tử đó mới có. Giả sử A là tập hợp các phần tử có tính chất $\mathcal{P}$, ta viết $A = \{x \,|\, \mathcal{P}\}$. Ví dụ tập hợp C gồm các sinh viên năm nhất học môn Vi tích phân 1 có thể được viết là:

$$C = \{\text{sinh viên năm nhất} \,|\, \text{học môn Vi tích phân 1}\}.$$

Phương pháp này thường dùng để mô tả các tập hợp có nhiều phần tử.

Để biểu diễn một tập hợp một cách trực quan ta có thể dùng biểu đồ như trong Hình 1.1.1.



Hình 1.1.1: Biểu đồ biểu diễn tập hợp chứa 4 phần tử.

Nếu mọi phần tử của tập A cũng là phần tử của tập B thì ta nói A là tập con của B và kí hiệu $A \subset B$.

Ví dụ 1.1.1. Cho $A = \{x, y, z\}$ và $B = \{x, y, z, t\}$ thì $A \subset B$.

Nếu mỗi phần tử của tập hợp A đều thuộc về tập hợp B và ngược lại, mỗi phần tử của tập hợp B đều thuộc về tập hợp A thì ta nói A và B bằng nhau hay trùng nhau, kí hiệu $A = B$.

Các phép toán trên tập hợp

Hợp hay ***hội*** của hai tập hợp A và B là tập hợp gồm tất cả các phần tử của A và tất cả các phần tử của B, kí hiệu $A \cup B$. Vậy $x \in A \cup B \iff (x \in A$ hoặc $x \in B)$.

Ví dụ 1.1.2. Cho $A = \{a, b, x, z\}$ và $B = \{a, c, x, y\}$ thì $A \cup B = \{a, b, c, x, y, z\}$.

Giao của hai tập A và B là tập hợp gồm tất cả các phần tử của A mà cũng là phần tử của B, kí hiệu $A \cap B$. Vậy $x \in A \cap B \iff (x \in A$ và $x \in B)$.

Ví dụ 1.1.3. Cho $A = \{a, b, x, z\}$ và $B = \{a, c, x, y\}$ thì $A \cap B = \{a, x\}$.

Hiệu của tập A và tập B là tập gồm tất cả các phần tử của A mà không thuộc B, kí hiệu $A \setminus B$. Vậy $x \in A \setminus B \iff (x \in A$ và $x \notin B)$.

Ví dụ 1.1.4. Cho $A = \{a, b, x, z\}$ và $B = \{a, c, x, y\}$ thì $A \setminus B = \{b, z\}$.

Nếu $A \subset E$ thì $E \setminus A$ được gọi là ***phần bù*** của A trong E.

Ví dụ 1.1.5. Cho $A = \{a, b, x, z\}$ và $E = \{a, b, c, x, y, z\}$ thì $E \setminus A = \{c, y\}$.

Tích của tập hợp A với tập hợp B là tập hợp gồm tất cả các cặp có thứ tự (x, y) với $x \in A$ và $y \in B$, kí hiệu $A \times B$. Vậy $(x, y) \in A \times B \iff (x \in A$ và $y \in B)$.

Ví dụ 1.1.6. Cho $A = \{a, b\}$ và $B = \{x, y\}$ thì $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$.

Ánh xạ

Ánh xạ là một khái niệm về quan hệ giữa các tập hợp, cho tương ứng giữa phần tử của tập hợp này với phần tử của tập hợp khác. Cụ thể hơn một ***ánh xạ*** f từ tập hợp X đến tập hợp Y là một tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một phần tử duy nhất y của Y. Người ta thường ký hiệu ánh xạ dưới dạng $f : X \to Y$, $x \mapsto y = f(x)$. Tập X gọi là tập hợp nguồn, hay ***miền xác định*** của ánh xạ, tập Y gọi là tập hợp đích của ánh xạ. Phần tử y được gọi là ảnh của x và phần tử x được gọi là một tiền ảnh của y.

Cho A là tập con bất kì của X, tập hợp tất cả các ảnh của các phần tử của A qua ánh xạ f được gọi là ảnh của A qua f, kí hiệu là $f(A)$.

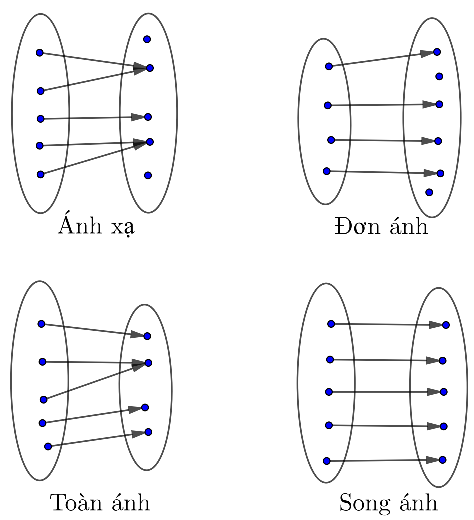
Ảnh của miền xác định X được gọi là ***miền giá trị*** của ánh xạ f và được ký hiệu bởi $f(X)$.

Cho B là tập con bất kì của Y, ta gọi tập hợp các tiền ảnh của các phần tử trong B qua ánh xạ f là tiền ảnh của B qua f và được kí hiệu bởi $f^{-1}(B)$.

Một ánh xạ là một ***đơn ánh*** nếu hai phần tử khác nhau có hai ảnh khác nhau. Bằng kí hiệu, điều này có thể được viết là với mọi $x_1, x_2 \in X$, nếu $x_1 \neq x_2$ thì $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Một ánh xạ là một ***toàn ánh*** nếu mọi phần tử của tập đích đều là ảnh, tức là mọi phần tử của tập đích đều có tiền ảnh. Bằng kí hiệu thì $f : X \to Y$ là toàn ánh nếu với mọi $y \in Y$ tồn tại $x \in X$ sao cho $y = f(x)$; hay nói cách khác, $f(X) = Y$.

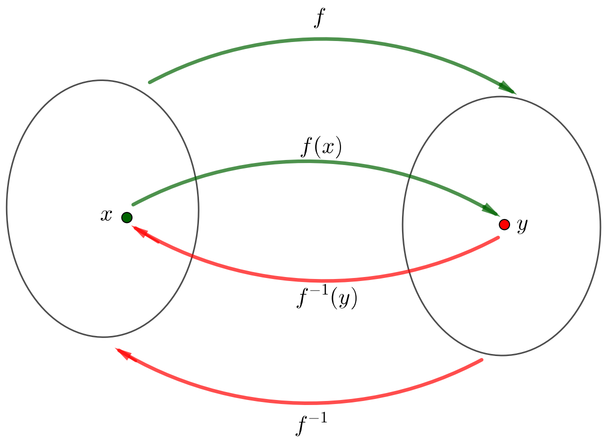
Một ánh xạ là một ***song ánh*** nếu nó vừa là một đơn ánh vừa là một toàn ánh.



Hình 1.1.2: Biểu đồ minh họa ánh xạ, đơn ánh, toàn ánh, song ánh.

Giả sử $f : X \to Y$ là một song ánh thì với bất kỳ $y \in Y$ tồn tại duy nhất một $x \in X$ sao cho $f(x) = y$, khi đó ánh xạ $g : Y \to X$ xác định bởi $g(y) = x$ được gọi là ***ánh xạ ngược*** của f, và thường được kí hiệu là f^{-1}. Xem Hình 1.1.3.

Cho ánh xạ $f : X \to Y$ và $g : Y \to Z$ thì ***ánh xạ hợp*** $g \circ f$ được định nghĩa bởi $g \circ f : X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.



Hình 1.1.3: Biểu đồ minh họa ánh xạ ngược.

1.1.2 Vài quy tắc suy luận toán học

Toán học phát triển bằng cách xuất phát từ một số nhỏ khái niệm và tiên đề được thừa nhận rồi suy diễn theo một số nhỏ các quy tắc ra những kết quả mới. Điều này khiến cho các lý luận và kết quả trong toán học có tính chặt chẽ và chính xác cao hơn so với trong một số lĩnh vực hoạt động khác của con người.

Mệnh đề toán học

Các kết quả trong toán học được trình bày như những mệnh đề. Mỗi mệnh đề toán học có một trong hai giá trị: đúng hoặc sai. Vì thế toán học không chấp nhận mâu thuẫn: không thể có một mệnh đề vừa đúng vừa sai.

Với mệnh đề A thì mệnh đề đúng khi và chỉ khi A sai được gọi là mệnh đề phủ định của mệnh đề A, thường được kí hiệu là $\overline{A}$.

Ví dụ 1.1.7. Phủ định của mệnh đề $x \in A$ là mệnh đề $x \notin A$.

Với hai mệnh đề A và B, mệnh đề mới "A hay B" là đúng khi và chỉ khi có ít nhất một trong hai mệnh đề A và B là đúng. Phủ định của "A hay B" là "không A và không B", nghĩa là không có điều nào trong A và B xảy ra cả.

Mệnh đề "A và B" là đúng khi và chỉ khi cả hai A và B là đúng. Phủ định của của mệnh đề này là "không A hay không B", nghĩa là ít nhất một hai điều A hay B không xảy ra.

Giả sử mỗi phần tử x thuộc tập D tương ứng với một mệnh đề $T(x)$. Mệnh đề $\exists x \in D, T(x)$ nghĩa là tồn tại phần tử x thuộc D mà mệnh đề $T(x)$ là đúng [1]. Phủ định của mệnh đề này là $\forall x \in D, \overline{T(x)}$, nghĩa là với mọi phần tử x thuộc D thì mệnh đề $T(x)$ là sai.

Mệnh đề $\forall x \in D, T(x)$ nghĩa là với mọi phần tử x thuộc D thì mệnh đề $T(x)$ là

[1] kí hiệu $\exists$ (tiếng Anh là Exists) nghĩa là tồn tại

đúng [2]. Phủ định của mệnh đề này là $\exists x \in D, \overline{T(x)}$, nghĩa là có ít nhất một phần tử x thuộc D mà mệnh đề $T(x)$ là sai.

Suy diễn và chứng minh

Mệnh đề "A dẫn tới B" hay "A suy ra B", kí hiệu là $A \Rightarrow B$, là đúng khi và chỉ khi A đúng và B đúng, hoặc A sai. Mệnh đề này sai khi và chỉ khi A đúng và B sai. Xuất phát từ một giả thiết đúng, qua một suy luận đúng, ta phải được một kết luận đúng. Xuất phát từ một giả thiết sai thì cho dù suy luận đúng đi nữa ta vẫn có thể thu được một kết luận sai.

Hai mệnh đề "A dẫn tới B" và "B dẫn tới A" thì A và B có cùng tính đúng sai, hay là "tương đương", kí hiệu là $A \iff B$.

Phủ định của "A dẫn tới B" là "A và $\overline{B}$", nghĩa là "có A nhưng không có B".

Lưu ý rằng mệnh đề $A \Rightarrow B$ không cùng tính đúng sai với ***mệnh đề đảo*** của nó là mệnh đề $B \Rightarrow A$, cũng không tương đương với mệnh đề $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$, mà cùng tính đúng sai với với ***mệnh đề phản đảo*** của nó là mệnh đề $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (nếu không có B thì không có A).

Ví dụ 1.1.8. Mệnh đề "học chăm chỉ thì đạt môn Vi tích phân" tương đương với "rớt môn Vi tích phân là học không chăm chỉ", không tương đương với "học không chăm chỉ thì rớt môn Vi tích phân", và phủ định là "có người học chăm chỉ mà vẫn rớt môn Vi tích phân".

Mệnh đề "nếu $x = 2$ thì $x^2 = 4$" tương đương với "nếu $x^2 \neq 4$ thì $x \neq 2$", không tương đương với "nếu $x \neq 2$ thì $x^2 \neq 4$".

Một ***chứng minh*** trong toán học là việc khẳng định một mệnh đề toán học A là đúng bằng cách chỉ ra một dãy các suy luận từ các mệnh đề khác đã được biết là đúng đi tới A.

Để chứng minh mệnh đề $\forall x \in D, T(x)$ ta phải chỉ ra rằng với tất cả $x \in D$ mệnh đề $T(x)$ là đúng. Ngược lại, chỉ cần tồn tại một $x \in D$ mà mệnh đề $T(x)$ là sai (một ***phản ví dụ***) thì mệnh đề $\forall x \in D, T(x)$ là sai. Ta thấy thuật ngữ "chứng minh" trong toán học đòi hỏi ta không thể khẳng định điều gì khi chưa kiểm tra ***tất cả*** các trường hợp có thể xảy ra.

Tập hợp các số nguyên

Trải qua quá trình thay đổi theo thời gian con người dần dần hình thành những khái niệm số lượng để miêu tả thế giới. Tập hợp các số tự nhiên

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

được hình thành trong quá trình đó là cơ sở của phép đếm trong đời sống. Dần dần do nhu cầu của đời sống tập hợp các số tự nhiên được mở rộng thành tập hợp $\mathbb{Z}$ các

[2] kí hiệu $\forall$ (tiếng Anh là for All) nghĩa là với mọi

số nguyên, bao gồm các số nguyên dương và các số nguyên âm, cùng với số không 0:

$$\mathbb{Z} = \{... - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Tập hợp các số nguyên dương được kí hiệu là $\mathbb{Z}^+$:

$$\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}.$$

Các tiên đề về số nguyên được đưa ra vào cuối thế kỉ 19, giả thiết sự tồn tại duy nhất của tập hợp này, với các phần tử đặc biệt 0, 1, phép cộng, phép trừ, phép nhân, phép so sánh, thỏa các tính chất mà ta đã quen thuộc từ toán phổ thông.

Đi cùng với tập hợp các số nguyên là khái niệm "vô hạn". Một tập hợp là hữu hạn nếu ta có thể đánh số tập hợp đó, tức là đếm tập đó, bằng các số nguyên từ 1 tới một số nguyên dương nào đó. Nếu một tập hợp không là hữu hạn thì ta nói nó là ***vô hạn***. Như vậy tập hợp các số tự nhiên và tập hợp các số nguyên là vô hạn.

Để kiểm tra một tính chất là đúng cho mọi số tự nhiên, từ các tính chất của tập số tự nhiên ta có ***phép qui nạp*** hay còn gọi là nguyên lí qui nạp toán học, là một cách chính xác trong toán học để tổng quát hóa từ những trường hợp đơn lẻ. Phương pháp này cơ bản nói rằng, nếu ta chỉ ra được rằng hễ mệnh đề là đúng với một số nguyên thì nó là đúng với số nguyên tiếp theo, và mệnh đề là đúng với số nguyên dương đầu tiên, thì mệnh đề là đúng với mọi số nguyên dương.

Mệnh đề 1.1.9 (Phép qui nạp). *Giả sử n_0 là số tự nhiên nào đó và với mỗi số tự nhiên $n \geq n_0$ thì $T(n)$ là một mệnh đề với giá trị phụ thuộc giá trị của n. Nếu*

(a) $T(n_0)$ là đúng,

(b) với mọi số tự nhiên $k \geq n_0$, nếu $T(k)$ là đúng thì $T(k+1)$ là đúng,

thì $T(n)$ là đúng với mọi số tự nhiên $n \geq n_0$.

Ví dụ 1.1.10. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì $n < 2^n$.

Gọi $T(n)$ là mệnh đề $n < 2^n$, ta muốn chứng minh rằng $T(n)$ là đúng với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.

Ta kiểm tra:

- Với $n = 1$, ta có $1 < 2^1 = 2$, vậy $T(1)$ là đúng.
- Với $n = 2$, ta có $2 < 2^2 = 4$, vậy $T(2)$ là đúng.
- Với $n = 3$, ta có $3 < 2^3 = 8$, vậy $T(3)$ là đúng.
- Với $n = 4$, ta có $4 < 2^4 = 16$, vậy $T(4)$ là đúng.

Trong tất cả các trường hợp mà ta tính thử thì mệnh đề $T(n)$ đều đúng, nhưng tất nhiên những trường hợp riêng đó không đủ để ta kết luận $T(n)$ đúng với mọi n. Ta có thể dùng phương pháp quy nạp.

Giả sử $T(k)$ là đúng với một số nguyên dương k nào đó, tức là $k < 2^k$. Bất đẳng thức này dẫn tới $k + 1 < 2^k + 1$. Ta có thể dự đoán $2^k + 1 < 2^{k+1}$. Thực vậy

$$\begin{aligned} 2^k + 1 < 2^{k+1} &\iff 2^k + 1 < 2 \cdot 2^k \\ &\iff 1 < 2^k. \end{aligned}$$

Vì 2^k bằng tích của k số 2 nên rõ ràng $2^k > 1$. [3] Nếu thực sự muốn kiểm tra rằng với mọi số nguyên dương k thì $2^k > 1$ ta có thể lại dùng phép qui nạp.

Bây giờ ta có $k + 1 < 2^k + 1 < 2^{k+1}$. Vậy $T(k + 1)$ là đúng.

Nguyên lí qui nạp toán học khẳng định $T(n)$ đúng với mọi số nguyên dương n.

1.1.3 Tập hợp các số thực

Dần dần người ta có nhu cầu chia một lượng thành nhiều phần và miêu tả độ lớn của mỗi phần, chẳng hạn chia một đoạn thẳng có chiều dài 1 thành 2 phần bằng nhau thì chiều dài mỗi đoạn là bao nhiêu? Từ đó hình thành khái niệm phân số. Các phân số, là các cặp có thứ tự hai số nguyên, thường được viết dưới dạng tỉ số $\frac{m}{n}$. Sau này chúng được gọi là các số hữu tỉ (nghĩa là có tỉ số). Tập hợp các số hữu tỉ có thể được miêu tả là

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Từ thời Pythagore hơn 2500 năm trước người ta nhận ra nếu một hình tam giác vuông có cạnh góc vuông có chiều dài bằng 1 thì chiều dài của cạnh huyền phải có bình phương bằng 2, nhưng một lí luận toán học cho thấy không có số hữu tỉ nào có bình phương bằng 2, xem Bài tập 1.1.8. Như vậy trong mô hình của ta về thế giới còn thiếu những đại lượng nhất định, mà ta gọi là các số vô tỉ (không có tỉ số).

Sau này khi hệ đếm cơ số 10 trở nên phổ biến người ta thường tương ứng mỗi số hữu tỉ với một dãy các số tự nhiên từ 0 tới 10, được gọi là biểu diễn của số này theo hệ cơ số 10, còn được gọi là dạng thập phân. Theo cách này có những số hữu tỉ có dạng thập phân hữu hạn như $\frac{7}{20} = 0{,}35$, và có những số hữu tỉ có dạng thập phân vô hạn tuần hoàn như $\frac{3}{7} = 0{,}428571428571428571428571\ldots$ [4]. Mỗi dãy thập phân vô hạn không tuần hoàn tương ứng với một số vô tỉ.

Tập hợp tất cả các số hữu tỉ và số vô tỉ được gọi là tập hợp các số thực $\mathbb{R}$.

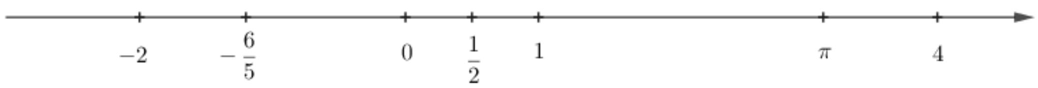
Các tập hợp trên có quan hệ $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Ta thường biểu diễn trực quan tập các số thực bằng hình vẽ một đường thẳng

[3] "rõ ràng", "hiển nhiên", hay "dễ thấy" là cách nói thường gặp trong tài liệu toán, hàm ý rằng theo tác giả thì việc mệnh đề đang xét là đúng là quen thuộc, hoặc có thể được kiểm tra nếu muốn mà không mất nhiều công sức bởi những người ở trình độ mà tác giả hướng tới. Vì vậy nếu người đọc không thấy nó là hiển nhiên thì vẫn nên kiểm tra.

[4] Trong tài liệu này ta dùng qui tắc kí hiệu số thập phân của Việt Nam, giống như ở nhiều nước khác như Pháp, Nga, ở đó phần nguyên và phần thập phân được tách biệt bởi dấu phẩy ",". Một số nước như Anh, Mỹ thay vào đó dùng dấu chấm ".". Do sự phổ biến của máy tính và phần mềm từ Mỹ mà dấu chấm đang được dùng nhiều hơn, đặc biệt là khi dùng máy tính, người đọc cần chú ý tới ngữ cảnh để khỏi bị nhầm lẫn.

được định hướng trên mặt phẳng, được gọi là trục số thực hay đường thẳng thực, trên đó mỗi điểm đại diện cho một số thực. Điều này cho tương ứng đường thẳng với tập số thực, điểm với số, chiều dài đoạn thẳng với khoảng cách giữa hai số.



Hình 1.1.4: Trục số thực.

Chúng ta không đi sâu hơn nữa về các khái niệm về số thực mà chỉ thừa nhận rằng tập hợp các số thực có những tính chất thường dùng, bao gồm các phép toán như phép cộng và phép trừ, phép nhân và phép chia, các tính chất của chúng như tính kết hợp, có số đối, có số nghịch đảo, tính phân phối giữa phép cộng và phép nhân, và một thứ tự tương thích với thứ tự trên các số tự nhiên mà ta quen dùng ....

Cho tập $A \subset \mathbb{R}$.

- Ta nói tập A là ***bị chặn trên*** nếu có một số thực α lớn hơn hay bằng mọi số thực thuộc tập A, và số α được gọi là một ***chặn trên*** của tập A.
- Tập A là ***bị chặn dưới*** nếu có một số β nhỏ hơn hay bằng mọi số thuộc tập A, và số β được gọi là một ***chặn dưới*** của A.
- Một tập được gọi là ***bị chặn*** hay ***giới nội*** nếu vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.
- Nếu có phần tử $\alpha \in A$ sao cho α lớn hơn hay bằng mọi phần tử thuộc tập A, thì α được gọi là ***phần tử lớn nhất*** của tập A, được kí hiệu là $\max A$.
- Nếu có phần tử $\beta \in A$ sao cho β nhỏ hơn hay bằng mọi phần tử thuộc tập A, thì β được gọi là ***phần tử nhỏ nhất*** của tập A, được kí hiệu là $\min A$.

Một tính chất quan trọng của tập hợp số thực là tính đầy đủ. Tính chất này là cốt yếu trong nhiều kết quả của môn Vi tích phân. Một dạng của tính đầy đủ của tập hợp các số thực là tính chất sau, còn được gọi là tính liên tục, hay tính chặn trên nhỏ nhất:

Mệnh đề 1.1.11 (Tính đầy đủ). *Mọi tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$, nếu bị chặn trên thì có chặn trên nhỏ nhất, nếu bị chặn dưới thì có chặn dưới lớn nhất.*

Chặn trên nhỏ nhất của tập A còn được gọi là ***biên trên*** hay cận trên của A thường được ký hiệu là $\sup A$, chặn dưới lớn nhất của A còn được gọi là ***biên dưới*** hay cận dưới thường được ký hiệu là $\inf A$[5].

Ví dụ 1.1.12. Xét $A = (0, 1]$. Ta có 2 là một chặn trên của A, -1 là một chặn dưới của A, $\max A = 1$, $\min A$ không tồn tại, $\sup A = 1$, $\inf A = 0$.

Xét $A = [0, \infty)$. Ta có A không bị chặn trên nhưng bị chặn dưới, $\max A$ không tồn tại, $\min A = 0$, $\sup A$ không tồn tại, $\inf A = 0$.

[5] các kí hiệu trên là viết tắt của các từ supremum và infimum

Một hệ quả của tính đầy đủ là việc giữa hai số thực khác nhau bất kì luôn có ít nhất một số hữu tỉ và một số vô tỉ.

Ngày nay tập hợp các số thực là công cụ cơ bản cho các miêu tả số lượng. Tập hợp các số thực thường được dùng để mô hình hóa thời gian và các không gian liên tục.

Môn học này chúng ta chọn dừng lại không đi vào chi tiết hơn nữa những chỗ nào cần trực tiếp sử dụng tính đầy đủ của tập hợp các số thực. Người đọc muốn tìm hiểu thêm có thể tham khảo những tài liệu như [Duc06], [Lan97].

1.1.4 Dãy số thực

Có thể hình dung đó là một tập các số thực được đếm. Quy tắc đếm đó là một ánh xạ từ tập hợp tất cả các số tự nhiên vào tập hợp tất cả các số thực. Nói cách khác một dãy số là một tập hợp các số thực được đánh chỉ số bằng tập hợp tất cả các số tự nhiên.

Tổng quát hơn ta cho phép tập chỉ số gồm tất cả các số tự nhiên từ một số nào đó trở đi.

Định nghĩa 1.1.13. Một ***dãy số*** là một ánh xạ f từ tập $\{n \in \mathbb{N} \,|\, n \geq n_0\}$ với một $n_0 \in \mathbb{N}$ vào tập $\mathbb{R}$.

Nếu ta ký hiệu $a_n = f(n)$, thì dãy số f này được ký hiệu bởi $(a_n)_{n \geq n_0}$ (hoặc $\{a_n\}_{n \geq n_0}$, trong một số tài liệu), hoặc ngắn gọn hơn là (a_n) nếu số n_0 không có vai trò trong vấn đề đang khảo sát và không sợ nhầm lẫn.

Ví dụ 1.1.14. Với $n \in \mathbb{Z}^+$ đặt $a_n = \frac{1}{n}$ thì $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ là một dãy số thực, khởi đầu bởi $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$.

Tập hợp $\{a_n \,|\, n \in \mathbb{N}$ và $n \geq n_0\}$ là tập giá trị của dãy $(a_n)_{n \geq n_0}$. Một dãy số được gọi là ***bị chặn trên*** hoặc ***bị chặn dưới*** hoặc ***bị chặn*** (hay ***giới nội***) nếu tập giá trị của nó có các tính chất tương ứng.

Ví dụ 1.1.15. Công thức $a_n = \dfrac{1}{n-3}$, $n \geq 4$, xác định một dãy số $(a_n)_{n \geq 4}$, và là dãy bị chặn vì $|a_n| \leq 1$, $\forall n \geq 4$.

Dãy số $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}^+}$ định bởi $a_n = (-1)^n$ có miền giá trị là $\{-1;\ 1\}$, và là dãy bị chặn vì $|a_n| \leq 1$, $\forall n \geq 1$.

Dãy số (u_n) được gọi là ***dãy tăng*** nếu $\forall n, u_n \leq u_{n+1}$, được gọi là ***dãy giảm*** nếu $\forall n, u_n \geq u_{n+1}$. Dãy tăng và dãy giảm được gọi chung là ***dãy đơn điệu***.

Giới hạn của dãy

Giáo trình này giả sử người học đã học chương trình toán phổ thông, nên đã gặp các khái niệm về giới hạn của dãy. Ở mục này chúng ta thảo luận lại một cách ngắn gọn khái niệm này vì ngoài giá trị riêng nó còn giúp người học tiếp cận dễ dàng hơn với khái niệm giới hạn của hàm số ở Chương 2. Một số thảo luận sâu hơn về dãy sẽ có ở Chương 6.

Ta muốn thấy một dãy số thay đổi như thế nào. Trong một số trường hợp ta quan sát thấy giá trị của dãy "gần" một số cố định khi chỉ số n tăng.

Ví dụ 1.1.16. Dãy số (a_n) định bởi với $n \in \mathbb{Z}^+, a_n = \frac{1}{n}$ có các các giá trị càng gần bằng 0 khi n càng lớn.

Ngược lại, giá trị của dãy có thể "không gần bằng" bất kì một số nhất định nào khi chỉ số n tăng.

Ví dụ 1.1.17. Xét dãy (a_n) định bởi $a_n = (-1)^n$. Giá trị của dãy khi thì bằng -1, khi thì bằng 1, không gần hơn tới một số nhất định nào.

Trong nhiều trường hợp ta có thể hiểu đơn giản rằng giới hạn của dãy (a_n) là số thực L nếu như khi chỉ số n lớn hơn thì số hạng a_n gần số L hơn. Tuy nhiên điều này không đủ tổng quát, như ví dụ sau chỉ ra.

Ví dụ 1.1.18. Xét dãy số $(a_n)_{n\geq 1}$ định bởi

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n+2}, & n \text{ chẵn}, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

Ta thấy a_n có khuynh hướng gần tới 0, tuy nhiên quá trình này không diễn ra một cách đơn điệu mà vẫn có tăng giảm, chẳng hạn $a_1 = \frac{1}{1}, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{6}, a_5 = \frac{1}{5}, a_6 = \frac{1}{8}, a_7 = \frac{1}{7}, \dots$.

Khái niệm giới hạn tổng quát là như sau: Giới hạn của dãy (a_n) là số thực L nếu như ta có thể chắc chắn sai khác giữa số hạng a_n và số L không vượt quá một số cho trước bất kì miễn là ta đảm bảo chỉ số n đủ lớn. Nói hơi khác đi, a_n tiến về L nếu a_n gần L tùy ý miễn n đủ lớn.

Định nghĩa 1.1.19. Một dãy số (a_n) được gọi là ***hội tụ*** (hay tiến về) một số thực L khi độ lớn sai số $|a_n - L|$ nhỏ một cách tùy ý, miễn là giá trị n đủ lớn. Dưới dạng kí hiệu:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, |a_n - L| < \epsilon. \tag{1.1.1}$$

Khi dãy (a_n) hội tụ về số L ta nói dãy (a_n) là một dãy hội tụ, và số L là ***giới hạn*** của dãy (a_n), và viết là

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L,$$

hoặc vắn tắt là $\lim a_n = L$ nếu không có nhầm lẫn, hoặc viết $a_n \to L$ khi $n \to \infty$.

Nếu không tồn tại số thực L nào thỏa (1.1.1) thì ta nói dãy (a_n) là không hội tụ hay ***phân kỳ***.

Ví dụ 1.1.20. Xét dãy $\forall n \geq 1$, $a_n = 1$. Đây là một dãy hằng. Tìm giới hạn của dãy.

Rõ ràng ứng cử viên của giới hạn là số 1. Ta kiểm tra điều này. Cho $\epsilon > 0$ bất kì. Với mọi số nguyên dương n thì $|a_n - 1| = |1 - 1| = 0 < \epsilon$. Theo định nghĩa thì ta kết luận được dãy (a_n) hội tụ và giới hạn là 1. Ngắn gọn hơn ta thường viết

$$\lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Tương tự ta thấy với mọi số thực c thì

$$\lim_{n\to\infty} c = c.$$

Ví dụ 1.1.21. Tìm $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$.

Ta có thể dự đoán kết quả là 0. Ta kiểm dự đoán này. Cho $\epsilon > 0$ bất kì, ta có

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon}.$$

Như vậy chỉ cần lấy số p lớn hơn $\frac{1}{\epsilon}$, thì $n \geq p$ dẫn tới $n > \frac{1}{\epsilon}$, do đó $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \epsilon$. Vậy ta kết luận

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Ví dụ 1.1.22. Xét dãy số (a_n) định bởi $a_n = \frac{n}{n+1}$. Qua tính toán một số giá trị, ta có thể dự đoán giới hạn là 1. Độ lớn sai số giữa a_n và 1 là

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \frac{1}{n+1}.$$

Với số $\epsilon > 0$ tùy ý, ta có thể làm sai số $|a_n - 1|$ bé hơn ϵ, miễn là lấy n sao cho $\frac{1}{n+1} < \epsilon$, hay $n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$. Trong hình thức của (1.1.1), ta có thể chọn p là một số tự nhiên cố định và lớn hơn $\frac{1}{\epsilon} - 1$. Khi đó với mọi $n \geq p$ thì $n > \frac{1}{\epsilon} - 1$, do đó $|a_n - 1| < \epsilon$. Vậy ta kết luận

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Qua các ví dụ trên ta có thể nhận thấy định nghĩa chính xác trên tuy ban đầu có vẻ khó hiểu nhưng giúp thể hiện chính xác khái niệm, nhờ đó chúng ta có thể giải thích một cách rõ ràng, chặt chẽ, tin cậy các tính chất nền tảng, cũng như làm các lý luận phức tạp hơn về sau.

Định nghĩa 1.1.23. Dãy số (a_n) được gọi là phân kỳ ra dương vô cực, hay tiến về dương vô cực, nếu giá trị a_n có thể lớn một cách tùy ý, miễn là n đủ lớn. Hình thức kí hiệu là

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, a_n > M. \tag{1.1.2}$$

Khi đó ta viết $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$, hoặc $a_n \to \infty$ khi $n \to \infty$, và nói "giới hạn của a_n khi n tiến ra vô cùng là vô cùng".

Dãy số (a_n) được gọi là phân kỳ ra âm vô cực, hay tiến về âm vô cực, nếu giá trị a_n có thể nhỏ hơn bất cứ số nào, miễn là n đủ lớn:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, a_n < M. \tag{1.1.3}$$

Khi đó ta viết $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, hoặc $a_n \to -\infty$ khi $n \to \infty$.

Ví dụ 1.1.24. Với $n \in \mathbb{Z}^+$ đặt $a_n = n$. Tìm $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Ta có thể dự đoán giới hạn không gì khác hơn là ∞. Ta kiểm điều này. Cho $M \in \mathbb{R}$ bất kì. Ta có thể tìm được một số nguyên p sao cho $p > M$ (điều mà nhiều người có thể coi là "hiển nhiên" này thực ra là một hệ quả của tính đầy đủ của tập hợp số thực). Với mọi $n > p$ thì $a_n = n > p > M$. Vậy ta kết luận được dãy (a_n) tiến ra vô cùng. Ta thường viết ngắn gọn hơn,

$$\lim_{n\to\infty} n = \infty.$$

Ví dụ 1.1.25.

$$\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty.$$

Thực vậy, cho $M \in \mathbb{R}$ bất kì, ta có

$$n^2 > M \iff n > \sqrt{M}.$$

Như vậy lấy p là một số nguyên lớn hơn $\sqrt{M}$ thì khi $n \geq p$ sẽ dẫn tới $n > \sqrt{M}$ và do đó $n^2 > M$. Vậy theo định nghĩa ta được kết luận $\lim_{n\to\infty} n^2 = \infty$.

Ghi chú 1.1.26. Các khái niệm "vô cùng", "vô cực", "vô hạn", và các kí hiệu ∞ và $-\infty$ không phải là các số thực. Chúng được dùng để miêu tả những quá trình giới hạn.

Vài kết quả về dãy hội tụ

Từ định nghĩa sự hội tụ ta có thể thu được các tính chất căn bản trên dãy, nói rằng tổng, hiệu, tích, thương của các dãy hội tụ là hội tụ, và giới hạn là thu được bằng các phép toán tương ứng trên các giới hạn. Về sau ta có thể sử dụng các tính chất này để khảo sát dãy mà không cần sử dụng trực tiếp định nghĩa của giới hạn.

Định lý 1.1.27 (Sự bảo toàn phép toán qua giới hạn). *Giả sử $(a_n)_n$ và $(b_n)_n$ là các dãy hội tụ. Ta có:*

(a) $(a_n + b_n)_n$ *là một dãy hội tụ và* $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

(b) $(a_n - b_n)_n$ *là một dãy hội tụ và* $\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$

(c) $(a_n b_n)_n$ *là một dãy hội tụ và* $\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to\infty} b_n\right)$

(d) Nếu $\forall n, b_n \neq 0$ *và* $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$ *thì* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ *là một dãy hội tụ và* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$.

Ghi chú 1.1.28. Các trường hợp giới hạn bằng vô cùng không được kể là hội tụ và do đó các tính chất trên không áp dụng.

Nhờ có định nghĩa chính xác của khái niệm giới hạn, ta có thể chứng minh các tính chất trên như dưới đây. Chứng minh giải thích vì sao một mệnh đề là đúng, do đó nếu người học hiểu dù chỉ một phần của chứng minh thôi thì cũng đã là rất bổ ích cho việc học môn này.

Chứng minh. Đặt $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ và $b = \lim_{n\to\infty} b_n$.

(a) Mặc dù chứng minh chính xác có hơi phức tạp hơn, nhưng chúng ta có thể thấy $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ rõ ràng từ tính chất

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

Chính xác hơn như sau. Cho $\epsilon > 0$ ta có số N_1 sao cho khi $n \geq N_1$ thì $|a_n - a| < \epsilon/2$, và có số N_2 sao cho khi $n \geq N_2$ thì $|b_n - b| < \epsilon/2$. Vậy có số $N = \max\{N_1, N_2\}$ sao cho khi $n \geq N$ thì

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Theo định nghĩa thì điều này thể hiện rằng $a_n + b_n$ hội tụ về $a + b$.

(b) Tương tự, tính chất này đến từ tính chất của các số thực:

$$|(a_n - b_n) - (a - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b|.$$

(c) Tính chất này đến từ tính chất của các số thực:

$$|a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a| |b_n| + |a| |b_n - b|.$$

Cụ thể hơn, cho $\epsilon_1 > 0$ bất kì, có số nguyên N sao cho khi $n \geq N$ thì $|a_n - a| < \epsilon_1$ và $|b_n - b| < \epsilon_1$. Khi đó

$$\begin{aligned}
|a_n b_n - ab| &= |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a| |b_n| + |a| |b_n - b| \\
&\leq |a_n - a| (|b_n - b| + |b|) + |a| |b_n - b| \\
&< \epsilon_1(\epsilon_1 + |b|) + |a| \epsilon_1 = \epsilon_1(\epsilon_1 + |a| + |b|).
\end{aligned}$$

Bây giờ, cho trước $\epsilon > 0$ bất kì, ta có thể chọn $\epsilon_1 > 0$ sao cho $\epsilon_1(\epsilon_1 + |a| + |b|) < \epsilon$, chẳng hạn chọn $\epsilon_1 < 1$ và $\epsilon_1 < \epsilon/(1 + |a| + |b|)$. Khi đó với $n \geq N$ thì

$$|a_n b_n - ab| < \epsilon_1(\epsilon_1 + |a| + |b|) < \epsilon.$$

Các bước trung gian như trên về sau khi đã thông thạo hơn ta có thể bỏ qua không trình bày nữa.

(d) Do câu (c) ta chỉ cần tìm giới hạn của $\frac{1}{b_n}$. Ta có

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \left|\frac{b_n - b}{b_n b}\right|.$$

Ta dùng bất đẳng thức tam giác (Bài tập 1.1.13) để có $|b_n| \geq ||b_n - b| - |b||$. Cho

$\epsilon_1 > 0$, với $n \geq N$ ta có $|b_n - b| < \epsilon_1$, do đó

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b_n - b|}{|b_n||b|} < \frac{\epsilon_1}{|b|\,||b_n - b| - |b||}.$$

Với $\epsilon_1 < |b|/2$ thì $|b_n - b| < |b|/2$, dẫn tới $||b_n - b| - |b|| > |b|/2$, do đó

$$\frac{\epsilon_1}{|b|\,||b_n - b| - |b||} < \frac{\epsilon_1}{|b|\frac{|b|}{2}}.$$

Với $\epsilon_1 < \epsilon b^2/2$ thì

$$\frac{\epsilon_1}{|b|\frac{|b|}{2}} < \epsilon.$$

Tóm tắt lại, cho $\epsilon > 0$ tùy ý, lấy $\epsilon_1 > 0$ thỏa $\epsilon_1 < |b|/2$ và $\epsilon_1 < \epsilon b^2/2$, thì với mọi $n \geq N$ ta có $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| < \epsilon$. Vậy ta được điều cần chứng minh. □

Ví dụ 1.1.29. Tìm giới hạn

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} - 3\right).$$

Sử dụng các tính chất của giới hạn và các kết quả đã có, ta viết

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n} - 3\right) &= \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n} - \lim_{n\to\infty} 3\\ &= \lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{1}{n} - 3\\ &= \lim_{n\to\infty} 2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} - 3 = 2\cdot 0 - 3 = -3.\end{aligned}$$

Khi đã quen về sau ta sẽ viết tắt bỏ bớt một số bước trong trong lí luận trên.

Định lý 1.1.30 **(Sự bảo toàn thứ tự qua giới hạn).** *Nếu $(a_n)_n$ và $(b_n)_n$ là hai dãy hội tụ và có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall n \geq n_0, a_n \leq b_n$, thì $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.*

Chứng minh. Ý của chứng minh này rất đơn giản và trực quan nếu ta vẽ biểu diễn số thực trên đường thẳng. Giả sử $\lim a_n = a > \lim b_n = b$. Với n đủ lớn a_n gần tùy ý a trong khi b_n gần tùy ý b, dẫn tới $b_n < a_n$, trái giả thiết.

Chi tiết hơn ta có thể trình bày như sau. Đặt $\epsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. Vì $(a_n)_n$ hội tụ về a nên với n đủ lớn thì phải có $-\epsilon < a_n - a$, tức là $a_n > a - \epsilon = \frac{a+b}{2}$. Vì $(b_n)_n$ hội tụ về b nên với n đủ lớn thì phải có $b_n - b < \epsilon$, tức là $b_n < b + \epsilon = \frac{a+b}{2}$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $a_n \leq b_n$. Vậy $a \leq b$. □

Ta lập tức thu được một hệ quả thường dùng:

Hệ quả 1.1.31 **(Định lý kẹp).** *Nếu có $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $\forall n \geq n_0, a_n \leq b_n \leq c_n$, và $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$, thì $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.*

Ví dụ 1.1.32. Tìm $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

Ta có đánh giá

$$0 < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}.$$

Sử dụng các tính chất trên của giới hạn, ta có

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)=0\cdot 0=0.$$

Vậy theo định lý kẹp thì

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+1}=0.$$

Ví dụ 1.1.33. Tìm giới hạn

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+3}{n^2+3n+2}.$$

Sử dụng các tính chất của giới hạn và các kết quả đã có, ta viết

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+3}{n^2+3n+2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(3-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2})}{n^2(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2})}\\&=\frac{\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}\\&=\frac{3-0+0}{1+0+0}=3.\end{aligned}$$

Ví dụ 1.1.34. Tìm giới hạn

$$\lim_{n\to\infty}n^2-8n-2019.$$

Ta dự đoán giới hạn là ∞. Ta viết

$$\lim_{n\to\infty}n^2-8n-2019=\lim_{n\to\infty}n^2\left(1-\frac{8}{n}-\frac{2019}{n^2}\right).$$

Ta có $\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$, trong khi $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{8}{n}-\frac{2019}{n^2}\right)=1$. Điều này hẳn sẽ dẫn tới giới hạn cần tìm bằng ∞, và trong môn học này kết luận như thế được chấp nhận.

Nếu muốn kiểm chi tiết hơn ta có thể làm như sau. Cho $M\in\mathbb{R}$ bất kì. Vì $\lim_{n\to\infty}n^2=\infty$ nên có số nguyên dương N_1 sao cho nếu $n\geq N_1$ thì $n^2>2M$. Vì $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{8}{n}-\frac{2019}{n^2}\right)=1$ nên có số nguyên dương N_2 sao cho nếu $n\geq N_2$ thì $\left|\left(1-\frac{8}{n}-\frac{2019}{n^2}\right)-1\right|<\frac{1}{2}$, dẫn tới $1-\frac{8}{n}-\frac{2019}{n^2}>\frac{1}{2}$. Do đó khi $n\geq\max\{N_1,N_2\}$ thì

$$n^2\left(1-\frac{8}{n}-\frac{2019}{n^2}\right)>2M\cdot\frac{1}{2}=M.$$

Vậy ta kết luận

$$\lim_{n\to\infty}n^2-8n-2019=\infty.$$

Bài tập

1.1.1. Cho A, B, C là ba tập hợp thỏa $A \subset B$ và $B \subset C$. Chứng tỏ $A \subset C$.

1.1.2. Tìm mệnh đề phủ định của mệnh đề sau: Có một số thực dương M sao cho với mọi phần tử x của tập A thì $x \leq M$.

1.1.3. Khi nào thì một ánh xạ không là đơn ánh? không là toàn ánh? không là song ánh?

1.1.4. Một hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là tăng nếu với hai số thực x, y bất kì thì $x \leq y$ dẫn tới $f(x) \leq f(y)$. Hàm như thế nào thì không tăng?

1.1.5. Cho $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Hàm này có phải là một song ánh hay không?

1.1.6. Hãy kiểm tra tính đúng đắn của các công thức:

(a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

(b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

(c) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

1.1.7. (a) Cho số tự nhiên m. Chứng minh rằng nếu m^2 chẵn thì m cũng là số chẵn.

(b) Chứng minh rằng nếu một số chính phương (số là bình phương của một số nguyên) là chẵn thì số chính phương đó chia hết cho 4.

1.1.8. Chứng minh rằng không tồn tại phân số dạng $\dfrac{m}{n}$, với m và n là số tự nhiên $(n \neq 0)$, thỏa $\left(\dfrac{m}{n}\right)^2 = 2$. Như vậy không có số hữu tỉ x nào sao cho $x^2 = 2$.

1.1.9. Cho $\alpha > -1$ và n là số tự nhiên tùy ý lớn hơn 1. Dùng phép qui nạp, hãy chứng minh bất đẳng thức Bernouli: $(1 + \alpha)^n > 1 + n\alpha$.

1.1.10. Cho số thực $c \neq 1$ và số nguyên dương n. Hãy kiểm công thức:

$$1 + c + c^2 + c^3 + \cdots + c^n = \frac{1 - c^{n+1}}{1 - c}.$$

1.1.11 (Nhị thức Newton). Cho hai số thực a, b và số nguyên dương n. Hãy kiểm công thức:

$$(a + b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i},$$

với $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$.

1.1.12. Chứng tỏ hai mệnh đề sau là tương đương: mệnh đề 1 là "$\forall \varepsilon > 0, a < \varepsilon$", mệnh đề 2 là "$\forall \varepsilon > 0, a \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$".

1.1.13. Chứng minh các bất đẳng thức sau đây cho các số thực, thường được gọi là các bất đẳng thức tam giác:

(a) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

(b) $|x| - |y| \leq |x - y|$.

(c) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

1.1.14. Tìm giới hạn:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n+2}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{-2n+1}{3n^2+2n-4}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-2n+1}{5n-3}$

(d) $\lim_{n\to\infty} 3n^2-2n-1$

(e) $\lim_{n\to\infty} -5n^2+2n+3$

(f) $\lim_{n\to\infty} -n^3+4n^2+1$

(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}$

1.1.15. Chứng tỏ giới hạn của một dãy nếu có là duy nhất. Nói cách khác, một dãy số không thể hội tụ về hai giới hạn khác nhau.

1.2 Hàm số

Các ánh xạ từ một tập con của tập hợp các số thực vào tập hợp các số thực thường được gọi là các ***hàm số***, hay đầy đủ hơn là hàm số thực với biến số thực.

Ví dụ 1.2.1. Hàm $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, với mọi $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ là một hàm số. Hàm này có giá trị không đổi trên toàn miền xác định, nên được gọi là một ***hàm hằng***.

1.2.1 Đồ thị. Đường thẳng

Trong môn học này ta dùng phương pháp Hình học Giải tích mà René Descartes khởi xướng từ thế kỉ 17, ở đó ta dùng tập hợp các số thực $\mathbb{R}$ để mô hình hóa đường thẳng, tập hợp $\mathbb{R}^2$ để mô hình hóa mặt phẳng, qua đó các quan hệ trong Hình học Euclid được miêu tả bằng các quan hệ giữa các số thực.

Cho hàm số $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ***Đồ thị*** của hàm f là tập hợp tất cả các điểm (x, y) trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ với $x \in D$ và $y = f(x)$.

Ví dụ 1.2.2. Đồ thị của hàm $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ là tập hợp điểm $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$ trong $\mathbb{R}^2$.

Một ***đường thẳng*** trong $\mathbb{R}^2$ là đồ thị của một hàm số có dạng $y = ax+b$ (đường thẳng nghiêng) hoặc là tập hợp những điểm thỏa $x = c$ (đường thẳng đứng), với a, b, c là các hằng số thực. Số a được gọi là ***hệ số góc*** hay ***độ nghiêng*** hay độ dốc của đường thẳng. Chú ý là khái niệm hệ số góc không được định nghĩa cho đường thẳng đứng $x = c$.

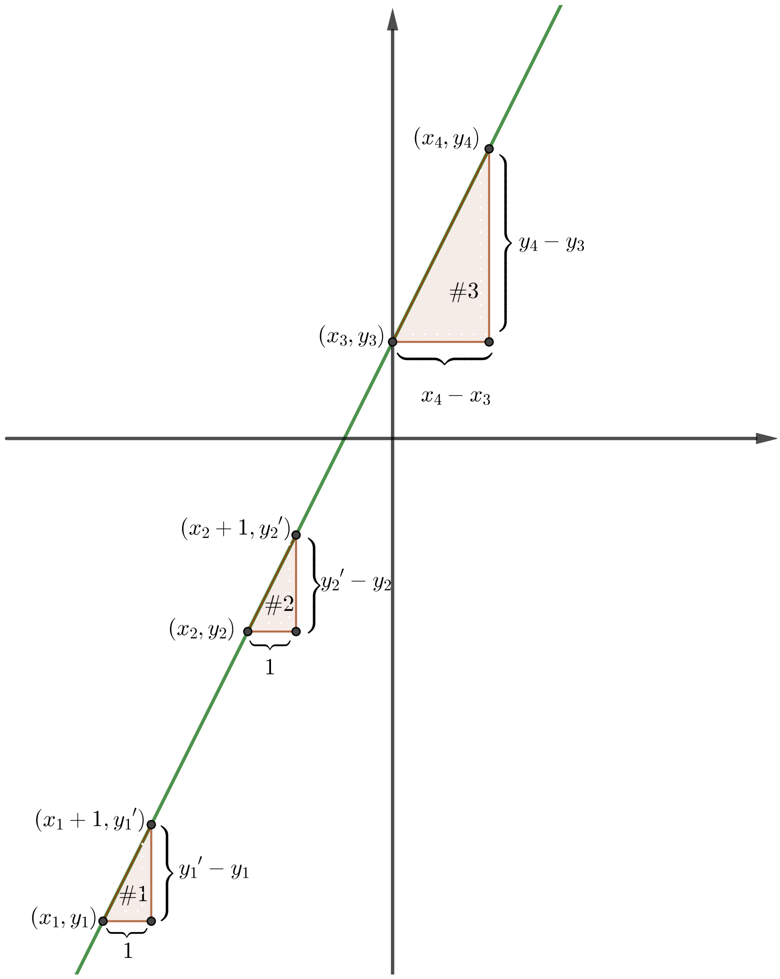
Các hàm có dạng $y = ax + b$ vì thế đôi khi được gọi là các hàm số tuyến tính.[6]

Xét (x_0, y_0) và (x_1, y_1) là hai điểm bất kỳ trên một đường thẳng không thẳng đứng cho bởi phương trình $y = ax + b$. Vì $y_0 = ax_0 + b$ và $y_1 = ax_1 + b$ nên hệ số góc của đường thẳng này đúng bằng

$$a = \frac{ax_1 + b - (ax_0 + b)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

[6] tuyến tính nghĩa là có tính thẳng. Thuật ngữ hàm số tuyến tính trong môn Vi tích phân hơi khác với trong môn Đại số tuyến tính, trong môn Đại số tuyến tính thì chỉ có hàm $y = ax$ mới được coi là tuyến tính.

Đây là công thức tính hệ số góc của một đường thẳng đi qua hai điểm cho trước. Công thức này không phụ thuộc vào cách chọn hai điểm trên đường thẳng, tương ứng với tính chất của hình học Euclid, xem Hình 1.2.1.



Hình 1.2.1: Hệ số góc của đường thẳng không phụ thuộc vào cách chọn hai điểm để tính, tương thích với tính chất tam giác đồng dạng của hình học Euclid.

Ví dụ 1.2.3. Hệ số góc của đường thẳng nối hai điểm $(4, 6)$ và $(0, 7)$ là $\frac{7-6}{0-4} = -\frac{1}{4}$.

Hai đường thẳng được gọi là ***song song*** nếu chúng khác nhau nhưng có cùng một hệ số góc hoặc cùng thẳng đứng.

Ví dụ 1.2.4. Nhiệt độ theo đơn vị Celsius x và nhiệt độ theo đơn vị Fahrenheit y có quan hệ tuyến tính với nhau, đó là $0°$ Celsius hay $32°$ Fahrenheit là nhiệt độ đông của nước và $100°$ Celsius hay $212°$ Fahrenheit là nhiệt độ sôi của nước. Để tìm phương trình biểu diễn mối liên hệ của độ Celsius và độ Fahrenheit, chúng ta tìm phương trình của đường thẳng đi qua hai điểm $(0, 32)$ và $(100, 212)$. Hệ số góc của đường thẳng này là

$$m = \frac{212 - 32}{100 - 0} = \frac{9}{5}.$$

Điều này có nghĩa là khi nhiệt độ Celsius tăng 1° thì nhiệt độ Fahrenheit tăng $\frac{9}{5}^\circ$. Vậy

$$\frac{y-32}{x-0} = \frac{9}{5} \quad \text{hay} \quad y = \frac{9}{5}x + 32.$$

1.2.2 Hàm số sơ cấp

Hàm lượng giác

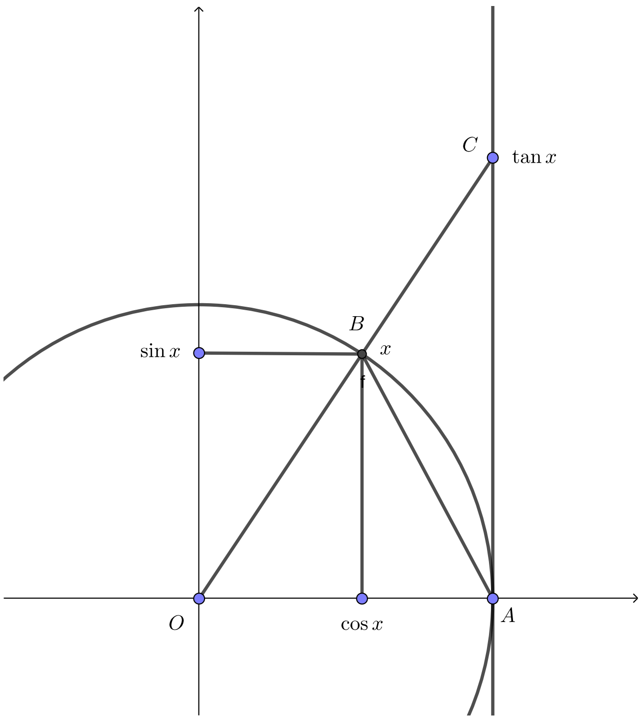
Người đọc đã học môn Lượng giác trong chương trình trung học [SGKTH]. Tài liệu này giả sử các tính chất của các hàm lượng giác đã quen thuộc với người đọc.

Môn Hình học và môn Lượng giác (nghĩa đen: đo góc) ra đời từ trước Công nguyên, trong khi môn Vi tích phân như chúng ta trình bày ở đây, dựa trên hệ thống suy diễn từ tập hợp các số thực, chỉ mới được phát triển từ thế kỉ 19. Vì vậy chúng ta không ngạc nhiên khi một số kết quả trong Hình học và Lượng giác mà ta đã biết ở trung học (mà ta đã học theo cách chúng được phát triển trong lịch sử) là chưa tương thích, tức là chưa nằm trong cùng hệ suy diễn, với môn Vi tích phân. Chẳng hạn khái niệm "góc" giữa hai "đường thẳng" mà ta dùng trong hình học và lượng giác chưa được định nghĩa từ tập hợp số thực. Về sau người ta có thể đưa hàm lượng giác vào khuôn khổ của vi tích phân, chẳng hạn định nghĩa chúng bằng cách dùng tích phân, hoặc dùng chuỗi, tuy nhiên việc này khá phức tạp, không thích hợp cho môn học này, vì vậy trong môn học này ta không định nghĩa các hàm lượng giác. Người đọc quan tâm về sau có thể tham khảo những tài liệu như [Apo67], [Spi94], [Rud76].

Môn Vi tích phân quan tâm các hàm lượng giác chủ yếu để sử dụng các tính chất đặc biệt của chúng. Dưới đây ta tóm tắt một số tính chất của hàm lượng giác mà ta thừa nhận và thường dùng.

- sin và cos là hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, có giá trị trên $[-1, 1]$.
- sin và cos là hàm tuần hoàn có chu kì là 2π. (Số thực π đã quen thuộc, nhưng trong giáo trình này ta chưa đưa ra định nghĩa cho nó.)
- $\cos(0) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$.
- $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$.
- $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
- Với $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ thì cos là hàm giảm, sin là hàm tăng.
- $\tan = \frac{\sin}{\cos}$, $\cot = \frac{1}{\tan}$.
- Với $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ thì $\sin x < x < \tan x$. Xem Hình 1.2.2.

Từ các tính chất trên ta có thể suy ra nhiều tính chất khác, trong đó có sự tồn tại của các hàm lượng giác ngược.



Hình 1.2.2: Minh họa hình học của tính chất $\sin x < x < \tan x$ với $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. Diện tích tam giác OAB là $\frac{1}{2}\cos x$, nhỏ hơn diện tích góc OAB của hình tròn đơn vị là $\frac{1}{2}x$, nhỏ hơn diện tích của tam giác OAC là $\frac{1}{2}\tan x$.

- Trên $[0, \pi]$ thì hàm cos là một song ánh lên $[-1, 1]$ và có hàm ngược là hàm arccos, còn được viết là $\cos^{-1}$.
- Trên $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ thì hàm sin là một song ánh lên $[-1, 1]$ và có hàm ngược là hàm arcsin.
- Trên $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ thì hàm tan là một song ánh lên $\mathbb{R}$ và có hàm ngược là hàm arctan.

Hàm lũy thừa và hàm mũ

Với x là một số thực khác 0, nếu n là một số nguyên dương thì x^n là tích của n số x. Nếu n là một số nguyên âm thì ta định nghĩa x^n là số thực $\frac{1}{x^{-n}}$. Ta định nghĩa $x^0 = 1$.

Nếu $x > 0$ và n là một số nguyên dương thì có duy nhất một số thực không âm a sao cho $a^n = x$. Có thể chứng tỏ điều này bằng cách dùng tính đầy đủ của tập hợp số thực. Số a được gọi là căn bậc n của x, kí hiệu là $\sqrt[n]{x}$ hay $x^{\frac{1}{n}}$.

Nếu $x > 0$ và $m \in \mathbb{Z}$ và $n \in \mathbb{Z}^+$ thì $x^{\frac{m}{n}}$ được định nghĩa là $\sqrt[n]{x^m}$.

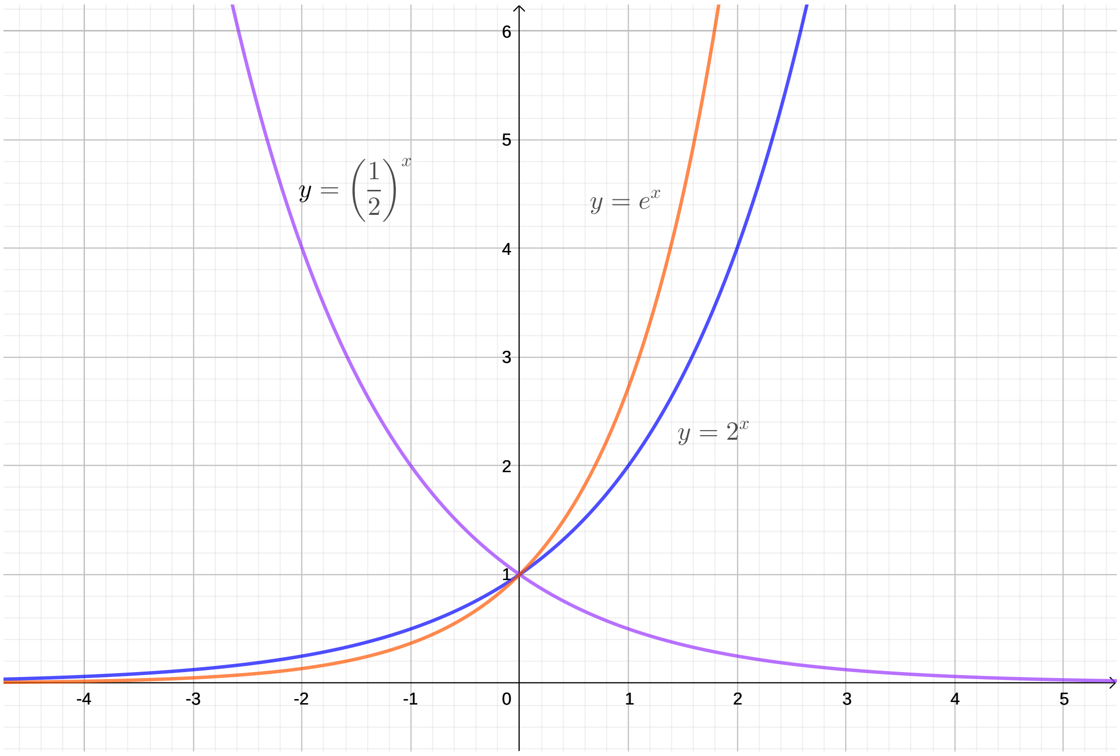
Như vậy khi $x > 0$ và $r \in \mathbb{Q}$ thì x^r đã được định nghĩa. Khi $r \in \mathbb{R}$ thì định nghĩa cần thông qua quá trình giới hạn, từ việc xấp xỉ số thực bởi số hữu tỉ.

Ví dụ 1.2.5. Có thể định nghĩa $3^{\sqrt{2}}$ bằng cách lấy một dãy số hữu tỉ dương r_n hội tụ về $\sqrt{2}$ rồi đặt $3^{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} 3^{r_n}$.

Với $r \in \mathbb{R}$ cho trước thì hàm $f(x) = x^r$ được gọi là một hàm lũy thừa.

Với $a > 0$ và $a \neq 1$ cho trước thì hàm $f(x) = a^x$ được gọi là một hàm mũ. Xem Hình 1.2.3.

Chúng ta có thể xây dựng một cách chặt chẽ hàm lũy thừa và hàm mũ thỏa mãn những tính chất như đã thấy ở trung học, người học quan tâm có thể đọc những tài liệu như [TPTT02] và các tài liệu đã chỉ ở phần Hàm lượng giác.



Hình 1.2.3: Đồ thị và dáng điệu của một số hàm mũ. Chú ý sự khác nhau giữa trường hợp cơ số lớn hơn 1 và trường hợp cơ số nhỏ hơn 1.

Hàm mũ a^x có hàm ngược là hàm lô-ga-rít[7] cơ số a, kí hiệu là $\log_a$. Như vậy

$$y = a^x \iff x = \log_a y.$$

Ví dụ 1.2.6. Giả sử một đại lượng A thay đổi theo thời gian t (như dân số của một quần thể, số tiền trong một tài khoản, ...). Tại thời điểm ban đầu $t = 0$ số lượng của A là $A(0)$. Sau mỗi đơn vị đo thời gian (một kỳ hạn, ...) thì lượng A tăng lên (lãi) với một tỉ lệ r (như tốc độ tăng dân số, lãi suất ngân hàng, ...) và lãi được nhập vào lượng trước đó. Đây được gọi là ***lãi nhập vốn***. Ta muốn biết tại thời điểm t thì giá trị của đại lượng A là bao nhiêu?

Sau 1 đơn vị thời gian thì giá trị của A là

$$A(1) = A(0) + A(0)r = A(0)(1 + r).$$

[7]tiếng Anh là logarithm

Sau 2 đơn vị thời gian thì giá trị của A là

$$A(2) = A(1) + A(1)r = A(1)(1 + r) = A(0)(1 + r)^2.$$

Sau 3 đơn vị thời gian thì giá trị của A là

$$A(3) = A(2) + A(2)r = A(2)(1 + r) = A(0)(1 + r)^3.$$

Đến đây ta có thể dự đoán công thức giá trị của A sau t đơn vị thời gian (cũng là t lần tính lãi nhập vốn) chính là

$$A(t) = A(0)(1 + r)^t.$$

Các tính toán trên cho thấy ta có thể dễ dàng kiểm tra công thức này là đúng bằng phương pháp qui nạp toán học. Đây là một ví dụ về vai trò của hàm mũ.

Hằng số e là một số thực thường gặp. Đó là một số vô tỉ, có giá trị gần bằng 2,71828. [8] Nó có thể được định nghĩa là giới hạn của một dãy số hữu tỉ bằng công thức

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Hàm mũ $y = e^x$ có hàm ngược được gọi là hàm lô-ga-rít tự nhiên, kí hiệu là ln. [9] Xem Hình 1.2.4. Vậy

$$y = e^x \iff x = \ln y.$$

Tổng, hiệu, tích, thương, hàm hợp của các hàm lũy thừa, hàm mũ, hàm log, hàm lượng giác, hàm lượng giác ngược được gọi là các ***hàm số sơ cấp***. Trong các hàm sơ cấp có các hàm thường gặp như hàm đa thức, hàm phân thức (thương của hai đa thức), hàm căn thức.

Ví dụ 1.2.7. Hàm mũ $f(x) = e^x$ cùng với hàm $g(x) = \sin x$ cho hàm hợp $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{\sin x}$ và $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sin e^x$. Đây là những hàm sơ cấp.

Bài tập

1.2.1. Viết phương trình đường thẳng có tính chất dưới đây:

(a) có hệ số góc là 2 và giao với trục Oy tại $(0, 3)$

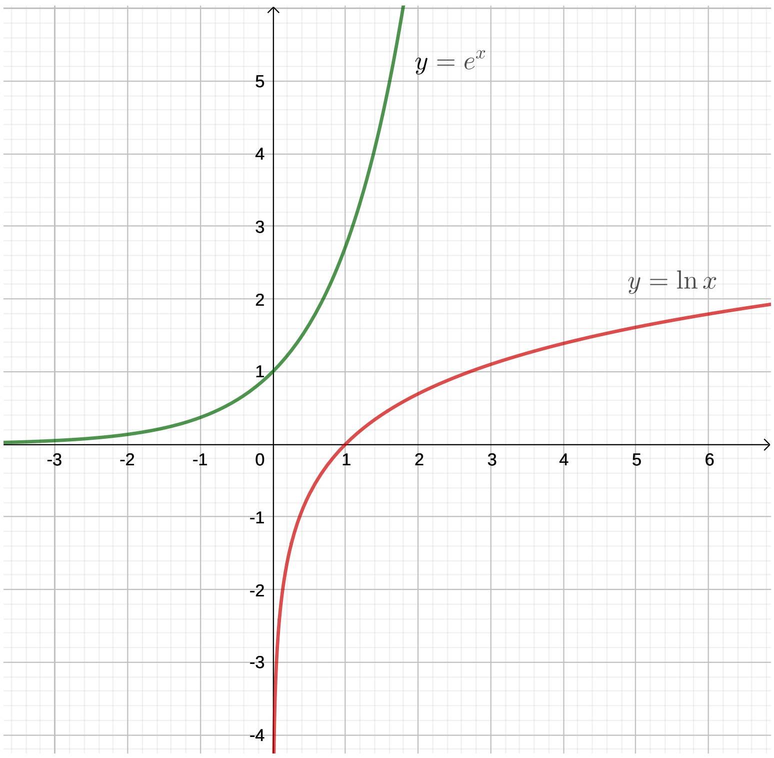
(b) có hệ số góc là -3 và giao với trục Oy tại $(0, 0)$

(c) có hệ số góc là 4 và đi qua điểm $(1, 1)$

(d) có hệ số góc là -2 và đi qua điểm $(2, -2)$

[8] Kí hiệu e có thể có nguồn gốc từ tên Euler (một trong những người đầu tiên sử dụng số này), hoặc exponent (mũ), và còn được gọi là hằng số Napier (tên Napier còn được viết là Néper).

[9] trong tiếng Anh là natural logarithm. Chú ý một số tài liệu và phần mềm lại dùng kí hiệu log để chỉ hàm lô-ga-rít tự nhiên.



Hình 1.2.4: Đồ thị và dáng điệu của hàm mũ $y = e^x$ và hàm ngược $y = \ln x$

(e) đi qua các điểm $(2, 3)$ và $(4, 5)$

(f) đi qua các điểm $(2, -4)$ và $(0, 3)$

(g) đi qua hai điểm $(0, 8)$ và $(8, 0)$

(h) có hệ số góc là -1, có giao điểm với trục Oy là $(0, -2)$

(i) có hệ số góc là -1, đi qua điểm $(-4, -4)$

(j) đi qua điểm $(2, 1)$ song song với đường $y = -4x + 3$

(k) thẳng đứng và đi qua điểm $(3, 4)$

(l) nằm ngang và đi qua điểm $(-2, -3)$.

1.2.2. Giải thích các công thức sau:

(a) $\ln e^x = x$

(b) $e^{\ln x} = x$.

1.2.3. Chứng minh các công thức sau:

(a) $\log_b x \cdot y = \log_b x + \log_b y$

(b) $\log_b \frac{x}{y} = \log_b x - \log_b y$

(c) $\log_b a^x = x \log_b a$

(d) $\log_b a = \frac{\ln a}{\ln b}$.

1.2.4. Giải phương trình

(a) $3e^{2x-4} = 5$.

(b) $-1 + 2\ln(2 - 3x) = 9$.

1.2.5. Dân số nước Việt Nam năm 2019 là 97 triệu người. Tốc độ tăng dân số hiện là 1% = 0,01 mỗi năm. Nếu tốc độ tăng này không thay đổi thì năm 2029 dân số nước Việt Nam sẽ là bao nhiêu?

1.2.6. Một người gởi 3 triệu đồng vào một tài khoản tiết kiệm với lãi suất 6% = 0,06 một năm, kì hạn (thời điểm tính lãi gộp vốn) là 1 năm. Hỏi sau 4 năm thì tài khoản có bao nhiêu? Bao lâu thì người đó có được 10 triệu đồng?

1.2.7. Giá đất đai đã tăng gấp đôi trong 10 năm qua. Trong thời gian đó lãi suất tiết kiệm ngân hàng vào khoảng 8%/năm. Hình thức nào có lợi hơn, đầu tư đất đai hay gởi tiết kiệm?

1.2.8. Năm 2016 GDP (tổng sản phẩm xã hội - Gross Domestic Product) của Việt Nam là 215 tỉ USD với tốc độ tăng là 6,7% mỗi năm. Năm 2016 GDP của Thái Lan là 409 tỉ USD với tốc độ tăng trưởng là 2,8% mỗi năm. Giả sử hai tốc độ tăng trưởng này được giữ nguyên trong tương lai.

(a) Khi nào thì GDP của Việt Nam đạt GDP năm 2016 của Thái Lan?

(b) Khi nào thì GDP của Việt Nam đuổi kịp GDP của Thái Lan?

(c) Hãy phác họa đồ thị GDP của hai nước trên cùng hệ trục tọa độ.

1.2.9. Một quần thể vi khuẩn có 100 cá thể và tăng gấp đôi mỗi 3 giờ. Hãy lập mô hình số lượng của quần thể theo thời gian. Khi nào thì số vi khuẩn đạt 1000?

1.2.10. Dùng máy tính, hãy thử tính $\ln(e^{100})$, và nhận xét.

1.2.11. "Luật Moore" là một quan sát năm 1965 và được chỉnh năm 1975 bởi Gordon Moore, lúc đó là CEO của Intel, rằng mật độ của các bộ phận trong mạch tích hợp đang gấp đôi mỗi xấp xỉ hai năm. Luật này được thấy cơ bản là đúng cho tới nay và đã cho những dự đoán tốt.

Kích thước của transistor trong các bộ xử lí máy tính bán trên thị trường là 14 nm (nanometer) vào năm 2014 và 10 nm vào năm 2016. Hãy giải thích vì sao điều này là phù hợp với Luật Moore. Bạn có thể dự đoán không khi nào có quy trình sản xuất transistor kích thước 5 nm?

Chương 2
Hàm số liên tục

2.1 Giới hạn của hàm số

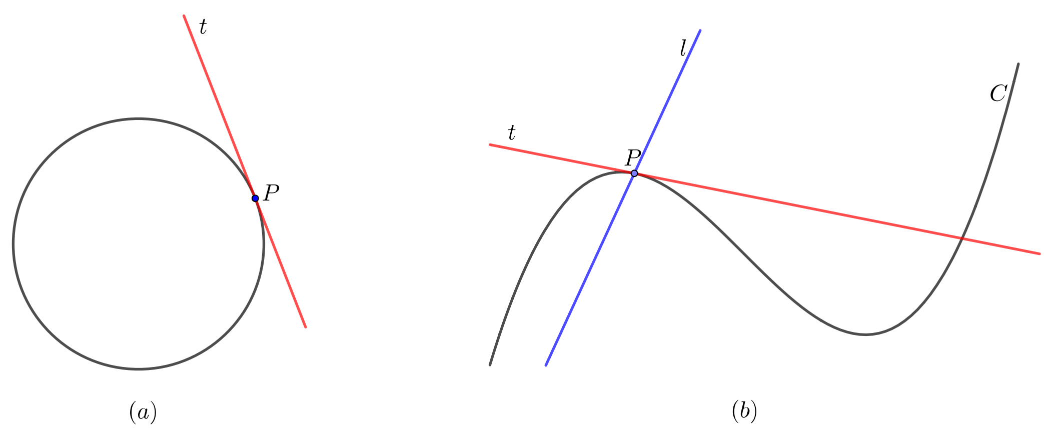
2.1.1 Tiếp tuyến. Vận tốc. Tỉ lệ thay đổi

Các vấn đề về hàm số, giới hạn hàm số, hàm số liên tục đã được giới thiệu trong bậc trung học phổ thông. Trong giáo trình này, chúng ta sẽ tìm hiểu các định nghĩa, định lý chính xác cho các khái niệm trên.

Trước khi đi vào định nghĩa chính xác cho giới hạn hàm số, để làm động lực, chúng ta xem xét các bài toán tiếp tuyến và bài toán vận tốc.

Bài toán tiếp tuyến

Đối với đường tròn thì có thể coi tiếp tuyến là đường thẳng giao với đường tròn đúng một điểm, như trong Hình 2.1.1 (a). Đối với các đường cong phức tạp hơn thì cách tiếp cận này không phù hợp. Hình 2.1.1 (b) chỉ ra hai đường thẳng l và t qua điểm P trên đường cong C. Đường l giao với C đúng một điểm nhưng nhìn hình thì không có vẻ gì là tiếp xúc. Đường thẳng t có vẻ tiếp xúc với C nhưng cắt C tại hai điểm.



Hình 2.1.1

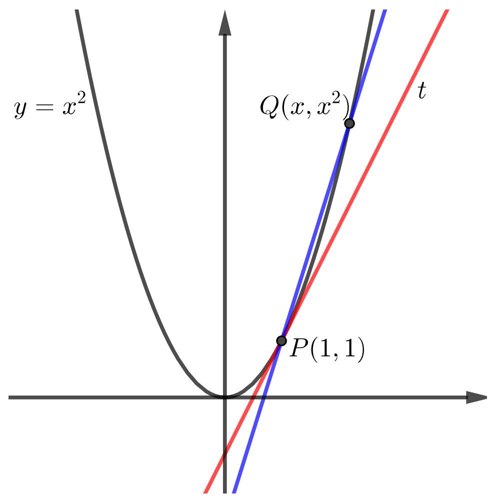
Như vậy khái niệm "tiếp tuyến" tuy quen thuộc và dễ hình dung trong một số trường hợp, lại chưa có ý nghĩa rõ ràng trong một số trường hợp khác.

Dưới đây ta xét một ví dụ để tìm hiểu khái niệm này.

Ví dụ 2.1.1. Tìm phương trình đường tiếp tuyến cho parabol $y = x^2$ tại điểm $P(1, 1)$.

Ta sẽ phải tìm hệ số góc m của đường tiếp tuyến. Ta tìm một xấp xỉ của m bằng cách chọn điểm $Q(x, x^2)$ trên parabol gần điểm P và tính hệ số góc của đường thẳng cát tuyến PQ là

$$m_{PQ} = \frac{x^2 - 1}{x - 1}.$$



Hình 2.1.2

Từ hình vẽ ta thấy khi Q càng gần P, x càng gần 1 thì hệ số góc càng gần tới một số thực nhất định.

Bây giờ ta có thể đoán rằng hệ số góc của tiếp tuyến tại P là 2, là "giới hạn" của hệ số góc của đường cát tuyến PQ khi Q tiến về P.

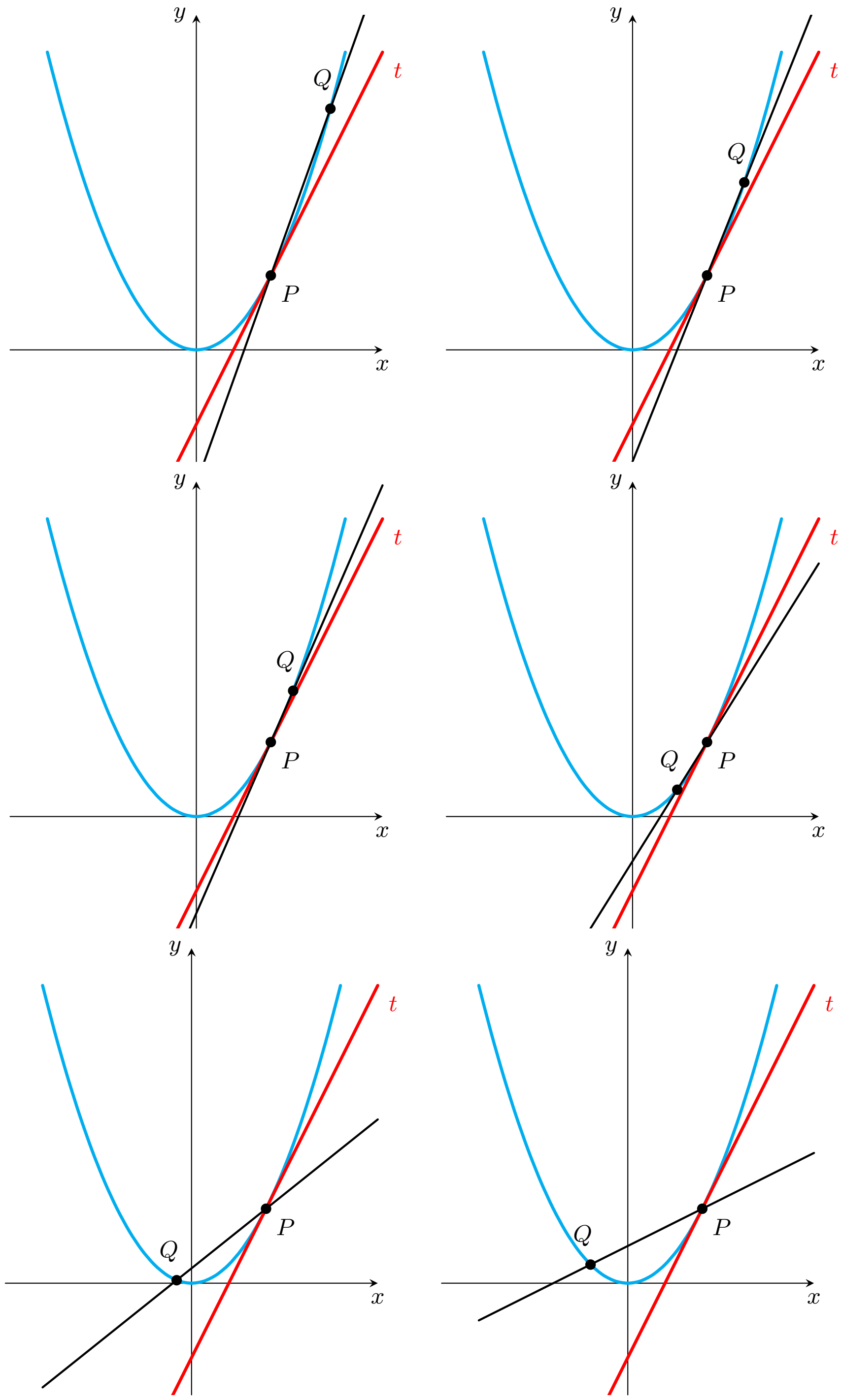
Nếu hệ số góc của tiếp tuyến đúng thực là 2 thì phương trình đường thẳng có hệ số góc bằng 2 đi qua điểm $(1, 1)$ là

$$y - 1 = 2(x - 1) \quad \text{hay là} \quad y = 2x - 1.$$

Như vậy ý then chốt là: tiếp tuyến tại P chính là "giới hạn" của cát tuyến PQ khi "Q tiến về P". Xem minh họa ở Hình 2.1.3

Bài toán vận tốc

Khi ta di chuyển, vận tốc của ta thay đổi theo thời gian. Vận tốc vốn được hiểu là tỉ số giữa chiều dài quãng đường đi được với khoảng thời gian được dùng để đi, là



Hình 2.1.3: Tiếp tuyến tại P là giới hạn của cát tuyến PQ khi Q tiến về P từ bên phải và từ bên trái.

vận tốc trung bình. Nếu ngồi trên một chiếc xe, nhìn bảng đo vận tốc của xe ta sẽ thấy nó liên tục thay đổi, mỗi khi ta nhìn đồng hồ đo vận tốc thì thấy có vận tốc nhất định. Đây chính là ***vận tốc tức thời***, một khái niệm phổ biến trong đời sống. Nhưng vận tốc tức thời đó được hiểu chính xác như thế nào?

Ví dụ 2.1.2. Giả sử một quả bóng được thả rơi từ một vị trí cách mặt đất 1000 mét. Gọi $s(t)$ là quãng đường bóng rơi sau t giây, thì

$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot 9{,}8t^2,$$

với 9,8 m/s^2 là hằng số trọng trường. Ta tìm vận tốc của quả bóng sau 5 giây.

Ta có thể xấp xỉ vận tốc tức thời này cần tính bằng cách tính vận tốc trung bình trên một khoảng thời gian cụ thể từ 5 đến 5,1 giây:

$$\text{vận tốc trung bình} = \frac{\text{khoảng cách đi được}}{\text{lượng thời gian trôi qua}} = \frac{s(5{,}1) - s(5)}{0{,}1} = 49{,}49 \text{ m/s}.$$

Bảng dưới cho ta tính toán vận tốc trung bình trên khoảng thời gian nhỏ dần:

Khoảng thời gian	Vận tốc trung bình
$5 \le t \le 6$	53,9
$5 \le t \le 5{,}1$	49,49
$5 \le t \le 5{,}05$	49,245
$5 \le t \le 5{,}01$	49,049
$5 \le t \le 5{,}001$	49,0049

Ta thấy khi khoảng thời gian ngắn đi thì vận tốc trung bình tiến gần hơn đến 49 m/s. Vậy ta dự đoán vận tốc tức thời vào thời điểm 5 giây sau khi bắt đầu chuyển động là 49 m/s.

Như vậy "vận tốc tức thời" tại thời điểm t chính là "giới hạn" của vận tốc trung bình trên khoảng thời gian từ t tới t' khi t' "tiến về" t.

Tỉ lệ thay đổi

Cả hai bài toán tìm hệ số góc của tiếp tuyến và tìm vận tốc tức thời đều đưa về một bài toán chung: Tìm "giới hạn" của đại lượng

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

khi x "tiến về" a. Số thực này đo tỉ lệ lượng thay đổi của một đại lượng $f(x)$ so với lượng thay đổi của đại lượng x mà nó phụ thuộc vào tại một giá trị nhất định của đại lượng đó là a. Nó cho ta một số đo phản ánh đại lượng $f(x)$ thay đổi như thế nào khi x thay đổi. Đây là một đại lượng then chốt khi ta khảo sát các hiện tượng trong thế giới, là đề tài và công cụ chủ yếu của phép tính vi tích phân, được gọi là đạo hàm mà ta sẽ tìm hiểu chi tiết ở chương tiếp theo. Chúng ta thấy rằng để xây dựng khái niệm này cần xây dựng khái niệm "giới hạn" trước. Ta làm điều này ngay tiếp theo đây.

2.1.2 Giới hạn của hàm số

Ý niệm về giới hạn và hội tụ đã có từ xưa, như Archimedes thời cổ Hy Lạp đã dùng ý tưởng rằng chiều dài của đường tròn bằng giới hạn của chu vi của hình đa giác đều nội tiếp khi số cạnh tăng lên. Giả sử hàm số $f(x)$ xác định khi x gần số a nhưng có thể không xác định tại a. Ta nói "giới hạn của $f(x)$ khi x tiến về a là L", nếu $f(x)$ gần L tùy ý miễn x đủ gần a nhưng không bằng a, và viết

$$\lim_{x\to a} f(x) = L.$$

Trong nhiều trường hợp khái niệm giới hạn có thể được diễn tả đơn giản hơn tuy kém tổng quát hơn: nếu x gần tới a hơn thì $f(x)$ gần tới L hơn.

Ví dụ 2.1.3. Cho f là một hàm hằng, nghĩa là có một số thực c sao cho $f(x) = c$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Rõ ràng, với mọi $a \in \mathbb{R}$, khi x gần tới a thì $f(x)$ gần, thực ra luôn bằng, c. Vậy $\lim_{x\to a} f(x) = c$, hay ngắn gọn hơn:

$$\lim_{x\to a} c = c.$$

Ví dụ 2.1.4. Cho $f(x) = x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Rõ ràng, với mọi $a \in \mathbb{R}$, khi x gần tới a thì $f(x) = x$ cũng gần tới a. Vậy

$$\lim_{x\to a} x = a.$$

Chú ý trong khái niệm giới hạn ở trên có giả thiết $x \neq a$. Mục đích của điều này là để cho phép ta xét những giới hạn tại những điểm mà hàm không được xác định, như trong ví dụ dưới đây.

Ví dụ 2.1.5. Xét

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1}.$$

Khi x gần 1 nhưng khác 1 ta có

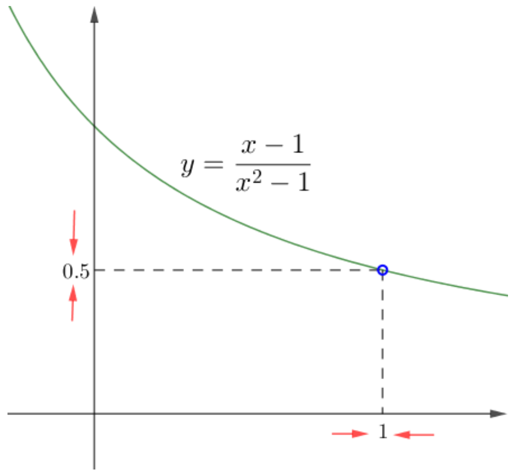
$$\frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1},$$

mặc dù hai vế không bằng nhau khi $x = 1$. Do đó

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{x+1}.$$

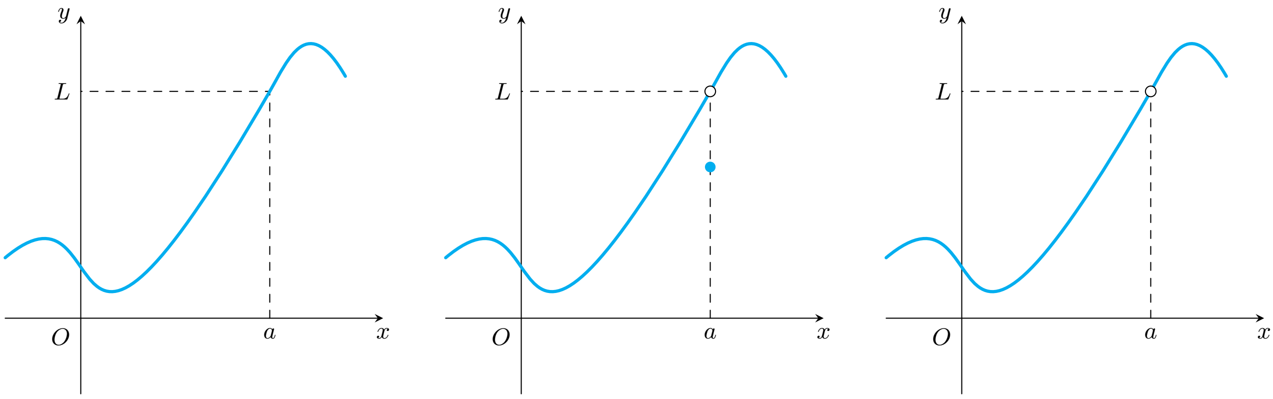
Có thể dự đoán giá trị của giới hạn này là $\frac{1}{2}$, xem Hình 2.1.4.

Ví dụ trên minh họa chi tiết trong định nghĩa rằng khi tìm giới hạn của $f(x)$ khi x tiến đến a ta không cần xét và sẽ không xét $x = a$. Hàm f thậm chí không



Hình 2.1.4

cần được xác định tại $x = a$. Giới hạn tại a không phụ thuộc vào f như thế nào tại a, chỉ phụ thuộc việc f như thế nào gần a mà thôi. Xem Hình 2.1.5.



Hình 2.1.5: $\lim_{x\to a} f(x) = L$ trong cả ba trường hợp (dấu tròn rỗng tại một điểm được dùng để chỉ rằng điểm đó không thuộc đồ thị.

Định nghĩa chính xác của giới hạn

Ở mục này khái niệm giới hạn được chính xác hóa và được viết ở dạng kí hiệu, tương tự như cách viết khái niệm giới hạn của dãy ở Định nghĩa 1.1.19. Tuy có vẻ hơi trừu tượng và hơi phức tạp, nhưng cách viết này chỉ là thể hiện lượng hóa khái niệm giới hạn ở trên, và giúp chúng ta làm được các lý luận phức tạp hơn.

Điểm $a \in D$ được gọi là một ***điểm tụ*** hay một ***điểm giới hạn*** của D nếu mọi khoảng mở của $\mathbb{R}$ chứa a đều chứa một điểm của D khác a. Có thể thấy điều này đồng nghĩa với việc có một dãy các phần tử của D khác a mà hội tụ về a. Một điểm tụ a của tập D không nhất thiết phải thuộc D, nhưng luôn có phần tử của D không phải là a mà gần a tùy ý.

Ví dụ 2.1.6. Điểm 0 là một điểm tụ của tập $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Điểm 0 không phải là một điểm tụ của tập $\{0\} \cup (1, \infty)$.

Định nghĩa 2.1.7. Cho f là một hàm số được xác định trên tập D và a là một điểm tụ của D. Ta nói ***giới hạn*** của $f(x)$ khi x tiến đến a là L và viết là

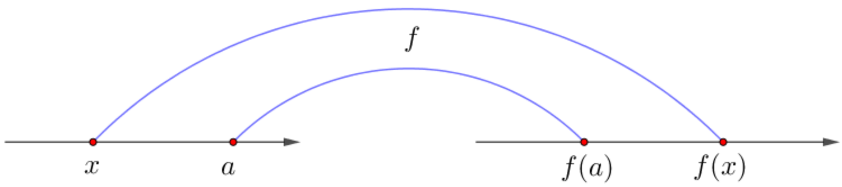
$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

nếu với mọi số $\epsilon > 0$ có một số $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in D$ nếu $0 < |x - a| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$. Viết hoàn toàn bằng kí hiệu thì

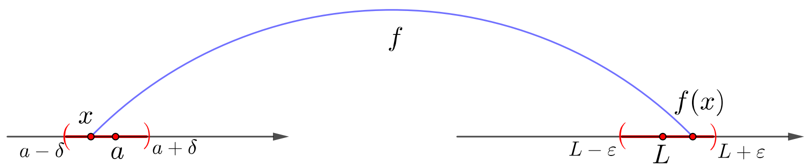
$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

hay

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D \cap ((a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}), f(x) \in (L - \epsilon, L + \epsilon).$$



Hình 2.1.6: Hàm số f.



Hình 2.1.7: Giới hạn của hàm số f.

Định nghĩa này hay được gọi là "định nghĩa $\epsilon - \delta$". Sau đây là một số ví dụ để minh họa.

Ví dụ 2.1.8. Kiểm rằng $\lim_{x \to 2}(2x - 1) = 3$.

Bước 1: Phân tích để dự đoán δ. Cho trước $\epsilon > 0$, ta muốn tìm $\delta > 0$ sao cho nếu $|x - 2| < \delta$ thì $|(2x - 1) - 3| < \epsilon$. Vì $|(2x - 1) - 3| = |2x - 4| = 2|x - 2|$ nên nếu $|(2x - 1) - 3| < \delta$ thì $2|x - 2| < 2\delta$. Từ đây ta dự đoán $\delta = \epsilon/2$.

Bước 2: Chứng minh. Cho trước một $\epsilon > 0$, chọn $\delta = \epsilon/2$. Nếu $0 < |x-2| < \delta$ thì

$$|(2x-1)-3| = 2|x-2| < 2\delta = \epsilon.$$

Vậy ta kết luận

$$\lim_{x\to 2}(2x-1) = 3.$$

Ví dụ 2.1.9. Kiểm rằng $\lim_{x\to 2} x^2 = 4$.

Bước 1: Dự đoán số δ. Cho trước $\epsilon > 0$, ta tìm số $\delta > 0$ sao cho nếu $0 < |x-2| < \delta$ thì $|x^2-4| < \epsilon$. Ta có $|x^2-4| = |(x-2)(x+2)|$. Ta quan tâm đến những x gần 2 nên ta có thể giả sử x cách 2 không quá 1, nghĩa là $|x-2| < 1$, hay $1 < x < 3$, do đó $3 < x+2 < 5$. Khi đó

$$|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| < 5|x-2| < 5\delta.$$

Để chắc chắn rằng $|x^2-4| < \epsilon$ ta có thể lấy δ sao cho $\delta < 1$ và $5\delta < \epsilon$ chẳng hạn $\delta = \min\{1, \epsilon/5\}$.

Bước 2: Chứng minh. Cho $\epsilon > 0$, chọn $\delta = \min\{1, \epsilon/5\}$. Nếu $0 < |x-2| < \delta$, thì $|x-2| < 1$ do đó $|x+2| < 5$, và $|x-2| < \epsilon/5$, nên

$$|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| < (\epsilon/5)5 = \epsilon.$$

Vậy

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Khi đã thông thạo hơn lý luận này thì người ta thường chỉ cần viết ra Bước 1 ở trên chứ không cần viết ra Bước 2 nữa.

Yêu cầu rằng điểm tại đó ta xét giới hạn phải là một điểm tụ của miền xác định giúp đảm bảo giới hạn nếu tồn tại là duy nhất.

Mệnh đề 2.1.10. *Giới hạn nếu tồn tại là duy nhất.*

Chứng minh. Giả sử $f : D \to \mathbb{R}$ và a là một điểm tụ của D. Giả sử $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ và $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$. Cho $\epsilon > 0$, có $\delta_1 > 0$ sao cho khi $x \in D$ và $0 < |x-a| < \delta_1$ thì $|f(x)-L_1| < \epsilon$, và có $\delta_2 > 0$ sao cho khi $x \in D$ và $0 < |x-a| < \delta_2$ thì $|f(x)-L_2| < \epsilon$. Lấy $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Vì a là một điểm tụ của D nên có $x \in D$ sao cho $0 < |x-a| < \delta$. Với x này thì ta có

$$|L_1 - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |f(x) - L_2| < 2\epsilon.$$

Điều này đúng với mọi số dương ϵ, nên bắt buộc $L_1 = L_2$. □

Ta thấy việc dùng định nghĩa để tìm giới hạn của một hàm số tương đối khó. Từ định nghĩa chúng ta sẽ phát triển những tính chất và công thức ở mục tiếp theo, nhờ đó làm việc với giới hạn sẽ dễ dàng hơn.

2.1.3 Một số tính chất căn bản của giới hạn

Sau đây ta có các tính chất số học căn bản cho giới hạn của hàm số, tương tự các kết quả cho dãy ở Định lý 1.1.27, và có thể được chứng minh một cách tương tự.

Định lý 2.1.11. *Giả sử các giới hạn $\lim_{x\to a} f(x)$ và $\lim_{x\to a} g(x)$ tồn tại. Khi đó các giới hạn ở vế trái của các đẳng thức dưới đây tồn tại và bằng vế phải:*

(a) $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$.

(b) $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$.

(c) $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$.

(d) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ *nếu* $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.

Chứng minh. Có thể chứng minh mệnh đề này giống như chứng minh mệnh đề tương ứng cho giới hạn của dãy ở Định lý 1.1.27. Để minh họa dưới đây là chi tiết cho tính chất (a).

Đặt $\lim_{x\to a} f(x) = M$ và $\lim_{x\to a} g(x) = N$. Cho $\epsilon > 0$, có $\delta_1 > 0$ sao cho khi $x \in D$ và $0 < |x-a| < \delta_1$ thì $|f(x) - M| < \epsilon/2$, và có $\delta_2 > 0$ sao cho khi $x \in D$ và $0 < |x-a| < \delta_2$ thì $|g(x) - N| < \epsilon/2$. Lấy $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Với mọi $x \in D$ sao cho $0 < |x-a| < \delta$ thì ta có

$$|(f(x)+g(x)) - (M+N)| \leq |f(x) - M| + |g(x) - N| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon.$$

Theo định nghĩa thì điều này thể hiện rằng $f(x)+g(x)$ hội tụ về $M+N$. □

Ví dụ 2.1.12. Tính $\lim_{x\to 2} 3x^2 - 4x + 5$.

Áp dụng các tính chất của giới hạn ở trên, ta viết

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2} 3x^2 - 4x + 5 &= \lim_{x\to 2} 3x^2 + \lim_{x\to 2} -4x + \lim_{x\to 2} 5 \\
&= \big(\lim_{x\to 2} 3\big)\cdot\big(\lim_{x\to 2} x\big)\cdot\big(\lim_{x\to 2} x\big) + \big(\lim_{x\to 2} -4\big)\cdot\big(\lim_{x\to 2} x\big) + \lim_{x\to 2} 5 \\
&= 3(\lim_{x\to 2} x)^2 - 4\lim_{x\to 2} x + 5 = 3\cdot 2^2 - 4\cdot 2 + 5.
\end{aligned}$$

Về sau ta sẽ viết tắt và bỏ bớt các bước trên.

Ví dụ 2.1.13. Với n là một số nguyên dương thì áp dụng tính chất giới hạn của tích:

$$\lim_{x\to a} x^n = (\lim_{x\to a} x)^n = a^n.$$

Hai ví dụ trên chỉ ra rằng giới hạn của đa thức nhận được bằng cách đơn giản là thế số vào. Như vậy nếu p là một đa thức thì

$$\lim_{x\to a} p(x) = p(a).$$

Tiếp theo, nhờ tính chất giới hạn của thương, giới hạn của một phân thức cũng thu được bằng cách thế số vào, miễn là không phải chia cho 0, tức là nếu p và q là hai đa thức thì

$$\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(a)}{q(a)},$$

nếu $q(a)\neq 0$.

Ví dụ 2.1.14. Tìm

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}.$$

Trước hết nhận xét rằng hàm số trên không xác định tại điểm tính giới hạn. Tuy nhiên ta có thể biến đổi bằng cách phân tích thành tích rồi thu gọn để được một hàm số mới đơn giản hơn mà chỉ khác hàm số ban đầu tại đúng một điểm, chính là điểm tính giới hạn. Cụ thể:

$$\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x^2+x+1}{x+1},$$

với mọi $x\neq 1$. Vì giới hạn tại $x=1$ không phụ thuộc vào giá trị của hàm tại $x=1$, nên ta có thể dùng hàm mới thu được để tính giới hạn. Áp dụng các tính chất của giới hạn ta được

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{1^2+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}.$$

Tiếp theo ta có các mệnh đề về so sánh giới hạn tương tự các kết quả cho dãy ở Định lý 1.1.30, và có thể được chứng minh một cách tương tự.

Định lý 2.1.15 (Tính chất so sánh). *Nếu $f(x)\le g(x)$ khi x gần a, có thể ngoại trừ tại a, và các giới hạn của hàm số f và g tồn tại khi x tiến đến a, thì*

$$\lim_{x\to a}f(x)\le\lim_{x\to a}g(x).$$

Ta có ngay một hệ quả thường được dùng:

Hệ quả 2.1.16 (Định lý kẹp). *Nếu $f(x)\le g(x)\le h(x)$ khi x gần a, có thể ngoại trừ tại a, và $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=L$, thì*

$$\lim_{x\to a}g(x)=L.$$

Ví dụ 2.1.17. Tìm

$$\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x}.$$

Với mọi $x\neq 0$ ta có các bất đẳng thức sau

$$-1\le\sin\frac{1}{x}\le 1,$$

nên
$$-x^2 \le x^2 \sin\frac{1}{x} \le x^2.$$
Vì $\lim_{x\to 0} -x^2 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$ nên theo Định lý kẹp ở trên ta kết luận
$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0.$$

* Giới hạn của hàm số thông qua giới hạn của dãy số

Dưới đây trình bày định nghĩa giới hạn của hàm số thông qua dãy số, một khái niệm có thể quen thuộc với người đọc hơn từ Mục 1.1.4.

Mệnh đề 2.1.18. *Cho a là một điểm tụ của miền xác định của hàm số f. Hai điều sau là tương đương:*

(a) $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

(b) Với mọi dãy $\{x_n\}_{n\ge 1}$ hội tụ về a, dãy số $\{f(x_n)\}_{n\ge 1}$ hội tụ về L. Nói cách khác, với mọi dãy $\{x_n\}_{n\ge 1}$ thì
$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L.$$

Chứng minh không khó, người đọc có thể thử làm hoặc tham khảo trong các tài liệu như [Kha96].

Dùng mệnh đề này ta có thể nhận được những tính chất căn bản của giới hạn của hàm số trực tiếp từ các tính chất tương ứng của giới hạn của dãy số.

Một ứng dụng khác là dùng để chỉ ra hàm số không có giới hạn.

Hệ quả 2.1.19. *Nếu một trong hai điều sau xảy ra thì hàm số f không có giới hạn tại a:*

(a) có một dãy $(x_n)_{n\ge 1}$ sao cho $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ nhưng dãy $(f(x_n))_{n\ge 1}$ phân kỳ,

(b) có hai dãy $(x_n)_{n\ge 1}$ và $(y_n)_{n\ge 1}$ sao cho
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$$
nhưng
$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \ne \lim_{n\to\infty} f(y_n).$$

Ví dụ 2.1.20. Tìm giới hạn $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$.

Ta tìm được
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} = 0,$$
nhưng
$$\lim_{n\to\infty} \sin 2n\pi = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1.$$
Vậy giới hạn $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ không tồn tại.

2.1.4 Các giới hạn mở rộng

Giới hạn một phía

Trong nhiều trường hợp ta muốn xét những giới hạn như

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Hàm số được xác định bằng các công thức khác nhau khi $x < 0$ và khi $x > 0$, vì thế ta muốn xét hai giới hạn: giới hạn khi $x < 0$ và giới hạn khi $x > 0$. Do đó bây giờ ta định nghĩa giới hạn một phía của hàm số.

Giả sử a là một điểm tụ bên trái của miền xác định của f, tức là mỗi khoảng (c, a) đều chứa một điểm thuộc miền xác định của f. Ta viết

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

và nói ***giới hạn bên trái*** của hàm số $f(x)$ khi x tiến đến a, hay giới hạn của $f(x)$ khi x tiến đến a từ bên trái, là L nếu giá trị của $f(x)$ gần tùy ý L khi giá trị của x đủ gần a nhưng nhỏ hơn a. Ký hiệu "$x \to a^-$" có nghĩa là ta chỉ xem xét $x < a$. Viết hoàn toàn bằng kí hiệu thì $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$ nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, -\delta < x - a < 0 \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Tương tự nếu ta yêu cầu x lớn hơn a ta sẽ có ***giới hạn bên phải*** của $f(x)$ khi x tiến đến a là L và ký hiệu là

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

nếu giá trị của $f(x)$ gần tùy ý L khi giá trị của x đủ gần a nhưng lớn hơn a. Viết hoàn toàn bằng kí hiệu thì $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in D, 0 < x - a < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Ví dụ 2.1.21. Cho

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Khi $x > 0$ ta có $f(x) = 1$, nên $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$. Khi $x < 0$ ta có $f(x) = 0$, nên $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 0 = 0$.

Sau đây là một mệnh đề giúp ta nhận biết sự tồn tại giới hạn của một hàm số tại một điểm.

Mệnh đề 2.1.22. *(a) Nếu $\lim_{x \to a} f(x)$ tồn tại và bằng L thì hai giới hạn $\lim_{x \to a^+} f(x)$, $\lim_{x \to a^-} f(x)$ nếu tồn tại phải bằng L.*

(b) *Nếu hai giới hạn* $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to a^-} f(x)$ *tồn tại và bằng* L *thì* $\lim_{x\to a} f(x)$ *tồn tại và bằng* L.

Như vậy hàm số sẽ không có giới hạn tại một điểm nếu không tồn tại một giới hạn một bên tại điểm đó, hoặc nếu cả hai giới hạn một bên tồn tại nhưng có giá trị khác nhau.

Chứng minh. Nếu $\lim_{x\to a} f(x) = L$ và giới hạn mỗi phía tồn tại (là khi a là điểm tụ bên trái và là điểm tụ bên phải) thì từ định nghĩa các giới hạn ta có ngay $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ và $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.

Ngược lại giả sử $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ và $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$. Cho $\epsilon > 0$, có $\delta_1 > 0$ sao cho khi $x \in D$ và $0 < x - a < \delta_1$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$, và có $\delta_2 > 0$ sao cho khi $x \in D$ và $0 < a - x < \delta_2$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$. Lấy $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Với mọi $x \in D$ sao cho $0 < |x - a| < \delta$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$. Vậy $\lim_{x\to a} f(x) = L$. □

Ví dụ 2.1.23. Tìm giới hạn của
$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}.$$

Vì
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$
và
$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$
là hai số khác nhau nên giới hạn $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ không tồn tại.

Giới hạn ở vô cùng

Định nghĩa 2.1.24. Cho hàm số f được xác định khi a đủ lớn. Ta nói giới hạn của f khi x tiến tới vô cùng là số thực L, và viết
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$
nếu $f(x)$ gần L tùy ý miễn x đủ lớn. Chính xác hơn, nếu với mọi số dương ϵ tồn tại một số dương M sao cho nếu $x > M$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$.

Tương tự ta nói
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = L$$
nếu $f(x)$ gần L tùy ý miễn x đủ nhỏ. Chính xác hơn, nếu với mọi số dương ϵ tồn tại một số dương M sao cho nếu $x < -M$ thì $|f(x) - L| < \epsilon$.

Có thể so sánh sự tương tự của giới hạn của hàm ở vô cùng với giới hạn của dãy trong Mục 1.1.4.

Ví dụ 2.1.25. Có thể thấy ngay:
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Như đã thảo luận ở phần dãy ở Ghi chú 1.1.26, kí hiệu ∞ không thể hiện một số thực, mà thể hiện một loại giới hạn, và chỉ có ý nghĩa trong ngữ cảnh đó. Kí hiệu này được đọc là ***vô cùng***, hay ***vô hạn***, hay ***vô cực***.

Giới hạn ở vô cùng có cùng các tính chất với giới hạn tới một số thực như ở Mệnh đề 2.1.11, với chứng minh tương tự.

Ví dụ 2.1.26. Tìm

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{3x+4}.$$

Dùng các tính chất của giới hạn ta viết

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{3x+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(2-\frac{1}{x}\right)}{x\left(3+\frac{4}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{3+\frac{4}{x}}=\frac{2-0}{3+0}=\frac{2}{3}.$$

Giới hạn bằng vô cùng

Định nghĩa 2.1.27. Cho hàm số f được xác định ở gần a nhưng có thể không xác định tại a. Ta nói giới hạn của f khi x tiến tới a là vô cùng và viết

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$$

nếu $f(x)$ lớn tùy ý miễn x đủ gần nhưng không bằng a. Chính xác hơn, nếu với mọi số dương M tồn tại một số dương δ sao cho nếu $0<|x-a|<\delta$ thì $f(x)>M$.

Tương tự ta có thể nói tới giới hạn bằng âm vô cùng. Ta nói

$$\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$$

nếu $f(x)$ nhỏ tùy ý miễn x đủ gần nhưng không bằng a. Chính xác hơn, nếu với mọi số dương M tồn tại một số dương δ sao cho nếu $0<|x-a|<\delta$ thì $f(x)<-M$.

Có thể so sánh sự tương tự của giới hạn bằng vô cùng của hàm với việc dãy tiến ra vô cùng trong Mục 1.1.4.

Định nghĩa này được minh họa trong Hình 2.1.8, 2.1.9, và 2.1.10.

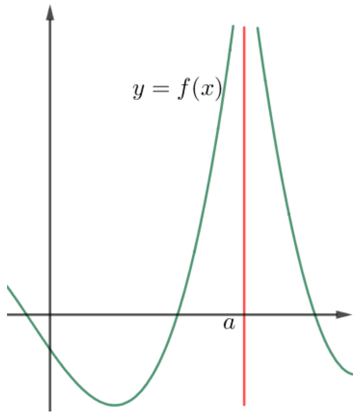
Ví dụ 2.1.28. Không khó để thấy

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\infty.$$

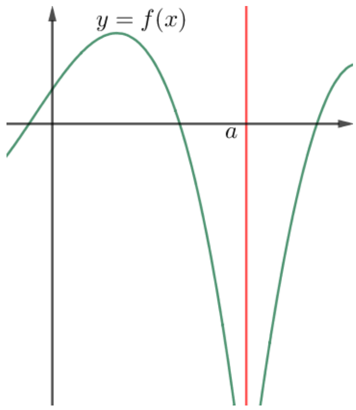
Để kiểm tra, cho M là số thực dương bất kì, ta có $\frac{1}{x^2}>M \iff |x|<\frac{1}{\sqrt{M}}$, vậy trong định nghĩa chỉ cần lấy $\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$ thì ta sẽ có $0<|x-0|<\delta \implies \frac{1}{x^2}>M$.

Tương tự,

$$\lim_{x\to0}\frac{-1}{x^2}=-\infty.$$



Hình 2.1.8: $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$.



Hình 2.1.9: $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Ví dụ 2.1.29. Ta có thể kết hợp tất cả các loại giới hạn trên:

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty,$$

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = \infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 = \infty,$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$$

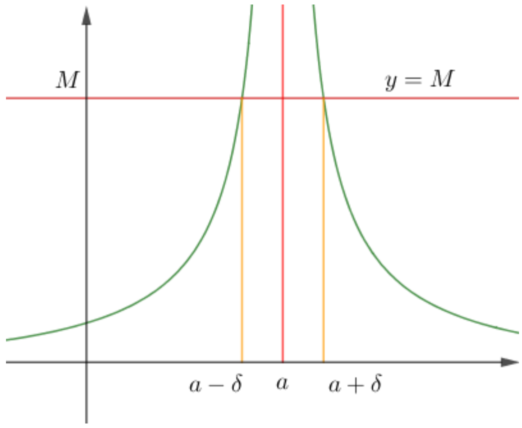
Ví dụ 2.1.30. Tìm $\lim_{x\to\infty} 2x^3 - 4x^2 - 5x + 6$.

Ta viết

$$\lim_{x\to\infty} 2x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \lim_{x\to\infty} x^3\left(2 - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right).$$

Trong hai thừa số trên, một thừa số tiến ra ∞, còn thừa số còn lại tiến về 2, do đó tích rõ ràng tiến ra ∞ (chi tiết hơn có thể làm tương tự trong Ví dụ 1.1.34). Người ta thường tóm tắt lí luận này bằng cách viết

$$\lim_{x\to\infty} x^3\left(2 - \frac{4}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right) = \infty \cdot 2 = \infty.$$



Hình 2.1.10: Minh họa $|x-a|<\delta \implies f(x)>M$.

Bài tập

2.1.1. Hãy giải thích mệnh đề sau có nghĩa là gì?

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2+x-6}=\frac{3}{5}.$$

Mệnh đề này là đúng hay sai, tại sao?

2.1.2. Tính các giới hạn sau:

(a) $\lim_{h\to 0}\frac{(10+h)^2-100}{h}$.

(b) $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{100+h}-10}{h}$.

(c) $\lim_{x\to -2017}\frac{\frac{1}{2017}+\frac{1}{x}}{2017+x}$.

(d) $\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$.

(e) $\lim_{x\to 4}\frac{2-\sqrt{x}}{8x-x^3}$.

(f) $\lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t\sqrt{1+t}}-\frac{1}{t}\right)$.

(g) $\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

2.1.3. Sử dụng định lý kẹp chỉ ra

$$\lim_{x\to 0}x^2\cos 20\pi x=0.$$

Hãy vẽ đồ thị để minh họa kết quả trên.

2.1.4. Sử dụng định lý kẹp chỉ ra

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3+x^2}\sin\frac{\pi}{x}=0.$$

Hãy vẽ đồ thị để minh họa kết quả trên.

2.1.5. Nếu $4x-9\le f(x)\le x^2-4x+7$ với $x\ge 0$, tìm $\lim_{x\to 4}f(x)$.

2.1.6. Nếu $2x\le g(x)\le x^4-x^2+2$ với mọi x, tìm $\lim_{x\to 1}g(x)$.

2.1.7. Chứng minh rằng

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}[1+\sin^2(2\pi/x)]=0.$$

2.1.8. Tìm giới hạn sau nếu tồn tại:

(a) $\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{|x^3-x^2|}$.

(b) $\lim_{x\to -7} \frac{7-|x|}{3x+21}$.

(c) $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}\right)$.

2.1.9. Cho

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{nếu } x < 1 \\ 0 & \text{nếu } x = 1 \\ 2x - x^2 & \text{nếu } 1 < x \leq 2 \\ x^3 - 5x + 4 & \text{nếu } x > 2. \end{cases}$$

Tìm các giới hạn sau nếu tồn tại

(a) $\lim_{x\to 1^-} g(x)$

(b) $\lim_{x\to 1^+} g(x)$

(c) $\lim_{x\to 2^-} g(x)$

(d) $\lim_{x\to 2^+} g(x)$

(e) $\lim_{x\to 2} g(x)$.

2.1.10. Có số a nào sao cho

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x^2 - 2ax - a - 1}{x^3 - 3x - 2}.$$

tồn tại không? Tìm giới hạn đó.

2.1.11. Cho $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2+x-2}$. Tìm:

(a) $\lim_{x\to 2} f(x)$.

(b) $\lim_{x\to -2} f(x)$.

(c) $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

2.1.12. Tìm:

(a) $\lim_{x\to -\infty} \frac{4x^2+3x+7}{-3x^3+6x}$.

(b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{4x^4+3x+7}{-3x^3+6x}$.

(c) $\lim_{x\to \infty} \frac{3x^6-4x^4+10}{-2x^6-10x^3+2}$.

2.1.13. Chọn đáp án đúng.

(a) Giới hạn

$$\lim_{x\to 1} 4x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

bằng

A) 1 B) 2 C) 3 D) ∞

(b) Giới hạn

$$\lim_{x\to -\infty} 4x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

bằng

A) 5 B) $-\infty$ C) ∞ D) không tồn tại

(c) Giới hạn

$$\lim_{x\to-\infty} 9x^4 - 8x^2 + 9x + 5$$

bằng

A) 2 B) ∞ C) $-\infty$ D) không tồn tại

(d) Giới hạn

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^4 - 9x^2 - 6x + 1}{8x^5 - 3x^3 + 7x^2 + 16}$$

bằng

A) -3 B) $-\infty$ C) 0 D) không tồn tại

(e) Giới hạn

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{12x^4 - 4x^2 + 9x + 11}{2x^4 - 15x^2 + 71x + 60}$$

bằng

A) 0 B) $-\infty$ C) 6 D) không tồn tại

2.1.14. Cho

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{ là số hữu tỉ} \\ 0, & x \text{ là số vô tỉ.} \end{cases}$$

Tìm $\lim_{x\to 0} f(x)$.

2.1.15. Xét hàm số

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Chứng tỏ $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Hãy vẽ đồ thị của hàm này (có thể dùng phần mềm máy tính), để thấy rằng trong trường hợp này mặc dù $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ nhưng không phải khi x gần 0 hơn thì $f(x)$ gần 0 hơn.

2.2 Hàm số liên tục

Khái niệm liên tục được dùng phổ biến trong đời sống. Một quá trình được coi là liên tục nếu một thay đổi nhỏ trong đầu vào chỉ dẫn tới một thay đổi nhỏ trong đầu ra.

Định nghĩa 2.2.1. Hàm số f xác định trên tập D được gọi là ***liên tục*** tại $a \in D$ nếu $f(x)$ gần $f(a)$ tùy ý miễn x đủ gần a. Hoàn toàn bằng kí hiệu thì:

$$\forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0, \forall x \in D, |x - a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

hay

$$\forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x \in D \cap (a - \delta, a + \delta), f(x) \in (f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon).$$

Hàm số f không liên tục tại a thì còn được gọi là ***gián đoạn*** tại a.

Hàm số f được gọi là liên tục trên tập D nếu nó liên tục tại mọi điểm thuộc D.

Có thể trình bày một cách tương đương sự liên tục thông qua giới hạn. Hàm số f xác định trên tập D là liên tục tại $a \in D$ nếu hoặc a không phải là một điểm tụ của D hoặc nếu a là một điểm tụ của D thì

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

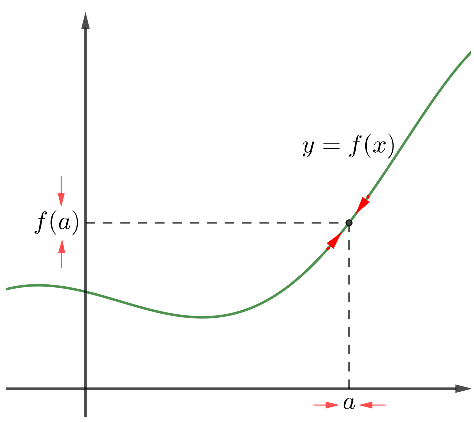
Ta chú ý để hàm liên tục tại a thì a phải thuộc miền xác định của hàm, tức là hàm phải có giá trị tại a, mặt khác ta không cần phải yêu cầu a là một điểm tụ của miền xác định như trong định nghĩa giới hạn.

Trong nhiều trường hợp đơn giản phổ biến có thể diễn tả khái niệm liên tục một cách đơn giản hơn là: khi x gần tới a thì $f(x)$ gần tới $f(a)$. Nói cách khác, khi biến thiên $\Delta x = x - a$ của giá trị của biến x nhỏ đi thì biến thiên $\Delta y = f(x) - f(a)$ của giá trị của hàm phải nhỏ đi theo. Thô sơ hơn nữa, liên tục có nghĩa là một thay đổi "nhỏ" của giá trị biến độc lập chỉ dẫn tới một thay đổi "nhỏ" của giá trị biến phụ thuộc. Đây là một tính chất tiện lợi cho nhiều ứng dụng khiến cho hàm liên tục được sử dụng phổ biến.

Chính xác hơn và tổng quát hơn, như trong định nghĩa ở đây, thì khái niệm liên tục có ý nghĩa là: ***thay đổi giá trị của hàm là nhỏ tùy ý nếu thay đổi giá trị của biến là đủ nhỏ***, tức là Δy nhỏ tùy ý miễn Δx đủ nhỏ. Tính liên tục cho phép ta kiểm soát được sai số: ta có thể đảm bảo sai số của đầu ra nhỏ tùy ý bằng cách giữ cho sai số của đầu vào đủ nhỏ.

Về mặt định lượng, nếu hàm liên tục tại một điểm thì giới hạn của hàm tại điểm đó thu được đơn giản bằng cách thế số vào.

Ta có thể hình dung tính liên tục tại một điểm nghĩa là ***đồ thị không có lỗ thủng*** tại điểm đó. Xem Hình 2.2.1 và Hình 2.2.2.



Hình 2.2.1: Nếu f liên tục tại a thì khi x tiến về a thì điểm $(x, f(x))$ trên đồ thị tiến về điểm $(a, f(a))$, vì vậy không có lỗ thủng hay nét đứt trên đồ thị tại $x = a$.

Chú ý rằng định nghĩa 2.2.1 trên yêu cầu ba điều sau để f liên tục tại một điểm tụ a:

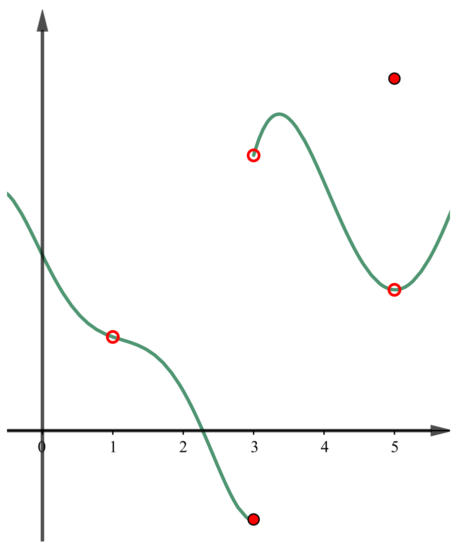
(a) $f(a)$ tồn tại,

(b) $\lim_{x\to a} f(x)$ tồn tại,

(c) $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Như vậy một hàm số sẽ không liên tục tại a nếu nó vi phạm một trong các yêu cầu trên.

Ví dụ 2.2.2. Hình 2.2.2 là đồ thị hàm số f. Tìm điểm gián đoạn của hàm số f.



Hình 2.2.2: Minh họa đồ thị của một hàm không liên tục. Dấu tròn rỗng chỉ rằng điểm đó không thuộc vào đồ thị.

Hàm f gián đoạn tại điểm $x = 1$ vì tại $x = 1$ đồ thị bị thủng, $f(1)$ không được định nghĩa. Đồ thị cũng bị đứt tại điểm $x = 3$, $\lim_{x\to 3} f(x)$ không tồn tại, nên f gián đoạn tại $x = 3$. Tại $x = 5$ thì đồ thị lại bị thủng, $\lim_{x\to 5} f(x) \neq f(5)$, vì vậy $x = 5$ cũng là một điểm gián đoạn.

2.2.1 Tính chất của hàm số liên tục

Sau đây là một loạt các định lý quan trọng cho hàm số liên tục. Kết quả này tới ngay từ kết quả tương ứng về giới hạn ở Định lý 2.1.11.

Định lý 2.2.3. *Nếu f và g liên tục tại a thì các hàm số sau cũng liên tục tại a: $f+g$, $f-g$, fg, và $\frac{f}{g}$ nếu $g(a) \neq 0$.*

Xem lại phần giới hạn của hàm số sau Định lý 2.1.11 ta suy ra rằng các hàm đa thức và phân thức đều liên tục.

Định lý 2.2.4. *Nếu g liên tục tại a và f liên tục tại $g(a)$ thì hàm hợp $f \circ g$ liên tục tại a.*

Chứng minh. Cho $\epsilon > 0$. Vì f liên tục tại $g(a)$ nên có $\delta > 0$ sao cho khi $|g(x)-g(a)| < \delta$ thì $|f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon$. Vì g liên tục tại a nên có $\delta' > 0$ sao cho khi $|x-a| < \delta'$ thì $|g(x) - g(a)| < \delta$. Như vậy khi $|x-a| < \delta'$ thì $|f(g(x)) - f(g(a))| < \epsilon$. Theo định nghĩa thì điều này nói rằng $f \circ g$ liên tục tại a. □

Một trong những kết quả quan trọng nhất và thường dùng nhất về hàm liên tục trong môn học này là khẳng định rằng ***các hàm sơ cấp đều liên tục***.

Định lý 2.2.5. *Các hàm số sơ cấp đều liên tục trên tập xác định của chúng.*

Nhắc lại phần thảo luận ở Mục 1.2.2, ngoài một số trường hợp riêng như với hàm đa thức hay phân thức, chúng ta chưa nghiên cứu đủ về các hàm sơ cấp để có thể chứng minh kết quả này, do đó sẽ chỉ chấp nhận nó, có thể đọc thêm ở [TPTT02, tr. 64].

Ví dụ 2.2.6. Các hàm số $h(x) = \cos(x^2)$ và $k(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+5}-3}$ liên tục trên tập hợp các số thực.

Ví dụ 2.2.7. Hàm số $f(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$ liên tục trên miền xác định là đoạn $[-1, 1]$.

Tính liên tục của các hàm sơ cấp thường được dùng để tính giới hạn các hàm sơ cấp tại một điểm nằm trong miền xác định bằng cách thế số vào trực tiếp.

Ví dụ 2.2.8. Tìm

$$\lim_{x\to\pi} \frac{x^2 + x\sin x}{2018 + \cos x}.$$

Vì hàm số trên là một hàm sơ cấp nên

$$\lim_{x\to\pi} \frac{x^2 + x\sin x}{2018 + \cos x} = \frac{\pi^2 + \pi\sin\pi}{2018 + \cos\pi} = \frac{\pi^2}{2017}.$$

Dưới đây là một một giới hạn đặc biệt, đáng lưu ý:

Mệnh đề 2.2.9. *Ta có*

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.} \tag{2.2.1}$$

Chứng minh. Trong các tính chất của hàm lượng giác mà ta thừa nhận ở Mục 1.2.2, ta có với $0 < x < \pi/2$ thì $\sin x < x < \tan x$. Suy ra

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Vì cos là hàm liên tục nên khi cho $x \to 0$, dùng Tính chất kẹp, ta được

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Với $x < 0$, ta có

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(-x)}{-x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Vậy ta được công thức $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. □

Người ta có thể đưa ra một đặc trưng của sự liên tục thông qua dãy như sau.

Mệnh đề 2.2.10. *Hàm số f là liên tục tại a khi và chỉ khi với mọi dãy $(x_n)_{n\geq 1}$ hội tụ về a thì dãy $(f(x_n))_{n\geq 1}$ hội tụ về $f(a)$, nói cách khác với mọi dãy $(x_n)_{n\geq 1}$ thì*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Chứng minh của mệnh đề này thường có trong các giáo trình cho ngành toán. Sách giáo khoa lớp 11 phổ thông [SGKTH] đã lấy mệnh đề này làm định nghĩa cho sự liên tục.

2.2.2 Định lý giá trị trung gian

Trong đời sống ta thường nghĩ một chuyển động như của con người là liên tục theo thời gian, do đó ta cho rằng khi đi từ trong nhà ra đường thì phải bước qua cửa là hiển nhiên. Cơ sở toán học của điều này chính là Định lý giá trị trung gian.

Định lý 2.2.11 (Định lý giá trị trung gian). *Giả sử f liên tục trên khoảng đóng $[a, b]$ và N là một số bất kỳ nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$. Khi đó tồn tại một số $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = N$.*

Một cách ngắn gọn, một hàm số liên tục trên một đoạn lấy mọi giá trị trung gian. Tập giá trị của một hàm liên tục trên một đoạn số thực là một đoạn số thực.

Tính chất này là một hệ quả của tính đầy đủ của tập hợp các số thực.

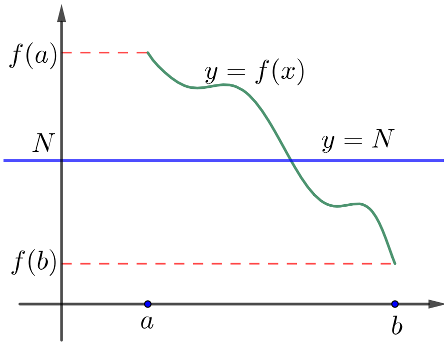
Về mặt trực quan, Định lý giá trị trung gian có ý nghĩa rằng ***đồ thị của một hàm liên tục trên một khoảng là liên thông***. Điều này thể hiện rằng đồ thị không có lỗ trống hay nét đứt nào, tức là liền mạch. Ta có thể tưởng tượng rằng ta có thể vẽ đoạn đồ thị này bằng một nét bút liền mạch mà không cần nhấc bút khỏi trang giấy. Ta cũng có thể tưởng tượng nếu đồ thị này là một con đường thì ta có thể đi từ đầu này tới đầu kia của một con đường này mà không gặp một trở ngại nào. Đồ thị đó chẳng qua là một đoạn số thực bị uốn cong.

Ví dụ 2.2.12. Chứng tỏ rằng phương trình

$$3x^3 - 2017x^2 + 2018x - 2 = 0$$

có một nghiệm nằm giữa 0 và 1.

Đặt $f(x) = 3x^3 - 2017x^2 + 2018x - 2$. Ta có $f(0) = -2 < 0$ và $f(1) = 2 > 0$. Vì f là một hàm số liên tục và $f(0) < 0 < f(1)$ nên Định lý giá trị trung gian khẳng định có một số $c \in (0, 1)$ sao cho $f(c) = 0$.



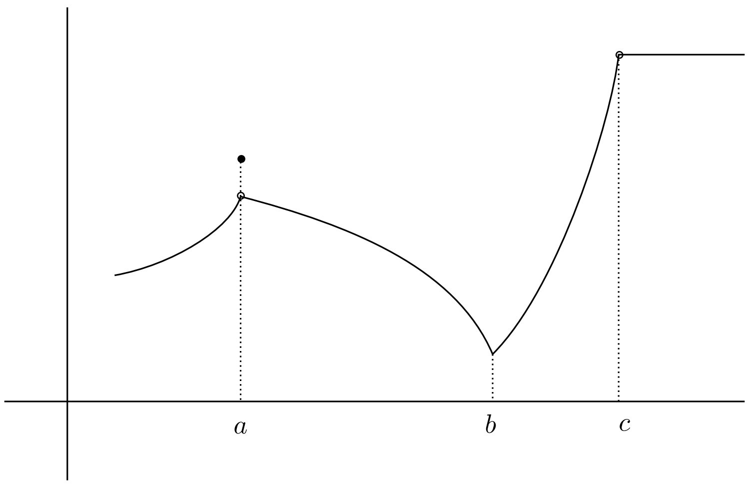
Hình 2.2.3: Minh họa hình học định lý giá trị trung gian: Đường nằm ngang $y = N$ nằm giữa $y = f(a)$ và $y = f(b)$ luôn cắt đồ thị hàm số f ở ít nhất một điểm.

Ta có thể vẽ đồ thị của hàm để dự đoán và minh họa cho tính toán trên.

Bằng cách thu nhỏ khoảng chắc chắn chứa nghiệm ta có thể đưa ra một giá trị gần đúng của nghiệm, đặc biệt thuận tiện nếu ta dùng đồ thị.

Bài tập

2.2.1. Từ đồ thị của hàm trong Hình 2.2.4 tìm điểm tại đó hàm không liên tục và giải thích tại sao.



Hình 2.2.4

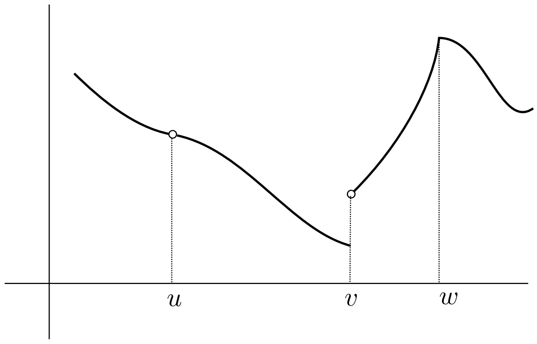
2.2.2. Từ đồ thị của hàm trong Hình 2.2.5 tìm điểm tại đó hàm không liên tục và giải thích tại sao.

2.2.3. Cho

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & \text{nếu } x \le -1 \\ x^3 - 1 & \text{nếu } x > -1. \end{cases}$$

(a) Tìm $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ and $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$.

(b) Hàm $f(x)$ liên tục ở đâu? Không liên tục ở đâu?



Hình 2.2.5

2.2.4. Xét tính liên tục của hàm tại điểm a cho trước.

(a)
$$f(x) = \frac{1}{x+2017}, a = -2017.$$

(b)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+2017} & \text{nếu } x \neq -2017 \\ 2018 & \text{nếu } x = -2017, \end{cases} \quad a = -2.$$

(c)
$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 2 & \text{nếu } x < 1 \\ 2 - 1/x & \text{nếu } x \geq 1, \end{cases} \quad a = 1.$$

(d)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-x}{x^4-1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ 1/2 & \text{nếu } x = 1, \end{cases} \quad a = 1.$$

(e)
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x^2 - x) & \text{nếu } x < 0 \\ 0 & \text{nếu } x = 0 \\ -(x+1)^3 - x^2 + 2 & \text{nếu } x > 0, \end{cases} \quad a = 0.$$

(f)
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-3x-4}{\sqrt{x}-2} & \text{nếu } x \neq 4 \\ 10 & \text{nếu } x = 4, \end{cases} \quad a = 4.$$

2.2.5. Xét sự liên tục của các hàm số sau:

(a)
$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{nếu } x < 1 \\ \sqrt{x+3} & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$$

(b)
$$f(x) = \begin{cases} \sin(x/2 + \cos x) & \text{nếu } x < \pi/2 \\ \cos(x/2 + \sin x - 1) & \text{nếu } x \geq \pi/2. \end{cases}$$

(c)
$$f(x) = |x|.$$

(d)

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(e)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

2.2.6. Cho

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - x - 2}{x + 1} & \text{nếu } x \leq -1 \\ 3 & \text{nếu } x > -1. \end{cases}$$

(a) Tìm $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$.
(b) f liên tục ở đâu?

2.2.7. Cho

$$f(x) = \begin{cases} 3^x & \text{nếu } x \leq -1 \\ 3 - x & \text{nếu } 1 \leq x \leq 4 \\ \sqrt{x} & \text{nếu } x > 4. \end{cases}$$

Tìm các điểm gián đoạn của hàm số. Trong các điểm gián đoạn, tại những điểm nào hàm số liên tục bên trái, bên phải hoặc không liên tục ở bên nào cả?

2.2.8. Tính các giới hạn sau:

(a) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{5 + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{7 + x}}$.

(b) $\lim\limits_{x \to \pi} \sin(x + \sin x)$.

(c) $\lim\limits_{x \to \pi/4} e^x \cos^2 x - x^2$.

(d) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 4x + 1)^{-7}$.

(e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(2x)}{3x}$.

(f) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{5x}$.

2.2.9. Giả sử f và g là các hàm số liên tục sao cho $g(1) = 2017$ và $\lim_{x \to 1}[f^2(x) - 2f(x)g(x)] = -2017^2$. Tính $f(1)$.

2.2.10. Tìm giá trị của c sao cho hàm số sau liên tục trên $(-\infty, \infty)$:

$$f(x) = \begin{cases} c^2x^2 + 2cx & \text{nếu } x < 1 \\ 4x^3 - cx & \text{nếu } x \geq 1. \end{cases}$$

2.2.11. Tìm giá trị của a, b sao cho hàm số sau liên tục trên $(-\infty, \infty)$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x - 1} & \text{nếu } x < 1 \\ ax^2 - bx + 4 & \text{nếu } 1 \leq x < 2 \\ 3x + a - b & \text{nếu } x \geq 2. \end{cases}$$

2.2.12. Lúc 15 tuổi, Hương cao gấp đôi cậu em 5 tuổi Huy, nhưng vào sinh nhật thứ 21 của Huy thì Huy đã cao hơn chị 6 cm. Giải thích tại sao có một thời điểm mà cả hai đã cao bằng nhau.

2.2.13. Hãy dùng máy tính vẽ đồ thị của các hàm sau để dự đoán khoảng chứa nghiệm, sau đó sử dụng định lý giá trị trung gian để chỉ ra sự tồn tại một nghiệm. Hơn nữa, hãy thu nhỏ khoảng chứa nghiệm để đưa ra một giá trị gần đúng của nghiệm.

(a) $2x^5 + x - 2 = 0$.

(b) $\sqrt[3]{x} = 2017 - x - x^2$.

(c) $\cos x = x$.

(d) $x^3 - 3x - \sin x - 1 = 0$.

(e) ˘$x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$.

2.2.14. (a) Phác họa đồ thị của hàm $y = x^2 - 1$ và hàm $y = x^3 + 2$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

(b) Chứng tỏ hai đồ thị có ít nhất một giao điểm.

2.2.15. Chứng tỏ phương trình $x^5 - 4x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$ có ít nhất một nghiệm trong khoảng $[0, 1]$.

2.2.16. Cho $f(x) = x^3 + 2017\cos x$, chứng minh rằng tồn tại số c sao cho $f(c) = 2000$.

2.2.17. Giả sử f liên tục trên $[1, 10]$ và phương trình $f(x) = 2017$ chỉ có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = 7$. Nếu $f(2) = 2018$, giải thích vì sao $f(5) > 2017$.

2.2.18. Chứng minh các phương trình sau luôn có nghiệm thực với n là số nguyên dương lẻ.

(a) $\cos(x^n + 1) = x^n + 1$.

(b) $x^n - x^2 + 4x + 1 = 0$.

2.2.19. Nếu a và b là các số thực dương, chứng minh phương trình

$$\frac{a}{x^5 + 3x^4 - 2} + \frac{b}{2x^5 + x - 3} = 0$$

có ít nhất một nghiệm trong khoảng $(-1, 1)$.

2.2.20. Chứng tỏ phương trình

$$\frac{1}{1-x} + \frac{2}{2-x} + \frac{3}{3-x} = 0$$

có ít nhất hai nghiệm trên $(1, 2) \cup (2, 3)$.

2.2.21. * Chứng tỏ mọi đa thức bậc lẻ đều có ít nhất một nghiệm.

Chương 3
Phép tính vi phân

3.1 Đạo hàm và các tính chất

3.1.1 Định nghĩa đạo hàm

Ở Mục 2.1.1 của chương trước, cả hai bài toán tìm hệ số góc của tiếp tuyến và tìm vận tốc tức thời đều đưa về một bài toán chung về tỉ lệ thay đổi: Tìm giới hạn của đại lượng

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

khi x tiến về a. Số thực này phản ánh đại lượng $f(x)$ thay đổi như thế nào khi x thay đổi.

Để giúp người đọc củng cố, một lần nữa ta nhắc lại minh họa của khái niệm này trong bài toán tìm độ nghiêng và tiếp tuyến của đồ thị hàm f tại điểm x_0. Xem Hình 3.1.1. Chúng ta lấy một dãy các số nhỏ h_n hội tụ về 0 và từ đó có các cát tuyến l_n đi qua hai điểm khác nhau $(x_0, f(x_0))$ và $(x_0+h_n, f(x_0+h_n))$ trên đồ thị hàm f. Các cát tuyến này tiến dần về tiếp tuyến với đồ thị hàm số f tại $(x_0, f(x_0))$ nên hệ số góc của chúng cũng tiến dần về hệ số góc của tiếp tuyến. Hệ số góc của l_n là

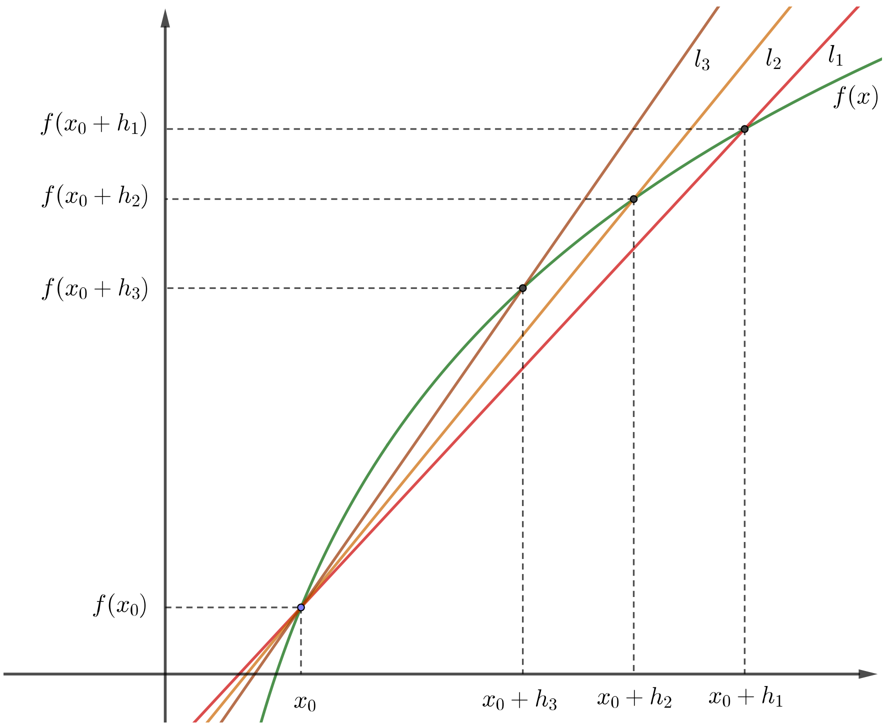
$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{(x_0+h_n)-x_0}=\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}.$$

Vì thế hệ số góc của tiếp tuyến là giới hạn của số này khi h_n tiến dần về 0.

Định nghĩa 3.1.1. ***Đạo hàm*** của hàm f tại x_0 được cho bởi số thực

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

nếu giới hạn tồn tại. Khi giới hạn này tồn tại, chúng ta nói rằng hàm số f là ***có đạo hàm*** hay ***khả vi*** tại x_0 với đạo hàm $f'(x_0)$.



Hình 3.1.1: Bài toán hệ số góc của tiếp tuyến.

Ta cũng có thể viết với $h = x - x_0$:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.}$$

Một cách viết khác nữa là như sau. Giả sử biến x thay đổi một lượng Δx từ giá trị x_0[1]. Lượng thay đổi tương ứng của giá trị của hàm $y = f(x)$ là $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Đạo hàm của của f tại x_0 là tỉ lệ của thay đổi của y so với thay đổi của x tại x_0:

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.}$$

Vậy đạo hàm của một hàm tại một điểm đo tỉ lệ giữa thay đổi của giá trị của hàm so với thay đổi của giá trị của biến tại điểm đó. Một cách ngắn gọn: ***đạo hàm đo tỉ lệ thay đổi***, hay ***đạo hàm đo tốc độ biến thiên***.

Vì đạo hàm đo sự thay đổi nên nó thường được dùng mỗi khi người ta cần khảo sát sự thay đổi ở mức độ chính xác cao. Điều này giải thích phạm vi ứng dụng và tầm quan trọng to lớn của đạo hàm nói riêng và phép tính vi tích phân nói chung. Khái niệm đạo hàm và vi phân và các ứng dụng được xây dựng và phát triển từ giữa thế kỉ 17 trong thời đại Khai sáng ở Châu Âu, là một cơ sở cho những tiến bộ khoa học kỹ thuật và xã hội vượt bậc ngay sau đó.

[1]Người ta thường sử dụng chữ cái Hy Lạp Δ (đọc là Delta) để chỉ lượng thay đổi của một đại lượng.

Với khái niệm chính xác về đạo hàm, giờ ta có thể định nghĩa chính xác các các khái niệm tiếp tuyến và vận tốc.

Giả sử hàm f khả vi tại x_0, ta định nghĩa ***hệ số góc của tiếp tuyến*** của đồ thị của hàm số f tại $(x_0, f(x_0))$ là số thực $f'(x_0)$. Vậy đường thẳng tiếp tuyến của đồ thị của hàm f tại x_0 có phương trình

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).}$$

Nếu f là vị trí của vật trên đường thẳng thực tại thời điểm t là hàm khả vi tại t thì số thực $f'(t)$, như trong vật lý, được gọi là ***vận tốc*** của vật tại thời điểm t. Nó cho thấy vị trí của vật thay đổi theo thời gian nhanh hay chậm.

Ví dụ 3.1.2. Cho f là một hàm hằng, tức là có số thực c sao cho $f(x) = c$ với mọi số thực x. Tìm đạo hàm của f.

Theo định nghĩa của đạo hàm, ta có tại x_0 bất kì:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Vậy $f'(x_0) = 0$ tại mọi $x_0 \in \mathbb{R}$. Điều này hoàn toàn phù hợp với ý nghĩa của đạo hàm về mặt định lượng (tỉ lệ thay đổi bằng 0 nếu giá trị hàm không đổi), hình học (tiếp tuyến của đường thẳng nằm ngang thì nằm ngang), hay vật lý (vận tốc của vật cố định bằng 0).

Ví dụ 3.1.3. Dùng định nghĩa đạo hàm để tính đạo hàm của $f(x) = x$ tại điểm $x = x_0$.

Ta có

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h) - h}{h} = h + 2x_0.$$

Do đó,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x_0 + h) - x_0}{h} = 1.$$

Vậy $f'(x_0) = 1$ với x_0 tùy ý.

Giải thích bằng hình học, đồ thị của hàm $f(x) = x$ là một đường thẳng, nên có tiếp tuyến tại mọi điểm là chính đường thẳng này, với hệ số góc bằng 1.

Về mặt vật lý, $f(x) = x$ miêu tả một chuyển động đều, khi x tăng 1 thì $f(x)$ tăng 1, nên có vận tốc bằng 1.

Ví dụ 3.1.4. Dùng định nghĩa đạo hàm để tính đạo hàm của $f(x) = x^2$ tại điểm $x = x_0$.

Đầu tiên ta có

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = (x_0 + h)^2 - x_0^2 = h^2 + 2x_0 h,$$

nên

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{h^2 + 2x_0 h}{h} = h + 2x_0.$$

Do đó,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}(h+2x_0)=2x_0.$$

Điều đó có nghĩa là $f(x)=x^2$ có đạo hàm tại $x=x_0$ và $f'(x_0)=2x_0$ với x_0 tùy ý.

Ví dụ 3.1.5. Với số nguyên dương k, tính đạo hàm của hàm $f(x)=x^k$ tại $x=x_0$.

Chúng ta nhắc lại Công thức nhị thức Newton (1.1.11): với k là số nguyên dương bất kỳ thì

$$(x+h)^k=\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}x^{k-j}h^j.$$

Cũng như ví dụ trên, ta tính

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}&=\frac{(x_0+h)^k-x_0^k}{h}\\&=\frac{\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}x_0^{k-j}h^j\right)-x_0^k}{h}\\&=\frac{\sum_{j=1}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}x_0^{k-j}h^j}{h}\\&=\frac{h\sum_{j=1}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}x_0^{k-j}h^{j-1}}{h}\\&=\sum_{j=1}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}x_0^{k-j}h^{j-1}\\&=kx_0^{k-1}+\sum_{j=2}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}x_0^{k-j}h^{j-1}.\end{aligned}$$

Do đó,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(kx_0^{k-1}+\sum_{j=2}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}x_0^{k-j}h^{j-1}\right)=kx_0^{k-1}.$$

Vậy hàm số $f(x)=x^k$ có đạo hàm tại x_0 bất kỳ là $f'(x_0)=kx_0^{k-1}$.

Người đọc cũng có thể thử làm tính toán này bằng cách thay vì dùng nhị thức Newton thì dùng hằng đẳng thức

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Ví dụ 3.1.6. Tính đạo hàm của $f(x)=\sqrt{x}$.

Ta tính

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}.\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}.
\end{aligned}$$

Chúng ta thấy rằng giới hạn trên tồn tại nếu và chỉ nếu $x > 0$, vậy $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ xác định với mọi $x > 0$.

Sau một số ví dụ ta có thể thấy để tìm công thức chung cho đạo hàm thì công thức sau là tiện hơn cả

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

vì ta không cần phải giới thiệu thêm một biến mới x_0. Ngoài ra công thức này cũng thể hiện rõ vai trò của đạo hàm như là một hàm mới, dẫn xuất từ hàm ban đầu.[2]

Sự khả vi và sự liên tục

Ta nói hàm số f là ***khả vi*** (có vi phân) tại x nếu hàm f có đạo hàm tại x. Ta có thể đoán rằng để f khả vi tại x, tức là để $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ có giới hạn khi h tiến về 0, thì $f(x+h)-f(x)$ phải tiến về 0, do đó hàm f phải liên tục tại x. Thực vậy, ta có:

Định lý 3.1.7 (Khả vi thì liên tục). *Nếu hàm số f khả vi tại x thì f liên tục tại x.*

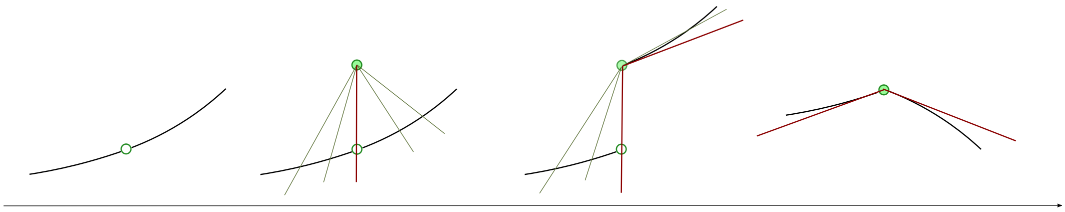
Chứng minh. Nếu f có đạo hàm tại x thì

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}[f(x+h)-f(x)] &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}h\right]\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}h\\
&= f'(x)\cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Vậy $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, nên f liên tục tại x. □

Mệnh đề phản đảo là "không liên tục thì không khả vi". Ta có thể giải thích điều này trong Hình 3.1.2.

[2]Từ "đạo hàm" có thể có nghĩa là con đường của hàm, có lẽ bắt nguồn từ thuật ngữ ban đầu mà Newton đưa ra là fluxion. Ngày nay thuật ngữ đạo hàm trong tiếng Anh là derivative, có nghĩa là dẫn xuất, từ một cái khác mà ra: đạo hàm của một hàm là một hàm dẫn xuất từ hàm ban đầu.



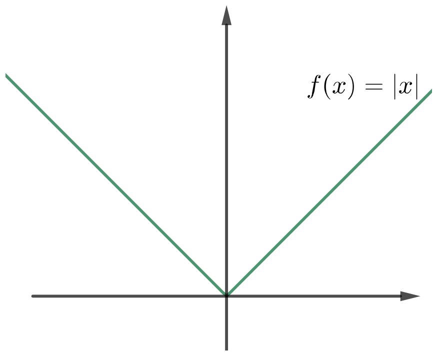
Hình 3.1.2: Các trường hợp đồ thị của hàm số không khả vi: không liên tục (đồ thị có lỗ thủng) hoặc liên tục nhưng không khả vi (đồ thị có góc). Trong các trường hợp này không tồn tại tiếp tuyến (kể cả trường hợp đường cát tuyến dần tới một đường thẳng đứng).

Như ta biết sự khả vi tại một điểm nào của hàm số về mặt hình học có nghĩa là đồ thị của hàm số đó có tiếp tuyến tại điểm này. Đồ thị của hàm khả vi không được có những "góc nhọn" mà ở đó tiếp tuyến ở bên trái và tiếp tuyến ở bên phải khác nhau.

Về mặt vật lý, nếu một chuyển động là không liên tục thì hẳn khó mà bàn tới vận tốc của chuyện động đó.

Mặt khác, quan sát trên cũng chỉ ra là sự liên tục không dẫn tới sự khả vi. Dưới đây là một ví dụ cụ thể cho hiện tượng này.

Ví dụ 3.1.8. Xét hàm số $f(x) = |x|$.



Hình 3.1.3: Đồ thị của hàm $f(x) = |x|$ có một góc nhọn tại 0 nên liên tục mà không khả vi.

Ta thấy đồ thị của hàm số này không có lỗ hay đứt, nên hàm là liên tục tại mọi nơi. Tuy nhiên đồ thị này có một góc nhọn tại $(0, 0)$. Ta nhận thấy tại $(0, 0)$ tiếp tuyến bên trái khác với tiếp tuyến bên phải, do đó không có một tiếp tuyến nào ở đó.

Chính xác thì
$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$
không tồn tại, như ta đã thấy ở Ví dụ 2.1.23. Hàm trị tuyệt đối không có đạo hàm tại 0 mặc dù liên tục tại đó.

3.1.2 Tính chất của đạo hàm

Sau đây là các công thức để làm các tính toán cơ bản trên đạo hàm.

Định lý 3.1.9. *Cho các hàm số f và g có đạo hàm tại x, khi đó trong các công thức sau hàm bên vế trái có đạo hàm và đạo hàm bằng vế phải:*

(a)

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

(b)

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

(c)

$$(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$$

trong đó α là một hằng số thực

(d)

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

(e)

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{g(x)^2}.$$

Chứng minh. (a) Ta viết

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to\infty} \frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} &= \lim_{h\to\infty}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\
&= \lim_{h\to\infty}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to\infty}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\
&= f'(x)+g'(x).
\end{aligned}$$

Quy tắc cho hiệu và quy tắc cho bội nhân hằng cũng đơn giản tương tự.

(d) Với quy tắc cho tích, ta tính toán như sau:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)+f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\\
&= \lim_{h\to 0} f(x+h)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x_0)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= f(x)g'(x)+g(x)f'(x).
\end{aligned}$$

Chú ý rằng ở bước cuối ta đã dùng $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$, tức là dùng tính liên tục của f tại x. Ta có tính liên tục này là vì f được giả sử là khả vi tại x.

(e) Với quy tắc cho thương, ta tính toán như sau:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{hg(x+h)g(x)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{g(x+h)g(x)} \\
&= \frac{g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}{\lim_{h\to 0} g(x+h)g(x)} \\
&= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.
\end{aligned}$$

□

Ví dụ 3.1.10. Bây giờ ta có thể tính nhiều đạo hàm.

(a)

$$\begin{aligned}
(x^7 + 3x^6 - 4x^2 + 5)' &= (x^7)' + (3x^6)' - (4x^2)' + 5' \\
&= (x^7)' + 3(x^6)' - 4(x^2)' + 5' \\
&= 7x^6 + 18x^5 - 8x.
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
((x^2+3x-1)(x^4-8x))' &= (x^2+3x-1)'(x^4-8x) + (x^2+3x-1)(x^4-8x)' \\
&= (2x+3)(x^4-8x) + (x^2+3x-1)(4x^3-8) \\
&= 6x^5 + 15x^4 - 4x^3 - 24x^2 - 48x + 8.
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)' &= \frac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{(2x)(x^2+1) - (x^2-1)(2x)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{4x}{(x^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

Bài tập

3.1.1. Bằng ý nghĩa hình học của đạo hàm, hãy giải thích vì sao đạo hàm của hàm số hằng bằng 0, và đạo hàm của hàm số tuyến tính $f(x) = mx + b$ bằng m.

3.1.2. Cho hàm số f định bởi với mọi số thực x, $f(x) = x^2 + x$. Cho hai điểm $P = (1, 2)$ và $Q = (1 + h, f(1 + h))$, với $h \neq 0$ thuộc đồ thị của f.

(a) Tính theo h hệ số góc (độ dốc) của cát tuyến PQ của đồ thị hàm số f.

(b) Sử dụng định nghĩa, tính hệ số góc của tiếp tuyến tại P của đồ thị hàm số f.

3.1.3. Hãy giải thích ý nghĩa của $f'(500) = 5$, nếu:

(a) $f(t)$ là vị trí của một chiếc xe (theo mét) tại thời điểm t (theo giây).

(b) $f(x)$ là lợi nhuận (theo nghìn đồng) khi bán được x nghìn cái bánh.

3.1.4. Dùng định nghĩa của đạo hàm, tính đạo hàm của hàm số

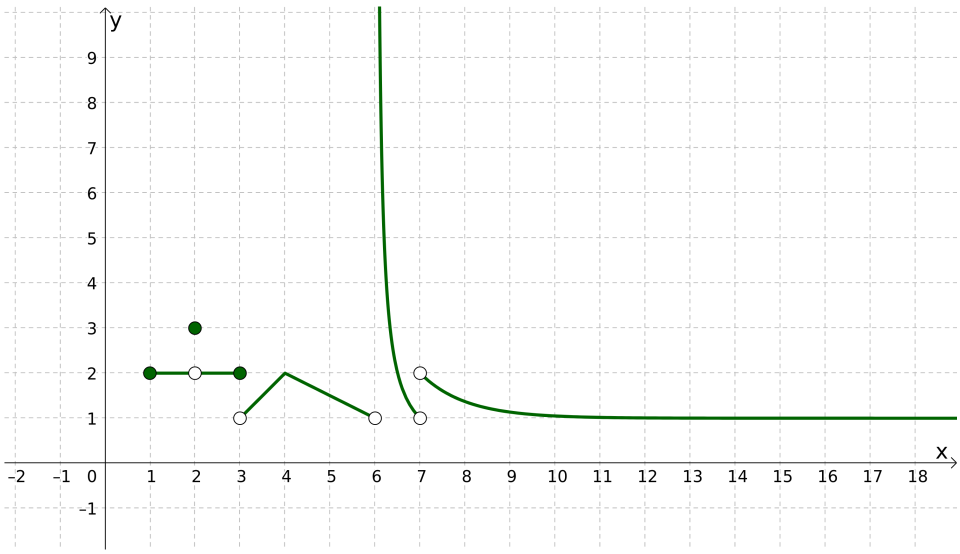
(a) $f(x) = x^3$.

(b) $f(x) = x^4$.

(c) $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$.

3.1.5. Từ đồ thị của hàm trong Hình 2.2.4 và Hình 2.2.5 tìm điểm tại đó hàm không khả vi, và giải thích tại sao.

3.1.6. Từ đồ thị của hàm trong Hình 3.1.4 tìm điểm tại đó hàm khả vi và không khả vi, và giải thích tại sao.



Hình 3.1.4

3.1.7. Hãy phác họa đồ thị của mỗi hàm số sau đây, và khảo sát tính liên tục hay khả vi của mỗi hàm.

(a) $y = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ -x^2, & x < 0. \end{cases}$

(b) $y = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0, \\ -x^2 - 1, & x < 0. \end{cases}$

(c) $y = \begin{cases} x^3, & x \leq 1, \\ x, & x > 1. \end{cases}$

(d) $y = \begin{cases} x^3, & x < 1 \\ 3x - 2, & x \geq 1. \end{cases}$

3.1.8. Xét $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Chứng tỏ rằng $f'(0)$ không tồn tại. Hãy vẽ đồ thị để minh họa.

3.1.9. Xét $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Chứng tỏ rằng $f'(0)$ không tồn tại. Hãy vẽ đồ thị để minh họa.

3.1.10. Hàm $f(x) = \sqrt[5]{x}$ có khả vi tại $x = 0$ hay không? Hãy vẽ đồ thị để minh họa.

3.1.11. Chứng tỏ rằng hàm số $f(x) = |x - 6|$ liên tục tại mọi nơi nhưng không khả vi tại $x = 6$. Hãy phác họa đồ thị của hàm số này.

3.1.12. Cho

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x-2}{x-3}, & 0 < x < 3 \\ \frac{x}{2}, & x \geq 3. \end{cases}$$

Hàm số khả vi tại đâu?

3.2 Các công thức cho đạo hàm

3.2.1 Đạo hàm của hàm hợp

Giả sử ta muốn tính đạo hàm của hàm $y = (x^2 + 1)^{100}$. Ta có thể khai triển hàm này thành dạng một đa thức rồi áp dụng các công thức đạo hàm, nhưng công thức sẽ rất dài dòng vì số mũ quá lớn. Ta có một cách tiếp cận khác dùng khái niệm hàm hợp như sau. Ta đặt $u = x^2 + 1$, thì $y = u^{100}$. Ta biết cách tính đạo hàm của u theo x và đạo hàm của y theo u. Liệu ta có tính được đạo hàm của hàm hợp y theo x?

Dùng kí hiệu vi phân của Leibniz, ta có thể đặt vấn đề như sau: Giả sử y là hàm của u, và u là hàm của x, thì tỉ lệ thay đổi của y so với x bằng bao nhiêu? Ta có một lý luận đơn giản như sau. Ta viết đẳng thức của các số thực:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Với giả thiết u khả vi theo x thì u liên tục theo x, nên $\Delta u \to 0$ khi $\Delta x \to 0$. Lấy giới hạn hai vế của đẳng thức trên khi $\Delta x \to 0$ ta được

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Lý luận trên không thực hiện được nếu $\Delta u = 0$ vì khi đó ta đã chia cho 0. Ta đưa ra một chứng minh đầy đủ bằng cách viết lại lý luận trên một cách chính xác hơn dưới đây.

Định lý 3.2.1 **(Quy tắc đạo hàm hàm hợp[3]).** *Nếu hàm số g khả vi tại x và hàm số f khả vi tại $g(x)$ thì hàm hợp $f \circ g$ khả vi tại x và*

$$\boxed{(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).}$$

[3]còn gọi là quy tắc xích, trong tiếng Anh gọi là chain rule

Phần thảo luận trên cho thấy ta còn có thể xem công thức đạo hàm hàm hợp là công thức tính đạo hàm khi đổi biến.

Chứng minh. Trước hết ta lặp lại quan sát đơn giản sau. Với hàm f bất kì khả vi tại $x = a$ thì
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = f'(a),$$
nên đặt $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ và
$$\epsilon(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(a),$$
thì
$$\Delta y = [f'(a) + \epsilon(\Delta x)]\Delta x$$
với $\lim_{\Delta x \to 0} \epsilon(\Delta x) = 0$.

Bây giờ đặt $u = g(x)$ và áp dụng quan sát trên tại $x = a$, $\Delta u = g(a+\Delta x) - g(x)$, thì
$$\Delta u = [g'(a) + \epsilon_1(\Delta x)]\Delta x$$
với $\epsilon_1(\Delta x) \to 0$ khi $\Delta x \to 0$.

Đặt $y = f(u)$, và lại áp dụng quan sát trên tại $u = b = g(a)$, $\Delta y = f(b + \Delta u) - f(b)$, thì
$$\Delta y = [f'(b) + \epsilon_2(\Delta u)]\Delta u$$
với $\epsilon_2(\Delta u) \to 0$ khi $\Delta u \to 0$.

Kết hợp hai đẳng thức trên ta được
$$\Delta y = [f'(b) + \epsilon_2(\Delta u)][g'(a) + \epsilon_1(\Delta x)]\Delta x.$$
Do đó
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [f'(b) + \epsilon_2(\Delta u)][g'(a) + \epsilon_1(\Delta x)].$$
Lấy giới hạn khi Δx tiến về 0, lưu ý như trên rằng u khả vi theo x nên u liên tục theo x do đó khi $\Delta x \to 0$ thì $\Delta u \to 0$, ta được
$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(b)g'(a) = f'(g(a))g'(a).$$
Đây là công thức đạo hàm của hàm hợp. □

Ví dụ 3.2.2. Bây giờ ta quay lại câu hỏi lúc nãy, tính đạo hàm của $y = (x^2+1)^{100}$. Với $u = x^2 + 1$, ta có
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 100u^{99}2x = 100(x^2 + 1)^{99}2x.$$

Viết cách khác, nếu ta đặt $f(x) = x^{100}$, $g(x) = x^2 + 1$, thì $f'(x) = 100x^{99}$,

$g'(x) = 2x$, và

$$[(x^2+1)^{100}]' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) = 100(x^2+1)^{99}2x = 200x(x^2+1)^{99}.$$

Ví dụ 3.2.3. Ta tính được

$$((x^3-4x^2+1)^5)' = 5(x^3-4x^2+1)^4(x^3-4x^2+1)' = 5(x^3-4x^2+1)^4(3x^2-8x).$$

Tổng quát hóa, ta có công thức thường dùng cho đạo hàm của hàm lũy thừa: với số nguyên dương k thì

$$\boxed{\left[f(x)^k\right]' = kf(x)^{k-1}f'(x).}$$

3.2.2 Đạo hàm của hàm ngược

Nếu hàm số $x = g(y)$ là hàm ngược của hàm số $y = f(x)$ thì ta có

$$g(f(x)) = x.$$

Nếu cả hai hàm đều khả vi thì lấy đạo hàm hai vế của đẳng thức trên và áp dụng quy tắc đạo hàm của hàm hợp ta được

$$g'(f(x))f'(x) = 1$$

hay

$$g'(y)f'(x) = 1.$$

Vậy ta có một công thức đơn giản:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Ta có một lý luận sơ lược khác như sau. Viết

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Lấy giới hạn, giả sử $\Delta y \to 0$ dẫn tới $\Delta x \to 0$, tức là giả sử hàm ngược là liên tục, thì ta thu được

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

hay

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}.$$

Các lý luận trên có dùng một số giả thiết, như sự khả vi hay sự liên tục của hàm ngược. Dưới đây ta đưa ra một phát biểu tổng quát hơn và viết ra chứng minh chi tiết hơn.

Định lý 3.2.4. *Giả sử $f : (a, b) \to (c, d)$ là một song ánh liên tục và f^{-1} là hàm số ngược của f. Nếu f có đạo hàm tại $x \in (a, b)$ và $f'(x) \neq 0$, thì f^{-1} có đạo hàm tại $y = f(x)$, và*

$$\boxed{(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.}$$

Chứng minh. * Cho $y \in (c, d)$, xét Δy đủ nhỏ sao cho $y + \Delta y \in (c, d)$. Đặt $x = f^{-1}(y)$ và đặt $\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)$ thì $f^{-1}(y + \Delta y) = x + \Delta x$, do đó $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Ta có

$$\begin{aligned}(f^{-1})'(y) &= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f^{-1}(y+\Delta y) - f^{-1}(y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{\Delta x}{f(x+\Delta x) - f(x)} \\ &= \lim_{\Delta y\to 0} \frac{1}{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)}.\end{aligned}$$

Ở trên ta đã sử dụng một tính chất là nếu một song ánh trên một khoảng là liên tục thì ánh xạ ngược cũng liên tục, do đó khi $\Delta y \to 0$ thì $\Delta x \to 0$. Chứng minh tính chất này khó hơn mức của môn học này một chút, người đọc quan tâm có thể xem chẳng hạn ở [Spi94, tr. 232] hoặc [TPTT02, tr. 60]. Ngoài ra vì f là song ánh nên khi $\Delta y \neq 0$ thì $\Delta x \neq 0$. □

Ta sẽ dùng công thức đạo hàm của hàm ngược để tính đạo hàm của một số hàm sơ cấp ở mục tiếp theo.

3.2.3 Đạo hàm của hàm sơ cấp

Đạo hàm của hàm lượng giác

Ví dụ 3.2.5. Ta tính đạo hàm của hàm sin. Ta có

$$\begin{aligned}\sin'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} \\ &= \sin x \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h}.\end{aligned}$$

Ta đã biết giới hạn đặc biệt ở Công thức (2.2.1):

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Dùng công thức lượng giác mà ta có thể rút ra được từ các tính chất của hàm lượng giác ở Mục 1.2.2

$$\cos(2a) = \cos(a-(-a)) = \cos(a)\cos(-a) + \sin a \sin(-a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2\sin^2 a,$$

ta được

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\cos h-1}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin^2(\frac{h}{2})}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\sin^2(\frac{h}{2})}{(\frac{h}{2})^2}\cdot\frac{h}{2}\\ &= -\lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}}\right)^2\cdot\frac{h}{2} = 1\cdot 0 = 0.\end{aligned}$$

Vậy

$$\boxed{\sin' x = \cos x.}$$

Ví dụ 3.2.6. Ta tính đạo hàm của hàm cos. Vì $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$ nên theo đạo hàm của hàm hợp:

$$\cos' x = \sin'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Vậy

$$\boxed{\cos' x = -\sin x.}$$

Ví dụ 3.2.7. Ta tính đạo hàm của hàm tan. Vì $\tan = \frac{\sin}{\cos}$ nên dùng công thức đạo hàm của thương ta được:

$$\tan' x = \frac{\sin' x\cos x - \sin x\cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Vậy

$$\boxed{\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x}.}$$

Ví dụ 3.2.8. Xét hàm số $x = g(y) = \arcsin y$ với $-1 < y < 1$, là hàm số ngược của hàm số $y = f(x) = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Theo công thức đạo hàm của hàm số ngược ta có

$$\arcsin' y = g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Vậy

$$\boxed{\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1, 1).}$$

Tương tự ta cũng tính được (Bài tập 3.2.8):

$$\boxed{\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1, 1).}$$

$$\boxed{\arctan' x = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}.}$$

Đạo hàm của hàm mũ và hàm log

Ta có công thức

$$\boxed{(e^x)' = e^x.}$$

Công thức đơn giản này là một lí do chính mà cơ số e được dùng phổ biến hơn các cơ số khác.

Giải thích. Trong các tài liệu nâng cao hơn như [TPTT02, tr. 83], người ta có thể chứng minh chặt chẽ được công thức trên. Ở đây để tham khảo ta đưa ra một cách thu được công thức trên (chưa phải một chứng minh) dùng các tính chất số học của hàm mũ, giả thiết hàm e^x và hàm ln là liên tục, và rằng $\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$ (xem [Pis69, tr. 53]), như trong Sách giáo khoa Giải tích 12 [SGKTH].

Đặt $f(x) = e^x$. Ta có

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} e^x = f'(0)e^x.$$

Ta tính $f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h}$. Đặt $u = e^h - 1$, thì $h = \ln(1+u)$ và khi $h \to 0$ thì do f là hàm liên tục nên $u \to e^0 - 1 = 0$. Suy ra

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\ln(1+u)} = \frac{1}{\lim_{u\to 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}.$$

Bây giờ đặt $x = \frac{1}{u}$ ta được

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Do ln liên tục nên ta được $\lim_{u\to 0} \ln(1+u)^{\frac{1}{u}} = \ln e = 1$. Vậy $\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$. □

Từ công thức trên ta tính được ngay đạo hàm của hàm mũ với cơ số a bất kì:

$$(a^x)' = (e^{\ln a^x})' = (e^{x\ln a})' = e^{x\ln a}(x\ln a)' = e^{x\ln a}\ln a = a^x \ln a.$$

Vậy

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a.}$$

Ví dụ 3.2.9. Xét hàm số $x = g(y) = \log_a y$, với $a > 0$ và $a \neq 1$. Đây là hàm số ngược của hàm số $y = f(x) = a^x$. Theo công thức đạo hàm của hàm số ngược ta có

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{a^x \ln a} = \frac{1}{y\ln a}.$$

Vậy

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}.}$$

Đặc biệt

$$\boxed{(\ln x)' = \frac{1}{x}.}$$

Đạo hàm của hàm lũy thừa

Xét hàm $y = x^r$ trong đó r là một số thực bất kì và $x > 0$. Ta viết được, dùng đạo hàm của hàm hợp:

$$(x^r)' = (e^{\ln x^r})' = (e^{r\ln x})' = e^{r\ln x}(r\ln x)' = x^r\frac{r}{x} = rx^{r-1}.$$

Vậy đây là công thức chung cho đạo hàm của hàm lũy thừa bất kì:

$$\boxed{(x^r)' = rx^{r-1},\ x > 0.}$$

Ví dụ 3.2.10. Với $x > 0$ thì

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Ví dụ 3.2.11. Chú ý là trong những trường hợp cụ thể công thức đạo hàm của hàm lũy thừa có thể đúng trên tập lớn hơn. Chẳng hạn với $x < 0$ thì

$$(\sqrt[3]{x})' = -(\sqrt[3]{-x})' = -((-x)^{1/3})' = -\frac{1}{3}(-x)^{-2/3}(-x)' = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2}.$$

Vậy

$$(\sqrt[3]{x})' = \frac{1}{3(\sqrt[3]{x})^2},\ x \neq 0.$$

3.2.4 Đạo hàm của hàm ẩn

Với một hàm số $y = f(x)$ thì giá trị của y phụ thuộc theo giá trị x và sự phụ thuộc này được biểu diễn một cách rõ ràng theo quy luật được cho bởi f, ta nói y là một ***hàm hiện*** (hay tường minh) của x. Tuy nhiên có rất nhiều sự phụ thuộc của y vào x mà ở đó chúng ta không có sẵn một công thức cụ thể f để biểu diễn sự phụ thuộc này, khi đó người ta thường nói y là ***hàm ẩn*** của x. Dưới những điều kiện nhất định, khi hàm ẩn được cho bởi một đẳng thức giữa x và y ta có thể lấy đạo hàm của cả hai vế của đẳng thức rồi giải ra đạo hàm của y theo x.

Ví dụ 3.2.12. Cho y phụ thuộc vào x theo phương trình

$$x^3 + y^3 = 6y.$$

Nếu muốn tính công thức hiện y theo x ta sẽ giải một phương trình bậc 3, một việc không dễ. Với giả thiết là y tồn tại trong một lân cận của x và khả vi theo x (giả thiết này là đúng dưới những điều kiện nhất định, được trình bày trong môn vi tích phân hàm nhiều biến, xem [Bmgt2]), lấy đạo hàm của cả hai vế phương trình theo x, thì ta được

$$3x^2 + 3y^2y'(x) = 6y'(x).$$

Từ đó

$$(3y^2 - 6)y'(x) = -3x^2,$$

hay

$$y'(x) = \frac{-3x^2}{3y^2 - 6}.$$

Ta vẫn chưa tính được đạo hàm $y'(x)$ một cách tường minh theo x, tuy nhiên tại mỗi điểm (x, y) cụ thể cho trước ta có thể tìm được giá trị của $y'(x)$. Chẳng hạn tại điểm $(\sqrt[3]{5}, 1)$ thỏa phương trình $x^3 + y^3 = 6y$, ta có

$$y'(\sqrt[3]{5}) = \frac{-3\sqrt[3]{25}}{3 \cdot 1 - 6} = \sqrt[3]{25}.$$

3.2.5 Đạo hàm bậc cao

Nếu f có đạo hàm f' trong một khoảng nào đó thì f' cũng là một hàm. Nếu f' có đạo hàm thì đạo hàm này được gọi là đạo hàm cấp hai của f. Ta ký hiệu $f'' = (f')'$.

Ví dụ 3.2.13. Đạo hàm cấp một của hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ là $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3$. Đạo hàm cấp một của f' là $f''(x) = (f')'(x) = (3x^2 + 6x + 3)' = 6x + 6$.

Đạo hàm cấp hai cho tốc độ biến thiên của đạo hàm cấp một.

Ví dụ 3.2.14. Xét hàm vị trí của vật trong không gian theo thời gian, thì đạo hàm bậc một là vận tốc chuyển động của vật, còn đạo hàm bậc hai là vận tốc thay đổi của vận tốc của vật, tức là gia tốc. Nếu gia tốc dương thì vận tốc của vật đang tăng, tức là vật đang tăng tốc. Ngược lại gia tốc âm thì vận tốc của vật đang giảm, vật đang giảm tốc.

Giả sử đạo hàm cấp $(n-1)$ được xác định, ký hiệu $f^{(n-1)}$, ta định nghĩa đạo hàm cấp n của f, ký hiệu là $f^{(n)}$, là đạo hàm của đạo hàm cấp $(n-1)$, tức là $f^{(n)} = \left[f^{(n-1)}\right]'$.

Ví dụ 3.2.15. Tính đạo hàm đến cấp n của hàm $f(x) = \sin x$.

Ta có $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, $f^{(5)}(x) = \cos x$. Ta nhận thấy các đạo hàm này lặp lại xoay vòng sau 4 lần lấy đạo hàm. Kết luận này có thể được trình bày chặt chẽ bằng cách dùng phép qui nạp toán học, cho phép ta kết luận với mỗi số nguyên dương n thì

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\sin x, & n=0 \mod 4,\\ \cos x, & n=1 \mod 4,\\ -\sin x, & n=2 \mod 4,\\ -\cos x, & n=3 \mod 4.\end{cases}$$

Ở đây $\mod 4$ (modulo) là phép lấy phần dư khi chia số nguyên cho 4.

Ví dụ 3.2.16. Không phải hàm nào cũng có đạo hàm cấp hai, cũng như không phải hàm nào cũng có đạo hàm cấp một. Xét hàm số sau

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, & x\geq 0,\\ \dfrac{-x^2}{2}, & x<0.\end{cases}$$

Ta tính được

$$f'(x)=\begin{cases}x, & x\geq 0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

Ta thấy $f'(x)=|x|$. Như đã tìm hiểu ở Ví dụ 3.1.8, hàm $|x|$ không có đạo hàm tại $x=0$. Do đó $f''(0)$ không tồn tại.

Bài tập

3.2.1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

(a) $3x^2-9x+7x^{2/5}-3x^{1/2}$.

(b) $4x^5-3x^{1/2}$.

(c) $(x^2+1)(x^2+3x+2)$.

(d) $(x^{1/2}+x^{-1/2})(4x^5-3\sqrt{x})$.

(e) $\dfrac{1}{x^2+\sqrt{x}}$.

(f) $\sqrt{x}\sin x$.

(g) $\dfrac{x}{1+\tan x}$.

(h) $\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$.

(i) $(x^4+3x^2-2)^5$.

(j) $\sqrt[3]{x^3+\sin x}$.

(k) $\cos(a^2+x^2)$.

(l) $(x^2+1)^3(\sin x)^2$.

(m) $\sin\sqrt{x^2+1}$.

(n) $x\sin\frac{1}{x}$.

(o) $\cos^4(\sin^3 x)$.

(p) $\cos\sqrt{\sin(\tan\pi x)}$.

(q) $\sqrt[2018]{\ln\left(2017+x^2\right)e^{2014x}}$.

(r) x^x.

(s) $e^{e^{e^x}}$.

3.2.2. Hãy tìm phương trình của tiếp tuyến với đồ thị của mỗi hàm số sau tại giá trị x cho trước.

(a) $f(x)=x^2$, $x=3$.

(b) $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$, $x = 1$.

3.2.3. Cho hàm g khả vi, $g'(1) = g(1) = 1$. Cho $f = 2g \cdot (g \circ g^2)$. Tìm $f'(1)$.

3.2.4. Cho $f(4) = 2$, $f'(4) = 3$, và $F(x) = f(xf(x^2))$. Tìm $F'(2)$.

3.2.5. Cho

$$g(x) = f(x^2 f(x)).$$

Cho $f(1) = 2$, $f(2) = 4$, $f'(1) = 3$, $f'(2) = -1$. Tính $g'(1)$.

3.2.6. Cho $F(x) = f(x(f(xf(x))))$, với $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f'(1) = 4$, $f'(2) = 5$, $f'(3) = 6$. Tìm $F'(1)$.

3.2.7. Cho hai hàm số $g(x) = \sqrt[3]{x+5}$ và $h(x) = 3^{-x+1}$. Tính đạo hàm của g, h, và $g \circ h$.

3.2.8. Hãy rút ra công thức

(a)
$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ x \in (-1, 1).$$

(b)
$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}.$$

3.2.9. Cho

$$g\left(x\right) = \frac{x^{11}}{x^{10}+2}$$

và cho h là hàm ngược của g. Tính $h'(1/3)$.

3.2.10. Cho $u(x) = \sqrt{x^3 + x^2 + x + 1}$ và cho v là hàm ngược của u. Tính $v'(1)$.

3.2.11. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị của hàm số y được cho bởi phương trình ẩn:

(a) $x^3 + y^3 = 6xy$ tại điểm $(3, 3)$.

(b) $x^2 + y^2 = 25$ tại điểm $(3, -4)$.

(c) $x^2 + y^2 = 2$ tại điểm $(1, 1)$.

(d) $y^4 = 4x^4 + 6xy$ tại điểm $(1, 2)$.

(e) $x^2 + y^2 = 1 + y \tan x$ tại điểm $(0, 1)$.

(f) $y \sin 2x = x \cos 2y$ tại điểm $(\pi/2, \pi/4)$.

(g) $\sin(x + y) = 2x - 2y$ tại điểm (π, π).

(h) $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2$ tại điểm $(0, 1/2)$. Hãy dùng phần mềm máy tính để vẽ đường này để thấy lí do đường này được gọi là đường hình trái tim.

(i) $x^2(x^2 + y^2) = y^2$ tại $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$.

3.2.12. Một cái thang dài 50 mét đang dựa vào tường. Khi đỉnh thang đang ở cách nền 30 mét thì thang bị trượt, đỉnh thang tuột xuống với vận tốc 3 mét mỗi giây. Hỏi đáy thang trượt xa khỏi bức tường với vận tốc bao nhiêu?

3.2.13. Một bồn nước hình trụ đáy tròn bán kính 1 m được bơm nước vào với tốc độ 2 m^3/giờ. Hỏi mực nước trong bồn đang dâng lên với tốc độ bao nhiêu?

3.2.14. Một bồn chứa nước hình trụ với đáy là một hình tròn bán kính 5 mét. Giả sử nước đang được tháo ra khỏi bồn với tốc độ 1 mét khối mỗi giây. Hỏi mực nước trong bồn đang thay đổi với tốc độ bao nhiêu?

3.2.15. Một hồ bơi có hình hộp chữ nhật dài 50 mét và rộng 15 mét. Nước đang được bơm vào hồ với tốc độ 1 m^3 mỗi phút. Hỏi mực nước trong hồ đang dâng lên nhanh như thế nào?

3.2.16. Hãy tính đạo hàm cấp 3 của hàm số $\dfrac{\sin x}{1+x^2}$.

3.2.17. Hãy tính đạo hàm cấp 3 của hàm số $\dfrac{\cos x}{e^x}$.

3.2.18. Hãy tìm đạo hàm cấp n của mỗi hàm sau:

(a) $f(x) = x^{10} + 2x^9 + 1$.

(b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

(c) $f(x) = \frac{1}{x-2}$.

(d) $f(x) = \ln x$.

3.2.19 (Công thức Leibniz cho đạo hàm của tích). Bằng phương pháp quy nạp toán học hãy chứng minh công thức hữu ích sau trong tính toán đạo hàm cấp cao. Nếu f và g có đạo hàm đến cấp n thì hàm số tích $f \cdot g$ có đạo hàm đến cấp n và

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}.$$

Ở đây $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, và qui ước $f^{(0)} = f$.

3.2.20. Sử dụng công thức Leibniz cho đạo hàm của tích, tính đạo hàm cấp 100 của hàm $f(x) = x^3 \sin x$ tại $x = 0$.

3.2.21. Sử dụng công thức Leibniz cho đạo hàm của tích, tính đạo hàm cấp 2019 của hàm $(3x-1)e^{2x}$.

3.2.22. Sử dụng công thức Leibniz cho đạo hàm của tích, tìm $y^{(n)}$ với

(a) $y = xe^x$.

(b) $y = (1-x^2)\cos x$.

(c) $y = x^3 \ln x$.

Chương 4
Ứng dụng của đạo hàm

4.1 Cực trị của hàm số

Một trong những ứng dụng của phép tính vi phân là trong các bài toán tối ưu hoá, ở đó chúng ta cần phải tìm cách thức tối ưu (tốt nhất) để làm một việc gì đó. Việc này trong nhiều trường hợp có thể đưa về bài toán tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một hàm số.

Định nghĩa 4.1.1. Cho hàm f xác định trên tập $D \subset \mathbb{R}$ và $c \in D$.

Nếu $f(c) \geq f(x)$ với mọi x thuộc D thì ta nói f có giá trị ***cực đại toàn cục*** hay ***cực đại tuyệt đối***, hay ***lớn nhất*** là $f(c)$ xảy ra tại c.

Nếu $f(c) \leq f(x)$ với mọi x thuộc D thì ta nói f có giá trị ***cực tiểu toàn cục*** hay ***cực tiểu tuyệt đối*** hay ***giá trị nhỏ nhất*** là $f(c)$ xảy ra tại c.

Nếu $f(c) \geq f(x)$ với mọi x thuộc một khoảng mở $(a, b) \subset D$ chứa c thì ta nói f có giá trị ***cực đại địa phương*** hay ***cực đại tương đối*** tại c.

Nếu $f(c) \leq f(x)$ với mọi x thuộc một khoảng mở $(a, b) \subset D$ chứa c thì ta nói f có giá trị ***cực tiểu địa phương*** hay ***cực tiểu tương đối*** tại c.

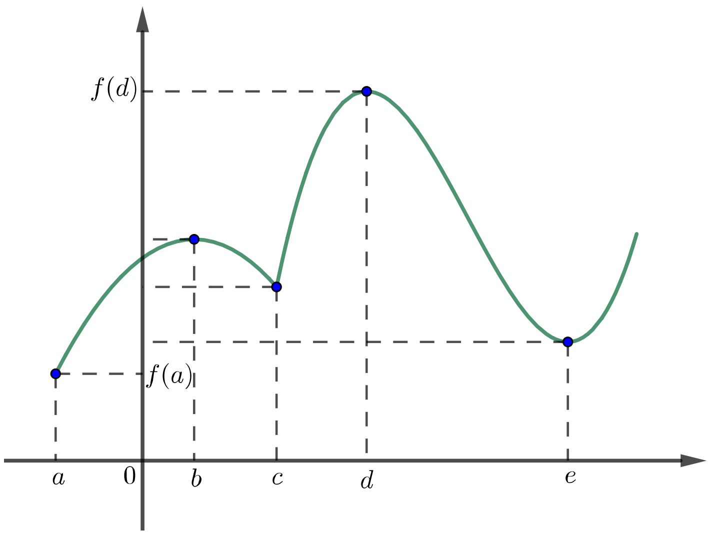
Giá trị cực đại và cực tiểu được gọi chung là ***cực trị***. Điểm tại đó xảy ra cực trị thường được gọi là ***điểm cực trị***. Ngắn gọn thì cực trị toàn cục được xét trong toàn miền xác định, còn cực trị địa phương chỉ xét trong một lân cận nào đó.

Một cách trực quan, trên một đồ thị thì cực đại toàn cục xảy ra tại điểm cao hơn hay bằng mọi điểm khác trên đồ thị, trong khi cực đại địa phương xảy ra tại điểm cao hơn hay bằng mọi điểm khác trong một lân cận nào đó, xem Hình 4.1.1.

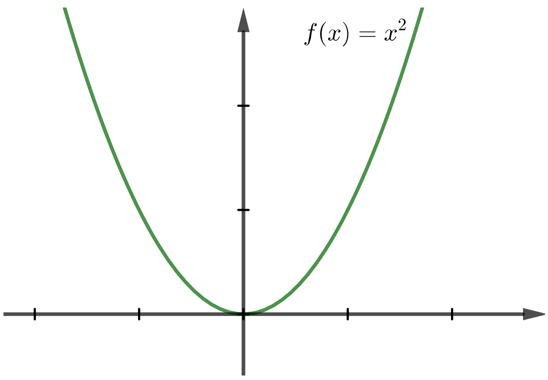
Với định nghĩa trên thì một giá trị có thể là cực trị toàn cục nhưng không phải là cực trị địa phương, khi nó xảy ra ở điểm biên của miền xác định.

Ví dụ 4.1.2. Xét $f(x) = x^2$ trên miền xác định $\mathbb{R}$, xem Hình 4.1.2. Vì $f(x) \geq f(0)$ với mọi x nên $f(0) = 0$ là cực tiểu toàn cục và là cực tiểu địa phương của f. Tuy nhiên không có điểm cao nhất trên parabol và do đó hàm số này không có giá trị cực đại.

Nếu chỉ xét miền xác định là $[-1, 2]$ thì f có một cực tiểu địa phương ở $x = 0$, một cực tiểu toàn cục ở $x = 0$, một cực đại toàn cục ở $x = 2$, và không có cực đại địa phương.



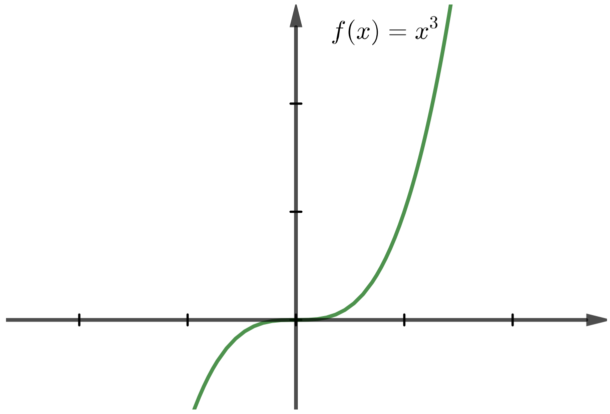
Hình 4.1.1: Cực tiểu tuyệt đối $f(a)$, cực đại tuyệt đối $f(d)$, cực tiểu địa phương $f(c)$ và $f(e)$, cực đại địa phương $f(b)$ và $f(d)$.



Hình 4.1.2: Giá trị cực tiểu là 0, không có cực đại.

Ví dụ 4.1.3. Hàm số $f(x) = x^3$ không có cực trị, xem Hình 4.1.3.

Trong các hình vẽ ta thấy nếu tại điểm cực trị đồ thị của hàm có tiếp tuyến thì tiếp tuyến sẽ nằm ngang. Điều này không đáng ngạc nhiên với lí luận sau: gần điểm cực trị, nếu trước đó hàm đã tăng thì qua điểm cực trị không thể tiếp tục tăng, còn nếu trước đó đã giảm thì qua điểm cực trị không thể tiếp tục giảm, do đó đạo hàm phải đổi dấu khi đi qua c, do đó phải bằng 0 tại c. Lí luận đơn giản này giả thiết tính liên tục của đạo hàm, tuy nhiên kết quả đúng mà không cần giả thiết này:



Hình 4.1.3: Không có cực tiểu, không có cực đại.

Định lý 4.1.4 (Định lý Fermat). *Nếu f có cực trị địa phương tại c và $f'(c)$ tồn tại thì $f'(c) = 0$.*

Như vậy ***tại cực trị địa phương đạo hàm phải bằng*** 0. Đây là một quan sát then chốt trong ứng dụng của đạo hàm. Có thể giải thích điều này một cách dễ dàng như trong chứng minh dưới đây.

Chứng minh. Giả sử rằng f có cực đại địa phương tại c. Ta có nếu như h đủ gần 0 (h có thể âm hoặc dương) thì $f(c) \geq f(c+h)$. Vậy nếu h đủ nhỏ và $h > 0$ thì

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

Lấy giới hạn phải của cả hai vế của bất đẳng thức khi h tiến về 0 ta có

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0.$$

Tương tự nếu h đủ nhỏ và $h < 0$ thì

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

Lấy giới hạn trái hai vế của bất đẳng thức khi h tiến về 0 ta được

$$f'(c) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \geq 0.$$

Như thế ta buộc phải có $f'(c) = 0$.

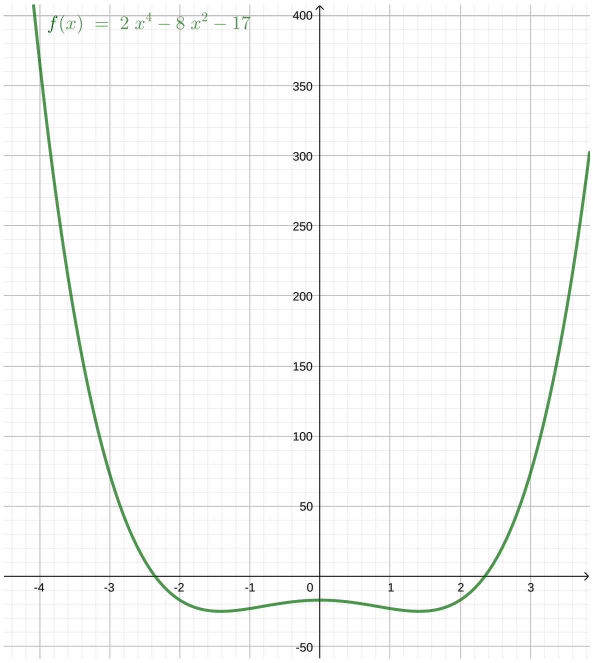
Có thể chứng minh tương tự cho trường hợp f có cực tiểu địa phương . $\square$

Điểm tại đó đạo hàm bằng 0 còn được gọi là một ***điểm dừng*** của hàm (vì nếu coi đạo hàm là vận tốc của chuyển động thì dừng chuyển động có nghĩa là vận tốc bằng 0). Điểm tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại được gọi là một ***điểm tới hạn*** của hàm.

Ví dụ 4.1.5. Hàm số $f(x) = |x|$ có điểm tới hạn $x = 0$ vì $f'(0)$ không tồn tại.

Định lý Fermat có thể được viết lại là ***cực trị địa phương chỉ xảy ra tại điểm tới hạn***.

Ví dụ 4.1.6. Giả sử ta biết hoặc dự đoán từ đồ thị Hình 4.1.7 là hàm $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$ có giá trị nhỏ nhất. Ta tìm giá trị đó.



Hình 4.1.4

Điểm x mà ở đó hàm f đạt cực tiểu toàn cục cũng là điểm tại đó hàm đạt cực tiểu địa phương do miền xác định của hàm f là một khoảng mở $(-\infty, \infty)$. Theo Định lý Fermat, điểm này phải là một điểm dừng, tức là $f'(x) = 0$. Giải phương trình ta được

$$f'(x) = 0 \iff 8x^3 - 16x = 0 \iff 4x(x^2 - 2) = 0 \iff x = 0 \text{ hoặc } x = \sqrt{2} \text{ hoặc } x = -\sqrt{2}.$$

Tính giá trị $f(0) = -17$, $f(\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}) = -25$ ta kết luận giá trị nhỏ nhất của hàm f, nếu có, là -25.

4.1.1 Sự tồn tại giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

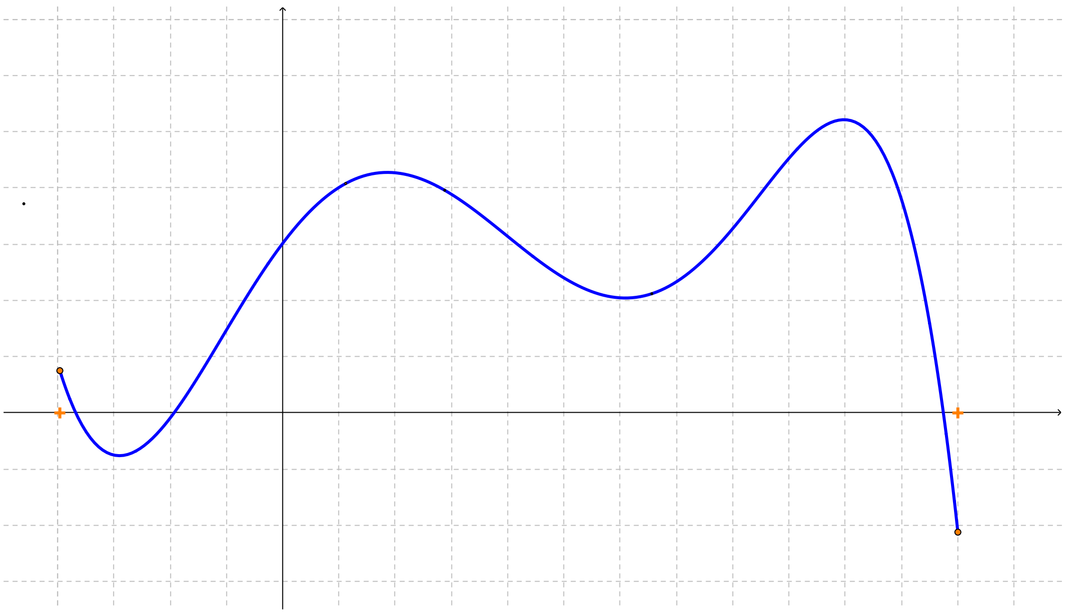
Dưới đây là một điều kiện đủ quan trọng cho sự tồn tại cực trị toàn cục.

Định lý 4.1.7 (Định lý cực trị toàn cục). *Nếu f liên tục trên đoạn đóng $[a, b]$ thì f đạt giá trị cực đại toàn cục và giá trị cực tiểu toàn cục trên $[a, b]$.*

Nói ngắn gọn: ***Một hàm liên tục trên một đoạn đóng thì có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất.***

Định lý này là một hệ quả của tính đầy đủ của tập hợp các số thực, chứng minh có trong các giáo trình nâng cao hơn như [Kha96, tr. 56].

Từ định lý này một hàm liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trên (a, b) phải có cực trị toàn cục và nơi xảy ra hoặc là bên trong khoảng (a, b) thì đó phải là một điểm dừng hoặc là trên biên a hoặc b.



Hình 4.1.5: Cực trị toàn cục xảy ra ở điểm dừng hoặc trên biên.

Từ đó ta đưa ra thuật toán sau:

Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của một hàm trên một khoảng đóng $[a, b]$***:***

Bước 1: Tìm các điểm tới hạn bên trong khoảng mở (a, b).

Bước 2: Tính các giá trị của hàm tại các điểm tới hạn tìm được ở Bước 1 và tại các điểm mút a và b.

Bước 3: Số lớn nhất trong các số tìm được ở Bước 2 là giá trị lớn nhất của hàm, số nhỏ nhất là giá trị nhỏ nhất của hàm.

Ví dụ 4.1.8. Tiếp tục Ví dụ 4.1.6, ta tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$ trên đoạn $[-1, 3]$.

Trong khoảng mở $(-1, 3)$ hàm f có hai điểm tới hạn là 0 và $\sqrt{2}$. Ta tính được $f(0) = -17$, $f(\sqrt{2}) = -25$, $f(-1) = -23$, $f(3) = 73$. Vậy giá trị nhỏ nhất là -25 và giá trị lớn nhất là 73.

Ví dụ 4.1.9. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$$

trên đoạn $[-1, 4]$.

Ta tìm điểm dừng. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ ta được $x^2 - 4x + 3 = 0$, vậy $x = 1, x = 3$.

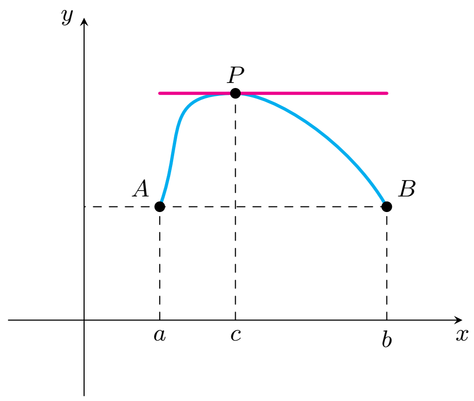
Tính và so sánh

$$f(1) = 6, f(3) = 2, f(-1) = -14, f(4) = 6,$$

ta kết luận cực giá trị lớn nhất là 6 ở $x = 1$ và $x = 4$, và giá trị nhỏ nhất là -14 ở $x = -1$.

4.1.2 Các định lý giá trị trung bình

Định lý 4.1.10 (Định lý Rolle). *Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$, khả vi trong khoảng (a, b), và $f(a) = f(b)$, thì tồn tại một số thực c thuộc (a, b) sao cho $f'(c) = 0$.*



Hình 4.1.6: Định lý Rolle khẳng định một điều dễ thấy trực quan: Nếu một đường cong đồ thị liên tục nối hai điểm có cùng cao độ thì sẽ có một điểm trên đồ thị tại đó tiếp tuyến nằm ngang.

Có thể giải thích nguồn gốc của Định lý Rolle một cách khá đơn giản: hàm liên tục trên một đoạn thì có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất, nếu giá trị của hàm tại hai đầu của đoạn xác định bằng nhau thì một trong hai giá trị cực trị toàn cục trên phải xảy ra bên trong, do đó là cực trị địa phương, xảy ra tại một điểm dừng.

Chứng minh. Ta xét ba trường hợp.

(a) Trường hợp f là một hàm hằng, $f = f(a)$: Khi đó với mọi $x \in (a, b)$ thì $f'(x) = 0$, do đó ta có thể chọn c bất kì trong khoảng (a, b).

(b) Trường hợp $f(x) > f(a)$ với một x nào đó trong khoảng (a, b): Theo Định lý cực trị toàn cục 4.1.7, f có một giá trị cực đại toàn cục tại một điểm nào đó trong đoạn $[a, b]$. Vì $f(a) = f(b)$ nên giá trị cực đại toàn cục này phải đạt tại một số c trong khoảng mở (a, b). Khi đó f có cực đại địa phương tại c. Suy ra $f'(c) = 0$ theo Định lý Fermat.

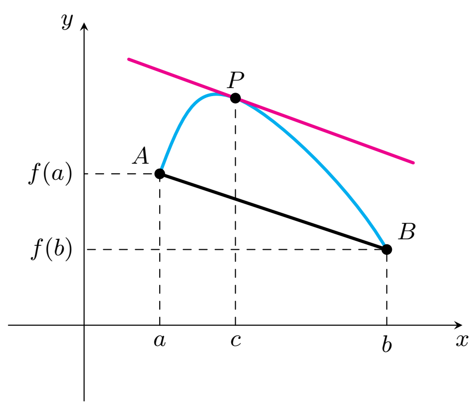
(c) Trường hợp $f(x) < f(a)$ với một x nào đó trong khoảng (a, b): Tương tự, theo Định lý cực trị toàn cục 4.1.7, f có một giá trị cực tiểu toàn cục trong đoạn $[a, b]$ và vì $f(a) = f(b)$ giá trị cực tiểu toàn cục này đạt tại một số c trong khoảng (a, b), do đó f có cực tiểu địa phương tại c và như vậy $f'(c) = 0$ theo Định lý Fermat.

□

Định lý 4.1.11 **(Định lý giá trị trung bình – Định lý Lagrange).** *Nếu hàm f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trong khoảng (a, b) thì có c thuộc (a, b) sao cho*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Định lý giá trị trung bình nói rằng giá trị trung bình của một hàm số giữa hai đầu của một đoạn nhận được bởi tốc độ biến thiên của hàm tại một điểm nào đó trong đoạn. Nhờ đó từ hiểu biết về giá trị của đạo hàm ta có thể suy ra hiểu biết về hàm. Đây là công cụ chính cho các ứng dụng rất quan trọng của đạo hàm ở chương sau.



Hình 4.1.7: Minh họa ý nghĩa hình học của định lý giá trị trung bình Lagrange: Hệ số góc của đường cát tuyến AB là $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ và hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm $P = (c, f(c))$ là $f'(c)$, định lý nói rằng có ít nhất một điểm P trên đồ thị mà tiếp tuyến tại đó song song với cát tuyến AB. Về trực quan Định lý Lagrange cho một phiên bản nghiêng của Định lý Rolle.

Chứng minh. Áp dụng Định lý Rolle cho hàm

$$g(x) = f(x) - [f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)].$$

Hàm g này chẳng qua là hiệu giữa hàm f với hàm tuyến tính có đồ thị là đường cát tuyến nối hai điểm $(a, f(a))$ và $(b, f(b))$. □

Ta có thể viết công thức của Định lý Lagrange ở những dạng khác, cũng rất hữu ích, như

$$f(x) - f(a) = f'(c)(x-a),$$

với c giữa a và x; hay

$$f(x) = f(a) + f'(\theta)(x-a)$$

với θ giữa x và a; hay

$$f(a+h) = f(a) + f'(a+\theta h)h$$

với θ giữa 0 và 1. Các công thức này cho giá trị chính xác của lượng thay đổi của giá trị của hàm thông qua đạo hàm.

Ta còn có một phát triển hơn mà ta sẽ dùng về sau:

Định lý 4.1.12 (Định lý giá trị trung bình Cauchy). *Nếu hai hàm f và g liên tục trên đoạn $[a,b]$ và khả vi trong khoảng (a,b) thì tồn tại điểm c thuộc (a,b) sao cho*

$$[f(b) - f(a)]\, g'(c) = [g(b) - g(a)]\, f'(c). \tag{4.1.1}$$

Nếu $g(b) \neq g(a)$ và với mọi $x \in (a,b)$ ta có $g'(x) \neq 0$, thì đẳng thức trên có thể được viết dưới dạng

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{4.1.2}$$

Chứng minh. Áp dụng Định lý Rolle cho hàm

$$h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

□

Từ Định lý giá trị trung bình ta được một hệ quả quan trọng:

Hệ quả 4.1.13. *Nếu $f'(x) = 0$ với mọi x trong khoảng (a,b) thì f là hàm hằng trên khoảng (a,b).*

Chứng minh. Với x_1 và x_2 bất kì thuộc khoảng (a,b), ta chứng tỏ $f(x_1) = f(x_2)$. Giả sử $x_1 < x_2$. Áp dụng Định lý giá trị trung bình cho hàm f trên đoạn $[x_1, x_2]$ ta được $f(x_1) - f(x_2) = f'(c)(x_1 - x_2)$ với một c nào đó trong khoảng (x_1, x_2). Vì $f'(c) = 0$ nên ta được $f(x_1) = f(x_2)$. □

Một hệ quả đáng chú ý nữa là:

Hệ quả 4.1.14. *Nếu $f'(x) = g'(x)$ với mọi x trong khoảng (a,b), thì $f - g$ là hàm hằng trên khoảng (a,b); nghĩa là f và g sai khác một hằng số.*

Chứng minh. Áp dụng hệ quả trên cho hàm $f - g$. □

Bài tập

4.1.1. Tìm các điểm tới hạn của hàm số.

(a) $f(x) = 4 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2$.

(b) $f(x) = x^3 - 16x^2 - 15x$.

(c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x$.

(d) $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$.

(e) $g(t) = t^4 + t^3 + t^2 + 1$.

(f) $g(t) = |3t - 4|$.

(g) $g(y) = \frac{y-1}{y^2-y+1}$.

(h) $h(p) = \frac{p-1}{p^2+4}$.

(i) $h(t) = t^{3/4} - 2t^{1/4}$.

(j) $g(x) = x^{1/3} - x^{-2/3}$.

4.1.2. Cho công thức của đạo hàm của hàm f. Hỏi f có bao nhiêu điểm tới hạn?

(a) $f'(x) = 1 + \frac{210 \sin x}{x^2-6x+10}$.

(b) $f'(x) = \frac{100\cos^2 x}{10+x^2} - 1$.

4.1.3. Hãy kiểm tra rằng hàm số thoả mãn giả thiết của định lý Rolle trên khoảng cho trước, sau đó tìm tất cả các số c thoả mãn kết luận của Định lý Rolle. Hãy vẽ đồ thị để minh họa.

(a) $f(x) = 5 - 12x + 3x^2$, $[1, 3]$.

(b) $f(x) = x^3 - x^2 - 6x + 2$, $[0, 3]$.

(c) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{3}x$, $[0, 9]$.

(d) $f(x) = \cos 2x$, $[\pi/8, 7\pi/8]$.

4.1.4. Cho $f(x) = 1 - x^{2/3}$. Chứng tỏ rằng $f(-1) = f(1)$ nhưng không tồn tại số c trong khoảng $(-1, 1)$ sao cho $f'(c) = 0$. Tại sao điều này không mâu thuẫn với Định lý Rolle?

4.1.5. Cho $f(x) = 2 - |2x - 1|$. Chứng tỏ rằng không tồn tại c sao cho $f(3) - f(0) = f'(c)(3 - 0)$. Tại sao điều này không mâu thuẫn với định lý Lagrange?

4.1.6. Chứng tỏ rằng phương trình có duy nhất một nghiệm thực.

(a) $2x + \cos x = 0$.

(b) $2x - 1 - \sin x = 0$.

4.1.7. Chứng tỏ rằng phương trình $x^3 - 15x + c = 0$ có nhiều nhất một nghiệm trong đoạn $[-2, 2]$.

4.1.8. Chứng tỏ rằng phương trình $x^4 + 4x + c = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

4.1.9. Cho $f(x) = x(x^2 - 1)(x^2 - 4)$. Tìm số nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.

4.1.10. Chứng minh rằng một đa thức bậc n có nhiều nhất n nghiệm.

4.1.11. Sử dụng Định lý giá trị trung bình để chứng minh bất đẳng thức

$$|\sin a - \sin b| \leq |a - b| \quad \text{với mọi } a \text{ và } b.$$

4.1.12. Chứng tỏ nếu f khả vi trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) < 1$ với mọi x thì f có nhiều nhất một điểm bất động (tức điểm x tại đó $f(x) = x$).

4.1.13. Hai vận động viên bắt đầu chạy cùng lúc và đến đích cùng lúc. Chứng tỏ rằng tại một thời điểm nào đó trong quãng đường chạy họ có cùng vận tốc.

4.1.14. Một người lái xe vào một xa lộ dài 41 km có vận tốc tối đa cho phép là 80 km/giờ. Người đó vào xa lộ lúc 7g30 và ra khỏi xa lộ lúc 8g. Hỏi khẳng định rằng tại một thời điểm nào đó người này đã vượt tốc độ cho phép là đúng hay sai?

4.2 Đạo hàm và tính chất của hàm

4.2.1 Tính tăng, giảm, và cực trị

Một hàm số được gọi là ***tăng*** nếu giá trị của biến tăng thì giá trị của hàm không giảm:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Một hàm số được gọi là ***tăng ngặt*** nếu giá trị của biến tăng thì giá trị của hàm tăng: [1]

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Về mặt hình học, nếu hàm là tăng ngặt thì đồ thị của hàm sẽ hướng lên khi đi từ trái sang phải.

Tương tự, hàm được gọi là ***giảm*** nếu giá trị của biến tăng thì giá trị của hàm không tăng:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2),$$

và là ***giảm ngặt*** nếu giá trị của biến tăng thì giá trị của hàm giảm:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Đồ thị của hàm giảm ngặt sẽ hướng xuống khi đi từ trái sang phải.

Ta có một công cụ hiệu quả bằng đạo hàm để phát hiện tính chất tăng giảm, đó là đạo hàm dương thì hàm phải tăng. Ta có thể lý luận nhanh: đạo hàm dương dẫn tới tỉ lệ biến thiên $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dương, do đó Δy phải dương khi Δx là dương, tức là hàm là tăng. Những lý luận nhanh cho trường hợp đơn giản như trên giúp chúng ta hiểu dễ dàng hơn và nhanh chóng hơn nội dung chính của kết quả. So sánh với sách giáo khoa Giải tích lớp 12 [SGKTH], ở đó tính chất quan trọng này chỉ được thừa nhận mà không giải thích.

Định lý 4.2.1. *Giả sử f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và khả vi trên khoảng (a, b). Hàm f là tăng trên $[a, b]$ khi và chỉ khi $f' \geq 0$ trên (a, b). Hàm f là giảm trên $[a, b]$ khi và chỉ khi $f' \leq 0$ trên (a, b).*

Chứng minh. Giả sử f là hàm tăng. Đạo hàm của f là giới hạn của tỉ lệ thay đổi $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Lấy $\Delta x > 0$ thì $f(x + \Delta x) \geq f(x)$, do đó tỉ lệ trên lớn hơn hay bằng 0, dẫn tới giới hạn $f'(x)$ phải lớn hơn hay bằng 0.

Chiều ngược lại, lấy hai điểm bất kỳ x_1, x_2 trong đoạn $[a, b]$. Giả sử $x_1 < x_2$. Theo Định lý giá trị trung bình 4.1.11, tồn tại c thuộc (x_1, x_2) để

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

[1] Một số tài liệu như [Ste16] định nghĩa hàm tăng tương ứng với hàm tăng ngặt trong tài liệu này.

Vì $x_2 - x_1 > 0$ nên $f(x_2) - f(x_1)$ cùng dấu với $f'(c)$, lớn hơn hay bằng 0, vậy $f(x_2) \geq f(x_1)$, hàm f là tăng.

Trường hợp hàm giảm là tương tự. □

Chứng minh chặt chẽ và chính xác trên có thể giúp chúng ta nhận ra một điều đáng chú ý mà lý luận sơ lược trước đó không chỉ ra: nếu $f' > 0$ trên (a, b) thì f tăng ngặt trên (a, b).

Ta suy ra ngay một tiêu chuẩn rất hiệu quả, thường dùng để khảo sát tính tăng giảm của hàm:

Định lý 4.2.2 (Tiêu chuẩn đạo hàm bậc nhất cho cực trị). *Cho hàm số f liên tục tại c và khả vi trong lân cận của c, nhưng không nhất thiết khả vi tại c. Giả sử c là một điểm tới hạn của f.*

(a) *Nếu $f'(x) > 0$ ở phía bên trái của c và $f'(x) < 0$ ở phía bên phải của c thì f có cực đại địa phương tại c.*

(b) *Nếu $f'(x) < 0$ ở phía bên trái của c và $f'(x) > 0$ ở phía bên phải của c thì f có cực tiểu địa phương tại c.*

(c) *Nếu $f'(x)$ không đổi dấu quanh điểm c thì f không có cực trị tại c.*

Giả sử hàm f có đạo hàm liên tục trên một khoảng, thì các điểm tới hạn của f là các điểm dừng của f. Nếu a và b là hai điểm dừng liên tiếp của f, nghĩa là giữa a và b không có điểm dừng nào khác, thì f' phải luôn dương hoặc luôn âm trên khoảng (a, b) (một hệ quả của Định lý giá trị trung gian 2.2.11), tức là f' không đổi dấu trên (a, b).

Vì tính chất đặc biệt như vậy của hàm có đạo hàm liên tục nên các hàm này rất thuận tiện cho các khảo sát. Người ta thường gọi chúng là các ***hàm trơn***. Tên gọi thể hiện ý nghĩa là trực quan là đồ thị của hàm trơn là một đường trơn tru, ở đó phương (độ nghiêng) của đồ thị thay đổi một cách liên tục chứ không đứt gãy đột ngột. Về mặt vật lý, một chuyển động trơn thì có vận tốc thay đổi liên tục chứ không nhảy vọt, là tình huống thường gặp. Về mặt định lượng, hàm trơn thì tốc độ biến thiên một cách liên tục.

Tổng hợp các nhận xét trên cho chúng ta thuật toán sau cho hàm trơn.

Xét tính tăng giảm và tìm cực trị của một hàm trơn trên một khoảng:

Bước 1: Tìm các điểm tới hạn của hàm, bằng cách giải phương trình $f'(x) = 0$.

Bước 2: Xét dấu của đạo hàm f' quanh các điểm tới hạn tìm được ở Bước 1. Trên khoảng giữa hai điểm tới hạn liên tiếp, dấu của f' không đổi. Nếu dấu của f' là dương thì f tăng trong khoảng đó, nếu dấu của f' là âm thì f giảm trong khoảng đó.

Bước 3: Tại một điểm tới hạn, nếu f' đổi từ âm sang dương thì f có cực tiểu địa phương tại đó, nếu f' đổi từ dương sang âm thì f có cực đại địa phương tại đó, nếu f' không đổi dấu thì f không có cực trị địa phương tại đó.

Ví dụ 4.2.3. Tiếp tục Ví dụ 4.1.6, ta xét tính tăng giảm của hàm $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$.

Ta đã có $f'(x) = 8x^3 - 16x$ và f có các điểm dừng tại $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$. Viết $f'(x) = 8x(x^2 - 2)$ ta dễ dàng xét dấu của f'. Một cách khác là trên mỗi khoảng giữa hai điểm dừng ta lấy một điểm tùy ý rồi tìm dấu của f' tại điểm đó. Chẳng hạn trên khoảng $(-\sqrt{2}, 0)$ thì $f'(-1) = 8 > 0$, do đó $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (-\sqrt{2}, 0)$. Ta trình bày thông tin trong một bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Ta có hai cực tiểu địa phương tại $x = \pm\sqrt{2}$ và một cực đại địa phương tại $x = 0$.

4.2.2 Tính lồi, lõm, và điểm uốn

Ở phần này ta dùng đạo hàm bậc hai để khảo sát hàm.

Định lý 4.2.4 (Tiêu chuẩn đạo hàm bậc hai cho cực trị). *Giả sử f có đạo hàm cấp hai liên tục quanh điểm c và c là một điểm dừng của f.*

(a) Nếu $f''(c) > 0$ thì f đạt cực tiểu địa phương tại c.

(b) Nếu $f''(c) < 0$ thì f đạt cực đại địa phương tại c.

Tiêu chuẩn này chỉ cần tính đạo hàm bậc hai tại điểm dừng mà không cần khảo sát dấu của đạo hàm bậc nhất quanh điểm dừng.

Chứng minh. Nếu $f''(c) > 0$ thì do tính liên tục của f'', trong một khoảng nào đó chứa c thì $f''(x) > 0$, do đó f' tăng ngặt trong khoảng đó. Vì $f'(c) = 0$ nên $f'(x) < 0$

bên trái c và $f'(x) > 0$ bên phải c. Vậy hàm f giảm bên trái c và tăng bên phải c, do đó f có cực tiểu địa phương tại c, như trong Định lý 4.2.1. $\square$

Ví dụ 4.2.5. Tiếp tục Ví dụ 4.1.6, ta xét cực trị của hàm $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$.

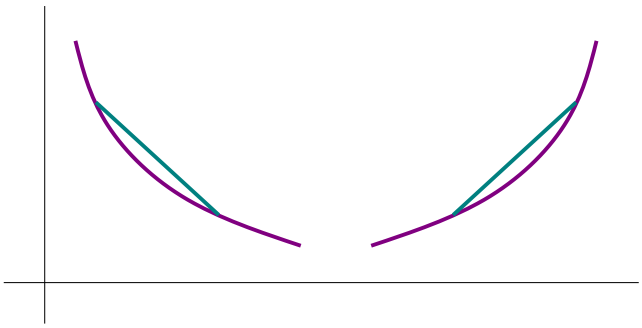
Ta có $f'(x) = 8x^3 - 16x$ và f có các điểm dừng tại $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$. Tính đạo hàm bậc hai ta được $f''(x) = 24x^2 - 16$. Ta tính được $f''(0) < 0$, $f''(-\sqrt{2}) = f''(\sqrt{2}) > 0$. Vậy ta có hai cực tiểu địa phương tại $x = \pm\sqrt{2}$ và một cực đại địa phương tại $x = 0$.

Định nghĩa 4.2.6. Hàm f được gọi là ***hàm lồi*** (convex)[2] trên khoảng (a, b) nếu với mọi x, y thuộc (a, b) và với mọi α thuộc $[0, 1]$ thì

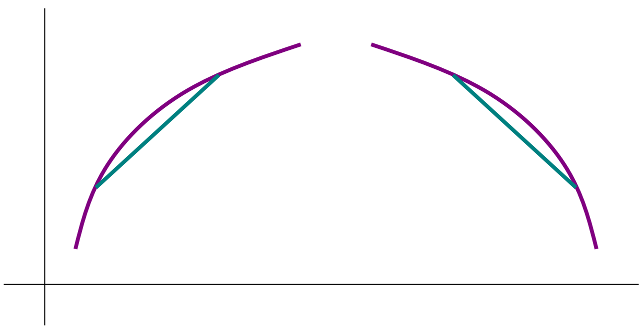
$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y). \tag{4.2.1}$$

Hàm f được gọi là ***hàm lõm*** (concave) trên (a, b) nếu với mọi x, y thuộc (a, b) và với mọi α thuộc $[0, 1]$ thì

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y). \tag{4.2.2}$$



Hình 4.2.1: Đồ thị của hàm lồi: phần đồ thị giữa hai điểm nằm bên dưới đoạn cát tuyến nối hai điểm đó.



Hình 4.2.2: Đồ thị của hàm lõm: phần đồ thị giữa hai điểm nằm bên trên đoạn cát tuyến nối hai điểm đó.

[2]Chú ý là một số tài liệu như [Ste16] dùng thuật ngữ hơi khác: lõm lên (concave upward) cho lồi, và lõm xuống (concave downward) cho lõm. Có tài liệu, như giáo trình Giải tích lớp 12 hiện hành [SGKTH], dùng thuật ngữ ngược lại với ở đây. Vì vậy khi dùng tài liệu khác người đọc cần xem định nghĩa được dùng là gì. Thuật ngữ được dùng ở đây theo tập quán trong ngành toán ở bậc đại học.

Định lý 4.2.7. *Giả sử hàm f trơn trên khoảng (a, b). Khi đó f là lồi khi và chỉ khi f' là hàm tăng. Tương tự, f là lõm khi và chỉ khi f' là hàm giảm.*

Vậy ta thấy với hàm trơn thì ***tính lồi đồng nghĩa với tính tăng của đạo hàm***.

Chứng minh. Với $x_1 < x_2$ và $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$, thì $\alpha = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$. Ta có thể viết lại điều kiện lồi (4.2.1) như sau: Với mọi $x_1 < x < x_2$ thì

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

Có thể kiểm được là công thức này tương đương với

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}.$$

Điều kiện cần: Trong công thức trên cho $x \to x_1$, rồi cho $x \to x_2$, ta được

$$f'(x_1) \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq f'(x_2).$$

Vậy f' là hàm tăng trên (a, b).

Điều kiện đủ: Giả sử f' là hàm tăng trên (a, b). Theo Định lý giá trị trung bình Lagrange 4.1.11, nếu x thuộc (x_1, x_2) thì tồn tại θ_1, θ_2, với $x_1 < \theta_1 < x < \theta_2 < x_2$, để

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(\theta_1) \text{ và } \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = f'(\theta_2).$$

Vì $f'(\theta_1) \leq f'(\theta_2)$ nên $\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2}$. Vậy f là hàm lồi.

Có thể làm tương tự cho tính lõm. □

Từ kết quả này, áp dụng Định lý 4.2.1 cho f', ta thu được một tiêu chuẩn đạo hàm cấp 2 cho tính lồi lõm, rất thuận tiện, mà người ta cũng thường (và người đọc cũng có thể) lấy luôn làm định nghĩa đơn giản hơn cho sự lồi lõm:

Hệ quả 4.2.8. *Giả sử hàm f có đạo hàm cấp 2 liên tục trong khoảng (a, b). Điều kiện cần và đủ để hàm f lồi trên (a, b) là $f'' \geq 0$ trên (a, b). Điều kiện cần và đủ để hàm f lõm trên (a, b) là $f'' \leq 0$ trên (a, b).*

Vậy ta chỉ cần xét dấu của đạo hàm cấp 2 để biết tính lồi lõm.

Định nghĩa 4.2.9. Điểm của đồ thị mà ở đó đồ thị đổi tính lồi, từ lồi sang lõm hay ngược lại, được gọi là ***điểm uốn*** của đồ thị, hay của hàm.

Ta lập tức có một tiêu chuẩn đạo hàm bậc 2 cho điểm uốn:

Mệnh đề 4.2.10. *Giả sử hàm f có đạo hàm bậc 2 liên tục quanh điểm c. Nếu f'' đổi dấu tại c thì f có điểm uốn tại c.*

Chú ý rằng do giả thiết liên tục của đạo hàm bậc 2, nếu f'' đổi dấu tại c thì phải có $f''(c) = 0$. Điều này cho phép ta tìm các ứng cử viên cho điểm uốn bằng cách tìm nghiệm của đạo hàm cấp hai, tương tự như ta đã tìm ứng cử viên cho điểm cực trị bằng cách tìm nghiệm của đạo hàm cấp một.

Tổng hợp lại ta có một thuật toán đơn giản để xét tính lồi và điểm uốn của một hàm có đạo hàm bậc 2 liên tục:

Xét tính lồi lõm và tìm điểm uốn của một hàm có đạo hàm bậc hai liên tục trên một khoảng:

Bước 1: Tìm các điểm tại đó đạo hàm bậc 2 bằng 0, tức là giải phương trình $f''(x) = 0$.

Bước 2: Xét dấu của đạo hàm bậc hai f'' quanh các điểm tìm được ở Bước 1. Trên khoảng giữa hai điểm liên tiếp, dấu của f'' không đổi. Nếu dấu của f'' là dương thì f lồi trong khoảng đó, nếu dấu của f'' là âm thì f lõm trong khoảng đó.

Bước 3: Tại mỗi điểm tìm được ở Bước 1, nếu f'' đổi dấu thì hàm có điểm uốn tại đó.

Ví dụ 4.2.11. Tiếp tục Ví dụ 4.1.6, ta xét tính lồi của hàm $f(x) = 2x^4 - 8x^2 - 17$.

Ta đã có $f''(x) = 24x^2 - 16 = 8(3x^2 - 2)$. Giải phương trình $f''(x) = 0$ ta được $x = \pm\sqrt{2/3}$. Ta tìm dấu của $f''(x)$ trên mỗi khoảng $(-\infty, -\sqrt{2/3})$, $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$, $(\sqrt{2/3}, \infty)$, bằng cách xét dấu hay tính giá trị của $f''(x)$ tại một điểm trong khoảng, chẳng hạn ta thấy $f''(0) < 0$ nên $f''(x) < 0$ trên $(-\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3})$. Ta thường tóm tắt thông tin trong một bảng:

x	$-\infty$		$-\sqrt{2/3}$		$\sqrt{2/3}$		∞
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		lồi		lõm		lồi	

Từ bảng trên ta thấy hàm f có hai điểm uốn ở $x = \pm\sqrt{2/3}$.

Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số

Cho một hàm cụ thể, để khảo sát và vẽ đồ thị của hàm về cơ bản ta kết hợp việc khảo sát đạo hàm bậc một và đạo hàm bậc hai ở phần trên, cùng với xét thêm một số thông tin thêm như các giới hạn của hàm tại các điểm hàm không xác định hay giới hạn của hàm ở $-\infty$, ∞ (được gọi là các tiệm cận đứng và tiệm cận ngang). Việc này người học đã làm nhiều ở trung học.

Ví dụ 4.2.12. Khảo sát hàm số

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$$

Ta khảo sát đạo hàm bậc nhất

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36 = 6(x^2 + x - 6) = 6(x - 2)(x + 3)$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 2, x = -3.$$

x	$-\infty$		-3		2		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		tăng	cực đại địa phương	giảm	cực tiểu địa phương	tăng	

Ta khảo sát đạo hàm bậc hai

$$f''(x) = 12x + 6$$

$$f''(x) = 0 \iff x = -1/2$$

x	$-\infty$		$-1/2$		∞
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		lõm	điểm uốn	lồi	

Ngày nay việc vẽ đồ thị của các hàm được cho bằng công thức sơ cấp được trợ giúp rất nhiều với sự tiến bộ của máy tính. Người học có thể dễ dàng dùng một số phần mềm phổ biến và dễ sử dụng để vẽ đồ thị như GeoGebra [GeoG], Wolfram Alpha [Wolf], Maple, Matlab, Python. Quan trọng là để từ đồ thị của hàm số thấy được các tính chất của hàm số ta cần nắm vững các mối quan hệ giữa tính chất của hàm và đồ thị của hàm mà ta đã khảo sát trong mục này.

Ví dụ 4.2.13. Hình 4.2.3 vẽ đồ thị của một hàm được cho bằng một công thức khá phức tạp bằng phần mềm GeoGebra. Từ đồ thị ta có thể nhận xét những tính chất của hàm ở mức trực quan. Ta thấy hàm có một cực tiểu ở đâu đó giữa -2 và -1, có hai điểm uốn ở gần -1 và gần 0. Ta có thể phóng to hình vẽ để có những ước lượng chính xác hơn.

Với những nhận định trên, dùng phần mềm này ta có thể tính các đạo hàm bậc nhất và bậc hai, rồi giải xấp xỉ các phương trình, thu được giá trị xấp xỉ của điểm cực trị ở $x \approx -1{,}722$ và điểm uốn ở $x \approx -1{,}4312$ và $x \approx 0{,}3062$, với kí hiệu $\approx$ nghĩa là "gần bằng".

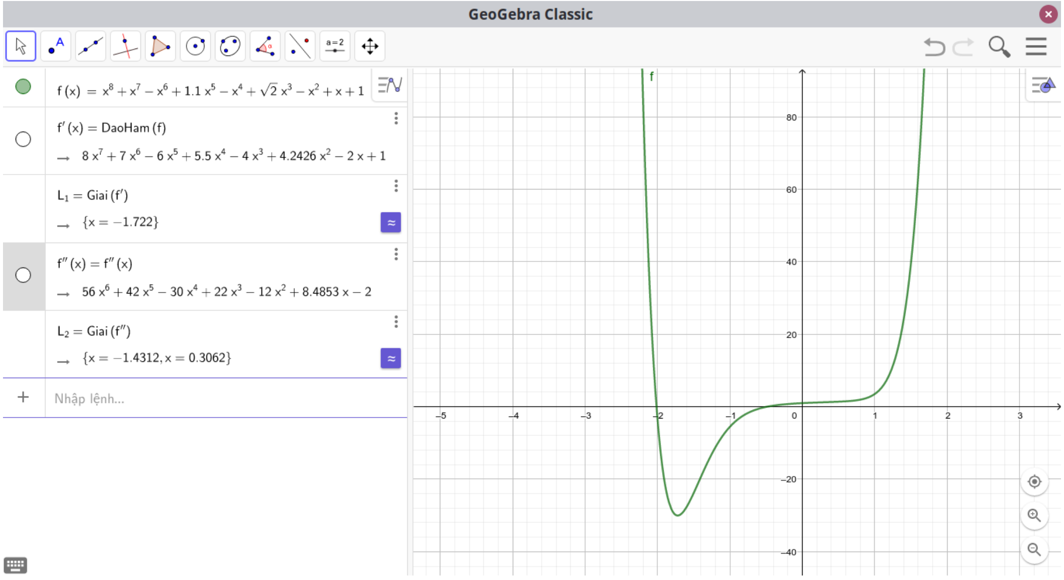
4.2.3 Xấp xỉ tuyến tính

Giả sử hàm f khả vi tại x thì

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

như thế khi h "nhỏ" thì $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ "gần bằng" $f'(x)$, do đó $f(x+h) - f(x)$ "gần bằng" $f'(x)h$. Đây là nguyên lí xấp xỉ tuyến tính:

$$\boxed{h \approx 0 \implies f(x+h) - f(x) \approx f'(x)h.} \tag{4.2.3}$$



Hình 4.2.3: Đồ thị của hàm $f(x) = x^8 + x^7 - x^6 + 1{,}1x^5 - x^4 + \sqrt{2}x^3 - x^2 + x + 1$.

Viết $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ thì lí luận trên nói một điều đơn giản rằng khi biến thiên Δx của x là nhỏ thì tỉ lệ biến thiên $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ gần bằng tỉ lệ biến thiên tức thời $f'(x)$, tức là

$$\Delta x \approx 0 \implies \Delta y \approx f'(x)\Delta x.$$

Nguyên lí xấp xỉ tuyến tính dễ sử dụng và có hiệu quả trong nhiều vấn đề về sau.

Ta còn có một giải thích hình học cho xấp xỉ tuyến tính. Từ ý nghĩa của đạo hàm, ta thấy xấp xỉ tuyến tính chẳng qua là xấp xỉ đường cong đồ thị bởi tiếp tuyến của đồ thị, xem Hình 4.2.4:

$$\boxed{x \approx c \implies f(x) \approx f(c) + f'(c)(x - c).}$$

Ví dụ 4.2.14. Ước lượng $\sqrt{1{,}01}$.

Ta thấy 1,01 gần bằng 1, nên ta dùng xấp xỉ tuyến tính của $f(x) = \sqrt{x}$ tại 1. Do $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ nên

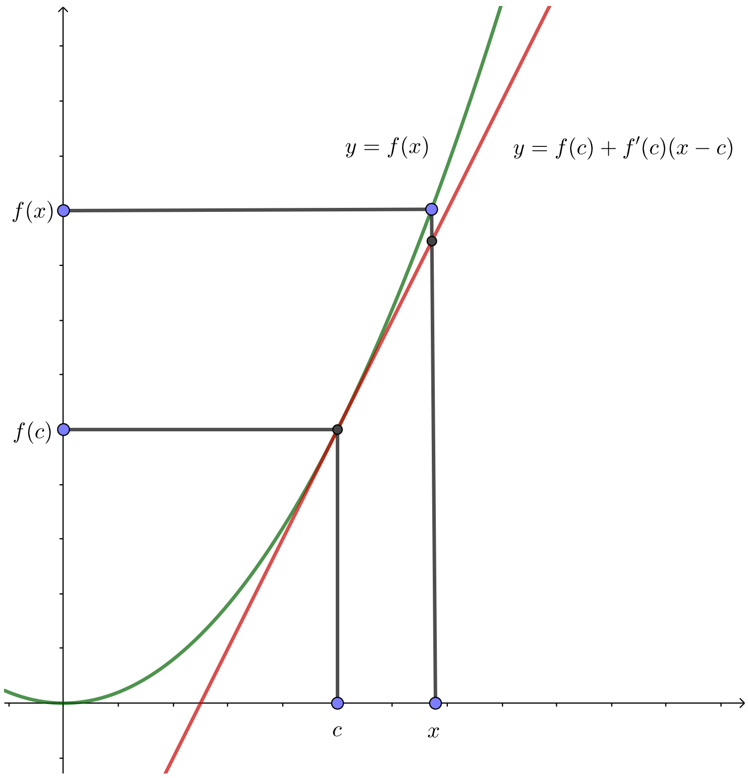
$$\sqrt{1{,}01} \approx \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(1{,}01 - 1) = 1{,}005.$$

Chú ý là trong trường hợp này xấp xỉ tuyến tính có thể được tính nhanh chóng mà không cần dùng máy tính. Giá trị chính xác hơn cho bởi máy tính là $1{,}000499875\ldots$.

Ví dụ 4.2.15. Gọi $C(x)$ là chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm của một món hàng. Với qui mô sản xuất rất lớn thì 1 đơn vị sản phẩm có thể được coi là một số rất nhỏ, và người ta có thể áp dụng xấp xỉ tuyến tính:

$$C(x + 1) - C(x) \approx C'(x).$$

Điều này có nghĩa là $C'(x)$ xấp xỉ chi phí của sản phẩm thứ $x + 1$. Trong kinh tế



Hình 4.2.4: Ý nghĩa hình học của xấp xỉ tuyến tính.

người ta gọi $C'(x)$ là ***chi phí cận biên*** (marginal cost), và dùng nó để xấp xỉ mức biến động chi phí khi qui mô sản xuất tăng lên 1 đơn vị.

Chẳng hạn $C'(1400) = 3$ có nghĩa là ở qui mô sản xuất 1400 đơn vị sản phẩm thì chi phí để sản xuất thêm 1 đơn vị sản phẩm gần bằng 3.

Ta khảo sát thêm về xấp xỉ tuyến tính. Ta có

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f'(x) = 0,$$

dẫn tới

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - f'(x)h}{h} = 0,$$

vậy đặt $r(h) = f(x+h) - f(x) - f'(x)h$ thì $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ và

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + r(h).$$

Công thức này chỉ ra sai số r trong xấp xỉ tuyến tính là một "vô cùng bé cấp cao hơn 1".

Trong một số tài liệu xấp xỉ tuyến tính còn được diễn đạt thông qua khái niệm "dạng vi phân".

Ở mục Công thức Taylor 6.2.1 ta sẽ nghiên cứu sâu hơn và thu được công thức để kiểm soát sai số trong xấp xỉ tuyến tính.

4.2.4 Qui tắc l'Hôpital và ứng dụng trong tính giới hạn

Giả sử ta muốn tìm giới hạn của tỉ số $\frac{f(x)}{g(x)}$ khi x tiến tới a. Nếu xảy ra cả $f(x)$ và $g(x)$ cùng tiến về 0 hoặc cùng tiến về ∞ thì ta chưa thể đưa ra kết quả ngay được. Hai trường hợp này được gọi lần lượt là ***dạng vô định*** $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$. Ta có một qui tắc rất thuận tiện được gọi là qui tắc l'Hôpital[3], nói rằng dưới những điều kiện nhất định, với dạng vô định $\frac{0}{0}$ hay $\frac{\infty}{\infty}$ thì

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.}$$

Ta có thể giải thích phương pháp này trong trường hợp đơn giản như sau. Giả sử f và g liên tục quanh a và $f(a)=g(a)=0$, do đó ta có dạng vô định $\frac{0}{0}$. Với xấp xỉ tuyến tính khi $x\approx a$ thì $f(x)\approx f'(a)(x-a)$ và $g(x)\approx g'(a)(x-a)$, do đó $\frac{f(x)}{g(x)}\approx\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Để lý luận chính xác ta dùng các định lý giá trị trung bình. Ta xem xét chi tiết hơn dưới đây.

Dạng vô định $\frac{0}{0}$

Mệnh đề 4.2.16. *Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ khả vi trong khoảng (a,b) và $g'(x)\neq 0$ với mọi $x\in(a,b)$. Nếu $\lim_{x\to a^+}f(x)=\lim_{x\to a^+}g(x)=0$ và $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ bằng một số thực hoặc $-\infty$ hoặc ∞, thì*

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Mệnh đề vẫn đúng nếu thay giới hạn $x\to a^+$ bằng $x\to b^-$ hoặc $x\to c$ với $c\in(a,b)$. Trường hợp $a=-\infty$ và $b=\infty$ mệnh đề cũng đúng.

Chứng minh. Xét trường hợp a là số thực. Ta xây dựng hai hàm mới

$$F(x)=\begin{cases}f(x) & \text{nếu } a<x<b,\\ 0 & \text{nếu } x=a,\end{cases}$$

và

$$G(x)=\begin{cases}g(x) & \text{nếu } a<x<b,\\ 0 & \text{nếu } x=a.\end{cases}$$

Hai hàm này đơn giản là mở rộng liên tục của f và g lên $[a,b)$. Khi đó ta có thể kiểm được F và G thỏa các giả thiết của Định lý giá trị trung bình Cauchy 4.1.12

[3] l'Hôpital là tên một nhà toán học người Pháp sống vào cuối thế kỉ 17, được đọc theo tiếng Pháp tựa như Lô-pi-tan, và còn được viết là l'Hospital

cho đoạn $[a, x]$ với mọi x thuộc (a, b), do đó tồn tại c thuộc (a, x) sao cho

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Từ đẳng thức trên có thể rút ra

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \to a^+} \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Trường hợp $x \to b^-$ với b hữu hạn ta chứng minh tương tự.

Trường hợp $a = -\infty$ ta đổi biến $t = \frac{1}{x}$. Ta có:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t \to 0^-} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})}.$$

Vế phải đã trở về trường hợp vô định đã chứng minh ở trên với $b = 0$. Áp dụng Quy tắc l'Hôpital cho trường hợp này ta được

$$\lim_{t \to 0^-} \frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t \to 0^-} \frac{\frac{d}{dt} f(\frac{1}{t})}{\frac{d}{dt} g(\frac{1}{t})} = \lim_{t \to 0^-} \frac{f'(\frac{1}{t}) \frac{-1}{t^2}}{g'(\frac{1}{t}) \frac{-1}{t^2}} = \lim_{t \to 0^-} \frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x \to -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Trường hợp $b = \infty$ ta giải quyết tương tự, đổi biến $t = \frac{1}{x}$ và đưa về trường hợp $a = 0$. □

Ví dụ 4.2.17. Ta làm lại Ví dụ 2.1.14, tìm

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1}$$

bằng phương pháp mới. Ta có

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x^2 - 1} \left(= \frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{(x^3 - 1)'}{(x^2 - 1)'} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2}{2x} = \lim_{x \to 1} \frac{3x}{2} = \frac{3}{2}.$$

Chú ý là nếu $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ vẫn còn ở dạng vô định $\frac{0}{0}$ và các điều kiện được thỏa thì ta có thể áp dụng tiếp qui tắc l'Hôpital một lần nữa.

Ví dụ 4.2.18. Áp dụng qui tắc l'Hôpital ba lần:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0} \frac{2x^3}{x - \sin x} \left(= \frac{0}{0}\right) &= \lim_{x \to 0} \frac{(2x^3)'}{(x - \sin x)'} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{6x^2}{1 - \cos x} \left(= \frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(6x^2)'}{(1 - \cos x)'} \\
&= \lim_{x \to 0} \frac{12x}{\sin x} \left(= \frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(12x)'}{(\sin x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{12}{-\cos x} = -12.
\end{aligned}$$

Dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$

Mệnh đề 4.2.19. *Giả sử $f(x)$ và $g(x)$ khả vi trong khoảng (a,b) và $g'(x) \neq 0$ với mọi $x \in (a,b)$. Nếu $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$ và $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ bằng một số thực hoặc $-\infty$ hoặc ∞, thì*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Mệnh đề vẫn đúng nếu thay giới hạn $x \to a^+$ bằng $x \to b^-$ hoặc $x \to c$ với $c \in (a,b)$. Trường hợp $a = -\infty$ và $b = \infty$ mệnh đề cũng đúng.

Chứng minh. Xét trường hợp $L = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ là một số thực (nếu $L = \pm\infty$ ta xét $\frac{g(x)}{f(x)}$). Với $c \in (a,b)$ ta viết

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \frac{f(c) - Lg(c)}{g(x)} + \left(1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right)\left(\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - L\right).$$

Cho $\epsilon > 0$ bất kỳ. Tồn tại c thuộc (a,b) sao cho với mọi x thuộc (a,c) thì $\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \epsilon$. Với mọi x thuộc (a,c), áp dụng Định lý giá trị trung bình Cauchy 4.1.12 cho đoạn $[x,c]$, ta có $\theta \in (x,c)$ sao cho

$$\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\theta)}{g'(\theta)},$$

do đó

$$\left|\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - L\right| < \epsilon.$$

Mặt khác Vì $g(x) \to \pm\infty$ khi $x \to a^+$ nên tồn tại c_1, $a < c_1 < c$, sao cho với x thuộc (a, c_1) ta có

$$\left|\frac{f(c) - Lg(c)}{g(x)}\right| < \epsilon, \quad \left|1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right| < 2.$$

Từ đó ta suy ra được, với mọi $x \in (a, c_1)$,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \epsilon + 2\epsilon = 3\epsilon.$$

Vậy $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

Các trường hợp $x \to b^-, x \to c, a = -\infty, b = \infty$ ta làm tương tự như đã trình bày trong chứng minh của Mệnh đề 4.2.16. □

Ví dụ 4.2.20. Ta làm lại Ví dụ 2.1.26 bằng phương pháp mới, tìm

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{3x+4}.$$

Ta có

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{3x+4} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x-1)'}{(3x+4)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ví dụ 4.2.21.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^2}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2x^2}=0.$$

Ví dụ 4.2.22.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

Các dạng vô định khác

Ta có thể dùng qui tắc l'Hôpital để khử các dạng vô định khác như $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0, ... bằng cách tìm cách biến đổi để đưa về hai trường hợp trên hoặc về các kết quả đã biết. Ta minh họa bằng những ví dụ sau.

Ví dụ 4.2.23 (Dạng vô định $0\cdot\infty$).

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x\,(=0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}\left(=\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0.$$

Ví dụ 4.2.24 (Dạng vô định $\infty-\infty$).

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)(=\infty-\infty)&=\lim_{x\to 1^+}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}\left(=\frac{0}{0}\right)\\&=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x\ln x-x+1)'}{[(x-1)\ln x]'}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}}\left(=\frac{0}{0}\right)\\&=\lim_{x\to 1^+}\frac{(\ln x)'}{(\ln x+1-\frac{1}{x})'}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1/x}{1/x+1/x^2}=1/2.\end{aligned}$$

Ví dụ 4.2.25 (Dạng vô định 0^0). Tìm

$$\lim_{x\to 0^+}x^x.$$

Dùng kết quả đã biết $\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0$ và tính liên tục của hàm hàm mũ, ta viết được

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}e^{\ln x^x}=\lim_{x\to 0^+}e^{x\ln x}=e^0=1.$$

Vậy

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=1.$$

Người ta cũng hay trình bày lời giải này theo cách trước hết lấy ln, ta tính được

$$\lim_{x\to 0^+}\ln(x^x)=\lim_{x\to 0^+}x\ln x=0,$$

suy ra $\lim_{x\to 0^+}x^x=1$.

Ví dụ 4.2.26 (Dạng vô định 1^∞). Tính

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

Lấy hàm ln, ta có $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = x\ln(1+\frac{1}{x})$. Ta tính bằng qui tắc l'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)(=\infty\cdot 0) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+\frac{1}{x})'}{(\frac{1}{x})'} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

Dùng tính liên tục của hàm mũ, ta viết được

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln(1+\frac{1}{x})^x} = \lim_{x\to\infty} e^1 = e.$$

Đây là một kết quả đáng nhớ:

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

Ví dụ 4.2.27 (Mô hình lãi nhập vốn liên tục). Trong Ví dụ 1.2.6 ta đã khảo sát mô hình lãi nhập vốn sau những khoảng thời gian rời rạc, với số lần hữu hạn, và được công thức $A(t) = A(0)(1+r)^t$. Tuy nhiên có những đại lượng, như số cá thể của những quần thể vi khuẩn, có thể thay đổi rất nhanh trong khoảng thời gian tương đối nhỏ, khiến cho sử dụng những mô hình liên tục là thích hợp hơn.

Giả sử bây giờ trong mỗi đơn vị thời gian có n lần tính lãi (hay sinh sản), và do đó có n lần lãi nhập vốn. Như thế sau khoảng thời gian t có nt lần tính lãi, và giá trị của đại lượng A là

$$A(t) = A(0)\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Mô hình lãi nhập vốn liên tục, còn gọi là "lãi kép", xảy ra khi số lần tính lãi n trong một đơn vị thời gian tiến ra vô cùng. Vậy bài toán là tính

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}.$$

Ta viết

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r}}\right)^{\frac{n}{r}rt}.$$

Đặt $x=\frac{n}{r}$, từ định nghĩa hoặc sử dụng Mệnh đề 2.1.18 hay 6.1.41 ta đưa bài toán từ giới hạn của dãy về giới hạn của hàm thực:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{xrt} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right]^{rt} = e^{rt}.$$

Vậy ta thu được mô hình lãi nhập vốn liên tục là

$$\boxed{A(t) = A(0)e^{rt}.}$$

Ví dụ 4.2.28. Tính

$$\lim_{x\to 1^-} x^{\frac{1}{1-x}}.$$

Lấy hàm ln, ta có $\ln x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{\ln x}{1-x}$. Ta tính bằng qui tắc l'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{\ln x}{1-x} \left(= \frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{-x} = -1.$$

Dùng tính liên tục của hàm mũ, ta viết được

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{x\to 1} e^{\ln x^{\frac{1}{1-x}}} = e^{-1} = 1/e.$$

Ví dụ 4.2.29 (Dạng vô định ∞^0). Tính

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}.$$

Lấy hàm ln, ta có $\ln x^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln x$. Ta tính bằng qui tắc l'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

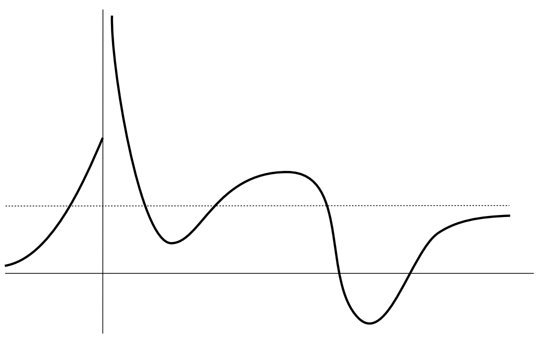
Dùng tính liên tục của hàm mũ, ta viết được

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^0 = 1.$$

Bài tập

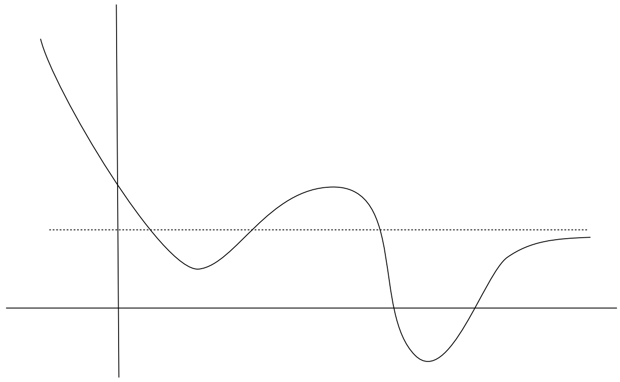
Khảo sát hàm số

4.2.1. Từ đồ thị ở Hình 4.2.5, hãy đặt tên cho các điểm quan tâm và chỉ ra tất cả các tính chất quan sát được, như: miền xác định, sự liên tục, sự khả vi, sự tăng, sự giảm, cực trị địa phương, cực trị toàn cục, tính lồi, tính lõm, điểm uốn, tiệm cận ...



Hình 4.2.5

4.2.2. Từ đồ thị ở Hình 4.2.6, hãy đặt tên cho các điểm quan tâm và chỉ ra tất cả các tính chất quan sát được, như: miền xác định, sự liên tục, sự khả vi, sự tăng, sự giảm, cực trị địa phương, cực trị toàn cục, tính lồi, tính lõm, điểm uốn, tiệm cận ...



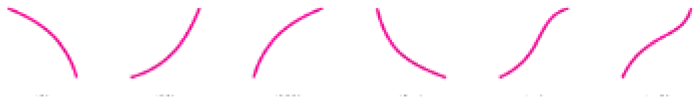
Hình 4.2.6

4.2.3. GDP hằng năm của Việt Nam từ năm 2010 tới 2012 được cho trong bảng sau.

Năm	2010	2011	2012
tốc độ tăng trưởng GDP	6,4%	6,2%	5,2%

Hãy phác họa đồ thị của GDP of Việt Nam theo thời gian, thể hiện tính tăng/giảm, lồi/lõm.

4.2.4. Dưới đây là các phát biểu về tình hình kinh doanh của một doanh nghiệp, dựa theo các đồ thị doanh số theo thời gian kèm theo. Hãy tương ứng mỗi đồ thị với phát biểu miêu tả nó.



(a) Triển vọng tốt, tốc độ tăng trưởng ngày càng tăng.

(b) Đang giảm sút, nhưng không nhanh như trước.

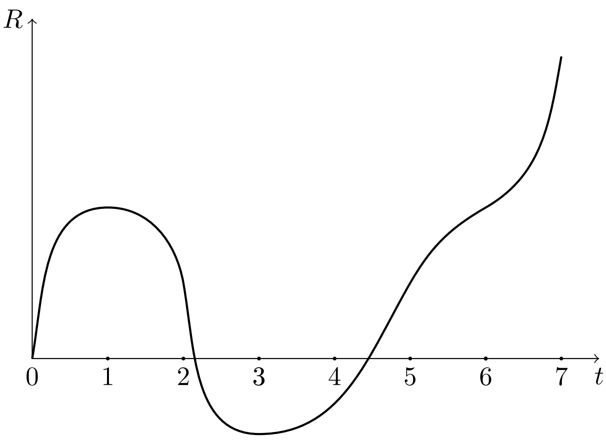
(c) Đang giảm sút, và tình hình ngày càng tệ hơn.

(d) Đang tăng trưởng, nhưng tốc độ tăng trưởng chậm lại.

(e) Tốc độ tăng trưởng đã từng giảm nhưng nay đang tăng.

(f) Tốc độ tăng trưởng đã từng tăng nhưng nay đang giảm.

4.2.5. Dưới đây là đồ thị của doanh thu R của một doanh nghiệp theo thời gian t. Từ đồ thị hãy cho biết khi nào những điều sau xảy ra:



(a) Triển vọng rất lạc quan: doanh thu đang tăng và ngày càng tăng nhanh hơn.

(b) Doanh thu đang giảm sút nhưng tình hình đang được cải thiện.

(c) Doanh thu đang giảm sút và tình hình ngày càng tệ hơn.

(d) Doanh thu đang tăng nhưng đang trở nên ổn định.

4.2.6. Sản lượng thu hoạch nông sản y phụ thuộc vào hàm lượng nitơ trong đất N, được cung cấp bằng phân đạm (urea). Người ta quan sát thấy nếu tăng lượng nitơ thì sản lượng tăng, nhưng tốc độ tăng sẽ giảm dần và sản lượng không vượt qua được một mức nhất định. Xét mô hình

$$y = C\frac{N}{N+K}$$

trong đó C và K là những hằng số nhất định. Hãy khảo sát và vẽ đồ thị của mô hình này để kiểm sự phù hợp của mô hình.

4.2.7. Hãy vẽ đồ thị của hàm f thỏa tất cả các tính chất sau:

(a) cực đại địa phương ở $(3,4)$,

(b) cực đại toàn cục ở $(-2,6)$,

(c) cực tiểu địa phương ở $(1,2)$

(d) điểm uốn ở $(-1,5)$, $(2,3)$, $(4,1)$,

(e) $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$,

(f) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

4.2.8. Hãy vẽ đồ thị của hàm f thỏa tất cả các tính chất sau:

(a) cực đại địa phương ở $x = -3$, $x = 1$,

(b) cực tiểu địa phương ở $x = -1$, $x = 3$,

(c) lõm trên $(-\infty,-2)$, $(0,2)$,

(d) lồi trên $(-2,0)$, $(2,4)$,

(e) không liên tục ở $x = 4$,

(f) không khả vi ở $x = 2$.

4.2.9. Hãy vẽ đồ thị của hàm f thỏa tất cả các tính chất sau:

(a) cực đại địa phương ở $x = -1$, $x = 3$,

(b) cực tiểu địa phương ở $x = -3$, $x = 1$,

(c) lõm trên$(-2,0)$, $(2,\infty)$,

(d) lồi trên $(-\infty,-2)$, $(0,2)$,

(e) cắt trục x ở $x = 4$,

(f) cắt trục y ở $y = 1$.

4.2.10. Hãy vẽ đồ thị của hàm f thỏa tất cả các tính chất sau:

(a) Xác định trên khoảng $(-5,6)$,

(b) $\lim_{x\to-5^+} f(x) = -\infty$,

(c) Không liên tục ở $x = -3$, và liên tục ở mọi điểm khác,

(d) Không khả vi ở $x = 1$,

(e) $\lim_{x\to 6^-} f(x) = 2$.

4.2.11. Tìm các giá trị cực đại và cực tiểu toàn cục, cực đại và cực tiểu địa phương, tính lồi, lõm, điểm uốn, và vẽ đồ thị.

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$.

(b) $f(x) = \sin x$.

(c) $f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{nếu } -2 \le x < 0 \\ 2x - 1, & \text{nếu } 0 \le x \le 2. \end{cases}$

(d) $x^2 e^x$.

4.2.12. Cho

$$f(x) = \begin{cases} 3^x - 2, & x < 0, \\ \sqrt{x}, & 0 \le x \le 4, \\ \frac{8}{x}, & x > 4. \end{cases}$$

(a) Tìm miền giá trị của f.

(b) Hàm f liên tục trên những khoảng nào?

(c) Tìm các điểm tới hạn của hàm f.

(d) Vẽ đồ thị của hàm số f.

Bài toán cực trị

4.2.13. Một cửa hàng định bán các bản sao của một tấm tranh. Nếu bán 50 bản họ có thể tính giá 400 nghìn đồng/bản. Nếu muốn bán nhiều hơn 50 bản thì cứ thêm một bản nhiều hơn 50 cửa hàng phải giảm giá mỗi bản thêm 5 nghìn đồng. Hỏi cửa hàng nên bán bao nhiêu bản để có doanh thu lớn nhất?

4.2.14. Giá p (đơn vị tiền/đơn vị sản phẩm) và doanh số x (số đơn vị sản phẩm bán được) cho một sản phẩm nhất định được cho bởi phương trình

$$x = 100 - 20p,$$

gọi là phương trình nhu cầu.

(a) Tìm hàm doanh thu (số tiền thu được) $R(x)$ từ việc bán x đơn vị sản phẩm.

(b) Tìm doanh thu cận biên (marginal revenue), tức đạo hàm của doanh thu theo doanh số.

(c) Tìm doanh thu cận biên khi doanh số là 40 đơn vị sản phẩm và giải thích ý nghĩa của con số này.

(d) Tìm doanh số để được doanh thu lớn nhất.

(e) Vẽ đồ thị của hàm R.

(f) Hàm chi phí là $C(x) = \dfrac{9}{4}x - 15$. Vẽ đồ thị của hàm C trên cùng mặt phẳng với R.

(g) Tìm doanh số để hòa vốn.

(h) Tìm doanh số để có lợi nhuận tối đa.

4.2.15. Chứng tỏ để lợi nhuận đạt cực đại thì doanh thu cận biên phải đúng bằng chi phí cận biên.

4.2.16. Gọi $C(x)$ là chi phí sản xuất x đơn vị sản phẩm của một loại hàng hóa, thì chi phí trung bình cho mỗi đơn vị sản phẩm là

$$c(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

Chứng tỏ nếu chi phí trung bình là cực tiểu thì thì nó bằng chi phí cận biên.

4.2.17. Một viên đạn được bắn lên với một tốc độ đầu cho trước bay dưới tác động của trọng trường. Hãy tìm góc bắn sao cho đạn bay xa nhất.

4.2.18. Trong số các tam giác cân có cùng chu vi, hãy tìm tam giác có diện tích lớn nhất.

4.2.19. Người ta dự đoán rằng Quỹ Bảo hiểm Xã hội có thể bị vỡ (tài sản còn bằng 0) nếu như số người đóng bảo hiểm không tăng lên hoặc quyền lợi của người được hưởng bảo hiểm không bị giảm xuống. Dữ liệu cho thấy tổng tài sản của Quỹ theo thời gian có thể được mô hình hóa bởi hàm

$$f(t) = -0{,}0129t^4 + 0{,}3087t^3 + 2{,}1760t^2 + 62{,}8466t + 506{,}2955 \quad (0 \le t \le 35)$$

ở đó $f(t)$ được đo theo đơn vị tỉ đồng và t được đo theo năm, với $t = 0$ ứng với 1995.

(a) Vẽ đồ thị của f (dùng máy tính).

(b) Khi nào thì tài sản của Quỹ đạt mức cao nhất?

(c) Dựa trên mô hình này, khi nào thì Quỹ sẽ vỡ?

(d) Khi nào thì tài sản của Quỹ bắt đầu giảm sút?

4.2.20. Một mô hình được sử dụng cho năng suất Y của một cây trồng nông nghiệp dựa trên nồng độ nitơ N có trong đất (theo một đơn vị thích hợp) là

$$Y = \frac{kN}{1 + N^2}$$

với k là một hằng số. Hỏi nồng độ nitơ là bao nhiêu để cho năng suất lớn nhất?

4.2.21. Một quần thể động vật bị nhiễm bệnh. Sau t ngày, tỷ lệ phần trăm động vật bị nhiễm bệnh được mô hình hóa bởi hàm $p(t) = 8te^{-t/12}$ (đơn vị là phần trăm). Hỏi tỉ lệ này là lớn nhất khi nào?

4.2.22. Một hồ bị nhiễm khuẩn và được xử lý bằng một hóa chất kháng khuẩn. Sau t ngày, số lượng vi khuẩn trên mỗi mililit nước được mô hình hóa bởi hàm $N(t) = 32(\frac{t}{4} - 2\ln\frac{t}{5})$ với $1 \le t \le 15$. Hãy tìm số vi khuẩn nhiều nhất và ít nhất là bao nhiêu và xảy ra trong thời gian nào.

4.2.23. Lon nước ngọt có hình dạng một mặt trụ với đáy hình tròn. Giả sử lon cần chứa lượng nước ngọt là 0,3 lít (1 lít bằng 1000 cm^3). Hãy tìm kích thước lon để lượng vật liệu làm lon (diện tích bề mặt lon) là nhỏ nhất.

4.2.24. Kim loại được dùng để làm một cái hộp với kích thước dài a, rộng a, cao h (đáy là một hình vuông). Tìm kích thước hộp để đạt thể tích 1000 cm^3 và lượng kim loại dùng là tối thiểu.

Xấp xỉ tuyến tính

4.2.25. Hãy tính gần đúng các giá trị sau bằng xấp xỉ tuyến tính.

(a) $(1{,}999)^4$.

(b) $\sin(1^\circ)$.

(c) $\sqrt[3]{1001}$

(d) $1/4{,}002$.

(e) $\tan(44^\circ)$.

(f) $\sqrt{99{,}8}$.

(g) $\sqrt[3]{999}$.

4.2.26. Hãy kiểm các xấp xỉ tuyến tính sau.

(a) $\sin x \approx x$, $x \approx 0$.

(b) $e^x \approx x + 1$, $x \approx 0$.

(c) $\ln x \approx x - 1$, $x \approx 1$.

4.2.27. Tìm xấp xỉ tuyến tính của hàm số $f(x) = \ln(1+x)$ tại $x = 0$, áp dụng để xấp xỉ giá trị của $\ln(0{,}9)$ và $\ln(0{,}99)$.

4.2.28. Hãy chứng minh công thức xấp xỉ, với $k \in \mathbb{R}$, $x \approx 0$:

$$(1+x)^k \approx 1 + kx.$$

Từ đó hãy rút ra:

(a) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$.

(b) $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$.

Qui tắc l'Hôpital

4.2.29. Tìm các giới hạn sau:

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$.

(b) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$.

(c) $\lim_{x\to \pi/2} (\tan x)^{2\cos x}$.

(d) $\lim_{x\to 0} x^{-100} e^{-1/x^2}$.

(e) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$.

(f) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\tan x}$.

(g) $\lim_{x\to 0} \cos(2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

(h) $\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x}$.

(i) $\lim_{x\to -\infty} x^2 e^x$.

(j) $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)(\ln x)$.

(k) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\ln(\cos x)}$.

(l) $\lim_{x\to 1^+} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$.

(m) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - e^x + 1}{1 - e^{x^2}}$.

(n) $\lim_{x\to 1} \frac{2017x^2 - 2017 + \sin(x-1)}{\tan(x-1)}$.

(o) $\lim_{x\to 2017^-} (x - 2017)^3 e^{\sin\left(\frac{1}{2017-x}\right)}$.

(p) $\lim_{x\to \infty} (x - \sqrt{x^2 + x})$.

(q) $\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$.

(r) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^2}$.

(s) $\lim_{x\to 1} (\ln x)(\ln(x-1))$.

(t) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$.

4.2.30. Hãy xem phương pháp l'Hôpital có hiệu quả với giới hạn này hay không:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}.$$

Tìm giới hạn này.

4.2.31. Chứng tỏ với mọi số nguyên dương n thì

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

Hãy rút ra điều trên cũng đúng nếu n là số thực dương bất kì. Điều này thể hiện rằng ***hàm mũ tăng nhanh hơn hàm lũy thừa***.

4.2.32. Chứng tỏ với mọi số thực dương α thì

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0.$$

Điều này thể hiện rằng ***hàm lũy thừa tăng nhanh hơn hàm log***.

Các bài toán khác

4.2.33. Cho $f(x) = x^{1/x}$.

(a) Tìm $\lim_{x\to\infty} f(x)$.

(b) Tìm $f'(x)$.

(c) Số nào là lớn hơn, $3^{1/3}$ hay $\pi^{1/\pi}$?

4.2.34. Dùng phương pháp quy nạp và khảo sát hàm số, hãy chứng minh với mọi số nguyên dương n và mọi số thực x thì

$$e^x \geq 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

4.2.35. Một quần thể vi khuẩn tăng gấp đôi số lượng sau mỗi giờ. Hãy tính tỉ suất tăng r trong mô hình tăng dân số liên tục $A(t) = A(0)e^{rt}$.

4.2.36. Hàm số

$$f(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

được gọi là "hàm hậu cần" (logistics function), thuộc lớp ***hàm sigmoid***, xuất hiện trong mô hình hóa và trong máy học.

(a) Khảo sát tính tăng giảm của hàm.

(b) Khảo sát tính lồi và tìm điểm uốn của hàm.

(c) Vẽ đồ thị của hàm.

Chương 5
Phép tính tích phân

5.1 Định nghĩa và tính chất của tích phân

5.1.1 Bài toán diện tích

Khái niệm chiều dài, diện tích, thể tích đã hình thành từ lâu trong lịch sử nhằm phục vụ nhu cầu đo đạc. Ngày nay các khái niệm này được mỗi người tiếp nhận từ nhỏ. Tuy ta có thể hình dung chúng là các số đo độ lớn, độ chiếm chỗ của vật thể, nhưng thật sự không dễ trả lời câu hỏi: diện tích là gì?

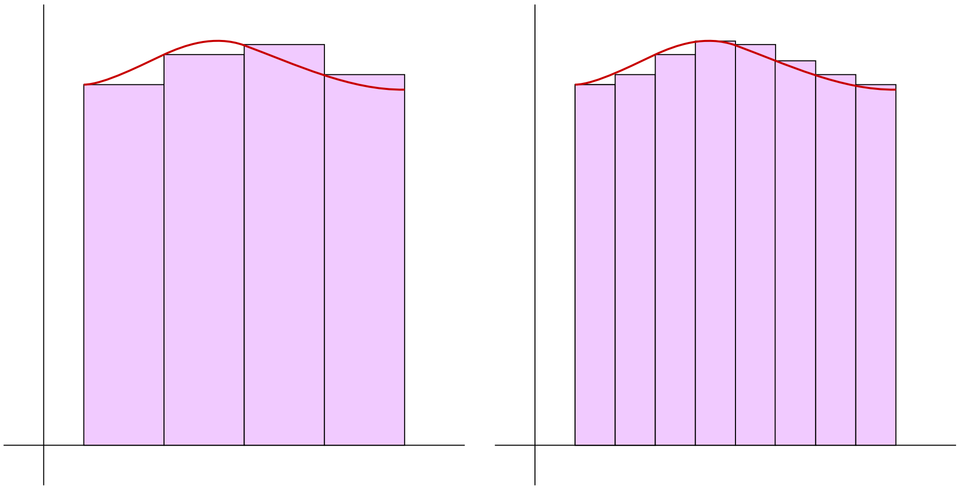
Diện tích của một hình chữ nhật được cho bằng tích của chiều dài và chiều rộng của nó. Diện tích của một tam giác ta biết là bằng phân nửa của diện tích của một hình chữ nhật có cùng đáy và cùng chiều cao. Diện tích của một đa giác được tìm ra bằng cách chia nhỏ đa giác này thành các tam giác, rồi cộng diện tích của các tam giác này lại. Với những hình phức tạp thì có thể dùng xấp xỉ bằng những hình đã biết.

Có thể cho rằng trong lịch sử tuy khái niệm diện tích chưa được làm rõ nhưng việc sử dụng khái niệm này trong thực tế chủ yếu dựa trên nguyên tắc sau về cách dùng: đưa ra một mẫu vật có độ đo đơn vị, và dùng nguyên tắc cộng tính để tính độ đo của các vật khác.

Từ khoảng thế kỉ 17 xuất hiện nhu cầu chính xác hóa, làm rõ, và phát triển khái niệm diện tích. Vấn đề này gắn liền với vấn đề xây dựng một phép tính tổng tổng quát, gọi là tích phân. Dưới đây chúng ta thảo luận sơ lược một cách làm, được gọi là tích phân Riemann.

5.1.2 Định nghĩa tích phân

Cho hàm $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ không âm. Ta muốn tìm "diện tích" của miền bên dưới đồ thị của hàm f bên trên khoảng I. Ta xấp xỉ miền đó bằng những hình chữ nhật với đáy là một khoảng con của I và chiều cao là một giá trị của f trong khoảng con đó. Ta hy vọng rằng khi số hình chữ nhật tăng lên thì tổng diện tích của các hình



Hình 5.1.1: Xấp xỉ bằng các hình chữ nhật.

chữ nhật có giá trị gần đúng với diện tích hình đang xét. Xem Hình 5.1.1.

Cụ thể hơn như sau. Chia khoảng $[a, b]$ thành các khoảng con bằng các điểm

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b.$$

Trên mỗi khoảng $[x_{i-1}, x_i]$, $1 \leq i \leq n$, lấy một điểm x_i^* nào đó. Giá trị $f(x_i^*)$ là một giá trị đại diện cho giá trị của f trên $[x_{i-1}, x_i]$. Đó cũng là chiều cao của hình chữ nhật với đáy $[x_{i-1}, x_i]$ xấp xỉ miền dưới đồ thị của hàm f bên trên $[x_{i-1}, x_i]$. Diện tích của hình chữ nhật này là $f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$. Tổng

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

là một xấp xỉ của "diện tích" của miền bên dưới đồ thị của f bên trên I, được gọi là một ***tổng Riemann***[1]. Xem Hình 5.1.2.

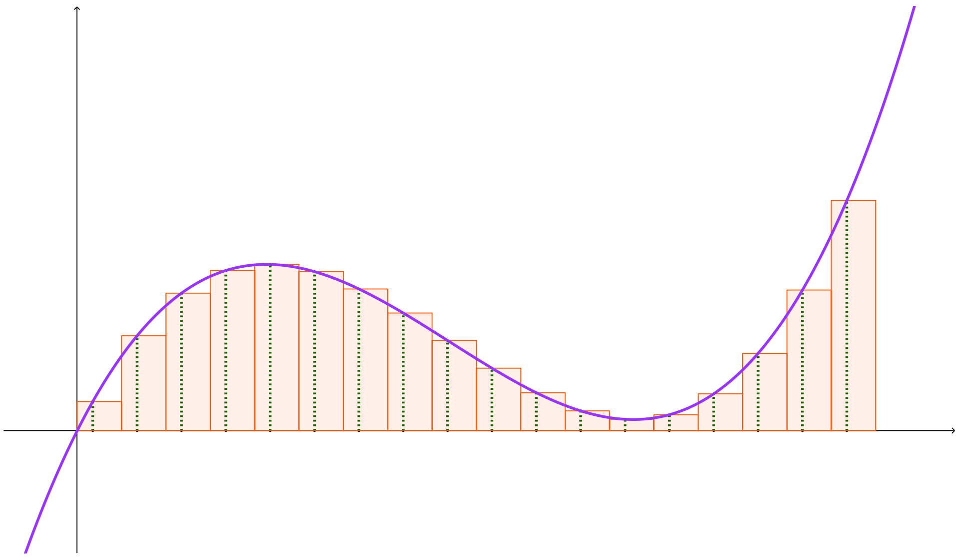
Sau đây là một cách tiếp cận định lượng. Ta muốn tính tổng giá trị của hàm f trên khoảng $I = [a, b]$. Ta chia nhỏ I thành bằng khoảng con nhỏ hơn. Ta hy vọng rằng trên mỗi khoảng nhỏ hơn đó, giá trị của hàm f sẽ thay đổi ít hơn, và ta có thể xấp xỉ f bằng một hàm hằng với giá trị là một giá trị đại diện $f(x_i^*)$. Tổng giá trị trên khoảng $[x_{i-1}, x_i]$ được xấp xỉ bằng $f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$. Vậy tổng giá trị trên I được xấp xỉ bằng

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

Ta hy vọng rằng nếu ta chia càng nhỏ thì xấp xỉ càng tốt hơn, và khi qua giới hạn thì ta sẽ được giá trị đúng của tổng giá trị của f.

Giới hạn của tổng Riemann cần được hiểu một cách chính xác. Một cách là nói rằng giới hạn đó là một số thực mà tổng Riemann có thể gần số thực đó tùy ý miễn là phép chia nhỏ là đủ mịn.

[1]Bernard Riemann đã đề xuất một định nghĩa chặt chẽ cho tích phân vào khoảng năm 1854, mặc dù tích phân đã được dùng trước đó.



Hình 5.1.2: Tổng Riemann.

Định nghĩa 5.1.1. Nếu có một số thực L sao cho với mọi số thực $\epsilon > 0$ có số thực $\delta > 0$ sao cho với mọi cách chia

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

mà có chiều dài mỗi đoạn $[x_{i-1}, x_i]$ đều nhỏ hơn δ thì với mọi cách chọn số thực $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, xảy ra

$$|\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) - L| < \epsilon$$

thì ta gọi L là ***tích phân*** của f trên $[a, b]$, kí hiệu bởi

$$\int_a^b f$$

hoặc

$$\int_a^b f(x)\,dx.$$

Nếu tích phân tồn tại thì ta nói hàm ***có tích phân*** hay là ***khả tích***.

Khi f khả tích thì ta có thể tính xấp xỉ tích phân của f với độ chính xác tùy ý bằng cách tính tổng Riemann.

Tích phân có hai ý nghĩa chính: đại diện cho ***tổng giá trị của hàm***[2], và đại diện cho ***diện tích phần bên trên trục x bên dưới đồ thị trừ diện tích phần bên dưới trục x bên trên đồ thị.***

Ở Mục 5.4.1 ta sẽ tiếp tục dùng tích phân để khảo sát diện tích.

Kí hiệu dx phổ biến trong kí hiệu tích phân chủ yếu để chỉ tên của biến của hàm mà ta lấy tích phân, không có ý nghĩa độc lập.

[2] Kí hiệu $\int$ do Gottfried Leibniz đặt ra khi xây dựng phép tính vi tích phân vào thế kỉ 17. Nó đại diện cho chữ cái "s" trong chữ Latin "summa" (tổng).

Để cho tiện, khi $a < b$ ta cũng định nghĩa

$$\int_b^a f = -\int_a^b f.$$

5.1.3 Các tính chất của tích phân

Các tính chất sau được dẫn xuất từ định nghĩa của tích phân.

Mệnh đề 5.1.2. *(a) Tích phân nếu tồn tại thì là duy nhất.*

(b) Nếu k là một hằng số thực và f có tích phân thì kf có tích phân và

$$\int_a^b [kf(x)]\, dx = k\int_a^b f(x)\, dx.$$

(c) Nếu f có tích phân và g có tích phân thì $f+g$ có tích phân và

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\, dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\, dx.$$

(d) Nếu f có tích phân trên $[a,b]$ và trên $[b,c]$ thì f có tích phân trên $[a,c]$ và

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$$

(e) Nếu $f \geq g$ trên $[a,b]$ thì

$$\int_a^b f \geq \int_a^b g.$$

Một số tính chất trên có thể được giải thích và minh họa bằng định lượng hoặc hình học khá dễ dàng. Ví dụ tính chất (a), tổng của hàm $2f$ hẳn đúng bằng 2 lần tổng của f. Tính chất (e), nếu $f \geq g \geq 0$ thì về mặt trực quan đồ thị của f cao hơn đồ thị của g, do đó diện tích bên dưới đồ thị của f lớn hơn hay bằng diện tích bên dưới đồ thị của g. Từ cách xây dựng tích phân ta có thể thấy tính liên tục của hàm là thiết yếu để xấp xỉ được tốt. Đại ý, tính liên tục khiến nếu giá trị của biến thay đổi nhỏ thì giá trị của hàm thay đổi nhỏ, nhờ đó sự xấp xỉ có hiệu quả.

Định lý 5.1.3 (Hàm liên tục có tích phân). *Nếu f liên tục trên $[a,b]$ thì tồn tại $\int_a^b f$.*

Chứng minh chặt chẽ cho các mệnh đề trên có trong các tài liệu như [TPTT02].

Bài tập

5.1.1. Sử dụng các tính chất của tích phân để chứng minh bất đẳng thức mà không cần tính tích phân.

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx \leq \int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx.$$

5.1.2. Sử dụng tính chất của tích phân để kiểm tra ước lượng

$$2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^4}\,dx \leq 2\sqrt{2}.$$

5.1.3. Tìm chặn trên và chặn dưới cho

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2x^4+3}}.$$

5.1.4. * Giả sử f liên tục trên đoạn $[a,b]$ và $f(x) \geq 0$ trên $[a,b]$. Hãy giải thích vì sao nếu $\int_a^b f = 0$ thì $f = 0$ trên $[a,b]$.

5.2 Định lý Cơ bản của phép tính vi tích phân

5.2.1 Nguyên hàm

Phép lấy nguyên hàm là phép toán ngược của phép lấy đạo hàm. Nếu f là đạo hàm của F thì ta nói F là một ***nguyên hàm*** của f.

Ví dụ 5.2.1. Vì $x' = 1$ nên hàm $F(x) = x$ là một nguyên hàm của hàm $f = 1$. Vì $(x+1)' = 1$ nên $G(x) = x+1$ là một nguyên hàm khác của f.

Định lý 5.2.2. *Nếu F là một nguyên hàm của f trên khoảng (a,b) thì tất cả các nguyên hàm khác có dạng $F + C$ trong đó C là một hằng số thực.*

Chứng minh. Giả sử G là một nguyên hàm của f thì

$$(F-G)' = F' - G' = f - f = 0.$$

Do đó $F - G$ là một hàm hằng C trên (a,b). □

Nếu hàm f có nguyên hàm thì ***tích phân bất định*** của f là tập hợp tất cả các nguyên hàm của f, được kí hiệu bởi

$$\int f$$

hay

$$\int f(x)\,dx.$$

Người ta có truyền thống viết tập hợp này ở dạng

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

trong đó F là một nguyên hàm của f và C đại diện cho một số thực bất kì. Tập này còn được gọi là ***tích phân bất định*** của hàm f.

Ví dụ 5.2.3. Nếu $f(x) = k$ là một hàm hằng thì

$$\int k\ dx = kx + C.$$

Ví dụ 5.2.4. Nếu $n \neq -1$ thì

$$\int x^n\ dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C.$$

Ví dụ 5.2.5. Ta có

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},$$

và

$$[\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}.$$

Vậy với $x \neq 0$ thì

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}.$$

Ta được

$$\int x^{-1}\ dx = \int \frac{1}{x}\ dx = \ln |x| + C.$$

Ví dụ 5.2.6.

$$\int e^x\ dx = e^x + C.$$

Nếu $k \neq 0$ thì

$$\int e^{kx}\ dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C.$$

Ví dụ 5.2.7. Dễ kiểm tra được bằng cách lấy đạo hàm:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = \arcsin x + C.$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\ dx = \arctan x + C.$$

Dễ kiểm tra được tính chất cơ bản sau của nguyên hàm, được gọi là tính tuyến tính, từ tính tuyến tính của đạo hàm:

Mệnh đề 5.2.8. *Nếu f và g có nguyên hàm thì $f+g$ có nguyên hàm, và*

$$\int f + g = \int f + \int g.$$

Nếu k là một hằng số thực thì $k \cdot f$ có nguyên hàm và

$$\int k \cdot f = k \cdot \int f.$$

Ví dụ 5.2.9. Dùng tính chất tuyến tính của nguyên hàm ta có thể tính được nguyên hàm của nhiều hàm khác, đặc biệt dễ dàng với hàm đa thức.

$$\begin{aligned}\int (2x^3 - 4)\,dx &= \int 2x^3\,dx + \int -4\,dx = 2\int x^3\,dx + (-4x) + C\\ &= 2\cdot\frac{1}{4}x^4 - 4x + C = \frac{1}{2}x^4 - 4x + C.\end{aligned}$$

5.2.2 Công thức Newton-Leibniz

Định lý sau cho một tính chất rất quan trọng về liên hệ giữa vi phân và tích phân.

Định lý 5.2.10 (Định lý Cơ bản của Phép tính vi tích phân). *Nếu f là một hàm liên tục trên $[a,b]$ thì hàm F cho bởi*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

là một nguyên hàm của f trên $[a,b]$. Vậy ta có công thức

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x).}$$

Vậy ***bất kì hàm liên tục nào cũng có nguyên hàm***. Đạo hàm của tích phân của một hàm thì là chính hàm đó, như vậy ***phép toán vi phân và phép toán tích phân là ngược nhau***.

Công thức này có thể được giải thích bằng trực quan hình học như sau. Giả sử $f \geq 0$. Khi đó $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ là diện tích bên dưới đồ thị của f từ a tới x. Khi h "nhỏ" thì ta thấy phần diện tích từ x tới $x+h$ xấp xỉ bằng chiều cao $f(x)$ nhân với chiều rộng h, tức là $F(x+h) - F(x) \approx f(x)\cdot h$, do đó $F'(x) \approx \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \approx f(x)$.

Chứng minh. Theo định nghĩa đạo hàm

$$F'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Tới đây ta biến đổi:

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h}[f(t)-f(x)]\,dt.$$

Vì f là liên tục ở x, cho trước ϵ, có $\delta > 0$ sao cho khi $|h| < \delta$ ta có $|f(t) - f(x)| < \epsilon$ với mọi t giữa x và $x+h$. Vì thế

$$\left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}\Big[f(t)-f(x)\Big]\,dt\right| \leq \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h}|f(t)-f(x)|\,dt\right| \leq \left|\frac{1}{h}h\epsilon\right| = \epsilon.$$

Điều này cho phép ta kết luận

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x).$$

Do đó $F'(x) = f(x)$. □

Ví dụ 5.2.11. Theo Định lý Cơ bản của Phép tính vi tích phân:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x t\,dt = x.$$

Ta có thể kiểm bằng tính toán trực tiếp:

$$\frac{d}{dx}\int_0^x t\,dt = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}\right) = x.$$

Ví dụ 5.2.12. Tìm đạo hàm của $h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4+1} dz$.

Ta viết

$$y = h(x) = \int_1^{\sqrt{x}} \frac{z^2}{z^4+1}\,dz.$$

Đặt

$$u = \sqrt{x}$$

thì

$$y = \int_1^u \frac{z^2}{z^4+1}\,dz.$$

Ta tính theo đạo hàm của hàm hợp

$$h'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{u^4+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{x}{x^2+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Khi đã thông thạo ta có thể viết tắt các bước áp dụng đạo hàm của hàm hợp trên như sau:

$$h'(x) = \frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^4+1}\cdot\left(\sqrt{x}\right)'.$$

Ví dụ 5.2.13. Đây là một ví dụ hàm được định nghĩa bằng tích phân:

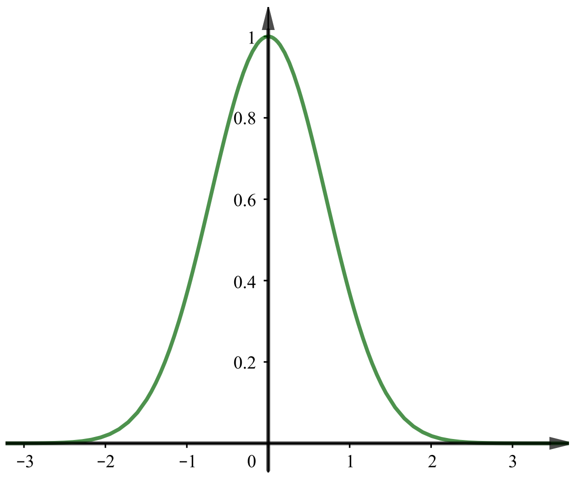
$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt,$$

được gọi là hàm lỗi hay hàm sai số[3]. Theo Định lý cơ bản của Phép tính Vi tích phân, đạo hàm của hàm này là $\operatorname{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$. Đồ thị của hàm e^{-x^2} thường được gọi là đường hình chuông hay đường cong Gauss, xem Hình 5.2.1. Giá trị của $\operatorname{erf}(x)$ bằng diện tích bên dưới đường cong từ 0 tới x. Hàm này được dùng nhiều trong môn Xác suất và Thống kê.

Định lý sau cho một công cụ chính để tính tích phân:

Định lý 5.2.14 (Công thức Newton–Leibniz). *Nếu f liên tục trên đoạn $[a, b]$*

[3] error function trong tiếng Anh



Hình 5.2.1: Đường hình chuông, đồ thị của hàm e^{-x^2}.

và F là một nguyên hàm của f thì

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.}$$

Theo Công thức Newton–Leibniz, ta có thể tính được một tích phân của một hàm nếu tìm được một nguyên hàm của hàm đó.

Chứng minh. Theo Định lý cơ bản của Phép tính vi tích phân 5.2.10,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\;dt$$

là một nguyên hàm của f. Ta có ngay $F(a) = \int_a^a f(t)\;dt = 0$, và

$$F(b) - F(a) = F(b) = \int_a^b f(t)\;dt.$$

Giờ ta chứng tỏ kết quả trên không phụ thuộc vào cách chọn nguyên hàm. Giả sử G là một nguyên hàm khác của f. Khi đó $G = F + C$ với C là một hằng số thực, và

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\;dt.$$

□

Có một cách giải thích gần đúng Công thức Newton–Leibniz bằng tổng Riemann như sau. Với bất kì phép chia nào của đoạn $[a, b]$ bởi $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$, vì

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) \approx F'(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = f(x_{i-1})\Delta x$$

nên tổng Riemann tương ứng của hàm f là

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x \approx \sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a).$$

Dẫn tới $\int_a^b f(x)\,dx \approx F(b) - F(a)$.

Ví dụ 5.2.15. Ta tính dễ dàng bằng Công thức Newton–Leibniz:

$$\int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Sách giáo khoa trung học [SGKTH] dùng Công thức Newton–Leibniz để định nghĩa tích phân. Điều này tuy tiện cho tính toán nhưng, như chính sách giáo khoa đã nhìn nhận, làm khó thấy được ý nghĩa và ứng dụng của tích phân.

Bài tập

5.2.1. Tính

(a) $\int_1^2 \left(\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^5}} + \frac{5}{x}\right) dx$.

(b) $\int_{-2}^3 |x^2 - 1|\,dx$.

(c) $\int_{-1}^2 |x - x^2|\,dx$.

(d) $\int_{-1}^2 (x - 2|x|)\,dx$.

(e) $\int_0^2 f(x)\,dx$ với $f(x) = \begin{cases} x^4, & \text{nếu } 0 \le x < 1,\\ x^5, & \text{nếu } 1 \le x \le 2.\end{cases}$

(f) $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$ với $f(x) = \begin{cases} x, & \text{nếu } -\pi \le x \le 0,\\ \sin x, & \text{nếu } 0 < x \le \pi.\end{cases}$

5.2.2. Sử dụng Định lý Cơ bản của Phép tính vi tích phân để tìm đạo hàm của hàm số sau.

(a) $g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3+1} dt$.

(b) $h(x) = e^{2019x} + \int_0^x e^{2019t}\,dt$.

5.2.3. Tính

(a) $\frac{d}{dx}\int_0^x \left(1+t^2\right)^4 dt$.

(b) $\frac{d}{dx}\int_x^1 \ln z\,dz$.

(c) $\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{dx}{1+x^2}$.

(d) $\frac{d}{dt}\int_0^{1/t} \frac{dx}{1+x^2}$.

(e) $\frac{d}{dx}\int_x^{2x} s^2\,ds$.

(f) $\frac{d}{dx}\int_{\ln x}^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt$.

5.2.4. Cho $f(x) = \int_x^{x^2} \ln(t^2+1)\,dt$. Tìm $f'(0)$.

5.2.5. Hãy chứng minh công thức là đúng bằng cách lấy đạo hàm.

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1+x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + C$,

(b) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}}\,dx = \frac{2}{3b^2}(bx-2a)\sqrt{a+bx} + C$.

5.2.6. Tính

$$\int_{\int_0^1 x\,dx}^{\int_1^2 x\,dx} \left(\int_0^2 x\,dx \right) dx.$$

5.2.7. Tích phân $\int_0^1 x^n\,dx$, $n > 0$, thay đổi như thế nào khi n thay đổi? Hãy vẽ phác họa đồ thị của hàm $y = x^n$ với một số giá trị của n để minh họa.

5.2.8. Nước chảy vào một bồn rỗng với vận tốc $3000 + 20t$ lít mỗi giờ, với $t = 0$ là thời điểm ban đầu. Hỏi lượng nước trong bồn sau 5 giờ là bao nhiêu?

5.2.9. Tốc độ tiêu thụ nước của một thành phố được mô hình hóa bằng lượng nước (nghìn lít) tiêu thụ $r(t) = 100 + 70t - 2t^2$ trong một giờ tại thời điểm t kể từ nửa đêm. Hãy ước lượng tổng lượng nước tiêu thụ trong một ngày đêm.

5.2.10. Một virus cúm đang phát tán với tốc độ $\frac{dn}{dt} = 5 + 6\sqrt{t}$ người một ngày, ở đây n là số ngàn người đang nhiễm bệnh và t là thời gian (ngày). Bao nhiêu người sẽ bị nhiễm bệnh trong khoảng từ ngày tám tới ngày mười một?

5.2.11. Tốc độ tiêu thụ điện năng theo thời gian của một thành phố tại một thời điểm t trong ngày (còn gọi là công suất tiêu thụ, tính bằng lượng điện năng tiêu thụ trong một đơn vị thời gian) được mô hình hóa bởi hàm

$$f(t) = 3t^2 + 20,$$

với $t = 0$ ứng với 5 giờ sáng. Hãy tính tổng điện năng tiêu thụ của thành phố trong khoảng thời gian từ 5 giờ sáng tới 15 giờ chiều.

5.2.12. Lượng xe đi qua một con đường tại một thời điểm t trong ngày (còn gọi là dòng giao thông, tính bằng số xe đi qua một điểm trên đường trong một đơn vị thời gian) được mô hình hóa bởi hàm

$$f(t) = -300t^2 + 2000t + 3000,$$

với $t = 0$ ứng với 6 giờ sáng. Hãy tính tổng lượng xe đi qua đường này trong khoảng thời gian từ 6 giờ sáng tới 12 giờ trưa.

5.2.13. Cho hàm số

$$f(x) = \int_0^x \frac{(t-3)^3 e^t}{\sqrt{t^2+16}}\,dt, \quad x \in [0, 6].$$

Hỏi giá trị nhỏ nhất của f đạt được tại điểm nào?

5.3 Một số phương pháp biến đổi tích phân

5.3.1 Phép đổi biến trong tích phân

Định lý 5.3.1. *Giả sử $u = g(x)$ là một hàm khả vi liên tục với tập giá trị chứa trong khoảng I và f liên tục trên I. Khi đó trên I thì*

$$\boxed{\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.}$$

Ta thường nói rằng ta biến đổi tích phân bằng cách thay $g(x)$ bởi u. Việc này được gọi là một ***phép thế***. Nếu hơn nữa có thể tính ngược lại x theo u, nói cách khác nếu g có hàm ngược, thì ta nói g là một ***phép đổi biến***. Đây là một phương pháp biến đổi tích phân thường gặp, thường được gọi là ***phương pháp thế*** hay ***phương pháp đổi biến***.

Chứng minh. Vì f liên tục trên I nó có nguyên hàm F, do đó $\int f(u)\,du = F(u)+C$. Mặt khác

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Vậy $F \circ g$ là một nguyên hàm của hàm $x \mapsto f(g(x))g'(x)$, do đó

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + D = F(u) + D = \int f(u)\,du.$$

□

Dưới đây là phiên bản của phương pháp thế cho tích phân xác định.

Định lý 5.3.2. *Giả sử $u = g(x)$ khả vi liên tục trên một khoảng chứa đoạn $[a, b]$ và f liên tục trên một khoảng chứa tập giá trị của g, khi đó*

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.} \tag{5.3.1}$$

Công thức 5.3.1 thường được gọi là ***công thức đổi biến***.

Chứng minh. Cho F là một nguyên hàm của f. Ta có $F(g(x))$ là một nguyên hàm của $f(g(x))g'(x)$. Vậy theo Định lý cơ bản của Vi tích phân 5.2.10 thì

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\ dx = F(g(b)) - F(g(a)) = F(u)\Big|_{u=g(a)}^{u=g(b)} = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\ du.$$

□

Ví dụ 5.3.3. Tính $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx$.

Người ta thường viết như sau. Đặt $x = \sin t$ thì $dx = \cos t\ dt$, $x = 0$ tương ứng $t = 0$, $x = 1$ tương ứng $t = \pi/2$, và

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\ dx &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\ dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\ dt \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\ dt = \left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Ví dụ 5.3.4. Tính $\int 2x\sin(x^2+3)\,dx$.

Thế $z = x^2+3$ thì $dz = d(x^2+3) = 2x\,dx$ nên $\int 2x\sin(x^2+3)\,dx = \int \sin z\,dz = -\cos z + C$. Vậy

$$\int 2x\sin(x^2+3)\,dx = -\cos(x^2+3) + C.$$

Ví dụ 5.3.5. Tính $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$.

Thế $u = G(x) = 1 + x^2$. Vì $du = 2x\,dx$ nên

$$\int \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\frac{1}{u}} \underbrace{x\,dx}_{\frac{1}{2}du} = \tfrac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du.$$

Nếu x chạy giữa $x = 0$ và $x = 1$, thì u chạy giữa $u = 1 + 0^2 = 1$ và $u = 1 + 1^2 = 2$,

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}\,du = \tfrac{1}{2}\ln u\Big|_1^2 = \tfrac{1}{2}\ln 2.$$

Qua các ví dụ trên ta thấy công thức đổi biến được khai thác theo cả hai chiều.

Tổng hợp lại, trong thực tế tính toán người ta thường viết theo các bước như sau để giúp việc đổi biến trở thành một thuật toán:

> ***Phương pháp đổi biến trong tích phân:***
>
> **Bước 1:** Với tích phân $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$ hoặc $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$, đặt $u = g(x)$.
>
> **Bước 2:** Tính $du = g'(x)\,dx$.
>
> **Bước 3:** Tính $x = a \implies u = g(a)$, $x = b \implies u = g(b)$.
>
> **Bước 4:** Viết $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$.

Dưới đây là một ứng dụng của công thức đổi biến.

Mệnh đề 5.3.6 (Tính đối xứng). *Giả sử rằng f liên tục trên $[-a, a]$.*

(a) Nếu f là hàm chẵn, tức $\forall x$, $f(-x) = f(x)$, thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

(b) Nếu f là hàm lẻ, tức $\forall x$, $f(-x) = -f(x)$ thì $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$.

Giải thích số lượng, mệnh đề trên khá hiển nhiên, nếu hàm có tính đối xứng chẵn thì để tính tổng của hàm chỉ cần tính tổng trên nửa khoảng xác định rồi nhân đôi, còn nếu hàm có tính đối xứng lẻ thì các giá trị sẽ triệt tiêu đôi một, nên tổng bằng 0.

Giải thích hình học, mệnh đề nói rằng vì tính đối xứng của hàm f nên với trường hợp f dương và chẵn thì diện tích dưới đồ thị của f từ $-a$ đến 0 đúng bằng diện tích từ 0 tới a, còn với trường hợp f lẻ thì tích phân bằng 0 bởi vì diện tích bên trên trục x đúng bằng diện tích diện tích bên dưới trục x. Người đọc có thể thử vẽ hình minh họa.

Chứng minh. Chúng ta chia tích phân thành hai:

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$

Lấy phép đổi biến $u = -x$:

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-u)\,(-du) = \int_{0}^{a} f(-u)\,du$$

do đó

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(-u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Nếu f là hàm chẵn thì $f(-u) = f(u)$ nên

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Nếu f là hàm lẻ thì $f(-u) = -f(u)$ nên

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(u)\,du + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

□

5.3.2 Tích phân từng phần

Ta biết theo quy tắc đạo hàm nếu f và g là các hàm khả vi thì

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)g'(x) + g(x)f'(x).$$

Bây giờ điều này có thể được hiểu là fg là một nguyên hàm của $f'g + fg'$. Do đó sai khác một hằng số ta có

$$\int [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x),$$

hay

$$\int f(x)g'(x)\,dx + \int g(x)f'(x)\,dx = f(x)g(x).$$

Vậy

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx.} \tag{5.3.2}$$

Công thức (5.3.2) được gọi là ***công thức tích phân từng phần***.

Đặt $u = f(x)$ và $v = g(x)$ thì $du = f'(x)dx$ và $dv = g'(x)dx$, do đó công thức tích phân từng phần có dạng ngắn gọn hơn, thường được dùng:

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu.} \tag{5.3.3}$$

Áp dụng lý luận dẫn tới công thức (5.3.2) cho tích phân từ a đến b, với giả thiết

f' và g' liên tục, theo Công thức Newton–Leibniz:

$$\int_a^b [f(x)g'(x) + g(x)f'(x)]\,dx = f(x)g(x)\big|_a^b$$

hay

$$\boxed{\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.} \tag{5.3.4}$$

Ví dụ 5.3.7. Tính $\displaystyle\int x\sin x\,dx$.

Chọn $f(x) = x$ và $g'(x) = \sin x$. Khi đó, $f'(x) = 1$ và $g(x) = -\cos x$. Áp dụng công thức tích phân từng phần, ta có

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)\,dx\\ &= x(-\cos x) + \int \cos x\,dx\\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

Để nhanh gọn hơn ta thường viết một cách hình thức theo một giải thuật như sau. Đặt

$$u = x, dv = \sin x\,dx$$

thì

$$du = dx, v = -\cos x$$

suy ra

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx = \int u\,dv = uv - \int v\,du &= x(-\cos x) - \int (-\cos x)\,dx\\ &= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.\end{aligned}$$

Ví dụ 5.3.8. Tính $\int \ln x\,dx$.

Đặt

$$u = \ln x, dv = dx$$

thì

$$du = \frac{1}{x}\,dx, v = x,$$

áp dụng tích phân từng phần, ta có

$$\begin{aligned}\int \ln x\,dx &= x\ln x - \int x\frac{dx}{x}\\ &= x\ln x - \int dx\\ &= x\ln x - x + C.\end{aligned}$$

Ví dụ 5.3.9. Tính $\int_0^1 \arctan x\,dx$.

Đặt

$$u = \arctan x, dv = dx$$

thì

$$du = \frac{dx}{1+x^2}, v = x.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\int_0^1 \arctan x\, dx &= x \arctan x|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx\end{aligned}$$

Dùng phép đổi biến $t = 1 + x^2$ thì $dt = 2xdx$, nên $xdx = \frac{1}{2}dt$. Khi $x = 0$ thì $t = 1$, khi $x = 1$ thì $t = 2$. Do đó

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx &= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t||_1^2 \\ &= \frac{1}{2}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 2\end{aligned}$$

Vậy

$$\int_0^1 \arctan x dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}.$$

5.3.3 Một số phương pháp tính tích phân cho các hàm đặc biệt

Tích phân các hàm lượng giác

Ví dụ 5.3.10. Tính $\int \cos^3 x dx$.

Ta tính tích phân bằng cách đổi biến $u = \sin x, du = \cos x dx$:

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x\, dx &= \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x\, dx \\ &= \int (1 - u^2)\, du = u - \frac{1}{3}u^3 + C \\ &= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C.\end{aligned}$$

Ví dụ 5.3.11. Tính $\int \sin^5 x \cos^2 x\, dx$.

Đổi biến $u = \cos x$, ta có $du = -\sin x dx$ và

$$\begin{aligned}\int \sin^5 x \cos^2 x\, dx &= \int (\sin^2 x)^2 \cos^2 x \sin x\, dx \\ &= \int (1-\cos^2 x)^2 \cos^2 x \sin x\, dx \\ &= \int (1-u^2)^2 u^2\,(-du) = -\int (u^2 - 2u^4 + u^6)\, du \\ &= -\Big(\frac{u^2}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7}\Big) + C \\ &= -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C.\end{aligned}$$

Ví dụ 5.3.12. Tính $\int \sin^4 x\, dx$.

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\, dx &= \int [(\sin x)^2]^2\, dx \\ &= \int \Big(\frac{1-\cos 2x}{2}\Big)^2\, dx \\ &= \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx \\ &= \frac{1}{4}\int \Big(\frac{3}{2} - 2\cos 2x + \frac{1}{2}\cos 4x\Big) dx = \frac{1}{4}\Big(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\Big) + C.\end{aligned}$$

Khi tính tích phân các hàm lượng giác ta có thể dùng các hệ thức lượng giác sau:

$\sin A \cos B = \frac{1}{2}[\sin(A-B) + \sin(A+B)]$
$\sin A \sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$
$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) + \cos(A+B)]$

Các phép đổi biến lượng giác

Một số phép đổi biến lượng giác, với hàm $\sec = \frac{1}{\cos}$:

Biểu thức	Phép đổi biến	Hệ thức
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a\sin\theta$	$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a\tan\theta$	$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a\sec\theta$	$\sec^2\theta - 1 = \tan^2\theta$

Ví dụ 5.3.13. Tính $\int \sqrt{9 - x^2}\, dx$.

Đặt $x = 3\sin\theta$, với $-\pi/2 \le \theta \le \pi/2$. Khi đó $\cos\theta \ge 0$, nhờ đó $\sqrt{9 - 9\sin^2\theta} = 3\cos\theta$, suy ra $\cos\theta = \frac{1}{3}\sqrt{9 - x^2}$, và

$$\begin{aligned}\int \sqrt{9-x^2}\, dx &= \int 3\cos\theta 3\cos\theta\, d\theta = 9\int \cos^2\theta\, d\theta = 9\int \frac{1+\cos(2\theta)}{2}\, d\theta \\ &= \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{2}\sin(2\theta) + C = \frac{9}{2}\theta + \frac{9}{2}\sin\theta\cos\theta + C \\ &= \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3} + \frac{1}{2}x\sqrt{9-x^2} + C.\end{aligned}$$

Tích phân hàm hữu tỷ

Ta minh họa phương pháp qua một số ví dụ sau.

Ví dụ 5.3.14. Tính $\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx$.

Ta có

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+x}{x-1}\,dx &= \int \left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx\\ &= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+2\ln|x-1|+C.\end{aligned}$$

Ví dụ 5.3.15. Tính $\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$.

Ta có thể phân tích hàm dưới dấu tích phân thành tổng sau

$$\frac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{x+2}.$$

Giải đồng nhất thức ta được $A=\frac{1}{2}$, $B=\frac{1}{5}$, và $C=-\frac{1}{10}$, và vì vậy

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{2}\frac{1}{x}+\frac{1}{5}\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{10}\frac{1}{x+2}\right)dx\\ &= \frac{1}{2}\ln|x|+\frac{1}{10}\ln|2x-1|-\frac{1}{10}\ln|x+2|+K.\end{aligned}$$

Ví dụ 5.3.16. Tính $\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}\right)dx\\ &= \int \frac{1}{x}\,dx+\int \frac{x}{x^2+4}\,dx-\int \frac{1}{x^2+4}\,dx\\ &= \ln|x|+\frac{1}{2}\ln(x^2+4)-\frac{1}{2}\tan^{-1}(x/2)+K.\end{aligned}$$

Ví dụ 5.3.17. Tính $\int \frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3}\,dx$.

Ta chia đa thức và được

$$\frac{4x^2-3x+2}{4x^2-4x+3} = 1+\frac{x-1}{4x^2-4x+3}.$$

Chú ý rằng

$$4x^2-4x+3=(2x-1)^2+2,$$

ta đổi biến $u = 2x - 1$ thì $du = 2dx$ và $x = \frac{1}{2}(u+1)$, vì vậy

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^2 - 3x + 2}{4x^2 - 4x + 3}\,dx &= \int \left(1 + \frac{x-1}{4x^2 - 4x + 3}\right) dx \\
&= x + \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{2}(u+1) - 1}{u^2 + 2}\,du = x + \frac{1}{4}\int \frac{u-1}{u^2+2}\,du \\
&= x + \frac{1}{4}\int \frac{u}{u^2+2}\,du - \frac{1}{4}\int \frac{1}{u^2+2}\,du \\
&= x + \frac{1}{8}\ln(u^2+2) - \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}} + C \\
&= x + \frac{1}{8}\ln(4x^2 - 4x + 3) - \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{2}} + C.
\end{aligned}$$

5.3.4 Sự tồn tại công thức cho tích phân

Theo Định lý cơ bản của Vi tích phân mọi hàm liên tục đều có nguyên hàm cho bởi một tích phân, do đó câu hỏi tính tích phân của một hàm có ý nghĩa thực sự là tìm một công thức tường minh cho tích phân đó. "Công thức tường minh" ở đây có ý nghĩa chính xác là công thức của một hàm sơ cấp. Thế nhưng sau này người ta nhận ra có những hàm liên tục mà nguyên hàm không phải là hàm sơ cấp, và do đó không thể có công thức tường minh.

Ví dụ 5.3.18. Hàm $f(x) = e^{x^2}$ có các nguyên hàm nhưng người ta có thể chứng minh được rằng các nguyên hàm đó không là hàm sơ cấp.

Các tích phân sau cũng được biết không phải là hàm sơ cấp:

$$\begin{array}{lll}
\int \frac{e^x}{x}dx & \int \sin(x^2)dx & \int \cos(e^x)dx \\
\int \sqrt{x^3+1}dx & \int \frac{1}{\ln x}dx & \int \frac{\sin x}{x}dx
\end{array}$$

Việc tìm công thức tường minh nói chung vẫn là một bài toán khó mặc dù người ta đã nghiên cứu rất nhiều từ lâu. Trong nhiều trường hợp công thức không có, hoặc nếu có thì quá phức tạp để có ích. Người ta có thể dùng các phương pháp khác để khảo sát tích phân, như phân tích thành chuỗi, tính toán xấp xỉ, biến đổi để khảo sát các tính chất, mà không cần công thức tường minh.

Dùng các phần mềm máy tính để tính tích phân

Chúng ta thấy rằng việc tính toán tích phân nói chung là khó và mỗi loại tích phân cần những phương pháp riêng. Người ta đã nghiên cứu nhiều và đưa ra những phương pháp chuyên biệt để tính tích phân, cũng như soạn những bản tích phân rất lớn. Rõ ràng ít người có thể nắm hết những phương pháp như vậy, cũng như việc sử dụng chúng hay tìm trong bảng sẽ mất nhiều thời gian và công sức. Các việc này thích hợp để lập trình cho máy tính thực hiện.

Các phần mềm tính toán kí hiệu hay các hệ Đại số máy tính thường có cài đặt các thuật toán tính tích phân, trong đó có một thuật toán phức tạp gọi là thuật toán Risch, cho phép xác định một hàm cho trước có nguyên hàm sơ cấp hay không và nếu có thì cho công thức của hàm đó.

Ví dụ 5.3.19. Tính $\int \sqrt{\tan x}\, dx$.

Phần mềm Maxima [Maxi], cài đặt một phần thuật toán Risch, cho kết quả:

$$-\frac{\ln\left(\tan x + \sqrt{2}\sqrt{\tan x} + 1\right)}{2^{\frac{3}{2}}} + \frac{\ln\left(\tan x - \sqrt{2}\sqrt{\tan x} + 1\right)}{2^{\frac{3}{2}}} + \\ + \frac{\arctan\left(\sqrt{2}\sqrt{\tan x} + 1\right)}{\sqrt{2}} + \frac{\arctan\left(\sqrt{2}\sqrt{\tan x} - 1\right)}{\sqrt{2}}.$$

Có một số phần mềm tính toán kí hiệu khác có thể tính được tích phân, như GeoGebra [GeoG], Wolfram Alpha [Wolf], Maple, Matlab, SageMath (có thể truy cập gói cài toàn bộ thuật toán Risch).

5.3.5 Tính tích phân bằng phương pháp số

Trong nhiều trường hợp việc tính đúng tích phân là không thể, như đã thấy ở phần trước. Có khi tính đúng cũng không cần thiết. Ngoài ra có những trường hợp hàm số được xác định từ thực nghiệm thông qua các thiết bị đọc hay thu thập dữ liệu (một bảng số liệu hay một đường cong chẳng hạn) và có thể không có công thức cho hàm. Khi đó việc tính xấp xỉ tích phân của hàm là mối quan tâm chính.

Phương pháp cơ bản là dùng một tổng Riemann với cách chia khoảng thích hợp và cách chọn điểm đại diện thích hợp.

Dưới đây ta xét phương pháp xấp xỉ dựa trên cách chia đều miền xác định.

Cho hàm f xác định trên đoạn $[a, b]$. Chia $[a, b]$ thành n khoảng bằng nhau mỗi khoảng có chiều dài $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Đặt $x_i = a + i\Delta x$, $0 \le i \le n$.

Lấy tổng Riemann với điểm đại diện là trung điểm (điểm giữa) của khoảng con, ta được ***Qui tắc điểm giữa***:

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx M_n = [f(x_1^*) + \cdots + f(x_n^*)]\Delta x$$

với

$$x_i^* = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i).$$

Ví dụ 5.3.20. Sử dụng Qui tắc điểm giữa với $n = 5$ để xấp xỉ $\int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$.

Các điểm biên của năm đoạn con là 1; 1,2; 1,4; 1,6; 1,8 và 2, vì thế các trung điểm là 1,1; 1,3; 1,5; 1,7 và 1,9. Chiều rộng của các đoạn con là $\Delta x = (2-1)/5 = \frac{1}{5}$, vì thế theo Qui tắc điểm giữa:

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx &\approx \Delta x[f(1{,}1)+f(1{,}3)+f(1{,}5)+f(1{,}7)+f(1{,}9)]\\ &= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{1{,}1}+\frac{1}{1{,}3}+\frac{1}{1{,}5}+\frac{1}{1{,}7}+\frac{1}{1{,}9}\right)\\ &\approx 0{,}691908.\end{aligned}$$

Ngoài ra còn có những phương pháp xấp xỉ khác, như phương pháp hình thang thay vì xấp xỉ bằng hình chữ nhật lại dùng xấp xỉ bằng hình thang, hay phương pháp Simpson thay vì xấp xỉ bằng hình chữ nhật lại dùng xấp xỉ bằng hình parabol. Đề tài này thường được khảo sát trong môn Phương pháp tính hay môn Giải tích số.

5.3.6 Tích phân suy rộng

Ta có thể có những câu hỏi đơn giản như diện tích bên dưới đồ thị của hàm $y = \dfrac{1}{x}$ trên $(1,\infty)$ là bao nhiêu? Để trả lời những câu hỏi như vậy người ta xây dựng khái niệm tích phân suy rộng, ở đó cận tích phân không nhất thiết là số thực nữa mà có thể là $\pm\infty$.

Định nghĩa 5.3.21. Với $a\ inR$ bất kì ta định nghĩa:

(a)
$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$$

(b)
$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^a f(x)\,dx$$

(c)
$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

(d) Nếu hàm f xác định trên $(a,b]$ thì ta định nghĩa
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\,dx$$

(e) Nếu hàm f xác định trên $[a,b)$ thì ta định nghĩa
$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\,dx$$

Ta nói một tích phân suy rộng là hội tụ nếu giới hạn tồn tại (là một số thực), và phân kỳ nếu giới hạn không tồn tại (không bằng một số thực nào).

Ví dụ 5.3.22. Xác định xem tích phân $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ hội tụ hay phân kỳ?

Theo định nghĩa ta có

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to\infty} \ln|x|\,\big|_1^t \\ &= \lim_{t\to\infty}(\ln t - \ln 1) = \lim_{t\to\infty} \ln t = \infty.\end{aligned}$$

Giới hạn không tồn tại như là một số thực và vì vậy tích phân suy rộng $\int_1^\infty (1/x)\,dx$ phân kỳ.

Ví dụ 5.3.23. Tích phân

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx$$

là hữu hạn khi và chỉ khi $p > 1$.

Ta biết từ ví dụ trên là nếu $p = 1$, thì tích phân phân kỳ, vì vậy giả sử $p \neq 1$. Khi đó

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx &= \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-p}dx \\ &= \lim_{t\to\infty} \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_{x=1}^{x=t} \\ &= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1\right)\end{aligned}$$

Nếu $p > 1$ thì $p - 1 > 0$, vì vậy khi $t \to \infty$ thì $t^{p-1} \to \infty$ và $1/t^{p-1} \to 0$, do đó

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{p-1} \quad \text{nếu } p > 1$$

và vì vậy tích phân hội tụ. Nhưng nếu $p < 1$, thì $p - 1 < 0$ và vì vậy

$$\frac{1}{t^{p-1}} = t^{1-p} \to \infty \quad \text{khi } t \to \infty$$

và tích phân phân kỳ.

Ví dụ 5.3.24. Tính $\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx$.

Từ định nghĩa ta có

$$\int_{-\infty}^0 xe^x\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^0 xe^x\,dx.$$

Ta dùng tích phân từng phần với $u = x$, $dv = e^x\,dx$ có $du = dx$, $v = e^x$:

$$\int_t^0 xe^x\,dx = xe^x|_t^0 - \int_t^0 e^x\,dx = -te^t - 1 + e^t.$$

Ta biết $e^t \to 0$ khi $t \to -\infty$. Theo quy tắc l'Hôpital thì

$$\lim_{t\to-\infty} te^t = \lim_{t\to-\infty} \frac{t}{e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty} \frac{t'}{(e^{-t})'} = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{-e^{-t}} = \lim_{t\to-\infty} (-e^t) = 0.$$

Do đó

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{t\to-\infty} (-te^t - 1 + e^t) = -0 - 1 + 0 = -1.$$

Ví dụ 5.3.25. Tìm $\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$.

Tích phân đã cho là suy rộng vì $\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\sqrt{x-2}} = \infty$. Theo định nghĩa:

$$\begin{aligned}\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} &= \lim_{t\to 2^+} \int_t^5 \frac{dx}{\sqrt{x-2}} \\ &= \lim_{t\to 2^+} 2\sqrt{x-2}\Big|_t^5 \\ &= \lim_{t\to 2^+} 2(\sqrt{3} - \sqrt{t-2}) \\ &= 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

Ví dụ 5.3.26. Tính $\int_0^1 \ln x\, dx$.

Ta biết rằng hàm số $f(x) = \ln x$ có tiệm cận đứng tại 0 vì $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. Do đó tích phân đã cho suy rộng và ta có

$$\int_0^1 \ln x\, dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \ln x\, dx.$$

Bây giờ ta dùng tích phân từng phần với $u = \ln x, dv = dx, du = dx/x$ và $v = x$:

$$\begin{aligned}\int_t^1 \ln x\, dx &= x \ln x\,\Big|_t^1 - \int_t^1 1\, dx \\ &= 1 \ln 1 - t \ln t - (1-t) = -t \ln t - 1 + t.\end{aligned}$$

Để tìm giới hạn của số hạng đầu tiên ta dùng quy tắc l'Hôpital:

$$\lim_{t\to 0^+} t \ln t = \lim_{t\to 0^+} \frac{\ln t}{1/t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1/t}{-1/t^2} = \lim_{t\to 0^+} (-t) = 0.$$

Do đó

$$\int_0^1 \ln x\, dx = \lim_{t\to 0^+} (-t \ln t - 1 + t) = -0 - 1 + 0 = -1.$$

Dưới đây ta giới thiệu bằng ví dụ phương pháp so sánh, một phương pháp hiệu quả để xét tính hội tụ của tích phân suy rộng.

Ví dụ 5.3.27. Xét sự hội tụ của tích phân

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4+1} dx.$$

Ta có

$$0 < \frac{1}{x^4+1} \leq \frac{1}{x^4},$$

dẫn tới với mọi $t > 1$ thì

$$0 \leq \int_1^t \frac{1}{x^4+1}\,dx \leq \int_1^t \frac{1}{x^4}\,dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx < \infty.$$

Bây giờ ta lý luận rằng hàm $\int_1^t \frac{1}{x^4+1}\,dx$ là hàm tăng theo t và bị chặn trên, nên có giới hạn hữu hạn (là một số thực) khi $t \to \infty$. (Điều này dựa trên tính chất đầy đủ của tập số thực, khẳng định sự tồn tại của chặn trên nhỏ nhất của một tập khác rỗng các số thực bị chặn trên.) Vậy $\int_1^\infty \frac{1}{x^4+1}\,dx$ hội tụ.

Ví dụ 5.3.28. Chứng minh rằng $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$ hội tụ.

Ta không thể tính tích phân trực tiếp vì nguyên hàm của e^{-x^2} không phải là một hàm sơ cấp. Ta viết

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \int_0^1 e^{-x^2}dx + \int_1^\infty e^{-x^2}dx$$

và thấy rằng tích phân thứ nhất ở vế phải chỉ là một tích phân Riemann thông thường. Trong tích phân thứ hai ta thấy rằng với $x \geq 1$ ta có $x^2 \geq x$, nên $-x^2 \leq -x$, và do đó $e^{-x^2} \leq e^{-x}$, do đó

$$\int_1^\infty e^{-x^2}dx \leq \int_1^\infty e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t e^{-x}dx = \lim_{t\to\infty}(e^{-1} - e^{-t}) = e^{-1}.$$

Điều này cho phép suy ra $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ hội tụ.

Tích phân này thường xuất hiện trong Xác suất và Thống kê, xem mục 5.4.4.

Phương pháp so sánh trong các ví dụ trên xuất hiện lại trong phần tiêu chuẩn so sánh của chuỗi số ở 6.1.19, ở đó người đọc có thể nhận thấy sự tương tự trong sự hội tụ của tích phân suy rộng và sự hội tụ của của chuỗi số. Người quan tâm hơn nữa về tích phân suy rộng có thể đọc các tài liệu như [Kha15].

Bài tập

Tính tích phân

5.3.1. Tính tích phân

(a) $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

(b) $\int_0^a x\sqrt{x^2+a^2}\,dx$, $a > 0$.

(c) $\int_{-\pi/3}^{\pi/3} x^4\sin x\,dx$.

(d) $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$.

(e) $\int_0^4 \frac{x}{\sqrt{1+2x}}\,dx$.

(f) $\int_2^3 \frac{1}{r\ln r}\,dr$.

(g) $\int \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,dx$.

(h) $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin x}\,dx$.

(i) $\int_0^1 z\sqrt{1-z^2}\,dz$.

(j) $\int_1^2 \frac{\ln 2x}{x}\,dx$.

(k) $\int \alpha e^{-\alpha^2}\, d\alpha$.

(l) $\int \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}\, dt$.

(m) $\int 1/(2^x + 2^{-x})\, dx$.

(n) $\int_1^2 3x^2 \ln x\, dx$.

5.3.2. Tính tích phân

(a) $\int x \cos 4x\, dx$.

(b) $\int y e^{0,3y}\, dy$.

(c) $\int t e^{-2t}\, dt$.

(d) $\int (x^2 + 3x) \cos x\, dx$.

(e) $\int t^3 \ln t\, dt$.

(f) $\int (\ln x)^2\, dx$.

(g) $\int e^{2\theta} \sin 3\theta\, d\theta$.

(h) $\int z^3 e^z\, dz$.

(i) $\int \cos x \ln(\sin x)\, dx$.

(j) $\int_4^9 \frac{\ln y}{\sqrt{y}}\, dy$.

(k) $\int_1^3 r^3 \ln r\, dr$.

(l) $\int_0^1 \frac{y}{e^{2y}}\, dy$.

5.3.3. Tính tích phân

(a) $\int \frac{x^4}{x-1}\, dx$.

(b) $\int \frac{3t-2}{t+1}\, dt$.

(c) $\int_0^1 \frac{2}{2x^2+3x+1}\, dx$.

(d) $\int_0^1 \frac{x-4}{x^2-5x+6}\, dx$.

(e) $\int \frac{1}{(x+a)(x+b)}\, dx$.

(f) $\int_3^4 \frac{x^3-2x^2-4}{x^3-2x^2}\, dx$.

(g) $\int_0^1 \frac{x^3-4x-10}{x^2-x-6}\, dx$.

(h) $\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}\, dx$.

(i) $\int \frac{x^3+x^2+2x+1}{(x^2+1)(x^2+2)}\, dx$.

(j) $\int \frac{3x^2+x+4}{x^4+3x+2}\, dx$.

(k) $\int \frac{x^2-3x+7}{(x^2-4x+6)^2}\, dx$.

5.3.4. Tính tích phân

(a) $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2}\, dx$.

(b) $\int_0^a \frac{dx}{(a^2+x^2)^{3/2}}, a > 0$.

(c) $\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-16}}$.

(d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+16}}$.

(e) $\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2+2}}\, dt$.

(f) $\int \sqrt{1-4x^2}\, dx$.

(g) $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

(h) $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\, dx$.

5.3.5. Dùng phép đổi biến lượng giác để chứng minh rằng

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2}) + C.$$

5.3.6. Dùng máy tính để tính các tích phân của các hàm:

(a) $(x^5 + 4x^3 + 2x - 4)/(2x^3 - 8x + 6)$.

(b) $(x^5 + 4x^3 + 2x - 4)/(2x^3 - 4x + 6)$.

(c) e^{-x^2}.

(d) $\sin \ln x$.

(e) $\sqrt{x + \sqrt{1+x^2}}/x$.

Tính tích phân bằng phương pháp số

5.3.7. Cho hàm số f định bởi $f(x) = x^4$ xác định trên đoạn $[0, 1]$. Hãy viết biểu thức tổng Riemann của f trên $[0, 1]$ bằng cách chia đoạn này thành 10 đoạn con đều nhau, điểm lấy mẫu là trung điểm của mỗi đoạn con. Hãy so sánh giá trị của tổng Riemann này với giá trị đúng của tích phân.

5.3.8. Dùng Qui tắc điểm giữa với $n = 6$ để tính xấp xỉ tích phân $\int_1^3 e^{1/x}\,dx$.

5.3.9. Dùng Qui tắc điểm giữa với $n = 10$ để ước lượng tích phân $\int_0^1 e^{x^2}\,dx$.

5.3.10. Dùng Qui tắc điểm giữa với $n = 10$ để ước lượng tích phân $\int_1^2 (1/x)\,dx$.

5.3.11. Dùng Qui tắc điểm giữa với $n = 4$ để tính xấp xỉ tích phân $\int_0^{4\sqrt{\pi}} \cos(x^2)\,dx$.

5.3.12. Dùng dữ liệu được cho và quy tắc điểm giữa để ước lượng giá trị của tích phân $\int_1^5 f(x)\,dx$:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1,0	2,4	3,5	4,0
1,5	2,9	4,0	4,1
2,0	3,3	4,5	3,9
2,5	3,6	5,0	3,5
3,0	3,8		

Tích phân suy rộng

5.3.13. Tính diện tích bên dưới đường $y = \dfrac{2}{x^3}$ bên trên trục x trên khoảng $[3, \infty)$.

5.3.14. Vẽ đồ thị của hàm $y = \frac{1}{1+x^2}$ và tính diện tích bên dưới đồ thị này bên trên trục x.

5.3.15. Xác định tích phân hội tụ hay phân kỳ.

(a) $\int_0^1 \frac{3}{x^5}\,dx$.

(b) $\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{3-x}}\,dx$.

(c) $\int_{-2}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$.

(d) $\int_6^8 \frac{4}{(x-6)^3}\,dx$.

(e) $\int_{-2}^3 \frac{1}{x^4}\,dx$.

(f) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

(g) $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\,dx$.

(h) $\int_0^5 \frac{w}{w-2}\,dx$.

(i) $\int_0^3 \frac{dx}{x^2-6x+5}$.

(j) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{3-x}}$.

5.3.16. Tìm xem tích phân sau là hội tụ hay phân kì. Nếu tích phân hội tụ hãy tính nó.

(a) $\int_e^\infty \frac{\ln x}{x}\,dx$.

(b) $\int_0^1 \frac{e^{-1/x}}{x^2}\,dx$.

5.3.17. Xác định tích phân hội tụ hay phân kỳ, có thể dùng phương pháp so sánh.

(a) $\int_0^\infty \frac{x}{x^3+1}\,dx$.

(b) $\int_0^\infty \frac{\cos^2 x}{x^2+1}\,dx$.

(c) $\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

(d) $\int_1^\infty \frac{2+e^{-x}}{x}\,dx$.

(e) $\int_2^\infty \frac{x}{\sqrt{x^4-x}}\,dx$.

(f) $\int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{\sqrt{x}}\,dx$.

(g) $\int_0^\infty xe^{-x^2/2}\,dx$.

(h) $\int_0^1 \frac{e^{-1/x}}{x^3}\,dx$.

(i) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2e^x}\,dx$.

5.3.18. Tìm các giá trị của p sao cho tích phân hội tụ và tính tích phân với các giá trị đó của p.

(a) $\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx$.

(b) $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^p}\,dx$.

(c) $\int_0^1 x^p \ln x\,dx$.

5.3.19. Chứng tỏ phần không gian nhận được bằng cách xoay quanh trục x phần mặt phẳng bên dưới đồ thị của hàm $y = 1/x$ bên trên trục x với $x \geq 1$ có thể tích hữu hạn.

Các bài toán khác

5.3.20. Nếu f liên tục trên $\mathbb{R}$, hãy chứng minh

$$\int_a^b f(-x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(x)\,dx.$$

Hãy minh họa hình học đẳng thức này.

5.3.21. Nếu f liên tục trên $\mathbb{R}$, hãy chứng minh rằng

$$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x)\,dx.$$

Hãy minh họa hình học đẳng thức này.

5.3.22. Chứng minh công thức truy hồi, với $n \geq 2$ là một số nguyên:

(a)
$$\int \cos^n x\,dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\,dx.$$

(b)
$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\,dx.$$

5.3.23. Chứng minh rằng với $n \geq 2$ là một số nguyên:

(a)
$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\,dx.$$

(b)
$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x\,dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}.$$

(c)
$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x\,dx = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot 2n}\frac{\pi}{2}.$$

5.3.24. Chứng minh công thức, với m và n là các số nguyên dương

(a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx\,dx = 0.$

(b) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{nếu } m \neq n \\ \pi, & \text{nếu } m = n. \end{cases}$

(c) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{nếu } m \neq n \\ \pi, & \text{nếu } m = n. \end{cases}$

5.3.25. Một chuỗi Fourier hữu hạn được định nghĩa bởi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin nx = a_1 \sin x + a_2 \sin 2x + \cdots + a_N \sin Nx.$$

Chứng minh rằng hệ số a_m được cho bởi công thức

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx dx.$$

5.3.26. Cho f là một hàm liên tục. Đặt

$$g(x) = \int_0^x (x - t) f(t)\, dt.$$

Đây là một ví dụ của một đối tượng nâng cao hơn trong Giải tích toán học gọi là "tích chập" (convolution).

(a) Tính g nếu $f(x) = x$.

(b) Chứng tỏ

$$g(x) = x \int_0^x f(t) dt - \int_0^x t f(t)\, dt.$$

(c) Tính $g'(x)$ và $g''(x)$.

5.4 Ứng dụng của tích phân

5.4.1 Diện tích, thể tích

Diện tích giữa hai đồ thị

Nếu f là hàm không âm có tích phân trên đoạn $[a, b]$ thì ta có thể ***định nghĩa*** diện tích của phần mặt phẳng bên dưới đồ thị của f bên trên trục x là

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Nếu f và g là hai hàm có tích phân với $f \geq g$ trên $[a, b]$ thì có thể định nghĩa diện tích của phần mặt phẳng nằm giữa hai đồ thị là

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Ví dụ 5.4.1. Diện tích hình chữ nhật $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, c \le y \le d\}$ là

$$\int_a^b (d-c)\,dx = (b-a)(d-c).$$

Ví dụ 5.4.2. Tìm diện tích nằm giữa hai đường $y = x^2$ và $y = x^3$.

Ta dễ dàng khảo sát được, và có thể dùng thêm hình vẽ để thấy, rằng hai đường này cắt nhau tại $x = 0$ và $x = 1$, và trên $[0,1]$ thì $x^2 \ge x^3$. Do đó diện tích của phần nằm giữa hai đồ thị bằng

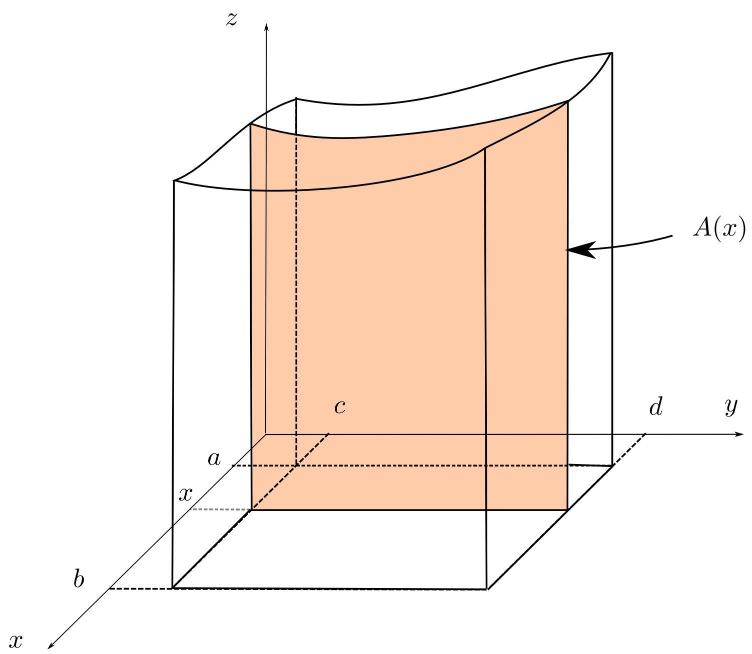
$$\int_0^1 (x^2 - x^3)\,dx = \frac{1}{12}.$$

Trong phần Tích phân hàm nhiều biến của môn Vi tích phân 2, xem [Bmgt2], chúng ta sẽ khảo sát một cách có hệ thống hơn vấn đề diện tích và thể tích. Ở đây ta chỉ thảo luận một số trường hợp riêng.

Thể tích

Nếu một khối trong $\mathbb{R}^3$ có diện tích của mặt cắt (tiết diện) vuông góc trục x tại $x \in [a,b]$ là $A(x)$ thì ta có thể định nghĩa thể tích của khối là

$$\int_a^b A(x)\,dx.$$



Hình 5.4.1: Thể tích của khối qua diện tích mặt cắt.

Định nghĩa này nói rằng ***thể tích của khối bằng tổng diện tích các mặt cắt song song.*** Đây còn được gọi là tính thể tích bằng phương pháp cắt lớp.

Ví dụ 5.4.3. Thể tích quả cầu bán kính R là $V = \frac{4\pi}{3}R^3$.

Lấy quả cầu tâm O bán kính R. Lát cắt vuông góc trục x tại x là một hình tròn có bán kính $r = \sqrt{R^2 - x^2}$, nên có diện tích bằng

$$A(x) = \pi r^2 = \pi\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 = \pi\left(R^2 - x^2\right).$$

Vậy thể tích quả cầu bằng

$$V = \int_{-R}^{R} \pi\left(R^2 - x^2\right) dx = \pi\ R^2 x - \tfrac{1}{3}x^3\Big|_{x=-R}^{x=R} = \tfrac{4}{3}\pi R^3.$$

Ví dụ 5.4.4. Một khối tròn xoay nhận được bằng cách xoay một miền trong mặt phẳng quanh một đường thẳng trong mặt phẳng đó. Giả sử $f \geq 0$ trên $[a, b]$ và xét khối tròn xoay thu được bằng cách xoay đồ thị của hàm f quanh trục x. Mỗi lát cắt vuông góc tại x của khối tròn xoay là một hình tròn tâm trên trục x với bán kính $f(x)$, có diện tích bằng $\pi f(x)^2$. Vậy thể tích của khối tròn xoay nhận đường bằng cách xoay đồ thị của f quanh trục x là

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\, dx.$$

Ví dụ 5.4.5. Khi xoay đoạn thẳng $y = x$ với $0 \leq x \leq 1$ quanh trục x ta được một mặt nón. Thể tích của khối nón bao bởi mặt nón này bằng

$$\int_0^1 \pi x^2\, dx = \frac{\pi}{3}.$$

5.4.2 Giá trị trung bình

Nếu tại các điểm x_i, $1 \leq i \leq n$ có tương ứng các giá trị $f(x_i)$ thì giá trị trung bình tại các điểm này như ta đã biết là $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$. Trong trường hợp miền xác định có vô hạn phần tử, giả sử f được xác định trên $[a, b]$ thì giá trị trung bình của f được cho bằng công thức tương tự, chỉ thay tổng bằng tích phân:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

Giá trị trung bình của một hàm số trên một miền xác định chính là tổng giá trị của hàm chia cho chiều dài của miền xác định.

Có thể giải thích chi tiết hơn như sau. Chia $[a, b]$ thành n đoạn con có cùng chiều dài Δx

$$a = x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n = b.$$

Lấy điểm $x_{i-1} \leq x_i^* \leq x_i$. Giá trị trung bình của hàm tính tại các điểm chia trên là:

$$\frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + f(x_3^*) + \cdots + f(x_n^*)}{n}.$$

Ta viết

$$\begin{aligned}\frac{f(x_1^*)+f(x_2^*)+\cdots+f(x_n^*)}{n} &= [f(x_1^*)+f(x_2^*)+\cdots+f(x_n^*)]\cdot\frac{b-a}{n}\cdot\frac{1}{b-a}\\ &= [f(x_1^*)+f(x_2^*)+\cdots+f(x_n^*)]\cdot\Delta x\cdot\frac{1}{b-a}\end{aligned}$$

Số hạng

$$[f(x_1^*)+f(x_2^*)+\cdots+f(x_n^*)]\cdot\Delta x$$

chính là một tổng Riemann của f. Qua giới hạn khi $n\to\infty$ ta được ngay giá trị trung bình của hàm là

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ví dụ 5.4.6. Nhiệt độ (đo bằng độ C) t giờ kể từ 9 giờ sáng được mô hình hóa bởi

$$T(t)=30+14\sin\frac{\pi t}{12}.$$

Tìm nhiệt độ trung bình giữa 9 giờ sáng và 9 giờ tối.

Giá trị trung bình của T giữa $t=0$ và $t=12$ là

$$\frac{1}{12-0}\int_0^{12}T(t)\,dt=\frac{1}{12}\int_0^{12}\left(30+14\sin\frac{\pi t}{12}\right)\,dt\approx 38{,}9.$$

Ví dụ 5.4.7 (Vận tốc trung bình). Xét một vật di chuyển trên một đường thẳng. Cho đường thẳng này một trục tọa độ, thì vị trí của vật tại thời điểm t được cho bởi một số thực $x(t)$. Vận tốc chuyển động là tỉ lệ thay đổi tức thời của vị trí theo thời gian, $v(t)=x'(t)$. Chú ý vận tốc (velocity) có thể có giá trị âm hay dương, khác với tốc độ (speed) là độ lớn của vận tốc. Giả sử vật di chuyển trong khoảng thời gian từ a tới b. Giá trị trung bình của vận tốc trong khoảng thời gian này là

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b v(t)\,dt=\frac{1}{b-a}\int_a^b x'(t)\,dt=\frac{1}{b-a}x(t)|_{t=a}^{t=b}=\frac{x(b)-x(a)}{b-a}.$$

Ta thấy đây chính là vận tốc trung bình, bằng quãng đường đi được chia chiều dài khoảng thời gian.

5.4.3 Một số ứng dụng trong khoa học

Một ý nghĩa chính của tích phân là tính tổng, vì vậy mỗi khi trong khoa học kỹ thuật có nhu cầu tính tổng của vô hạn giá trị thì tích phân có thể xuất hiện.

Ở đây ta nghiên cứu các ứng dụng chủ yếu qua các ví dụ và bài toán. Người đọc có thể tham khảo thêm nhiều ví dụ ứng dụng trong giáo trình [Ste16].

Ví dụ 5.4.8 (Mạch máu). Luật dòng chảy về tốc độ dòng máu chảy trong một mạch máu được xây dựng như sau:

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2)$$

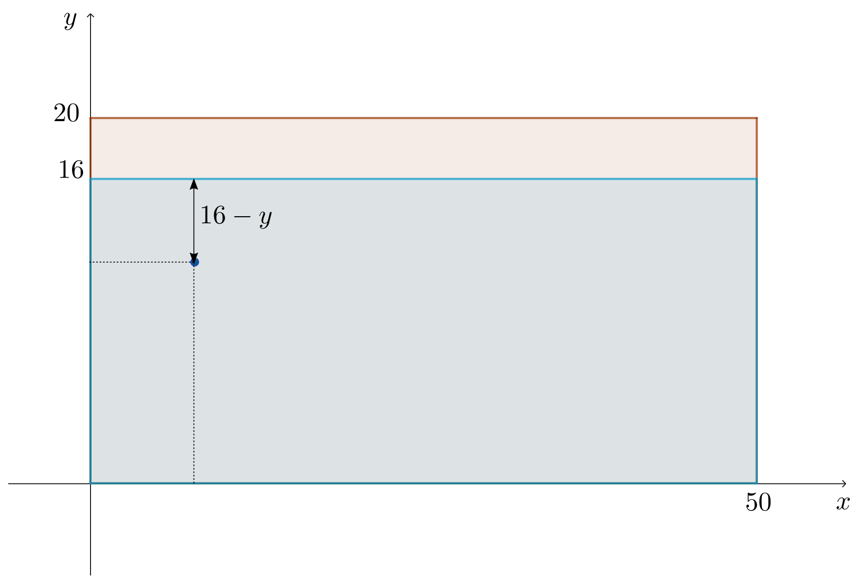
trong đó, v là vận tốc dòng máu chảy trong một mạch máu với bán kính R và độ dài l ở một khoảng cách r từ trục ở tâm, P là áp lực khác nhau giữa các điểm cuối của mạch máu và η là độ nhớt của máu. Ta muốn tính thể tích máu đi trong mạch máu theo đơn vị thời gian, hay còn gọi là thông lượng của dòng máu chảy.

Tổng thể tích máu đi qua ở mỗi bán kính cố định trong một đơn vị thời gian là $v(r)(2\pi r)$, trong đó $2\pi r$ chính là chu vi (chiều dài) của đường tròn bán kính r. Vậy tổng thể tích máu đi trong mạch máu trong một đơn vị thời gian là tích phân của lượng trên theo bán kính:

$$\int_0^R v(r) 2\pi r\, dr = \int_0^R \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2) 2\pi r\, dr = \frac{\pi P R^4}{8\eta l}.$$

Ví dụ 5.4.9 **(Thủy lực).** Một con đập có dạng hình chữ nhật, thẳng đứng. Độ cao của nó là 20 mét và bề rộng là 50 mét. Tính áp lực nước tác động lên con đập nếu mực nước cách đỉnh đập 4 mét.

Áp lực lên một chất lỏng tĩnh có mật độ khối lượng ρ ở độ sâu d được cho bởi là $\rho g d$ trong đó g là hằng số trọng trường. Một nguyên lý là tại mọi vị trí trong một chất lỏng tĩnh áp lực là giống nhau theo mọi hướng, nếu không thì chất lỏng sẽ di chuyển theo hướng có áp lực lớn hơn.



Đặt một hệ tọa độ lên mặt phẳng của con đập, chọn gốc tọa độ ở góc dưới bên trái của con đập, trục x nằm ngang và trục y thẳng đứng hướng lên như trong hình. Áp lực nước tĩnh tại một điểm có cao độ y là $\rho g(16 - y)$, với mật độ khối lượng của nước là $\rho = 1000$ (kg/m^3). Tổng áp lực nước trên đập ở cao độ này là $50\rho g(16 - y)$, và tổng áp lực nước trên toàn đập là

$$\int_0^{16} 50\rho g(16 - y)\, dy = 50 \cdot 1000 \cdot 9{,}8 \cdot \left(16y - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{16} = 62720 \cdot 10^3.$$

Đơn vị để đo áp lực là Newton trên mét vuông, còn được gọi là Pascal, với Newton là đơn vị đo lực ($N = kgm/s^2$).

Hàm mật độ

Nếu tại mỗi điểm x_i, $1 \leq i \leq n$ có tương ứng giá trị $f(x_i)$ của một đại lượng thì tổng giá trị của đại lượng dĩ nhiên là $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$. Nếu tập hợp D các điểm đang xét là vô hạn thì hàm f từ D vào tập các số thực có khi được gọi là ***hàm mật độ*** của đại lượng, và tổng giá trị của đại lượng là tích phân $\int_D f$ của hàm mật độ.

Trong vật lí, khối lượng của vật là tích phân của hàm mật độ khối lượng trên phần không gian chứa vật.

Ví dụ 5.4.10. Tìm khối lượng của một thanh kim loại thẳng dài 2 mét có mật độ khối lượng $\rho(x) = 1 + x(2 - x)$ (kg/m), với x là khoảng cách từ một đầu của thanh tới điểm đang xét.

Khối lượng của thanh bằng tích phân trên thanh của hàm mật độ khối lượng:

$$\int_0^2 \rho(x)\,dx = \int_0^2 [1 + x(2-x)]\,dx = 10/3 \quad (kg).$$

Công

Giả sử một vật di chuyển dưới tác dụng của một lực. Công của lực là khái niệm vật lí đại diện cho tác động của lực vào chuyển động. Nếu lực nằm cùng chiều chuyển động của vật thì toàn bộ lực biến thành công. Nếu một vật di chuyển một khoảng cách d trên một đường thẳng dưới tác động của một lực hằng F cùng chiều chuyển động thì công là tổng tác động của lực vào chuyển động, chính bằng tổng của đại lượng F trên đoạn có chiều dài d, do đó được định nghĩa trong vật lí là số $F \cdot d$.

Bây giờ xét trường hợp tổng quát hơn, lực F có thể thay đổi độ lớn, tuy vẫn cùng phương chuyển động. Đặt một trục tọa độ trên phương chuyển động. Vị trí của vật được cho bởi số thực x còn độ lớn lực tác động lên vật tại điểm đó được cho bởi $F(x)$. Giả sử vật di chuyển từ vị trí $x = a$ tới vị trí $x = b$. ***Công của lực*** F là tổng của hàm F trên đoạn $[a, b]$, cho bởi tích phân

$$\int_a^b F(x)\,dx.$$

Ví dụ 5.4.11 (Động năng). Giả sử một vật di chuyển dưới tác dụng của tổng lực F. Giả sử vị trí của vật ở thời điểm t là $x(t)$. Vận tốc của vật là $v(t) = x'(t)$ và gia tốc của vật là $a(t) = v'(t) = x''(t)$. Giả sử vị trí ban đầu của vật là $x(t_0) = a$ và vị trí cuối là và $x(t_1) = b$. Ta định nghĩa ***động năng*** (năng lượng có từ chuyển động) của vật là $K(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 = \frac{1}{2}mx'(t)^2$.

Theo cơ học Newton: $F = ma = mx''$. Do đó công của lực F khi vật di chuyển từ a tới b là

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t))x'(t)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} mx''(t)x'(t)\,dt.$$

Chú ý hệ thức $\big((x')^2\big)' = 2x'x''$, ta biến đổi

$$\begin{aligned}\int_a^b F(x)\,dx &= \int_{t_0}^{t_1} m\frac{1}{2}(x'(t)^2)'\,dt \\ &= \frac{1}{2}mx'(t_1)^2 - \frac{1}{2}mx'(t_0)^2 = K(t_1) - K(t_0).\end{aligned}$$

Vậy ta thu được bằng phương pháp toán học một định luật vật lí: công của lực tác động đúng bằng biến thiên động năng.

5.4.4 Xác suất

Trong lý thuyết xác suất, một biến ngẫu nhiên X là một ánh xạ từ một tập hợp các sự kiện vào tập hợp các số thực. Với mỗi giá trị $x \in D$ có một số thực $0 \le f(x) \le 1$ là xác suất để X có giá trị x (lưu ý giá trị 1 chính là 100%). Hàm f được gọi là hàm phân bố xác suất của biến ngẫu nhiên X. Trong trường hợp tập giá trị D của X là hữu hạn ta nói X là một biến ngẫu nhiên rời rạc, và xác suất để X có giá trị trong tập $C \subset D$ được cho bởi

$$\sum_{x\in C} f(x).$$

Một hệ quả là hàm mật độ xác suất phải thỏa $\sum_{x\in D} f(x) = 1$. Giá trị trung bình (mean) hay kỳ vọng (giá trị có thể trông đợi) theo xác suất của X được cho bởi:

$$\sum_{x\in D} xf(x).$$

Ví dụ 5.4.12. Xét một trò chơi với con xúc sắc như sau: Người chơi phải trả 20 đồng cho mỗi lần tung xúc sắc. Nếu mặt ngửa là mặt 6 nút thì người chơi được nhận 60 đồng, nếu là các mặt còn lại thì chỉ được nhận 10 đồng. Hỏi trong trò chơi này ai được lợi, người chơi hay người tổ chức trò chơi?

Gọi X là biến xác suất như sau: Mặt 6 nút của xúc sắc ứng với số thực 60, các mặt còn lại ứng với số thực 10. Hàm phân bố xác suất trong trường hợp này là $f(10) = 5/6$ và $f(60) = 1/6$. Câu trả lời cho câu hỏi trên được quyết định bởi giá trị trung bình của biến xác suất X. Ta có kì vọng của X bằng $10\cdot\frac{5}{6} + 60\cdot\frac{1}{6} = \frac{110}{6} < 20$, như vậy nếu chơi nhiều lần thì người chơi sẽ bị thiệt, còn người tổ chức trò chơi sẽ hưởng lợi.

Trong trường hợp tập giá trị của biến ngẫu nhiên X là một tập con vô hạn D của tập hợp các số thực ta nói đó là một biến ngẫu nhiên liên tục. Tương tự với trường hợp rời rạc, có một hàm phân bố xác suất, hay mật độ xác suất f xác định trên D sao cho $f(x) \ge 0$ và xác suất để X có giá trị trong tập $C \subset D$ thu được bằng cách thay tổng bởi tích phân:

$$\int_C f.$$

Một hệ quả là hàm mật độ xác suất phải thỏa $\int_D f = 1$. Tương tự, trung bình hay kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X thu được bằng cách thay tổng bởi tích phân:

$$\int_D xf.$$

Ví dụ 5.4.13. Một nhà sản xuất bảo hành một sản phẩm 2 năm. Gọi T là biến xác suất ứng thời điểm hư hỏng của sản phẩm với số thực $t \geq 0$ là thời gian tính theo năm từ khi sản phẩm được sản xuất. Giả sử hàm mật độ xác suất được cho bởi $f(t) = 0{,}1e^{-0{,}1t}$. Xác suất sản phẩm bị hư trong thời gian bảo hành là xác suất để T có giá trị giữa 0 và 2, được cho bởi

$$\int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^2 0{,}1e^{-0{,}1t}\,dt \approx 18\%.$$

Ví dụ 5.4.14 (Phân bố chuẩn). Nhiều hiện tượng ngẫu nhiên được mô hình hóa bằng hàm phân bố có dạng

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

Ở đây giá trị trung bình xác suất là μ, còn số σ đo mức độ phân tán của giá trị, được gọi là độ lệch chuẩn (standard deviation). Đồ thị của hàm này có dạng trong Hình 5.2.1. Việc đây thực sự là một hàm phân bố xác suất là hệ quả của công thức

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Bài tập

Diện tích, thể tích

5.4.1. Tính diện tích miền được bao bởi các đường cong đồ thị của các hàm số:

(a) $f(x) = 2x^3 + 3$ và $g(x) = 4x + 3$.

(b) $f(x) = 4x - 3x^3$ và $g(x) = 2x + 1$.

(c) $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 2)$ và trục x.

(d) $f(x) = 3x^4 - 24x^2 + 50$ và đường thẳng ℓ cắt đồ thị ở $x = 1$ và $x = 3$.

(e) $y = x(2 - x)$ và $x = 2y$.

(f) $x^2 = 4y$ và $x = 4y - 2$.

(g) $y = x^2$ và $x = y^2$.

(h) $f(x) = x^2$ và $g(x) = 3/(2 + x^2)$.

(i) $y = (1/2)x^2 + 1$ và $y = x + 1$.

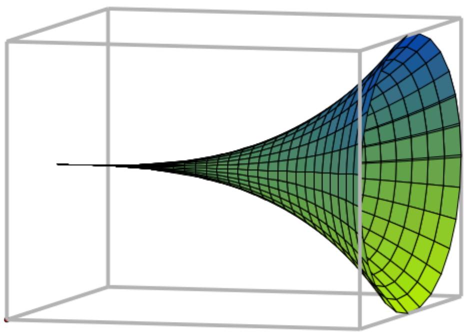
(j) $x^2 + y^2 = 1$ và $(x-1)^2 + y^2 = 1$.

5.4.2. Sử dụng chương trình máy tính để vẽ và tìm diện tích của miền được giới hạn bởi các đường cong $y = x^5 - 5x^3 + 3x$ và $y = 2x + 1$.

5.4.3. Sử dụng chương trình máy tính để vẽ và xấp xỉ diện tích của miền được giới hạn bởi các đường cong $y = |x|$ và $y = \cos x$.

5.4.4. Một máy chụp cắt lớp vi tính theo trục ngang CAT (Computerized Axial Tomography) tạo ra ảnh chụp phần trong của một cơ quan của cơ thể con người nhằm cung cấp thông tin về cơ quan mà không cần phẫu thuật. Giả sử rằng một máy chụp cắt lớp vi tính CAT chụp cắt lớp một lá gan của một người với khoảng cách các mặt cắt cách đều nhau một khoảng là 1,5 cm. Cho biết chiều dài lá gan là 15 cm và diện tích các mặt cắt ngang (đơn vị cm^2) là 0, 14, 50, 70, 90, 100, 110, 120, 70, 40, 0. Hãy ước tính thể tích lá gan.

5.4.5. Tìm thể tích của khối bao bởi mặt tròn xoay nhận được bằng cách xoay đường $y = x^3$ quanh trục x với x từ 0 tới 2, xem Hình 5.4.2.



Hình 5.4.2

5.4.6. Tìm thể tích của khối được tạo bằng cách xoay miền bao bởi đồ thị của hàm $f(x) = x - x^3$ và trục x quanh trục y.

5.4.7. Tìm thể tích của khối nhận được bằng cách xoay quanh trục y phần mặt phẳng bao bởi đường $y = x^2 - 4x + 4$ và đường $y = 1$.

5.4.8. Tính thể các tích khối S được mô tả sau đây.

(a) Một khối nón thẳng đứng đều có chiều cao h và bán kính của hình tròn đáy r.

(b) Một khối nón cụt thẳng đứng đều có chiều cao h, bán kính mặt đáy dưới là R và bán kính của mặt đáy trên là r.

(c) Một nắp tròn xoay – khối nhận được bằng cách cắt một quả cầu bằng một mặt phẳng – có bán kính đáy r và chiều cao là h.

(d) Một khối hình chóp tam giác với chiều cao h và đáy là tam giác đều có cạnh a.

(e) Một khối hình chóp tứ giác với chiều cao h và đáy hình chữ nhật với chiều rộng b, chiều dài $2b$.

(f) Một khối hình chóp tứ giác với chiều cao h và đáy có diện tích đáy B.

(g) Một khối chóp cụt có đáy dưới là hình vuông có cạnh b, đáy trên là hình vuông có cạnh a, và chiều cao khối chóp cụt là h.

5.4.9. Một quả quả cầu đang được bơm thêm không khí vào. Khi thể tích của quả cầu đang là 30 m^3 thì không khí đang được bơm vào với tốc độ 2 m^3/s. Hỏi lúc đó bán kính quả cầu đang giãn nở với vận tốc bao nhiêu?

Ứng dụng trong kinh tế

5.4.10. Hàm chi phí biên (còn gọi là chi phí cận biên – marginal cost) (xấp xỉ bằng chi phí cho mỗi đơn vị sản phẩm) khi x đơn vị sản phẩm được sản xuất là

$$C'(x) = \sqrt{x} - 3e^{2x}.$$

Chi phí cố định là (fixed cost) là $C(0) = 1000$. Tìm hàm chi phí $C(x)$.

5.4.11. Hàm chi phí biên khi x đơn vị sản phẩm được sản xuất là

$$C'(x) = e^{0,3x} + 4x^2 + 5.$$

Chi phí cố định là $C(0) = 10$.

(a) Tìm hàm chi phí $C(x)$.

(b) Tính chi phí trung bình trong khoảng qui mô sản xuất $0 \leq x \leq 10$.

5.4.12. Hàm doanh thu biên (marginal revenue) từ sản xuất q đơn vị của một sản phẩm là $R'(q) = 5 - e^{7q}$. Không có doanh thu khi không có sản phẩm. Hãy tìm hàm doanh thu $R(q)$.

5.4.13. Doanh thu R (triệu đồng) từ bán một sản phẩm trong một ngày phụ thuộc vào thời điểm t (giờ) kể từ 7 giờ sáng, cho bởi

$$R(t) = t^4 - 12t^3 + 46t^2 - 60t + 50.$$

(a) Hãy tính tổng doanh thu từ 9 giờ tới 15 giờ.

(b) Hãy tính doanh thu trung bình trong khoảng thời gian này.

5.4.14. Hàm cung ứng (supply function) của một sản phẩm là

$$p = S(x) = 5 + 3e^{0,001x}$$

trong đó p là giá bán sản phẩm và x là sản lượng sản phẩm. Tính giá trung bình trong khoảng cung ứng $10 \leq x \leq 20$.

5.4.15. Doanh thu R (triệu đồng) từ bán một sản phẩm một năm phụ thuộc vào thời điểm t (tháng) kể từ đầu năm, cho bởi

$$R(t) = 0{,}1(t - 7)^2 + 2.$$

(a) Vẽ đồ thị của hàm doanh thu.

(b) Tính tổng doanh thu một năm.

(c) Tính doanh thu trung bình hằng tháng.

5.4.16. Một công ty sản xuất x đơn vị sản phẩm mỗi tháng. Phương trình liên hệ giá p mỗi đơn vị sản phẩm với sản lượng x là $p = 500 - 0{,}25x$, $0 \leq x \leq 1000$.

(a) Chi phí cho mỗi đơn vị sản phẩm là 300, chi phí cố định là 70. Tìm hàm chi phí.

(b) Tìm hàm doanh thu và hàm lợi nhuận.

(c) Vẽ đồ thị hàm lợi nhuận.

(d) Với qui mô sản xuất như thế nào thì công ty có lợi nhuận dương?

(e) Với qui mô sản xuất như thế nào thì công ty có lợi nhuận tối đa?

(f) Tìm lợi nhuận bình quân (lợi nhuận trung bình) nếu công ty sản xuất trong khoảng 300 tới 500 đơn vị sản phẩm mỗi tháng.

(g) Nếu chính quyền đánh thuế 4 đơn vị tiền tệ trên mỗi đơn vị sản phẩm mà công ty sản xuất ra, thì công ty nên bán sản phẩm ở giá bao nhiêu để có lợi nhuận lớn nhất?

Ứng dụng trong vật lý

5.4.17. Một chiếc xe đang chạy trên đường thì người lái thấy một vật cản và lập tức áp dụng thắng hãm xe. Tại thời điểm áp dụng thắng xe đang chạy với vận tốc 60 kilômét một giờ. Xe hãm với gia tốc là 44 mét trên giây bình phương.

(a) Viết công thức cho vận tốc xe t giây sau khi áp dụng thắng. Khi nào xe dừng?

(b) Viết công thức cho khoảng cách di chuyển của xe t giây sau khi áp dụng thắng. Xe đi bao xa trước khi dừng?

5.4.18. Điện tích phân bố dọc theo một ống thẳng dài 10 cm theo mật độ $\rho(x) = 10^{-4}\frac{x}{x^2+1}$ coulomb/cm với x là khoảng cách tới đầu ống. Hãy tính tổng điện tích trong ống.

5.4.19. Một cái bồn có dạng hình hộp với chiều rộng 3 mét, chiều dài 4 mét, chiều cao 5 mét chứa đầy nước. Ta cần tính công W – năng lượng cần thiết để bơm hết nước ra khỏi bồn qua mặt trên của bồn.

(a) Gọi x là khoảng cách từ một chất điểm trong bồn tới mặt trên của bồn. Giải thích vì sao công để đưa chất điểm này ra khỏi bồn là $x\rho g$, với mật độ khối lượng của nước là $\rho = 1000$ kg/m^3, hằng số trọng lực là $g = 9{,}8$ m/s^2.

(b) Thiết lập công thức $W = \int_0^5 x\rho g \cdot 3 \cdot 4\, dx$. Tính W.

5.4.20. Một hồ bơi hình tròn có đường kính 24 mét, tường bao quanh hồ cao 5 mét, và độ sâu của nước trong hồ là 4 mét. Tính công cần thiết để bơm tất cả nước lên trên tường bao quanh và ra khỏi hồ. Khối lượng riêng của nước là 1000 kg/m^3.

5.4.21. Định luật vạn vật hấp dẫn của Newton phát biểu rằng hai vật có khối lượng m_1 và m_2 sẽ bị hút gần nhau bằng một lực

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

trong đó r là khoảng cách giữa các vật thể G là hằng số hấp dẫn. Nếu một trong hai vật thể được cố định, tính công cần thiết để di chuyển vật còn lại từ $r = a$ đến $r = b$.

Tính công, tức tổng năng lượng được tạo ra từ nhiên liệu tên lửa, cần thiết để phóng một vệ tinh nặng 1000 kg theo chiều thẳng đứng lên đến độ cao 100 km.

Giả sử rằng khối lượng của Trái đất là $5{,}98 \times 10^{24}$ kg và được tập trung tại tâm Trái đất. Lấy bán kính Trái đất là $6{,}37 \times 10^{6}$ m và $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$.

5.4.22. Điện gia dụng được cung cấp theo hình thức điện xoay chiều có điện thế thay đổi từ $155V$ đến $-155V$ với tần số 60 chu kỳ mỗi giây (Hz), được cho bởi phương trình

$$E(t) = 155\sin(120\pi t)$$

trong đó t là thời gian tính theo giây. Các vôn kế đọc điện thế hiệu dụng, đó là căn bậc hai của giá trị trung bình của $[E(t)]^2$ trong một chu kỳ.

(a) Tính điện thế hiệu dụng của dòng điện gia dụng trên.

(b) Nhiều bếp điện yêu cầu điện thế hiệu dụng $220V$. Tìm biên độ A tương ứng cần thiết cho điện thế $E(t) = A\sin(120\pi t)$.

Các bài toán khác

5.4.23. Nhiệt độ trong một nhà kính được điều khiển theo thiết kế $T(t) = 25 - 3\cos(\frac{\pi}{12}t)$, với t là thời gian tính bằng giờ từ nửa đêm. Tìm nhiệt độ trung bình vào ban ngày (6 giờ sáng tới 6 giờ tối) và ban đêm.

5.4.24. Nhiệt độ trong một ngôi nhà được điều khiển theo thiết kế $T(t) = 2) + 5\cos(\frac{\pi}{12}t)$, với t là thời gian tính bằng giờ từ nửa đêm. Tìm nhiệt độ trung bình từ 10 giờ tới 15 giờ.

5.4.25. Lượng của một loại thuốc trong máu bệnh nhân t ngày sau khi uống thuốc được mô hình hóa bằng hàm

$$C(t) = 5e^{-0{,}2t}.$$

Hãy tính lượng thuốc trung bình trong cơ thể bệnh nhân trong 3 ngày đầu sau khi uống thuốc.

5.4.26. Cao huyết áp là do động mạch bị hẹp lại và để đạt được thông lượng dòng chảy bình thường tim phải bơm mạnh hơn, tức là tăng huyết áp. Hãy tìm quan hệ giữa bán kính động mạnh và áp lực máu trong điều kiện thông lượng máu không đổi. Nếu bán kính động mạnh bị giảm đi 1/4 thì áp lực máu phải tăng lên bao nhiêu để đảm bảo cung cấp đủ máu cho cơ thể?

5.4.27. Thời gian sử dụng được của một loại vỏ xe được cho bởi hàm mật độ xác suất $f(x) = 0{,}02e^{-0{,}02x}$. Hãy tìm xác suất để vỏ xe này dùng được ít nhất 30.000 kilômét.

5.4.28. Tốc độ của xe trên đường cao tốc có giới hạn 100 km/h tuân theo phân phối chuẩn với giá trị trung bình 112 km/h và độ lệch chuẩn 8 km/h.

(a) Xác suất mà một xe bất kỳ chạy với tốc độ cho phép là bao nhiêu?

(b) Nếu cảnh sát phạt những người lái xe chạy quá 125 km/h, bao nhiêu phần trăm người lái xe sẽ bị phạt?

5.4.29. Ta đi trên một quãng đường và sau đó đo được vận tốc trung bình là 50 km/h. Hãy giải thích vì sao chắc chắn có thời điểm vận tốc của ta đúng bằng 50 km/h.

5.4.30. Lượng người bị mắc một bệnh truyền nhiễm (tính bằng nghìn người) vào thời điểm t (tính bằng ngày kể từ khi bệnh bùng phát) được mô hình hóa bằng hàm

$$f(t) = 30{,}1 \cdot (10 - t)e^{t-11{,}4},\ 0 \leq t \leq 10.$$

(a) Vẽ đồ thị của hàm này.

(b) Tìm thời điểm tại đó số người nhiễm bệnh đạt cực đại.

(c) Khi nào thì tốc độ lây nhiễm bắt đầu giảm?

(d) Tính tổng lượng người bị nhiễm bệnh.

Chương 6
Chuỗi

6.1 Chuỗi số thực

Phép cộng hữu hạn số thực đã rất quen thuộc với chúng ta. Dần dần xuất hiện những trường hợp mà ta cộng vô hạn số thực. Ví dụ khi ta viết

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\dots$$

thì có thể hiểu là

$$\frac{1}{3} = 0 + 0{,}3 + 0{,}03 + 0{,}003 + 0{,}0003 + \cdots,$$

như thế ta đã nghĩ tới việc cộng vô hạn số thực với nhau. Nghĩ thêm một chút về điều này ta có thể thấy ngay những trường hợp mà phép cộng vô hạn số thực không có vẻ cho ra một số thực nào, ví dụ như

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots = ?$$

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + \cdots = ?$$

Vậy khi nào thì có thể cộng vô hạn số thực với nhau?

Ta thường hình dung một chuỗi số là tổng của một dãy số. Cụ thể hơn, với dãy số $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ thì biểu thức tổng các số trong dãy

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

được gọi là một chuỗi số, được kí hiệu là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$. Thành phần u_n được gọi là số hạng thứ n của chuỗi.

Định nghĩa chính xác hơn như sau.

Định nghĩa 6.1.1. Cho dãy số $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Tổng của n số hạng đầu tiên của dãy, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, được gọi là ***tổng riêng*** thứ n của dãy. Dãy các tổng riêng $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ được gọi là một ***chuỗi số***.

6.1.1 Sự hội tụ của chuỗi số

Định nghĩa 6.1.2. Cho dãy số $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$. Nếu dãy các tổng riêng $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về một số thực S thì chuỗi là hội tụ và S được gọi là ***tổng của chuỗi***. Vậy tổng của chuỗi là

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Ngược lại nếu dãy tổng riêng $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ phân kỳ thì chuỗi được gọi là ***phân kỳ***.

Ví dụ 6.1.3. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$1 + 1 + 1 + \cdots + 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 1.$$

Tổng riêng phần của chuỗi này là $S_n = n$ tiến ra vô cùng, nên chuỗi là phân kỳ.

Ví dụ 6.1.4. Tìm tổng của chuỗi

$$1 - 1 + 1 - \cdots + 1 - 1 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}.$$

Tổng riêng phần của chuỗi này là

$$S_n = \begin{cases} 0, & n \text{ chẵn} \\ 1, & n \text{ lẻ}. \end{cases}$$

Dãy $(S_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ là phân kỳ nên chuỗi là phân kỳ.

Ví dụ 6.1.5. Xét sự hội tụ của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Vì $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ nên tổng riêng phần là

$$S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ta có S_n hội tụ về 1, vậy chuỗi hội tụ về 1, tổng của chuỗi bằng 1, và ta viết

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Ví dụ 6.1.6. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ta có tổng riêng phần của chuỗi này là

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Vì S_n tiến ra vô cùng khi n tiến ra vô cùng nên chuỗi là phân kỳ.

Ví dụ 6.1.7. Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1},$$

được gọi là ***chuỗi hình học***. Đây cũng là tổng của một cấp số nhân với công bội r

Khi $r = 1$ thì chuỗi bằng $a\sum_{n=1}^{\infty} 1$ là hội tụ khi và chỉ khi $a = 0$.

Khi $r = -1$ thì chuỗi bằng $a\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ là hội tụ khi và chỉ khi $a = 0$.

Khi $r \neq 1$ thì tổng riêng của chuỗi là

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} ar^{i-1} = a\sum_{i=1}^{n} r^{i-1} = a\frac{1-r^n}{1-r}.$$

Khi $|r| < 1$ thì $\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0$ từ Mệnh đề 6.1.42. Do $0 < r^n \leq |r^n|$ nên theo Định lý kẹp 1.1.31 thì $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$. Do đó S_n hội tụ về $a\frac{1}{1-r}$.

Khi $|r| > 1$ thì $\lim_{n\to\infty} |r^n| = \lim_{n\to\infty} |r|^n = \infty$ từ Mệnh đề 6.1.42, nên S_n phân kỳ.

Tóm lại với $a \neq 0$ thì chuỗi hình học $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ là hội tụ khi và chỉ khi $|r| < 1$, và

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a}{1-r}, \quad |r| < 1.}$$

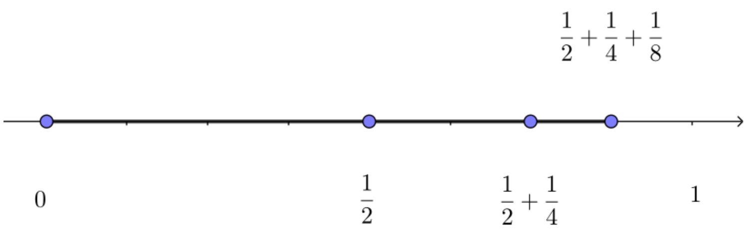
Ví dụ 6.1.8. Chuỗi

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}.$$

là một chuỗi hình học với $a = 1$, $r = \frac{1}{2}$. Chuỗi này hội tụ với tổng bằng $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$, vậy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2.$$

Ta có thể thấy trực quan kết quả này như trong Hình 6.1.1, giải thích tên gọi "chuỗi hình học".



Hình 6.1.1: Đoạn thẳng có chiều dài 1 có thể chia thành hội của các đoạn thẳng kế tiếp nhau có chiều dài $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, ... Rõ ràng tổng chiều dài các đoạn này phải là 1.

Ví dụ 6.1.9. Chuỗi
$$5 - \frac{10}{3} + \frac{20}{9} - \frac{40}{27} + \cdots$$
là một chuỗi hình học với $a = 5$, $r = \frac{-2}{3}$.

Ví dụ 6.1.10. Xét chuỗi
$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{2n} 3^{1-n}.$$
Ta viết lại chuỗi này là
$$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \frac{4^n}{3^n}.$$
Vậy đây là một chuỗi hình học với $a = 3$, $r = \frac{4}{3}$.

Ví dụ 6.1.11. Viết số $0{,}\overline{123} = 0{,}(123) = 0{,}123123\ldots$ dưới dạng phân số.

Ta viết
$$0{,}123123\ldots = 123\cdot 10^{-3} + 123\cdot 10^{-6} + 123\cdot 10^{-9} + \cdots = 123\cdot 10^{-3}(1 + 10^{-3} + 10^{-6} + \cdots)$$
thì đây là một chuỗi hình học và ta tính được ngay tổng của chuỗi này là
$$123 \cdot 10^{-3} \frac{1}{1 - 10^{-3}} = \frac{123}{999}.$$
Vậy
$$0{,}\overline{123} = 0{,}123123\ldots = \frac{123}{999}.$$

Sau đây ta bắt đầu khảo sát một số tính chất chung. Một quan sát đơn giản nhưng thường dùng là nếu ***bỏ đi hay thêm vào hữu hạn số hạng thì tính hội tụ của chuỗi không thay đổi***, vì các tổng riêng phần với chỉ số đủ lớn chỉ thay đổi bởi một hằng số, do đó tổng nếu tồn tại cũng thay đổi bằng hằng số đó.

Các tính chất sau về phép toán trên chuỗi thu được ngay từ các tính chất tương ứng của giới hạn của dãy:

Mệnh đề 6.1.12. *(a) Với số thực a, nếu chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a u_n$ cũng hội tụ và*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a u_n = a \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

(b) Nếu các chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ hội tụ thì chuỗi tổng $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n)$ và chuỗi hiệu $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - v_n)$ cũng hội tụ và
$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n - v_n) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{n=1}^{\infty} v_n.$$

Ta có điều kiện cần đơn giản cho sự hội tụ của chuỗi số:

Mệnh đề 6.1.13 (Để chuỗi hội tụ thì số hạng của chuỗi phải tiến về 0). *Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.*

Chứng minh. Giả sử $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$, nghĩa là tổng riêng S_n hội tụ về S. Ta viết được $u_n = S_n - S_{n-1}$. Lấy giới hạn hai vế khi n tiến ra vô cùng, vì S_{n-1} cũng hội tụ về S, nên u_n phải hội tụ về 0. □

Cần nhấn mạnh là chiều ngược lại (mệnh đề đảo) là không đúng, xem ví dụ sau:

Ví dụ 6.1.14. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, thường được gọi là ***chuỗi điều hòa***. Mặc dù số hạng của chuỗi này dần về 0, ta sẽ thấy ở Ví dụ 6.1.18 rằng chuỗi này là phân kì.

Ta có một mệnh đề tương đương với Mệnh đề 6.1.13 (mệnh đề phản đảo), là một dạng thường dùng:

Mệnh đề 6.1.15 (Nếu số hạng của chuỗi không tiến về 0 thì chuỗi phân kì). *Nếu u_n không tiến về 0 thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ phân kì.*

Ví dụ 6.1.16. Chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{5n^2+4}$$

là phân kì vì số hạng của nó không dần về 0.

6.1.2 Chuỗi số dương

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ được gọi là một ***chuỗi số dương*** nếu tất cả các số hạng của chuỗi số đều là số dương.

Lưu ý khi xét tính hội tụ cũng như tính tổng của chuỗi số mà có chứa những số hạng bằng 0 thì các số hạng này không có vai trò gì trong sự hội tụ và tổng của chuỗi số. Vì vậy nhiều kết quả áp dụng cho chuỗi số dương cũng áp dụng được cho chuỗi số không âm.

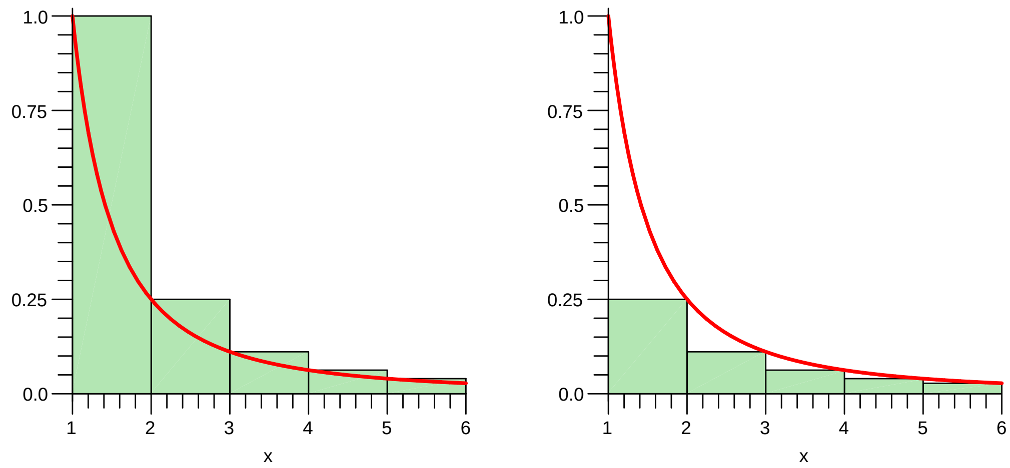
Định lý 6.1.17 (Tiêu chuẩn tích phân). *Cho f là một hàm dương, giảm, liên tục trên $[1,\infty)$, và đặt $a_n = f(n)$. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là hội tụ khi và chỉ khi tích phân*

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

tồn tại (nghĩa là bằng một số thực).

Chú ý rằng thực ra ta chỉ cần những giả thiết trên thỏa với hàm f kể từ một giá trị n nào đó trở đi.

Có thể giải thích ý tưởng của tiêu chuẩn này là xấp xỉ diện tích bằng các hình chữ nhật trong xây dựng tích phân.



Hình 6.1.2: Tổng riêng phần bằng tổng diện tích các hình chữ nhật, chính là tổng Riemann, trong khi tích phân bằng diện tích bên dưới đồ thị.

Chứng minh. Vì f là hàm giảm nên trên đoạn $[i, i+1]$ thì $a_{i+1} = f(i+1) \leq f(x) \leq f(i) = a_i$, dẫn tới

$$a_{i+1} \leq \int_i^{i+1} f(x)\,dx \leq a_i.$$

Ở đây vì hàm f liên tục nên các tích phân tồn tại. Suy ra

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i+1} \leq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \leq \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Xem minh họa ở Hình 6.1.2.

Nếu $\int_1^\infty f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n+1} f(x)\ dx$ hội tụ về một số thực S thì dãy tổng riêng $\sum_{i=1}^n a_{i+1}$ là dãy tăng và bị chặn trên bởi S nên phải hội tụ, do đó chuỗi $\sum_{n=1}^\infty a_n$ là hội tụ.

Ngược lại nếu chuỗi $\sum_{n=1}^\infty a_n$ hội tụ về số thực S thì hai tổng riêng $\sum_{i=1}^n a_{i+1}$ và $\sum_{i=1}^n a_i$ đều hội tụ về S, buộc dãy $\int_1^{n+1} f(x)\,dx$ cũng phải hội tụ về S theo Định lý kẹp, do đó $\int_1^\infty f(x)\,dx = S$. $\square$

Ví dụ 6.1.18. Ta chứng tỏ chuỗi $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ là hội tụ nếu và chỉ nếu $p > 1$. Đây là một kết quả quan trọng thường được dùng.

Với $p > 0$, đặt $f(x) = \frac{1}{x^p}$ với $x > 0$ thì f thỏa giả thiết của tiêu chuẩn tích phân. Chuỗi này là hội tụ khi và chỉ khi tích phân suy rộng sau tồn tại

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\ dx.$$

Trong Ví dụ 5.3.23 ta đã tính và thấy tích phân này tồn tại khi và chỉ khi $p > 1$.

Khi $p \leq 0$ thì $\frac{1}{x^p}$ không tiến về 0, do đó chuỗi không hội tụ.

Chẳng hạn chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ là phân kì, chuỗi $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ là hội tụ.

Tóm lại

$$\boxed{\text{Chuỗi } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ là hội tụ khi và chỉ khi } p > 1.}$$

Định lý 6.1.19 (Tiêu chuẩn so sánh). *Cho $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ là các chuỗi dương và $a_n \le b_n$ với mọi $n \in \mathbb{Z}^+$.*

(a) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

(b) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì thì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kì.

Chứng minh. Nhận xét rằng dãy các tổng riêng của chuỗi số dương là dãy tăng nên chuỗi số hội tụ khi và chỉ khi dãy $(S_n)_n$ bị chặn trên, do Định lý 6.1.40. Ở đây tổng riêng phần S_n của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ luôn nhỏ hơn hay bằng tổng riêng phần T_n của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, do đó nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì S_n bị chặn trên, trong khi nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì thì T_n không thể có chặn trên. □

Ví dụ 6.1.20. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ hội tụ do $\frac{1}{n2^n} < \frac{1}{2^n}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ hội tụ.

Ví dụ 6.1.21. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}-1}$ phân kì do $\frac{1}{2\sqrt{n}-1} > \frac{1}{2\sqrt{n}}$ và $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ phân kì.

Ví dụ 6.1.22. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Ta so sánh

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{(n-1)n}$$

với $n \ge 2$. Ở Ví dụ 6.1.5 ta đã biết chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ hội tụ, do đó chuỗi đã cho hội tụ.

Định lý 6.1.23 (Tiêu chuẩn so sánh ở dạng giới hạn). *Cho các chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Nếu tồn tại giới hạn $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ với $0 < L < \infty$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kì.*

Trường hợp $L = 0$, nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ, nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì thì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kì.

Trường hợp $L = \infty$, nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, nếu $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kì thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kì.

Chứng minh. Trường hợp $0 < L < \infty$ thì có ϵ sao cho $0 < \epsilon < L$. Với n đủ lớn thì

$$L - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \epsilon.$$

Vậy $0 < (L-\epsilon)b_n < a_n < (L+\epsilon)b_n$. Kết luận thu được từ Tiêu chuẩn so sánh.

Trường hợp $L = 0$, với n đủ lớn thì

$$\frac{a_n}{b_n} < \epsilon.$$

Vậy $0 < a_n < \epsilon b_n$. Kết luận thu được từ Tiêu chuẩn so sánh.

Trường hợp $L = \infty$, cho $M > 0$, với n đủ lớn thì

$$\frac{a_n}{b_n} > M.$$

Vậy $a_n > Mb_n$. Kết luận thu được từ Tiêu chuẩn so sánh. □

Ví dụ 6.1.24. Xét chuỗi

$$\sum_{n=6}^{\infty} \frac{n^2 - 4n - 5}{3n^3 + 5n - 7}.$$

So sánh chuỗi này với chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2-4n-5}{3n^3+5n-7}}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{3},$$

ta kết luận chuỗi này phân kì theo tiêu chuẩn so sánh ở dạng giới hạn.

Ví dụ 6.1.25. Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

So sánh chuỗi này với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, vì $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} = 0$ (xem Mệnh đề 6.1.42) nên theo tiêu chuẩn so sánh ở dạng giới hạn chuỗi này hội tụ.

Ví dụ 6.1.26. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{1}{4^n}\right)$ hội tụ bởi so sánh với chuỗi hình học $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ thì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \sin\left(\dfrac{1}{4^n}\right)}{\dfrac{1}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\dfrac{1}{4^n}\right)}{\dfrac{1}{4^n}} = 1.$$

Ta thấy tiêu chuẩn so sánh ở dạng giới hạn thường tiện hơn ở dạng bất đẳng thức vì ta không cần kiểm tra bất đẳng thức.

Định lý 6.1.27 **(Tiêu chuẩn d'Alembert hay Tiêu chuẩn tỷ số).** *Cho chuỗi dương* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Giả sử* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

(a) Nếu $L < 1$ thì chuỗi hội tụ.

(b) Nếu $L > 1$ thì chuỗi phân kì.

Chứng minh. Nếu $L < 1$, lấy c sao cho $L < c < 1$, thì với $n \geq n_0$ ta có

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < c.$$

Vì vậy

$$a_{n+1} < ca_n < \cdots < c^{n-n_0+1} a_{n_0}.$$

Vậy chuỗi $\sum a_n$ hội tụ qua so sánh với chuỗi hình học $\sum_{n=n_0}^{\infty} c^{n-n_0}$.

Nếu $L > 1$ thì lấy số c sao cho $L > c > 1$. Khi đó với $n \geq n_0$:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > c.$$

Như trên, $a_{n+1} > c^{n-n_0+1}a_{n_0}$. Điều này dẫn tới a_{n+1} không tiến về 0, vậy chuỗi không hội tụ. □

Ví dụ 6.1.28. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ hội tụ vì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n}$ phân kì vì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}n}{(n+1)2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = 2 > 1.$$

Ví dụ trên cho thấy tiêu chuẩn tỷ số tiện dùng khi số hạng của chuỗi có chứa giai thừa.

Định lý 6.1.29 (Tiêu chuẩn Cauchy hay Tiêu chuẩn căn thức). *Cho chuỗi dương* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Giả sử* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

(a) Nếu $L < 1$ thì chuỗi hội tụ.

(b) Nếu $L > 1$ thì chuỗi phân kì.

Chứng minh. Nếu $L < 1$ ta lấy c sao cho $L < c < 1$, khi đó với mọi $n \geq n_0$ thì $\sqrt[n]{a_n} < c$. Điều này dẫn tới $a_n < c^n$. Vậy chuỗi $\sum a_n$ hội tụ qua so sánh với chuỗi $\sum c^n$.

Nếu $L > 1$ thì có c sao cho $L > c > 1$, khi đó với mọi $n \geq n_0$ thì $\sqrt[n]{a_n} > c$, tức $a_n > c^n$. Vậy chuỗi $\sum a_n$ phân kì qua so sánh với chuỗi $\sum c^n$. □

Ví dụ 6.1.30. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$ phân kì vì

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{2n+1} = \frac{3}{2} > 1.$$

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$ hội tụ vì

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 < 1.$$

Ta thấy tiêu chuẩn căn thức có thể phù hợp nếu số hạng của chuỗi chứa hàm mũ.

6.1.3 Chuỗi đổi dấu

Trong mục này ta xét các chuỗi với số hạng bất kì, có thể âm hay dương.

Chuỗi đan dấu

Trước hết ta xét một loại chuỗi đặc biệt mà số hạng thay phiên âm và dương.

Định nghĩa 6.1.31. Một ***chuỗi đan dấu***, hay chuỗi thay phiên, là một chuỗi mà các phần tử thay phiên nhau có giá trị âm và dương, một số hạng dương sẽ được tiếp ngay theo bởi một số hạng âm rồi lại tới ngay một số hạng dương. Bằng kí hiệu thì một chuỗi đan dấu có dạng

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

trong đó $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là một chuỗi dương.

Định lý 6.1.32 (Tiêu chuẩn chuỗi đan dấu hay Tiêu chuẩn Leibniz). *Cho chuỗi đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ với $a_n \geq 0$. Nếu với mọi n ta có $a_n \geq a_{n+1}$, tức dãy $(a_n)_n$ là dãy giảm, và $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, thì chuỗi là hội tụ.*

Như vậy nếu các giá trị tuyệt đối của các số hạng của chuỗi đan dấu giảm về 0 thì chuỗi hội tụ.

Chứng minh. Bằng cách viết

$$\begin{aligned} S_{2n} &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) \\ &= a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \end{aligned}$$

ta thấy dãy $(S_{2n})_{n\geq 1}$ là dãy không âm, tăng, và bị chặn trên bởi a_1, do đó hội tụ về một giới hạn L. Vì $S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1}$ và a_{2n+1} tiến về 0 nên S_{2n} cũng hội tụ về L. Như thế với n đủ lớn thì cả S_{2n} và S_{2n+1} gần tùy ý L, nên S_n hội tụ về L. □

Ví dụ 6.1.33. Xét chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

Chuỗi này là đan dấu. Ta có $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \cdots$ và $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$. Vậy chuỗi này hội tụ theo Tiêu chuẩn Leibniz.

Ví dụ 6.1.34. Xét chuỗi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+1}.$$

Đây là một chuỗi đan dấu. Giá trị tuyệt đối của số hạng của chuỗi là $\frac{n}{n^2+1}$ tiến về 0. Ta muốn kiểm tra số hạng này có giảm hay không. Ta có thể làm bằng cách trực tiếp kiểm tra tính đúng đắn của bất đẳng thức

$$\frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n+1}{(n+1)^2+1}.$$

Ta còn có thể kiểm tra điều này bằng cách dùng các công cụ của phép tính vi phân. Ta khảo sát tính tăng giảm của hàm thực $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$. Đạo hàm của hàm này là $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$ nhỏ hơn 0 khi $x > 1$. Vậy kể từ $n = 2$ trở đi thì $\frac{n}{n^2+1}$ giảm. Ta biết đối với vấn đề hội tụ những giá trị đầu không có vai trò gì, do đó ta kết luận theo Tiêu chuẩn Leibniz thì chuỗi đã cho hội tụ.

Sự hội tụ tuyệt đối của chuỗi

Định nghĩa 6.1.35. Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ là ***hội tụ tuyệt đối*** nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ.

Ví dụ 6.1.36. Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$.

Chuỗi này hội tụ Tiêu chuẩn Leibniz cho chuỗi đan dấu. Chuỗi trị tuyệt đối $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ là chuỗi điều hòa, phân kì. Vậy chuỗi đã cho là hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối.

Mệnh đề 6.1.37. *Chuỗi hội tụ tuyệt đối thì hội tụ.*

Chứng minh. Cho chuỗi hội tụ tuyệt đối $\sum a_n$. Ta viết

$$0 \leq a_n + |a_n| \leq 2|a_n|.$$

Theo Tiêu chuẩn so sánh cho chuỗi không âm, chuỗi ở vế trái phải hội tụ. Chú ý rằng
$$\sum a_n = \left(\sum (a_n + |a_n|)\right) - \left(\sum |a_n|\right),$$
ở đó vế phải là hiệu của hai chuỗi hội tụ, do đó chuỗi ở vế trái phải hội tụ. □

Ví dụ 6.1.38. Xét sự hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n^2+4n+5)}{2n^5-7n^3+1}.$$

Đây là một chuỗi đan dấu nên ta có thể xem xét áp dụng Tiêu chuẩn Leibniz. Tuy nhiên việc kiểm tính giảm của dãy giá trị tuyệt đối của số hạng của chuỗi cần nhiều tính toán khá tốn công nếu không dùng máy tính. Ở đây ta thử một cách khác, xét tính hội tụ tuyệt đối của chuỗi. Từ kinh nghiệm với các chuỗi dương ta có thể thấy ngay chuỗi giá trị tuyệt đối

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+4n+5}{2n^5-7n^3+1}.$$

là hội tụ, qua so sánh với chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ dùng Tiêu chuẩn so sánh ở dạng giới hạn. Vậy chuỗi đã cho hội tụ tuyệt đối, do đó hội tụ.

6.1.4 * Bổ sung về dãy số thực

Trong phần này ta khảo sát sâu hơn về dãy số, tiếp theo Mục 1.1.4. Một số kết quả ở phần này được dùng trong phần chuỗi.

Mệnh đề 6.1.39. *Nếu một dãy số hội tụ thì nó bị chặn.*

Ta có thể giải thích kết quả trên như sau: nếu dãy là hội tụ thì các phần tử của dãy, có thể trừ ra hữu hạn phần tử đầu, sẽ đủ gần giới hạn, điều này dẫn tới toàn bộ dãy được chứa trong một khoảng đủ lớn. Chứng minh dưới đây chẳng qua là viết lại chi tiết lí luận này.

Chứng minh. Giả sử dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ hội tụ về L. Có $N \in \mathbb{Z}^+$ sao cho nếu $n \geq N$ thì $|a_n - L| < 1$. Như thế với $n \geq N$ thì $|a_n| \leq L+1$. Đặt $M = \max\{a_n, L+1 \mid 1 \leq n \leq N-1\}$ thì $\forall n \in \mathbb{Z}^+, |a_n| \leq M$. □

Định lý 6.1.40. *Một dãy tăng và bị chặn trên thì hội tụ. Một dãy giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.*

Kết quả trên là hệ quả trực tiếp của tính đầy đủ của tập hợp các số thực, xem Mệnh đề 1.1.11.

Trong nhiều trường hợp dãy là thu hẹp của một hàm biến thực, cụ thể số hạng của dãy là $a_n = f(n)$ với một hàm $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Từ sự giống nhau trong định nghĩa giới hạn của dãy và giới hạn của hàm ta thu được ngay kết quả sau, nói rằng giới hạn của dãy đúng bằng giới hạn của hàm:

Mệnh đề 6.1.41. *Giả sử $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ và $\forall n \in \mathbb{Z}^+, a_n = f(n)$. Nếu $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ (có thể bằng $\pm\infty$) thì $\lim_{n\to\infty} a_n = L$.*

Đây có thể coi là một trường hợp riêng của Mệnh đề 2.1.18. Nhờ kết quả này ta có thể áp dụng được những phương pháp và kết quả của Vi tích phân trên hàm số thực vào dãy số thực.

Sau đây là một số giới hạn của dãy liên quan tới hàm lũy thừa và hàm mũ thường gặp:

Mệnh đề 6.1.42. *(a) Với $r > 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$.*

(b) Với $1 > r > 0$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$. Với $r > 1$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$.

(c) *Với* $r > 0$ *thì* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{r} = 1$.

(d) *Với* $r > 1$ *và* $\alpha \in \mathbb{R}$ *thì* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{r^n} = 0$.

(e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(f) *Với* $r > 0$ *thì* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{r^n}{n!} = 0$.

Chứng minh. Có thể có những cách chứng minh khác nhau, ở đây ta đưa ra một số cách sử dụng các thành tựu của phép tính vi phân cho tới lúc này.

(a) Ta có thể sử dụng định nghĩa giới hạn của dãy. Với $r > 0$, cho $\epsilon > 0$ bất kì thì $\frac{1}{n^r} < \epsilon \iff n > \frac{1}{\epsilon^{\frac{1}{r}}}$ từ tính chất của hàm mũ. Từ định nghĩa sự hội tụ của dãy ta kết luận $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$.

Một cách tiếp cận mới là dùng hàm số thực và Mệnh đề 6.1.41. Bài toán là tính $\lim_{n\to\infty} n^r$, nhưng ta sẽ tính $\lim_{x\to\infty} x^r$. Ta có ngay từ các tính chất cơ bản của hàm mũ và hàm log:

$$\lim_{x\to\infty} x^r = \lim_{x\to\infty} e^{\ln x^r} = \lim_{x\to\infty} e^{r\ln x} = \infty.$$

Vậy $\lim_{n\to\infty} n^r = \infty$ và $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^r} = 0$.

(b) Dùng Mệnh đề 6.1.41, ta đi tìm giới hạn $\lim_{x\to\infty} r^x$. Ta có

$$\lim_{x\to\infty} r^x = \lim_{x\to\infty} e^{\ln r^x} = \lim_{x\to\infty} e^{x\ln r}.$$

Với $0 < r < 1$ thì $\ln r < 0$, suy ra $\lim_{x\to\infty} e^{x\ln r} = 0$. Với $r > 1$ thì $\ln r > 0$ nên $\lim_{x\to\infty} e^{x\ln r} = \infty$.

(c) Cũng như trên, dùng Mệnh đề 6.1.41, ta có

$$\lim_{n\to\infty} r^{\frac{1}{n}} = \lim_{x\to\infty} r^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\ln r^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln r} = e^0 = 1.$$

(d) Cũng như trên, thay vì tính giới hạn dãy ta tính giới hạn hàm $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^\alpha}{r^x}$. Trước hết ta viết

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{r^x} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{(r^{\frac{1}{\alpha}})^x}\right)^\alpha.$$

Áp dụng qui tắc l'Hôpital, với $r > 1$, ta tính được

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(r^{\frac{1}{\alpha}})^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x'}{\left((r^{\frac{1}{\alpha}})^x\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{(r^{\frac{1}{\alpha}})^x \ln(r^{\frac{1}{\alpha}})} = 0.$$

Sử dụng cách lí luận ở phần (a), ta suy ra

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{(r^{\frac{1}{\alpha}})^x}\right)^\alpha = \lim_{x\to\infty} e^{\ln\left(\frac{x}{(r^{\frac{1}{\alpha}})^x}\right)^\alpha} = \lim_{x\to\infty} e^{\alpha\ln\left(\frac{x}{(r^{\frac{1}{\alpha}})^x}\right)} = 0.$$

(e) Thay vì tính $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$ ta tính $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$. Lại dùng hàm ln, ta viết

$$x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{1}{x}\ln x}.$$

Áp dụng qui tắc l'Hôpital ta được ngay

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Vậy $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$.

(f) Lấy $n_0 > r$, ta có thể viết cho $n > n_0$:

$$\frac{r^n}{n!} = \frac{r^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{r}{n_0+1} \cdots \frac{r}{n-1} \cdot \frac{r}{n} < \frac{r^{n_0}}{n_0!} \cdot \frac{r}{n}.$$

Vì $\lim_{n\to\infty} \frac{r}{n} = 0$ nên dùng Định lý kẹp 1.1.31 ta được kết quả. □

Bài tập

6.1.1. Hãy viết số thập phân sau dưới dạng phân số.

(a) 1,73737373 . . . .

(b) 3,715715715 . . . .

(c) 0,454545 . . . .

6.1.2. Hãy viết và rút gọn biểu thức của tổng riêng phần của chuỗi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{k} - \frac{3}{k+1} \right).$$

Tìm tổng của chuỗi này nếu nó hội tụ.

6.1.3. Xét sự hội tụ của các chuỗi sau.

(a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{100} \right)^n.$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (1+\cos 1)^n.$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n+1}{7n+2}.$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n^2-7n+6}.$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n^2}.$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n^2}.$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}.$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}.$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)}}.$$

(j)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n+2}}.$$

(k)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n+1}.$$

(l)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{e^n}$$

(m)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdots(4n-3)}.$$

(n)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{4\cdot 8\cdot 12\cdots 4n}.$$

6.1.4. Xét sự hội tụ của các chuỗi sau.

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+1}{3^n-2}.$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2^n}{1+3^n}.$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n3^{n+1}}.$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}.$$

(e)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2021^n}{n!}.$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!^2}{(2n)!}.$$

(g)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^n.$$

(j)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{3n+1}\right)^{2n+1}.$$

(k)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^n.$$

(l)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln^2 n}.$$

(m)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{e^n}.$$

(n)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(n)!^2}{(2n)!}.$$

(o)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, a>0.$$

(p)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n n!}{n^n}, a>0.$$

(q)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n^2}{n!+n}.$$

6.1.5. Xét sự hội tụ của các chuỗi sau.

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3}-1).$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1).$$

(c)
$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}.$$

(d)
$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}.$$

(e)
$$\frac{1}{2\ln 3}+\frac{1}{3\ln 4}+\frac{1}{4\ln 5}+\cdots.$$

6.1.6. Xét sự hội tụ và hội tụ tuyệt đối của các chuỗi sau.

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{2n^3-7n+6}.$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(n+2)}{2n^2-7n+6}.$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{e^{n^2}}.$$

(e)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2\cos n\pi}{1+n^4}.$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-2)^{n+1}}{3^n}.$$

(g)
$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}.$$

(h)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(3n)}{n!}.$$

(i)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n(n!)^2}{(2n)!}.$$

6.1.7. Dưới đây là một cách khác để thấy sự phân kì của chuỗi điều hòa $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Ta viết

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} =&1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\
&+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}+\frac{1}{2^n}\right)+\cdots\\
>&1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\
&+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}\right)+\cdots.
\end{aligned}$$

Giải thích vì sao tính toán trên có thể dẫn tới kết luận chuỗi điều hòa là phân kì.

6.1.8. *

(a) Năm 1910 Srinivasa Ramanujan cho công thức sau cho π:

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!(1103+26390k)}{(k!)^4 396^{4k}} \tag{6.1.1}$$

Chứng tỏ chuỗi ở vế phải của (6.1.1) là hội tụ.

(b) Một trong những phương pháp nhanh nhất để tính π bằng máy tính hiện nay dùng công thức

$$\frac{1}{\pi} = 12\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(6k)!(13591409+545140134k)}{(3k)!(k!)^3 640320^{3k+3/2}} \tag{6.1.2}$$

Chứng tỏ chuỗi ở vế phải của công thức (6.1.2) hội tụ.

(c) Hãy thử dùng máy tính để tính π bằng các công thức trên.

Dãy số

6.1.9. Hãy tìm các giới hạn sau.

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2 n - \sin^2 n}{n}$.

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$.

(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+2}$.

(e) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n+2}$.

(f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n}$.

(g) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+1}$.

(h) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+n+1}$.

(i) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n(n-2)}$.

(j) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{99}{n}\right)^n$.

6.1.10. Cho dãy số (a_n) được định nghĩa như sau: $a_1 = \sqrt{2}$ và $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$.

(a) Dùng qui nạp, chứng minh rằng dãy $(a_n)_n$ bị chặn trên bởi 2.

(b) Dùng qui nạp, chứng minh rằng dãy $(a_n)_n$ là dãy tăng.

(c) Lấy giới hạn hai vế đẳng thức $a_{n+1} = \sqrt{2+a_n}$ để thu được giới hạn của dãy $(a_n)_n$.

Người ta hay viết giới hạn của dãy này là $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$.

6.1.11. Cho dãy số (a_n) được định nghĩa như sau: $a_1 = \frac{5}{2}$ và $\forall n \geq 1, a_{n+1} = \frac{1}{5}(a_n^2+6)$.

(a) Hãy tính một số giá trị ban đầu của dãy.

(b) Giả thiết dãy hội tụ, hãy tính giới hạn của dãy.

(c) Từ dự đoán giới hạn của dãy, hãy dự đoán tính bị chặn và dự đoán tính đơn điệu của dãy.

(d) Hãy chứng minh dãy là hội tụ và tìm giới hạn của dãy.

6.1.12. Xét tính hội tụ và tìm giới hạn của dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ thỏa $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n^2 + \frac{1}{4}$.

6.1.13. Xét tính hội tụ và tìm giới hạn của dãy $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ thỏa $a_1 = 0$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n+4}$.

6.2 Chuỗi hàm

Ở phần này ta phát triển khái niệm tổng của một dãy số (chuỗi số) thành khái niệm tổng của một dãy hàm số (chuỗi hàm).

Giả sử ta có một dãy $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}^+}$ các hàm số thực có cùng một miền xác định. Với mỗi x trong miền xác định ta có một dãy số thực tương ứng là $(u_n(x))_{n\in\mathbb{Z}^+}$, và có một chuỗi số thực tương ứng là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Nếu với mỗi x chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ hội tụ về một số thực, thì ta có thể nói tới một hàm số thực mới mà giá trị tại x là $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ và viết là

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

Vậy $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ là một hàm số thực mà giá trị tại x là

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right)(x) = (u_1 + u_2 + \cdots)(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x).$$

Vậy một ***chuỗi hàm*** là dãy tổng riêng phần của một dãy hàm. Giá trị của một chuỗi hàm tại một điểm là một chuỗi số.

Ví dụ 6.2.1. Xét chuỗi hàm

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$$

với biến $x \in \mathbb{R}$.

Với mỗi x thì là một chuỗi số hình học. Ta biết chuỗi số này hội tụ khi và chỉ khi $|x| < 1$ và giới hạn bằng $\frac{1}{1-x}$ (xem Ví dụ 6.1.7). Chẳng hạn giá trị của chuỗi hàm này tại $x = \frac{1}{2}$ là $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$. Vậy miền xác định của chuỗi hàm này là khoảng $(-1, 1)$, và ta hiểu chuỗi hàm hội tụ về hàm số thực $x \mapsto \frac{1}{1-x}$:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Ví dụ 6.2.2. Hàm

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

được xác định nếu $x > 1$. Hàm này có tên là hàm zeta Riemann.

6.2.1 Chuỗi Taylor và chuỗi Maclaurin

Định lý 6.2.3. *Nếu hàm f có đạo hàm đến cấp $n+1$ trong một khoảng mở chứa a và x thì có* ***công thức Taylor****:*

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}} \tag{6.2.1}$$

trong đó θ là một số thực giữa a và x.

Trong trường hợp riêng $a = 0$ thì công thức Taylor thường được gọi là ***công thức Maclaurin****:*

$$\boxed{f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}x^{n+1}} \tag{6.2.2}$$

với θ là một số thực giữa 0 và x.

Với $n = 0$, công thức Taylor chính là công thức trong Định lý giá trị trung bình Lagrange 4.1.11.

Với $n = 1$, công thức Taylor cho xấp xỉ tuyến tính (4.2.3)

$$f(x) - f(a) \approx f'(a)(x-a)$$

hơn nữa còn cho công thức chính xác cho sai số của xấp xỉ này là $\frac{f''(\theta)}{2!}(x-a)^2$.

Đặt

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

thì đây là một đa thức bậc n xấp xỉ hàm f. Định lý 6.2.3 trên khẳng định rằng ***phần dư*** hay ***sai số*** của phép xấp xỉ là

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Đây thường được gọi là phần dư dạng Lagrange. Phần dư $R_n(x)$ còn được hiểu là $R_n(x) = o((x-a)^n)$ với kí hiệu $o((x-a)^n)$ được dùng để chỉ một "vô cùng bé" cấp cao hơn $(x-a)^n$, nghĩa là $\lim_{x\to a} \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0$.

Chuỗi

$$\boxed{f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n} \tag{6.2.3}$$

được gọi là ***chuỗi Taylor*** cho hàm f tại a (hay quanh a, hay tâm a). Trường hợp đặc biệt $a = 0$ chuỗi Taylor trở thành ***chuỗi Maclaurin***:

$$\boxed{f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n} \tag{6.2.4}$$

Viết ra công thức Taylor của một hàm thường được gọi là viết khai triển Taylor của hàm đó. Công thức Taylor cho phép ta thay việc xét một hàm phức tạp bằng việc xét các hàm đa thức, thường đơn giản hơn nhiều.

Chứng minh Định lý 6.2.3. Ta chứng minh bằng qui nạp toán học.

Khi $n = 0$, công thức Taylor chính là công thức trong Định lý giá trị trung bình Lagrange, như đã nói ở trên.

Giả sử công thức Taylor đúng với $n = k - 1$, nghĩa là với mọi hàm f có đạo hàm tới cấp $k - 1$ tồn tại θ ở khoảng giữa a và x để phần dư $R_{k-1}(x)$ của hàm f, mà trong phần tiếp theo được kí hiệu là $R_{k-1}(x, f)$ cho rõ hơn, được cho bởi

$$R_{k-1}(x, f) = \frac{f^{(k)}(\theta)}{k!}(x - a)^k.$$

Ta xét $n = k$. Theo công thức Cauchy về giá trị trung bình (4.1.1), tồn tại c trong khoảng a và x để

$$\frac{R_k(x, f)}{(x - a)^{k+1}} = \frac{R_k(x, f) - R_k(a, f)}{(x - a)^{k+1} - (a - a)^{k+1}} = \frac{R'_k(c, f)}{(k + 1)(c - a)^k}. \tag{6.2.5}$$

Ta thu được bằng tính toán trực tiếp:

$$R'_k(x, f) = f'(x) - [f'(a) + f''(a)(x - a) + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{(k - 1)!}(x - a)^{k-1}] = R_{k-1}(x, f').$$

Áp dụng giả thiết qui nạp cho hàm f', tồn tại θ ở giữa a và c sao cho

$$R'_k(c, f) = R_{k-1}(c, f') = \frac{f'^{(k)}(\theta)}{k!}(c - a)^k.$$

Thay vào (6.2.5) ta thu được

$$R_k(x, f) = \frac{f^{(k+1)}(\theta)}{(k + 1)!}(x - a)^{k+1}.$$

Vậy công thức phần dư đúng khi $n = k$. □

Ví dụ 6.2.4. Tìm khai triển Maclaurin của hàm số $f(x) = e^x$.

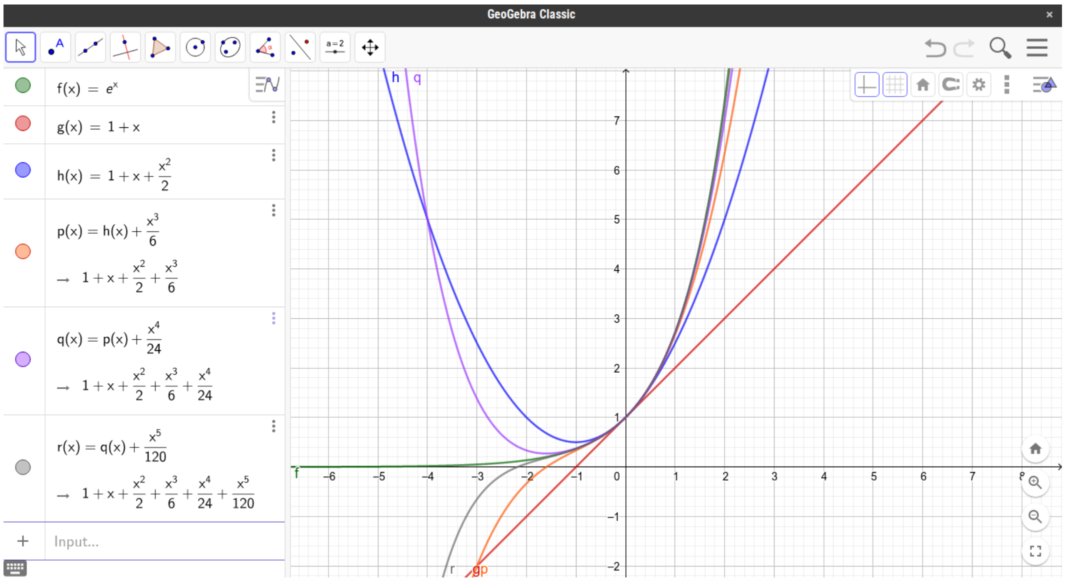
Ta có

$$(e^x)^{(n)} = e^x,$$

do đó $f(0) = 1, f'(0) = 1, \ldots, f^{(n)}(0) = 1$. Khai triển Maclaurin của f là

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1},$$

với θ là một số thực nào đó nằm giữa x và 0. Xem minh họa ở Hình 6.2.1.



Hình 6.2.1: Vẽ đồ thị hàm số e^x và 5 xấp xỉ đầu tiên bằng phần mềm máy tính.

Ta có thể đi xa hơn. Với mỗi $x \in \mathbb{R}$ ta có đánh giá phần dư $R_n(x) = \frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}$:

$$|R_n(x)| = \left|\frac{e^\theta}{(n+1)!}x^{n+1}\right| < \frac{e^{|x|}}{(n+1)!}|x|^{n+1}.$$

Vì

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$$

(Mệnh đề 6.1.42) nên theo Định lý kẹp $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Điều này có nghĩa là chuỗi Maclaurin của e^x hội tụ về e^x với mọi x. Vậy ta có công thức

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad \forall x \in \mathbb{R}.}$$

Ví dụ 6.2.5. Bằng phương pháp trong ví dụ trên ta có thể kiểm tra được sự hội tụ của các khai triển Taylor của một số hàm thường gặp sau (được để ở Bài tập 6.2.3):

(a) Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

(b) Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

Ta có thể dùng khai triển Taylor và Maclaurin để tính xấp xỉ giá trị của số $f(x)$ sau khi chọn n đủ lớn để phần dư $R_n(x)$ có trị tuyệt đối không vượt quá sai số cho phép.

Ví dụ 6.2.6. Tính e chính xác đến 0,00001.

Dùng khai triển Maclaurin của hàm số e^x ta được

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^\theta$$

với θ giữa 0 và x. Lấy $x = 1$ ta được

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} e^\theta$$

với một θ giữa 0 và 1. Ta cần đảm bảo giá trị tuyệt đối của sai số $\frac{1}{(n+1)!}e^\theta$ không vượt quá 0,00001 bằng cách lấy n đủ lớn. Vì $0 < \frac{1}{(n+1)!}e^\theta < \frac{e}{(n+1)!}$ nên ta chỉ cần chọn n đủ lớn sao cho $\frac{e}{(n+1)!} < 10^{-5}$ hay $(n+1)! > e \cdot 10^5$. Ta có thể chọn $n = 8$ và thu được

$$e \approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{8!} = 2{,}71828\ldots.$$

Ví dụ 6.2.7. Tính $\sin 20^\circ$ chính xác đến 0,0001.

Chú ý $\sin 20^\circ = \sin \frac{\pi}{9}$. Dùng khai triển Maclaurin của hàm sin, lấy $x = \frac{\pi}{9}$, chọn $n = 3$, ta đánh giá được phần dư Lagrange

$$|R_3(x)| \le \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^5 < 0{,}0001.$$

Vậy $\sin 20^\circ \approx \frac{\pi}{9} - \frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{9}\right)^3 \approx 0{,}34197\ldots.$

Ví dụ 6.2.8. Để đảm bảo công thức xấp xỉ $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$ có sai số không quá 0,0001 thì có thể lấy x có giá trị trong khoảng nào?

Công thức Maclaurin cho hàm sin tới bậc 3 có sai số là

$$\frac{\sin^{(4)}(\theta)}{4!} x^4.$$

Sai số này có độ lớn không quá $\frac{|x|^4}{4!}$. Để đảm bảo sai số của công thức xấp xỉ không quá 0,0001, ta đảm bảo $\frac{|x|^4}{4!} \le 0{,}0001$ là đủ. Vậy ta có thể lấy $|x| \le \sqrt[4]{24} \cdot 10^{-1}$, hay đơn giản hơn là lấy $|x| \le 0{,}1$.

Sau đây là một ví dụ khai triển Taylor tại một điểm khác 0.

Ví dụ 6.2.9. Viết công thức Taylor của hàm $f(x) = e^x$ quanh điểm $a = 2$ đến cấp n.

Ta có $f^{(n)}(2) = e^2$. Vậy

$$e^x = e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{e^2}{n!}(x-2)^n + \frac{e^\theta}{(n+1)!}(x-2)^{n+1}$$

với θ nằm giữa x và 2.

Mặt khác ta cũng có thể thu được công thức này từ khai triển Maclaurin của e^x đã biết:

$$\begin{aligned} e^x = e^2 e^{x-2} &= e^2\left(1 + (x-2) + \frac{1}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}(x-2)^n + \frac{e^\theta}{(n+1)!}(x-2)^{n+1}\right) \\ &= e^2 + e^2(x-2) + \frac{e^2}{2!}(x-2)^2 + \cdots + \frac{e^2}{n!}(x-2)^n + \frac{e^{2+\theta}}{(n+1)!}(x-2)^{n+1} \end{aligned}$$

với θ nằm giữa $x-2$ và 0.

6.2.2 Chuỗi lũy thừa

Ở phần này ta thảo luận một dạng chung của chuỗi hàm mà chuỗi Taylor là một trường hợp riêng, gọi là chuỗi lũy thừa. Chuỗi lũy thừa là chuỗi mà các số hạng là các hàm lũy thừa, có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots \tag{6.2.6}$$

trong đó x là biến số và các hằng số C_n được gọi là các hệ số của chuỗi. Với mỗi x cho trước, chuỗi (6.2.6) là một chuỗi số. Một chuỗi lũy thừa có thể hội tụ với một giá trị của x và phân kỳ với một giá trị khác của x. Tổng của chuỗi là hàm

$$f(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + \cdots + C_n x^n + \cdots$$

có miền xác định là tập hợp tất cả giá trị của x để cho chuỗi số hội tụ. Ta thấy tổng của chuỗi giống như một đa thức, nhưng có vô hạn số hạng.

Tổng quát hơn, một chuỗi có dạng

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \cdots \tag{6.2.7}$$

được gọi là một ***chuỗi lũy thừa tâm*** a, hay chuỗi lũy thừa xung quanh a.

Sự hội tụ của chuỗi lũy thừa

Chú ý rằng trong phương trình (6.2.7) khi $x = a$ thì tất cả các số hạng với $n \geq 1$ đều bằng 0, do đó chuỗi (6.2.7) luôn hội tụ khi $x = a$.

Ví dụ 6.2.10. Với giá trị nào của x thì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ hội tụ?

Từ Mệnh đề 6.1.42 nếu $x \neq 0$ thì số hạng $n!x^n$ tiến ra vô cùng. Suy ra chuỗi phân kỳ khi $x \neq 0$ và chỉ hội tụ khi $x = 0$.

Định lý 6.2.11. *(a) Nếu chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ hội tụ tại $x = x_0$ thì nó hội tụ tại mọi điểm x thỏa mãn $|x-a| < |x_0 - a|$.*

(b) Nếu chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ phân kì tại $x = x_1$ thì nó phân kì tại mọi điểm x thỏa mãn $|x-a| > |x_1 - a|$.

Chứng minh. (a) Vì chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x_0-a)^n$ hội tụ nên $\lim_{n\to\infty} C_n(x_0-a)^n = 0$. Giả sử $x_0 - a \neq 0$, với n đủ lớn ta có

$$|C_n(x-a)^n| = |C_n(x_0-a)^n| \left|\frac{(x-a)^n}{(x_0-a)^n}\right| < \left|\frac{(x-a)^n}{(x_0-a)^n}\right| = \left|\frac{x-a}{x_0-a}\right|^n.$$

Kết luận có được từ Tiêu chuẩn so sánh của chuỗi số, áp dụng vào so sánh chuỗi số đã cho với chuỗi hình học $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{x-a}{x_0-a}\right|^n$.

(b) Giả sử ngược lại, rằng $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ là hội tụ, thì theo phần (a), $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x_1-a)^n$ cũng phải hội tụ, mâu thuẫn. □

Do định lý trên với một chuỗi lũy thừa $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ chỉ có một trong ba khả năng sau xảy ra:

(i) Chuỗi hội tụ chỉ khi $x = a$.

(ii) Chuỗi hội tụ với mọi x.

(iii) Có một số thực dương R sao cho chuỗi hội tụ nếu $|x-a| < R$ và phân kỳ nếu $|x-a| > R$.

Số thực R trong trường hợp (iii) được gọi là ***bán kính hội tụ*** của chuỗi. Ta qui ước rằng bán kính hội tụ trong trường hợp (i) là $R = 0$ và trong trường hợp (ii) là $R = \infty$.

Khoảng hội tụ của chuỗi lũy thừa là khoảng chứa tất cả các giá trị của x mà chuỗi hội tụ. Trong trường hợp (i) khoảng hội tụ chỉ chứa một điểm a. Trong trường hợp (ii) khoảng hội tụ là $(-\infty, \infty)$. Trong trường hợp (iii), tại hai điểm đầu mút $a - R$ và $a + R$ chuỗi có thể hội tụ hoặc phân kỳ, do đó khoảng hội tụ của chuỗi có thể là $(a-R, a+R)$, $(a-R, a+R]$, $[a-R, a+R)$, $[a-R, a+R]$, và ta phải xét cụ thể tại hai đầu mút mới kết luận được.

Từ Tiêu chuẩn tỉ số và Tiêu chuẩn căn thức cho sự hội tụ của chuỗi số, ta có ngay:

Định lý 6.2.12 (Qui tắc tìm bán kính hội tụ). *Nếu $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \rho$ hay $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|C_n|} = \rho$ thì bán kính hội tụ của chuỗi $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n$ là*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \text{nếu } 0 < \rho < \infty, \\ 0 & \text{nếu } \rho = \infty, \\ \infty & \text{nếu } \rho = 0. \end{cases}$$

Trong các ví dụ cụ thể ta không nhất thiết trích dẫn định lý trên mà thay vào đó có thể trực tiếp áp dụng Tiêu chuẩn tỉ số hoặc Tiêu chuẩn căn thức.

Ví dụ 6.2.13. Tìm bán kính hội tụ và khoảng hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{|x^n|}{n}} = |x|$$

Theo Tiêu chuẩn căn thức cho chuỗi số, nếu $|x| < 1$ thì chuỗi hội tụ, nếu $|x| > 1$ thì chuỗi phân kì. Vậy bán kính hội tụ là 1.

Ở phần chuỗi số ta đã biết chuỗi này với $x = -1$ là hội tụ, và chuỗi này với $x = 1$ là chuỗi điều hòa, phân kì. Vậy khoảng hội tụ của chuỗi là $[-1, 1)$.

Ví dụ 6.2.14. Tìm bán kính hội tụ và khoảng hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}.$$

Đặt $a_n = n(x+2)^n/3^{n+1}$ thì

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(n+1)(x+2)^{n+1}}{3^{n+2}} \cdot \frac{3^{n+1}}{n(x+2)^n}\right| \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{|x+2|}{3} \to \frac{|x+2|}{3} \quad \text{khi} \quad n\to\infty.\end{aligned}$$

Theo Tiêu chuẩn tỷ số của chuỗi số ta thấy chuỗi đã cho là hội tụ nếu $|x+2|/3 < 1$ và là phân kỳ nếu $|x+2|/3 > 1$. Do đó chuỗi hội tụ nếu $|x+2| < 3$ và phân kỳ nếu $|x+2| > 3$, vậy bán kính hội tụ là $R = 3$.

Ta xét tại hai đầu mút của khoảng hội tụ $|x+2| < 3$. Khi $x = -5$ chuỗi trở thành

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(-3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n$$

là phân kỳ do $(-1)^n n$ không hội tụ về 0. Khi $x = 1$ chuỗi trở thành

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(3)^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} n$$

cũng phân kỳ với cùng lí do. Vậy chuỗi đã cho hội tụ khi và chỉ khi $-5 < x < 1$, vậy khoảng hội tụ là $(-5, 1)$.

Ví dụ 6.2.15. Tìm bán kính hội tụ và khoảng hội tụ của chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n^n}.$$

Sử dụng Tiêu chuẩn căn thức ta có:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-6)^n}{n^n}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x-6}{n}\right| = 0.$$

Theo Tiêu chuẩn căn thức, chuỗi đã cho luôn luôn hội tụ, bán kính hội tụ là $R = \infty$, và khoảng hội tụ là $-\infty < x < \infty$.

6.2.3 * Chuỗi Fourier

Khác với việc xấp xỉ hàm bằng đa thức để thu được các chuỗi lũy thừa, ở phần này ta xấp xỉ hàm bằng các hàm lượng giác. Phương pháp xấp xỉ này phù hợp cho các hàm tuần hoàn. Hàm f được gọi là một ***hàm tuần hoàn*** nếu tồn tại một hằng số dương T, gọi là chu kì của hàm, sao cho $f(x+T) = f(x)$ với mọi x. Ta biết các hàm $\sin x$, $\cos x$ là hàm tuần hoàn với chu kì 2π.

Định nghĩa 6.2.16. Cho hàm f là hàm tuần hoàn có chu kì 2π, chuỗi hàm

$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)} \tag{6.2.8}$$

với

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n \geq 0$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n \geq 1$$

được gọi là ***chuỗi Fourier*** của hàm f.

Trong trường hợp tổng quát, cho hàm f với chu kì T, chuỗi hàm

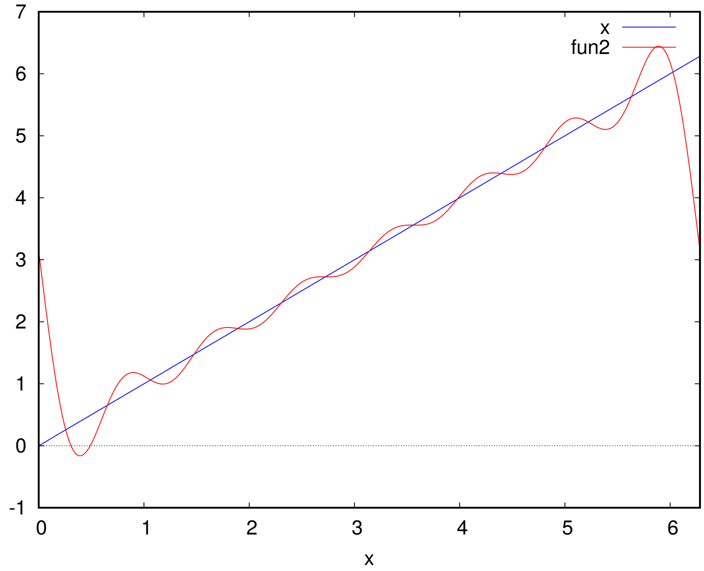
$$\boxed{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right) + b_n\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)} \tag{6.2.9}$$

với các hệ số

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx, \quad n \geq 0$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\frac{-T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx, \quad n \geq 1$$

được gọi là chuỗi Fourier của f.

Chuỗi Fourier cho phép xấp xỉ một hàm tuần hoàn phức tạp bằng những hàm lượng giác đơn giản. Chuỗi Fourier có nhiều ứng dụng vào trong kĩ thuật, như trong xử lí tín hiệu.



Hình 6.2.2: Hàm $f(x) = x$, $x \in [0, 2\pi]$, và tổng 8 phần tử đầu của chuỗi Fourier của hàm này.

Ví dụ 6.2.17. Tìm chuỗi Fourier của hàm số sau:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } -\pi \le x < 0 \\ 1 & \text{nếu } 0 \le x < \pi, \end{cases} \qquad \text{và} \quad f(x + 2\pi) = f(x).$$

Hàm f là một hàm tuần hoàn với chu kỳ 2π. Sử dụng công thức tính hệ số Fourier, ta có

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} 1\,dx = \frac{1}{2},$$

và với $n \ge 1$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \cos(nx)\,dx = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} 0\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \sin(nx)\,dx \\ &= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(nx)}{x}\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos(0)\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{nếu } n \text{ chẵn} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{nếu } n \text{ lẻ.} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy chuỗi Fourier của f là

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} b_{2k-1}\sin(2k-1)x = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)x.$$

Bài tập

6.2.1. Hãy tìm xấp xỉ bình phương (nghĩa là $n = 2$ trong khai triển Taylor) của hàm số $\sqrt{1+x^2}$ tại $x = 0$.

6.2.2. Hãy tìm xấp xỉ lập phương (nghĩa là $n = 3$ trong khai triển Taylor) của hàm số $\sqrt[3]{\sin x + x^2}$ tại $x = 0$.

6.2.3. Hãy kiểm tra các khai triển thường gặp trong Ví dụ 6.2.5.

6.2.4. Tìm khai triển Maclaurin của các hàm số sau.

(a) $f(x) = \sin \pi x$.

(b) $f(x) = e^{-2x}$.

6.2.5. Tìm khai triển Taylor của các hàm số sau tại các điểm a tương ứng.

(a) $f(x) = \ln x$, $a = 2$.

(b) $f(x) = 1/x$, $a = -3$.

(c) $f(x) = e^{2x}$, $a = 3$.

(d) $f(x) = \sin x$, $a = \pi/2$.

(e) $f(x) = \cos x$, $a = \pi$.

(f) $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 16$.

(g) $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$, $a = 2$.

6.2.6. Chứng tỏ khai triển Taylor của $\ln x$ tại 1 là

$$\frac{(x-1)}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-1)^n}{n}$$

với $0 < x < 2$. Hãy vẽ đồ thị của hàm ln và đồ thị của tổng 5 số hạng đầu của khai triển Taylor trên cùng một mặt phẳng tọa độ và nhận xét.

6.2.7. Công thức gần đúng

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = 2 + \frac{86}{120}$$

có sai số tối đa là bao nhiêu?

6.2.8. Dùng xấp xỉ $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$ để tính $\sin(0{,}1)$. Hãy ước lượng sai số.

6.2.9. Hãy tính gần đúng giá trị $\cos 91^\circ$ bằng khai triển Taylor cấp 5.

6.2.10. Hãy tính gần đúng giá trị $\cos 61^\circ$, với sai số so với giá trị chính xác không vượt quá 10^{-6}.

6.2.11. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^5 + 4}$.

(a) Viết khai triển Taylor của hàm số f tới cấp 3 quanh điểm $x = 2$.

(b) Áp dụng, hãy tính gần đúng số $\sqrt{2{,}001^5 + 4}$.

6.2.12. Hãy kiểm tra các công thức gần đúng sau đây khi x gần bằng 0.

(a) $\sin(\frac{\pi}{4}+x) \approx \frac{\sqrt{2}}{2}(1+x-\frac{x^2}{2})$.

(b) $\sqrt{1+x} \approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$.

(c) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2$.

6.2.13. Hãy tìm khai triển Maclaurin của hàm $(1+x)^k$, với $k \in \mathbb{R}$, và khảo sát sự hội tụ.

6.2.14. Tìm bán kính hội tụ và khoảng hội tụ của chuỗi hàm:

(a)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n^3+1}.$$

(b)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2+n-1}{3n+4} x^n.$$

(c)
$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^{2n}.$$

(d)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!} x^n.$$

(e)
$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{5}{3^n n}(x-4)^n.$$

(f)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{n3^n}.$$

(g)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(-2020)^n}.$$

6.2.15. Chuỗi
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n(n+1)}}(3x+6)^n$$
là chuỗi lũy thừa xung quanh điểm nào? Hãy tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa này.

6.2.16. Tìm chuỗi Fourier của hàm:

(a) $f(x) = x$, $x \in [0, 2\pi]$.

(b) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \le x < \pi. \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \\ 1, & \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}, \\ 0, & \frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi. \end{cases}$

(d) $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}, \\ x - 2\pi, & \frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi. \end{cases}$

Tài liệu tham khảo

[Apo67] Tom Apostol, *Calculus*, 2nd ed., John Wiley and Sons, 1967.

[Bmgt2] Bộ môn Giải tích, *Giáo trình Phép tính vi tích phân 2*, Khoa Toán–Tin học Đại học Khoa học Tự nhiên Thành phố Hồ Chí Minh, `https://sites.google.com/view/math-hcmus-edu-vn-giaitich`.

[Duc06] Dương Minh Đức, *Giáo trình Toán Giải Tích 1 (Toán vi tích phân A1)*, NXB Thống kê, Tp. Hồ Chí Minh, 2006.

[Fic77] G. M. Fichtengôn, *Cơ sở Giải tích toán học*, NXB Đại học và Trung học chuyên nghiệp, 1977.

[GeoG] GeoGebra, có phiên bản trên web, trên máy tính, và trên điện thoại: `https://www.geogebra.org`, phần mềm miễn phí, dễ dùng.

[Kha15] Đỗ Công Khanh, Nguyễn Minh Hằng, Ngô Thu Lương, *Toán cao cấp*, Nhà Xuất Bản Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, 2015.

[Kha96] Phan Quốc Khánh, *Phép tính vi tích phân*, tập 1, Nhà Xuất Bản Giáo dục, 1996.

[Lan97] Serge Lang, *Undergraduate analysis*, 2nd ed., Springer, 1997.

[Maxi] Maxima, có ở `http://maxima.sourceforge.net`, phần mềm mã nguồn mở, kích thước nhỏ.

[Pis69] N. Piskunov, *Differential and Integral Calculus*, Mir, 1969.

[Rud76] Walter Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1976.

[SGKTH] Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Sách giáo khoa các môn Đại số, Giải tích, Hình học lớp 10, 11, 12*, Nhà xuất bản Giáo dục, 2019.

[Spi94] Michael Spivak, *Calculus*, 3rd ed., Publish or Perish, 1994.

[Ste16] James Stewart, *Calculus*, Brooks-Cole, 8th ed., 2012. Có bản dịch tiếng Việt cho lần xuất bản thứ 7, Nhà xuất bản Hồng Đức 2016.

[TPTT02] Đinh Ngọc Thanh, Nguyễn Đình Phư, Nguyễn Công Tâm, Đặng Đức Trọng, *Giải tích hàm một biến*, Nhà Xuất Bản Giáo dục, 2002.

[Tri07] Nguyễn Đình Trí, Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh, *Toán học cao cấp*, NXB Giáo dục, 2007.

[Wolf] Wolfram Alpha, Giao diện web miễn phí ở `https://www.wolframalpha.com`.

[Zor04] Vladimir A. Zorich, *Mathematical Analysis I*, Springer, 2004.

Chỉ mục