UN MÉTODO DE GENERACIÓN DE n EXPONENCIALES INDEPENDIENTES

OSCAR BUSTOS - PATRICIA KISBYE

1. Introducción

En el capítulo 5 del libro Simulation, de Sheldon Ross ([1]), se presenta el siguiente algoritmo para la generación de valores de n variables aleatorias exponenciales independientes, de parámetro λ:

Algoritmo 1: Algoritmo

Generar $U_1, \ldots, U_n \sim \mathcal{U}(0,1)$;
$t \leftarrow -\frac{1}{\lambda}\log(U_1 \cdots U_n)$;
Generar $V_1, \ldots, V_{n-1} \sim \mathcal{U}(0,1)$ y ordenarlos de menor a mayor;
$X_1 \leftarrow t\, V_1$;
$X_2 \leftarrow t\,(V_2 - V_1)$;
$\vdots$;
$X_{n-1} \leftarrow t\,(V_{n-1} - V_{n-2})$;
$X_n \leftarrow t - t\, V_{n-1}$

Las v.a. $U_1, U_2, \ldots, U_n$ son independientes, y la línea
$t \leftarrow -\frac{1}{\lambda}\log(U_1 \cdots U_n)$
genera un valor t de una v.a. gamma de parámetros (n, λ).

Afirmamos que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son v.a. exponenciales independientes de parámetro λ. Para ello, demostraremos que la función de densidad conjunta de las v.a. X_i es el producto de las densidades de n v.a. exponenciales de parámetro λ:

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda\, e^{-\lambda x_1}) \cdot (-\lambda\, e^{\lambda x_2}) \cdot \cdots \cdot (\lambda\, e^{-\lambda x_n})$$

Para esta demostración utilizaremos fuertemente el siguiente resultado:

Cambio de variables: *Sea $\mathbf{x}$ un vector aleatorio n-dimensional con densidad conjunta f. Si $\mathbf{y} = H(\mathbf{x})$, donde H es una transformación biyectiva y diferenciable, entonces $\mathbf{y}$ tiene densidad g:*

$$g(\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) \left| \det\left(\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{y}}\right) \right|$$

donde el diferencial es el Jacobiano de la inversa de H evaluada en $\mathbf{y}$.

2. Caso $n = 2$

En este caso, el algoritmo se reduce a los siguientes pasos:

Algoritmo 2: Algoritmo

Generar $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$;

$t \leftarrow -\dfrac{1}{\lambda}\log(U_1 \cdot U_2)$;

Generar $V \sim \mathcal{U}(0,1)$;

$X \leftarrow t\,V$;

$Y \leftarrow t - t\,V$

Consideremos las variables aleatorias independientes $Z \sim \gamma(2,\lambda)$ y $V \sim \mathcal{U}(0,1)$, y sean $X = Z\,V$ y $X = Z - ZV$. Entonces Z y V se expresan en términos de X e Y como

$$Z = X + Y, \qquad V = \frac{X}{X+Y}$$

De este modo, la transformación

$$H(v,z) = (v\,z, z - v\,z), \qquad 0 < v < 1,\; z > 0$$

resulta biyectiva sobre su imagen, diferenciable y con inversa

$$H^{-1}(x,y) = (\frac{x}{x+y}, x+y), \qquad x, y > 0.$$

La densidad conjunta de X e Y está dada entonces por

$$f_{X,Y}(x,y) = f_{V,Z}(v,z) \cdot J$$

donde $H(v,z) = (x,y)$ y J es el jacobiano de H^{-1} evaluado en (x,y) :

$$J = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}(x+y) & \dfrac{\partial}{\partial y}(x+y) \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{x+y}\right) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x}{x+y}\right) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \\ -\dfrac{y}{(x+y)^2} & \dfrac{x}{(x+y)^2} \end{pmatrix} = \frac{1}{x+y}$$

Dado que V y Z son independientes, su densidad conjunta es el producto de las densidades marginales:

$$f_{V,Z}(v,z) = 1_{(0,1)}(v) \cdot \lambda(\lambda z)\, e^{-\lambda z} 1_{(0,\infty)}(z)$$

Escribiendo v y z en términos de x e y concluimos que

$$f_{X,Y}(x,y) = (\lambda^2\,(x+y)\,e^{-\lambda(x+y)} \cdot \frac{1}{x+y} = (\lambda\,e^{-x}) \cdot (\lambda\,e^{-y}), \qquad x, y > 0.$$

3. Caso $n > 2$

Supongamos ahora que se tienen n variables aleatorias $Z \sim \gamma(n,\lambda)$ y $V_1, V_2, \ldots, V_{n-1} \sim \mathcal{U}(0,1)$ (ordenadas), y sean $V_0 = 0$ y $V_n = 1$ y $n > 2$. Afirmamos que las variables aleatorias dadas por

$$X_i = Z\,(V_i - V_{i-1}), \quad 1 \le i \le n \tag{1}$$

son exponenciales de parámetro λ e independientes.

En efecto, las expresiones dadas en (1) determinan la transformación $H : A \times (0, \infty) \mapsto (0, \infty)^n$, con $A = \{(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}) \mid 0 < v_1 < v_2 < \ldots < v_{n-1} < 1\}$, dada por

$$H(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, z) = (v_1 z, (v_2 - v_1)z, \ldots, (v_{n-1} - v_{n-2})z, z - v_{n-1}z)$$

con inversa

$$H^{-1}(x_1, x_2, \quad \ldots, \quad x_n) = \left(\frac{x_1}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}, \frac{x_1 + x_2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}, \ldots, \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}, x_1 + x_2 + \cdots + x_n \right)$$

De esta manera, la distribución conjunta de X_1, X_2, …, X_n viene dada por

$$f_{X_1, \ldots, X_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{V_1, \ldots, V_{n-1}, Z}(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, z) \cdot J,$$

donde $H(v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, z) = (x_1, \ldots, x_n)$ y J es el jacobiano de H^{-1}. En este caso resulta más simple determinar el jacobiano de H y luego calcular su inversa, por lo cual calcularemos a continuación las derivadas parciales respecto de v_j, $1 \leq j \leq n - 1$, y respecto de z, de cada una de las variables x_i tomadas como funciones de $v_1, \ldots, v_{n-1}, z$.

Notemos que

$$\frac{\partial}{\partial v_j}(x_i)(v_1, \ldots, v_{n-1}, z) = \begin{cases} z & i = j \\ -z & i = j - 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

para $1 \leq i \leq n - 1$,

$$\frac{\partial}{\partial v_j}(x_n)(v_1, \ldots, v_{n-1}, z) = \begin{cases} -z & j = n - 1 \\ 1 - v_{n-1} & j = n \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial z}(x_i)(v_1, \ldots, v_{n-1}, z) = \begin{cases} v_1 & i = 1 \\ (v_i - v_{i-1}) & 2 \leq i \leq n - 1 \\ 1 - v_{n-1} & i = n \end{cases}$$

Por lo tanto la matriz del jacobiano de H tiene la forma

$$\begin{pmatrix} z & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & v_1 \\ -z & z & 0 & 0 & \ldots & 0 & v_2 - v_1 \\ 0 & -z & z & 0 & \ldots & 0 & v_3 - v_2 \\ 0 & 0 & -z & z & \ldots & 0 & v_4 - v_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -z & 1 - v_{n-1} \end{pmatrix}$$

Para calcular el determinante de esta matriz, recordemos que si a una fila le sumamos un múltiplo de otra el determinante no varía. Entonces, si a la segunda fila le sumamos la primera, a la tercera fila le sumamos la primera más la segunda, y así siguiendo hasta que a la última le sumamos la suma de las $n-1$ primeras, la matriz resulta de la forma triangular superior:

$$\begin{pmatrix} z & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & v_1 \\ 0 & z & 0 & 0 & \dots & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & z & 0 & \dots & 0 & v_3 \\ 0 & 0 & 0 & z & \dots & 0 & v_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto su determinante es z^{n-1}. Finalmente, calculamos la densidad conjunta de las variables X_i, recordando que la densidad de Z viene dada por

$$f_Z(z) = \frac{\lambda(\lambda z)^{n-1}\, e^{-\lambda z}}{(n-1)!}, \qquad z > 0$$

y que la densidad conjunta de $n-1$ uniformes ordenadas tiene la expresión

$$f_{V_1,\ldots,V_{n-1}}(v_1,\ldots,v_{n-1}) = (n-1)!, \qquad 0 < v_1 < v_2 < \ldots < v_n < 1.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(x_1,\ldots,x_n) &= \frac{\lambda(\lambda z)^{n-1}\, e^{-\lambda z}}{(n-1)!} \cdot (n-1)! \cdot \frac{1}{z^{n-1}} \\ &= \lambda^n\, e^{-\lambda(x_1+x_2+\cdots+x_n)} = (\lambda e^{-\lambda x_1}) \cdot (\lambda e^{-\lambda x_2}) \cdot \cdots \cdot (\lambda e^{-\lambda x_n}) \end{aligned}$$

Referencias

[1] Ross, Sheldon. *Simulation*. Academic Press. (2002)