SIMULACIÓN DE TIEMPOS DE ARRIBO EN UN PROCESO DE POISSON HOMOGÉNEO

OSCAR BUSTOS - PATRICIA KISBYE

1. Introducción

Para la simulación de un proceso de Poisson homogéneo $N(t)$ con intensidad λ, se requiere la generación de variables aleatorias exponenciales $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$, las cuales modelan los tiempos entre arribos. De esta manera, si X_1, X_2, ..., X_n son los primeros tiempos entre arribos, entonces los primeros tiempos de arribo están dados por:

$$S_1 = X_1,\ S_2 = X_1 + X_2, \dots, S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Recordemos que las variables S_i tienen distribución gamma con parámetros i, λ:

$$f_{S_i}(t) = \lambda e^{-\lambda t}\,\frac{(\lambda t)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

A su vez, la transformación lineal:

$$T(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \cdots + x_n)$$

mapea de manera biyectiva el rango de las n exponenciales en el rango de $S_1,\dots,S_n$. La matriz de esta transformación lineal es una matriz constante:

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \dots 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots 0 \\ \vdots & & & & \dots 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots 1 \end{pmatrix}$$

y su determinante es 1. Por lo tanto la densidad conjunta de S_1, S_2, ..., S_n se obtiene fácilmente a partir de la densidad conjunta de las exponenciales. En efecto:

$$\begin{aligned} f_{S_1,S_2,\dots,S_n}(s_1, s_2, \dots, s_n) &= 1 \cdot f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= f_{X_1,X_2,\dots,X_n}(s_1, s_2 - s_1, s_3 - s_2, \dots, s_n - s_{n-1}) \\ &= (\lambda e^{-\lambda s_1}) \cdot (\lambda e^{-\lambda(s_2 - s_1)}) \cdots (\lambda e^{-\lambda(s_n - s_{n-1})}) = \lambda^n e^{-\lambda s_n}. \end{aligned}$$

Luego, la densidad conjunta de $(S_1, S_2, \dots, S_{n-1})$ condicional a $S_n = T$ está dada por:

$$\begin{aligned} f_{S_1,S_2,\cdots|S_n}(s_1, s_2, \cdots \mid T) &= \frac{f_{S_1,S_2,\dots,S_n}(s_1, s_2, \dots, T)}{f_{S_n}(T)} && (1) \\ &= \frac{\lambda^n e^{-\lambda T}}{\lambda e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^{n-1}}{(n-1)!}} = \frac{(n-1)!}{T^{n-1}} && (2) \end{aligned}$$

en el conjunto $s_1 < s_2 < \ldots < s_{n-1} \leq T$. Dado que esta densidad es la densidad conjunta de $n-1$ variables aleatorias uniformes en $(0, T)$, independientes y ordenadas, se sigue que las variables $(S_1, S_2, \dots, S_{n-1})$ condicionadas al valor de S_n están uniformemente distribuidas en el conjunto $0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_{n-1} \leq T$.

2. Simulación de eventos dado $S_n = t$

Esta propiedad nos permite dar un algoritmo particular para la generación de los primeros n eventos de un proceso de Poisson homogéneo con intensidad λ. Esto es, generar en primer lugar el valor de S_n, digamos $S_n = t$, y luego obtener los $n-1$ primeros tiempos de arribo con $n-1$ uniformes en $(0, t)$, ordenadas de menor a mayor.

```
def Nexponenciales(n,lamda):
    t = 1
    for _ in range(n): t *= random()
    t = -np.log(t)/lamda
    unif = np.random.uniform(0,1,n-1)
    unif.sort()
    exponenciales = [unif[0]*t]
    for i in range(n-2):
        exponenciales.append((unif[i+1]-unif[i])*t)
    exponenciales.append((1-unif[n-2])*t)
    return exponenciales
```

3. Simulación de eventos hasta T dado $N(T) = n$

Recordemos que $N(t)$ denota el número de eventos en el proceso de Poisson hasta el tiempo t. Veamos ahora cuál es la distribución de los primeros n tiempos de arribo dado que $N(T) = n$. Calcularemos entonces la probabilidad conjunta de $(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ condicional a $N(T) = n$. Esto es:

$$P(S_1 \leq s_1, S_2 \leq s_2, \ldots, S_n \leq s_n \mid N(T) = n) = \frac{P(S_1 \leq s_1,\ S_2 \leq s_2, \ldots, S_n \leq s_n,\ N(T) = n)}{P(N(T) = n)}. \tag{3}$$

Notemos que el evento $\{N(T) = n\}$ es equivalente a $\{S_n \leq T, S_{n+1} > T\}$. Luego el numerador en (3) puede escribirse como:

$$P(S_1 \leq s_1, S_2 \leq s_2, \ldots, S_n \leq T,\ S_{n+1} > T).$$

Ahora bien, para s_1, s_2, …, s_n, con $s_1 < s_2 < \ldots < s_n \leq T < s_{n+1}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} P(S_1 \leq s_1, S_2 \leq s_2, \quad \ldots \quad &, S_n \leq s_n,\ S_{n+1} > T) \\ &= \int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\int_0^{s_3}\cdots\int_0^{s_n}\int_T^{\infty} f_{S_1,S_2,\ldots,S_{n+1}} dr_{n+1} dr_n \ldots dr_2 dr_1 \\ &= \int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\int_0^{s_3}\cdots\int_0^{s_n}\int_T^{\infty} \lambda^{n+1} e^{-\lambda r_{n+1}} dr_{n+1} \mathbb{I}_A(r_1, \ldots, r_n) dr_n \ldots dr_2 dr_1 \\ &= \lambda^n e^{-\lambda T} \int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\int_0^{s_3}\cdots\int_0^{s_n} \mathbb{I}_A(r_1, \ldots, r_n) dr_n \ldots dr_2 dr_1 \end{aligned}$$

donde

$$A = \{(r_1, r_2, \ldots, r_n) \mid r_1 < r_2 < \ldots < r_n \leq T\}.$$

Dado que esta integral múltiple es la integral de la función idénticamente 1 sobre el conjunto A y que las $n!$ permutaciones de $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ son igualmente probables, entonces la integral múltiple es:

$$\int_0^{s_1}\int_0^{s_2}\int_0^{s_3}\cdots\int_0^{s_n} \mathbb{I}_{r_1 < r_2 \ldots r_n}(r_1, r_2, \ldots, r_n) dr_n \ldots dr_2 dr_1 = \frac{s_1 s_2 \ldots s_n}{n!}.$$

Luego resulta

$$P(S_1 \leq s_1, S_2 \leq s_2, \ldots, S_n \leq s_n,\ S_{n+1} > T) = e^{-\lambda T}\frac{\lambda^n}{n!} s_1 s_2 \ldots s_n.$$

En particular, volviendo a (3), tenemos que:

$$P(S_1 \leq s_1, S_2 \leq s_2, \ldots, S_n \leq s_n \mid N(T) = n) = \frac{e^{-\lambda T}\frac{\lambda^n}{n!} s_1 s_2 \ldots s_n}{e^{-\lambda T}\frac{(\lambda T)^n}{n!}} = \frac{s_1}{T}\frac{s_2}{T}\cdots\frac{s_n}{T}. \tag{4}$$

Luego podemos concluir que, dado que el número de eventos hasta T es $N(T) = n$, los n tiempos de arribo $S_1, S_2, \ldots, S_n$ son independientes y uniformemente distribuidos en $[0, T]$.