Universidad Nacional Autónoma de México

Facultad de Ingeniería

Geofísica Matemática y Computacional

Dr. Luis Miguel de la Cruz Salas

Proyecto #1

Transferencia de Calor

Elaborado por:

Esteves Fragoso Octavio Samuel

Hernandez Montejano Hugo Ricardo

Grupo: 8

Semestre: 2021-1

Fecha de entrega: 10/11/2020

MODELO CONCEPTUAL

- Transferencia de calor

La energía tiene la capacidad de cruzar la frontera de un sistema cerrado en dos diferentes formas:

- Calor
- Trabajo

Es fundamental aprender a distinguir entre estos dos tipos de energía. Por un lado el calor está definido como la forma de energía que se transfiere entre dos sistemas (o entre un sistema y sus alrededores) debido a una diferencia de temperatura presente, en otras palabras, una interacción de energía es calor, solo si ocurre a una diferencia de temperatura. Por otro lado, el trabajo “W” es una de las formas de transmitir energía con la que interactuamos día con día al igual que con la del calor, pues para realizar un trabajo es preciso ejercer una fuerza sobre un cuerpo y que este se desplace.

Mecanismos de transferencia de calor:

Existen muchas maneras en las que el calor se puede transferir de un lugar a otro, pero desde el punto de vista de una continuidad, todas estas formas de transmisión de calor pueden entras en solo tres categorías que son: conducción, conveccion y radiacion. Estos mecanismos o modos de transferencia de calor no sólo están presentes en fases sino también en interfases.

Conducción: Este modo de transferencia de calor consiste en la transferencia de energía de partículas con más energía hacia aquellas con menor energía; es decir, se basa en el contacto directo entre las partículas. Por lo tanto, la conducción de calor es imposible en el vacío y puede tener lugar en cualquier fase o interfase. De esta forma puede afirmarse que siempre que exista un gradiente de temperatura, es decir cuando los cambios espaciales de la temperatura sigan una trayectoria definida de una región más energética a una menos energética, tendrá lugar la transferencia de calor por conducción.

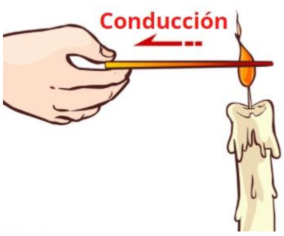


Figura 01. Representación de la transferencia de calor en forma de conducción, en la cual se tiene un objeto en contacto directo con la fuente emisora de calor.

Convección: La convección puede tener lugar tanto en una fase como en una interfase; para ser más precisos, en una capa límite. De acuerdo a la naturaleza del flujo, la convección puede ser forzada cuando se origina por mecanismos externos como un agitador o un ventilador, o bien convección natural o libre cuando el movimiento se da por diferencias de densidades inducidas por diferencias de temperatura en el fluido, como es el caso de un plato de sopa caliente o una taza de café.

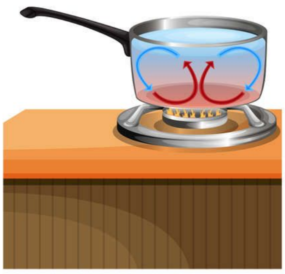


Figura 02. Representación de la transferencia de calor en forma de convección, la cual muestra los movimientos que realiza el fluido al estar en la superficie y en el fondo del recipiente, este proceso ocurre de igual manera en océanos, mares, etc.

Radiación: Es el transporte de energía que se da en ausencia de materia y consiste en el transporte a través de ondas electromagnéticas. Esta característica distingue a la radiación de la conducción y convección, los cuales requieren de materia para poder tener lugar. El transporte de energía por radiación se da a la velocidad de la luz por medio de fotones y se da más eficientemente en el vacío.

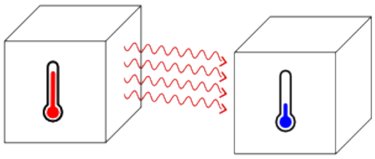


Figura 03. Representación de transferencia de calor en forma de radiación, se puede observar que este se lleva a cabo cuando existe una diferencia de calor entre dos cuerpos.

- ❖ Modelo matemático general de la conducción de calor en estado estacionario

condiciones de frontera.

Forma diferencial de la ley de Fourier:

$$q_z = -k\frac{\partial T}{\partial z}$$

K = coeficiente de conductividad térmica del aire.

El signo negativo se agrega para que K siempre sea positiva, ya que ∂T/∂z es positivo pero el flujo de calor es negativo. Lo anterior se debe a que, de acuerdo a la termodinámica, la transferencia de calor siempre se da desde la región de mayor temperatura hacia la zona de menor temperatura.

La ley de Fourier puede ser escriba en forma vectorial de la siguiente manera:

$$q = -K\nabla T$$

En el caso de materiales anisotrópicos (es la propiedad general de la materia según la cual cualidades como elasticidad, temperatura, conductividad, velocidad de propagación de la luz, etc., varían según la dirección en que son examinadas), la conductividad térmica es un tensor de segundo orden y la ley de Fourier se expresa en una forma más general como:

$$q = -K \cdot \nabla T$$

Utilizando la forma de la ley de Fourier dada en la ecuación anterior, la ecuación de energía térmica se expresa como:

$$Cp\,(\frac{T}{t} + v \cdot T\,) = \cdot (KT) + Q$$

El primer término del lado izquierdo de esta ecuación representa la acumulación de calor, el segundo término representa el transporte por convección de calor, el primer término del lado derecho representa la conducción de calor y el último término se refiere a la fuente o sumidero de calor en la fase. Siempre que este último término sea conocido, la ecuación anterior está cerrada pues la única incógnita es la temperatura.

- **Condición de frontera tipo Dirichlet:** Se conoce el valor de la variable dependiente en algún punto en el espacio o en el tiempo. (cuando la conductividad no es constante)

Por ejemplo: Considere una placa de metal de largo L que se localiza en medio de otras dos placas que se encuentran a 25ºC en un extremo (x = 0) y a 80ºC en el otro (x = L). Esta situación se expresa de la siguiente forma:

$$\text{En } x = 0, \quad T = 25\ °\text{C}$$

$$\text{En } x = L, \quad T = 80\ °\text{C}$$

C donde se especifica el valor de la variable dependiente, en este caso, la temperatura.

- **Condición de frontera de tipo Neumann:** Se conoce el valor de la derivada de la variable dependiente en algún punto.

Del ejemplo anterior: Suponga que ahora la placa del ejemplo anterior se encuentra aislada (es decir, su densidad de flujo de calor es cero) en un extremo (x = 0) y en el otro está expuesta a una densidad de flujo de calor constante. En este caso, las condiciones de frontera son:

$$\text{En } x = 0, \quad k\frac{dT}{dx} = 0$$

$$\text{En } x = L, \quad -k\frac{dT}{dx} = q_L$$

- **Condiciones de frontera tipo Robin:** Se especifica una condición tipo Dirichlet en una frontera y una tipo Neumann en la otra frontera (o viceversa). Una condición de frontera es tipo Robin cuando se especifica el valor de una combinación lineal de los valores de una función y su derivada. En su forma general unidimensional, una condición tipo Robin se expresa de la siguiente manera:

$$\text{En } x = a, \quad \alpha f(a) + \beta \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = \gamma$$

Donde α, β y γ son coeficientes conocidos que podrían (o no) ser funciones de la variable dependiente f . Podemos ver que, si β = 0, se reduce a una condición de frontera tipo Dirichlet; mientras que, si α = 0, se reduce a una condición tipo Neumann.

La conducción de calor estacionaria está representada por la ecuación:

$$\nabla \cdot (K\nabla T) = Q$$

Cuando K = constante:

$$K\nabla^2 T = Q$$

donde Q representa una fuente o un sumidero de energía calorífica.

❖ Descripción del modelo numérico

Condiciones Dirchlet

u → variable (temperatura)
¿Qué podríamos conocer?
Temperatura en la frontera del sistema

$u = c \ , x = x1$

Condicion Neumann

Conocer el gradiente de temperatura (flujo de calor o pérdida de calor) en la orilla, no la temperatura cómo tal, si no la derivada de la temperatura en la frontera

$\frac{du}{dx} = c \;,\; x = x1$

Diferencias finitas

$$a_2 \frac{d^2u}{dx^2} + a_1 \frac{du}{dx} + a_0 = f(x)$$

Quiero conocer u(temperatura) en función de x (posición)

Discretización → cortar el dominio en 'N' lo cual vamos a llamar nodos, n datos puntuales en los cuáles vamos a encontrar la solución

$$N$$

$$\Delta x = \frac{L}{N-1}$$

$$x[i] = i\Delta x$$

$$i = 0,1,2,\ldots,N-1$$

Paso 2

Escribir la ecuación diferencial y las condiciones de frontera en forma discreta utilizando derivada numérica

- Derivada hacia adelante
- Derivada hacia atrás
- Derivadas centrales

Paso 3

Plantear sistema de ecuaciones usando la ecuación diferencial y las condiciones de frontera con derivada numérica para encontrar u para cada nodo, resolver el sistema de ecuaciones

$Au = b$

5. Calibración (5 tareas, lista mínima):

a. Conducción de calor estacionaria sin fuentes y conductividad constante

4. Conducción de calor estacionaria sin fuentes ni sumideros ($S = 0$), con κ = constante:

$$-\frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} = 0$$

$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$ → solucion línea recta (2da derivada una línea recta)

Condiciones de frontera

$T = T_0 = 25\ [°C]$ --> $x = 0\ [m]$

$T = T_L = 200\ [°C]$ --> $x = L = 1\ [m]$

Discretizar

$N = 5$

$\Delta x = \frac{L}{N-1} = 0.25$

$x[i] = i\Delta x = [0, 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1]$ … vector de posiciones (linspace python)

Escribiendo la ecuación diferencial usando diferencia finita

$$\frac{T[\,i+1\,] \;\; - 2T[i] + T[i-L]}{\Delta x^2} = 0$$ … Derivadas centrales

$$\left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)T[i+1] + \left(\frac{-2}{\Delta x^2}\right)T[i] + \left(\frac{1}{\Delta x^2}\right)T[i-1] = 0$$

Condiciones de frontera

$T[0] = T_0 = 25\ [°C]$ … ecuación 1

$T[4] = T_L = 200\ [°C]$ … ecuación 2

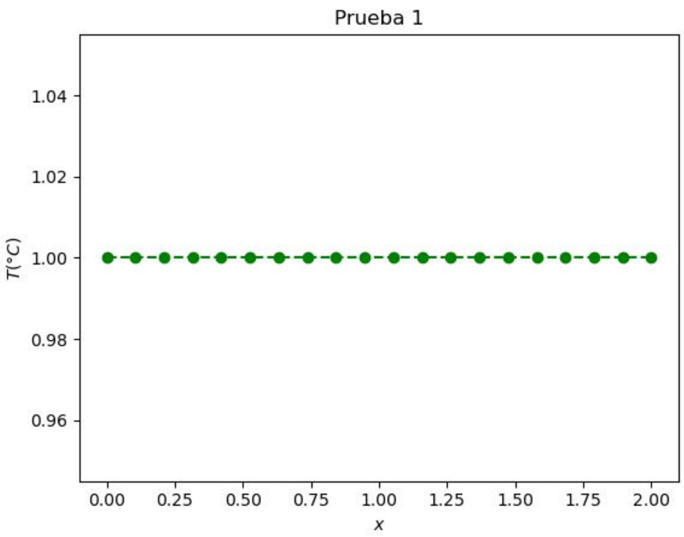
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{\Delta x^2}\right) & \left(\frac{-2}{\Delta x^2}\right) & \left(\frac{1}{\Delta x^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{\Delta x^2}\right) & \left(\frac{-2}{\Delta x^2}\right) & \left(\frac{1}{\Delta x^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{\Delta x^2}\right) & \left(\frac{-2}{\Delta x^2}\right) & \left(\frac{1}{\Delta x^2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T[0] \\ T[1] \\ T[2] \\ T[3] \\ T[4] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ T_L \end{bmatrix}$$

Sistema de ecuaciones

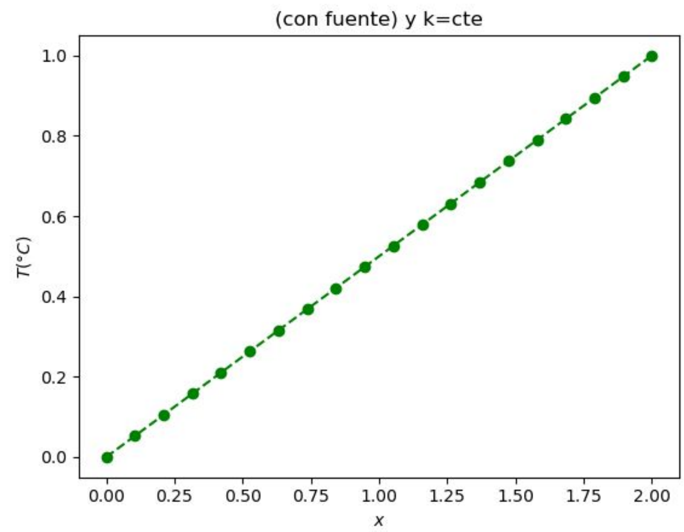
Para resolver el sistema de ecuaciones se empleó matriz inversa.

Y finalmente se realiza la gráfica de la temperatura en función de la posición dentro de nuestro sistema.

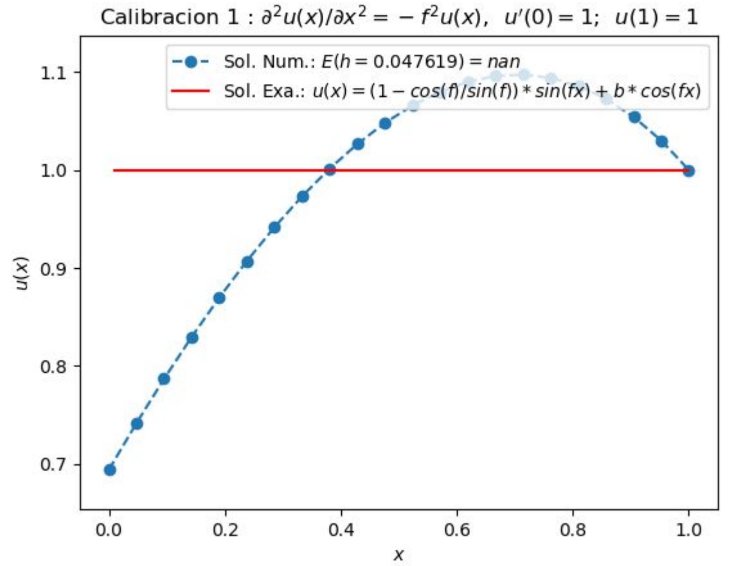
Prueba número uno (Conducción de calor estacionaria sin fuentes y conductividad constante).



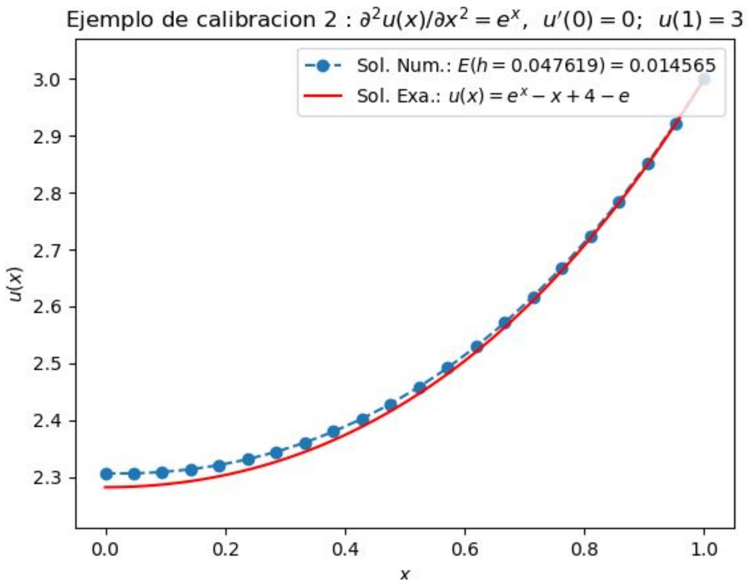
Prueba número dos (Conducción de calor estacionaria con fuentes y conductividad constante).



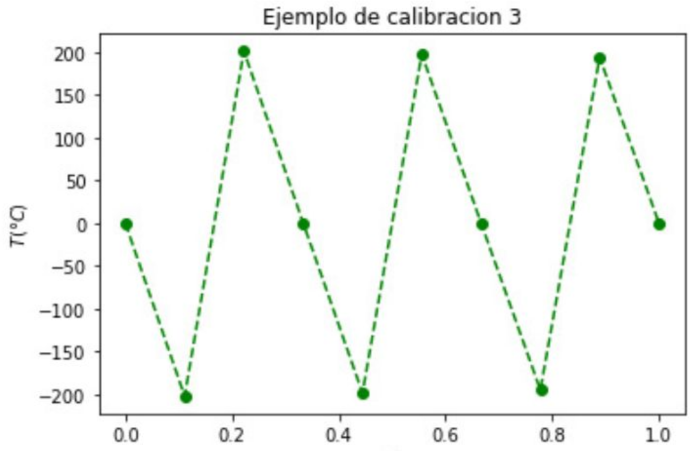
Prueba número tres, ejemplo de calibración uno.



Prueba número cuatro, ejemplo de calibración dos.



Prueba número cinco, ejemplo de calibración tres.



Conclusión

Se logró resolver el problema presentado, después de lograr entender la parte matemática y física que conlleva el problema para saber y tener una idea concreta de por donde se debía empezar el programa, las variables que se iban a ocupar así como las funciones.

Uno de los principales problemas que se presentaron fue el entender el problema que se tenía que resolver así como la falta de manejo del lenguaje Python, ya que se ocuparon diversas funciones que no se conocían y al ser dos personas en el equipo se dificulto en parte la distribución de tareas, pero se logró resolver el problema.

Fuentes

- Francisco J. Valdés Parada, Transferencia de Calor, Universidad Autónoma Metropilitana-Iztapalapa, Última actualización: 10 de noviembre de 2019.
- Principios de Transferencia de Calor, Condiciones de Frontera e Iniciales, 12 de diciembre de 2015, consultado en: http://transferenciadecalorjohnmarcillo.blogspot.com/2015/12/condiciones-de-frontera-e-iniciales
- Cengel, Y. A.; Boles, M.A.: Termodinámica. Mc Graw-Hill, 1996, Sexta edición.
- Ecuaciones diferenciales parciales, transferencia de calor y diferencias finitas, 6 de noviembre de 2019, Consultado en: https://www.youtube.com/watch?v=Q1RmaOcI3pQ
- Problemas de valores a la frontera, fenómenos de transporte y diferencias finitas, 4 de noviembre de 2019, Consultado en: https://www.youtube.com/watch?v=d2JBVTmT_OA
- Tipos de condiciones de frontera, 19 de julio de 2017, Consultado en: https://www.youtube.com/watch?v=qvuIA14T2BU
- Luis M. de la Cruz Salas, Geofísica Matemática y Computacional, Diferencias Finitas: Problemas estacionarios, Universidad Nacional Autonoma de Mexico, Semestre 2021-1, Consultado en: https://drive.google.com/file/d/1fgZtNog9qPEwIqfIANu1_4Bhl_hpMc96/view