Devoir n° 1 - version a - 45 minutes

EXERCICE N°1

Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB et $A\,{}^tA+2B$.

Le produit de A par B est impossible puisque le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B.

$A\,{}^tA = A\times({}^tA) = \begin{pmatrix} 5+x^2 & 1+x \\ 1+x & 3 \end{pmatrix}$ Donc $A\,{}^tA+2B=\begin{pmatrix} 7+x^2 & 5+x \\ 5+x & 5 \end{pmatrix}$.

EXERCICE N°2

1. Résoudre le système suivant en utilisant la méthode de Gauss et en détaillant les étapes (préciser les combinaisons effectuées) :

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+2z=2 \\ 3x+y+z=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x-y+2z=2 \\ 3x+y+z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+z=1 & \\ -5y+0z=0 & L2-2L1 \\ -y-z=-1 & L3-3L1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$$

2. Que dire du déterminant du système ? Justifier la réponse.
   Le système précédent admet une unique solution. On en déduit que la matrice de ce système est inversible et que son déterminant est non nul.

EXERCICE N°3

Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. On démontre facilement que $A^2=5A+2I_2$. *Vérification non demandée.*

Utiliser ce résultat (et aucune autre méthode) pour montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

$$A^2=5A+2I_2 \iff A^2-5A=2I_2 \iff A\times(A-5I_2)=2I_2 \iff A\times\underbrace{\frac{1}{2}\times(A-5I_2)}_{B}=I_2$$

On a donc trouver une matrice B qui, multipliée par A donne la matrice identité.

On en déduit que A est inversible et que $A^{-1}=B=\frac{1}{2}\times(A-5I_2)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE N°4

1. Démonter que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a & 4 \\ a & 4 & 5 \end{vmatrix} = -a^3+21a-36$.

   Développons par exemple par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a & 4 \\ a & 4 & 5 \end{vmatrix} = -a^3+21a-36 = 1\times(5a-16)-2\times(10-4a)+a\times\left(8-a^2\right) = -a^3+21a-36$$

2. Sans chercher à le résoudre mais en expliquant précisément le raisonnement, déterminer le nombre de solutions du système :

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 3x+4y+5z=0 \end{cases}$$

Le déterminant du système est celui de la question précédente pour $a=3$. Il vaut donc $-3^3+21\times 3-36=0$.
On en déduit que le sytème n'admet aucune solution ou une infinité.
Or, $(0,0,0)$ est clairement solution.
Donc le système en admet une infinité : une droite de solutions ou un plan de solutions.
Pour finir, on constate que les trois équations ne sont pas identiques. Le système ne se résume donc pas à un unique plan. Il admet donc une droite de solutions.

3. Déterminer trois solutions distinctes de ce système.
$(0,0,0)$ est clairement une première solution. Cherchons deux autres solutions :

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \\ 3x+4y+5z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+3z=0 & \\ -y-2z=0 & L2-2L1 \\ -2y-4z=0 & L3-3L1 \end{cases}$$

Les deux dernières équations sont identiques. Le système se résume donc bien à deux équations :

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ y+2z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=z \\ y=-2z \end{cases}$$

On peut maintenant fixer arbitrairement z pour trouver d'autres solutions : $(1,-2,1)$ ou $(-1,2,-1)$.

4. Et si vous avez le temps, déterminer tous les réels a annulant le déterminant de la question 1.
On sait que 3 est une racine de l'équation du troisième degré $\quad -a^3+21a-36=0$.
En effectuant la division euclidien de $-a^3+21a-36$ par $a-3$, on obtient :

$$-a^3+21a-36=(a-3)\times\left(-a^2-3a+12\right)$$

Les trois réels qui annulent le déterminant sont donc : 3, $\dfrac{-3-\sqrt{57}}{2}$ et $\dfrac{-3+\sqrt{57}}{2}$.

– FIN –

Devoir n° 1 - version b - 45 minutes

EXERCICE N°5

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & x & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer AB et $A\,{}^tA - 2B$.

EXERCICE N°6

1. Résoudre le système suivant en utilisant la méthode de Gauss et en détaillant les étapes (préciser les combinaisons effectuées) :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

2. Que dire du déterminant du système ? Justifier la réponse.

EXERCICE N°7

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. On démontre facilement que $A^2 - 7A + 10I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Vérification non demandée.*

Utiliser ce résultat (et aucune autre méthode) pour montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

EXERCICE N°8

1. Démonter que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & a & 2 \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix} = -a^3 + 11a - 10.$
2. Sans chercher à le résoudre mais en expliquant précisément le raisonnement, déterminer le nombre de solutions du système :

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x + y + 2z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$$

3. Déterminer trois solutions distinctes de ce système.
4. Et si vous avez le temps, déterminer tous les réels a annulant le déterminant de la question 1.

– FIN –

Devoir n° 1 - version c - 45 minutes

EXERCICE N°9

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ x & 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer AB et $A\,{}^tA + 2B$.

EXERCICE N°10

1. Résoudre le système suivant en utilisant la méthode de Gauss et en détaillant les étapes (préciser les combinaisons effectuées) :

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 2 \\ 4x + y + z = 2 \end{cases}$$

2. Que dire du déterminant du système ? Justifier la réponse.

EXERCICE N°11

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. On démontre facilement que $A^2 - 6A = 4I_2$. *Vérification non demandée.*

Utiliser ce résultat (et aucune autre méthode) pour montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

EXERCICE N°12

1. Démonter que $\begin{vmatrix} 1 & 4 & a \\ a & 3 & 2 \\ 3 & a & 2 \end{vmatrix} = a^3 - 19a + 30.$
2. Sans chercher à le résoudre mais en expliquant précisément le raisonnement, déterminer le nombre de solutions du système :

$$\begin{cases} x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ 3x + 2y + 2z = 0 \end{cases}$$

3. Déterminer trois solutions distinctes de ce système.
4. Et si vous avez le temps, déterminer tous les réels a annulant le déterminant de la question 1.

– FIN –

Devoir n° 1 - version d - 45 minutes

EXERCICE N°13

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & x & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer AB et $A\,{}^tA + 3B$.

EXERCICE N°14

1. Résoudre le système suivant en utilisant la méthode de Gauss et en détaillant les étapes (préciser les combinaisons effectuées) :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 2 \\ 2x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

2. Que dire du déterminant du système ? Justifier la réponse.

EXERCICE N°15

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. On démontre facilement que $A^2 = 7A + 2I_2$. *Vérification non demandée.*

Utiliser ce résultat (et aucune autre méthode) pour montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

EXERCICE N°16

1. Démonter que $\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 2 & a & 3 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = a^3 - 3a + 2.$
2. Sans chercher à le résoudre mais en expliquant précisément le raisonnement, déterminer le nombre de solutions du système :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

3. Déterminer trois solutions distinctes de ce système.
4. Et si vous avez le temps, déterminer tous les réels a annulant le déterminant de la question 1.

– FIN –

Devoir n° 1 - version e - 45 minutes

EXERCICE N°17

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & x \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer AB et $A^t A - 3B$.

EXERCICE N°18

1. Résoudre le système suivant en utilisant la méthode de Gauss et en détaillant les étapes (préciser les combinaisons effectuées) :

$$\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ 2x + y + z = 1 \\ -2x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

2. Que dire du déterminant du système ? Justifier la réponse.

EXERCICE N°19

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$. On démontre facilement que $A^2 - 6A - 7I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Vérification non demandée.*

Utiliser ce résultat (et aucune autre méthode) pour montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

EXERCICE N°20

1. Démonter que $\begin{vmatrix} 2 & 2 & a \\ 1 & a & 5 \\ a & -1 & 3 \end{vmatrix} = -a^3 + 15a + 4$.
2. Sans chercher à le résoudre mais en expliquant précisément le raisonnement, déterminer le nombre de solutions du système :

$$\begin{cases} 2x + 2y + 4z = 0 \\ x + 4y + 5z = 0 \\ 4x - y + 3z = 0 \end{cases}$$

3. Déterminer trois solutions distinctes de ce système.
4. Et si vous avez le temps, déterminer tous les réels a annulant le déterminant de la question 1.

– FIN –

Devoir n° 1 - version f - 45 minutes

EXERCICE N°21

Soit $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer AB et $A\,{}^tA + 2B$.

EXERCICE N°22

1. Résoudre le système suivant en utilisant la méthode de Gauss et en détaillant les étapes (préciser les combinaisons effectuées) :

$$\begin{cases} x - y - z = 1 \\ -2x + 2y + z = 0 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$$

2. Que dire du déterminant du système ? Justifier la réponse.

EXERCICE N°23

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On démontre facilement que $A^2 = 8A - 7I_2$. *Vérification non demandée.*

Utiliser ce résultat (et aucune autre méthode) pour montrer que A est inversible et déterminer son inverse.

EXERCICE N°24

1. Démonter que $\begin{vmatrix} a & 2 & -3 \\ 3 & a & 4 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix} = a^3 - 12a - 11$.
2. Sans chercher à le résoudre mais en expliquant précisément le raisonnement, déterminer le nombre de solutions du système :

$$\begin{cases} -x + 2y - 3z = 0 \\ 3x - y + 4z = 0 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

3. Déterminer trois solutions distinctes de ce système.
4. Et si vous avez le temps, déterminer tous les réels a annulant le déterminant de la question 1.

– FIN –