Problem 1: czy istnieje „zawartość”: addytywna, suw-odporna $m: \mathfrak{P}(\mathbb{R}^p) \to [0,\infty]$, że $m([0,1]^p) = 1$? Nie (dla $p \geq 3$: Hausdorff, 1914) **1.1**
lub tak (dla $p < 3$: Banach, 1914, ale nie jest jednoznaczna). **Problem 2**: czy istnieje „miara”, σ-addytywna zawartość? Nie (Vitali, 1905). Jeżeli $p \geq 1$, zaś $A, B \subseteq \mathbb{R}^p$ mają niepuste wnętrza, to istnieje przeliczalnie wiele $C_k \subseteq \mathbb{R}^p$ i przesunięć $\beta_k: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$, że $A = \coprod C_k$ i $B = \coprod \beta_k(C_k)$. Dla $p \geq 3$ i ograniczonych A, B wystarczy skończenie wiele C_k. Khm: $\limsup A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, $\liminf A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$.

Ciauo: **ring** (podpierścień $(\mathfrak{P}(X), \triangle, \cap)$) zawierający X. Zbiór $R \subseteq \mathfrak{P}(X)$ jest ringiem $\Leftrightarrow$ zawiera $\varnothing$ i jest zamknięty na $(\cap, \triangle)$, $(\triangle, \cup)$ **1.3**
ew. $(\cup, \smallsetminus)$, σ-ringiem: na różnice i przeliczalne sumy, $(\sigma\text{-})$ciauem: dopełnienia i (przeliczalne) sumy oraz zawiera X.

Przekrój ringów (ciau, σ-ciau) nad X zawierających ustalony zbiór jest ringiem $(\dots)$. **Borelowskie** σ-ciauo $\mathfrak{B}$: generowane przez otwarte **1.4**
zbiory w X. Jeśli X jest $\mathcal{T}_2$, przeliczalną unią zwartych, to zamiast otwartych można wziąć zwarte. Rodzina **d**-stabilna (**v**-): jest zamknętna na skończone krojenie (unie). Każda z: $\mathfrak{O}^p$ (otwarte), $\mathfrak{C}^p$ (domknięte), $\mathfrak{K}^p$ (zwarte), $\mathfrak{I}^p$ ($\mathbb{Q}^p$-osiościany) jest d-stabilnym generatorem $\mathfrak{B}^p(\mathbb{R}^p)$. Dla $f: X \to Y$ i $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(Y)$ mamy $\sigma(f^{-1}[\mathcal{A}]) = f^{-1}[\sigma(\mathcal{A})]$. Uwaga do 2.7: $\mathfrak{F}^p$ zawiera rozłączne sumy elementów $\mathfrak{I}^p$.

Półring nad X to d-stabilny $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ zawierający $\varnothing$, że różnica każdych $A, B \in \mathcal{H}$ jest rozłączną unią pewnych $C_1, \dots, C_n \in \mathcal{H}$ (1950, **1.5**
Neumann). Jeśli $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ to półringi nad X, Y, to $\mathcal{H} * \mathcal{K} := \{A \times B : A \in \mathcal{H}, B \in \mathcal{K}\}$ jest półringiem nad $X \times Y$, zatem $\mathfrak{I}^p$, $\mathfrak{I}^p_{\mathbb{Q}}$ są półringami nad $\mathbb{R}^p$. Hahn (1932): półring $\mathcal{H}$ nad X generuje pierścień $\mathcal{R} := \{\coprod_{k=1}^{n} A_k : A_k \in \mathcal{H}\}$.

Klasa monotoniczna: $\mathcal{M} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ zamknięty na granice monotonicznych ciągów. Monotoniczny ring $\Rightarrow$ σ-ring $\Rightarrow$ mono-klasa. Niechaj **1.6**
rodzina $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ generuje mono-klasę $\mathcal{M}$, ring $\mathcal{R}$, σ-ring $\mathcal{S}$, ciauo $\mathcal{A}$ i σ-ciauo $\mathcal{B}$. Wtedy $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B} \supseteq \mathcal{A} \supseteq \mathcal{R}$. Zbiór zamknięty na dopełnianie i rozłączne unie to λ-**układ** $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ (**Dynkina**, 1959). Rodzina $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ jest mono-klasą zawierającą X, zamkniętą na „odejmowanie nadzbiorów” $\Leftrightarrow$ jest λ-układem. Układ Dynkina jest σ-ciauem $\Leftrightarrow$ d-stabilny. Jeśli $\mathcal{E}$ generuje λ-układ $\mathcal{D}$, to $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{D} \subseteq \mathcal{B}$. Dla d-stabilnych $\mathcal{E}$, $\mathcal{D} = \mathcal{B}$; ale λ-układ z otwartych kul w ośrodkowej, ∞-wymiarowej p. Hilberta nie wyczerpuje borelowskich.

Zawartość (na półringu): $\mu: \mathcal{H} \to \mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, gdy $\mu(\varnothing) = 0$, $\mu \geq 0$ i $\mu(\coprod_{k \leq n} A_k) = \sum_{k \leq n} \mu(A_k)$. Dla ringów wystarczy test $n = 2$. **2.1**
Jest podaddytywna na ringach: $\mu(\bigcup_{k \leq n} A_k) \leq \sum_{k \leq n} \mu(A_k)$ i monotoniczna na półringach: $A \subseteq B$ pociąga $\mu(A) \leq \mu(B)$. **Przedmiara** jest σ-addytywną (∞ zamiast n) zawartością. **Miara**: przedmiara na σ-ciele. Zawartość μ przedłuża się jednoznacznie z półringu na ring wzorem $\nu(\coprod_{k \leq n} A_k) = \sum_{k \leq n} \mu(A_k)$, przedmiara ν musi pochodzić od przedmiary μ. Własności zawartości μ na ringu: $B \subseteq A$, $\mu(B) \neq \infty$ pociąga $\mu(A \smallsetminus B) = \mu(A) - \mu(B)$. Dalej, $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B) + \mu(A \cap B)$, $\mu(\bigcup_{k \geq 1} A_k) \leq \sum_{k \geq 1} \mu(A_k)$. Zbiór μ-**zerowy**: o zawartości 0. Dla zawartości μ na ringu: μ prämiarą $\Leftrightarrow$ $A_n \uparrow A$ pociąga $\mu(A_n) \uparrow \mu(A) \Rightarrow \mu(A_1) \neq \infty$, $A_n \downarrow A$ pociąga $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$ $\Leftrightarrow$ to samo dla $A = \varnothing$. („Ciągłość z dołu” $\Rightarrow$ „ciągłość z góry”). Jeśli μ jest skończona, to wszystkie warunki są równoważne, a $\cap$, $\cup$, $\smallsetminus$ i $\triangle$ stają się odwzorowaniami ciągłymi $\mathcal{R} \times \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ przy topologii od półmetryki $\delta(A, B) = \mu(A \triangle B)$. Jeśli $\mu: \mathfrak{P}(X) \to \{0, 1\}$ jest zawartością, to $\mu^{-1}(1)$ jest ultrafiltrem. Funkcja μ jest miarą $\Leftrightarrow$ jeśli $\mu(A_1) = \mu(A_2) = \ldots = 1$, to $\bigcap_{n \geq 1} A_n \neq \varnothing$.

$\mathcal{I} = \{(a, b] : a \leq b\}$. Dla rosnącej $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mu_F\,(a, b] = F(b) - F(a)$ jest skończoną zawartością (**Stieltjesa**); $\mu_F = \mu_G \Leftrightarrow F - G$ stała. **2.2**
Jeśli $\mu: \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ jest skończoną zawartością, to $\mu = \mu_F$ ($F(x) = \mu\,(0, x]$ dla $x \geq 0$, $-\mu\,(x, 0]$ dla $x < 0$). Prawo-ciągła $F \Leftrightarrow \mu_F$ to przedmiara (**Lebesgue’a-Stieltjesa**). Prawo-ciągła rosnąca $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest sumą prawo-ciągłej rosnącej **funkcji skoku** G oraz ciągłej rosnącej H, rozkład jest jednoznaczny z dokładnością do stałej: $G(x) = \alpha + \sum_{y \in A \cap (0,x]} p(y)$ dla $x \geq 0$, $\alpha - \sum_{y \in A \cap [x,0)} p(y)$ dla $x < 0$, gdzie $p: A \to \mathbb{R}_+$ jest funkcją z przeliczalnego zbioru, która spełnia $\sum_{y \in A \cap [-n,n]} p(y) < \infty$, $n \in \mathbb{N}$.

Najważniejsza zawartość na $\mathfrak{I}^p$ to Le-przedmiara $\lambda^p: (a, b] \mapsto \prod_{j=1}^{p} (b_j - a_j)$. Istnieje bijekcja między skończonymi zawartościami na $\mathfrak{I}^p$ **2.3**
i klasami „rosnących” funkcji $F: \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, jednak przytoczenie stosownych definicji spowodowałoby zbyt wiele zamętu.

Zew-miara (Carathéodory, 1914): monotoniczna funkcja $\eta: \mathfrak{P}(X) \to \mathbb{R}_\infty$, że $\eta(\varnothing) = 0$ i $\eta(\bigcup_{n \geq 1} A_n) \leq \sum_{n \geq 1} \eta(A_n)$. Rodzina wszystkich **2.4**
η-**mierzalnych** (tych $A \subseteq X$, że $\eta(Q) \geq \eta(Q \cap A) + \eta(Q \smallsetminus A)$ niezależnie od $Q \subseteq X$) jest σ-ciauem, do którego obcięta η staje się miarą. Jeśli μ jest zawartością na półringu $\mathcal{H}$, to $\eta(A) = \inf\{\sum_{n \geq 1} \mu(A_n) : A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n, A_n \in \mathcal{H}\}$ jest zew-miarą; wszystko z $\mathcal{H}$ jest η-mierzalne. Gdy zaczynamy od przedmiary μ, dostajemy jej przedłużenie (η), w przeciwnym razie $\eta(A) < \mu(A)$ dla pewnego $A \in \mathcal{H}$. Aplikacja tego faktu do Le-przedmiary $\lambda^p: \mathfrak{I}^p \to \mathbb{R}$ i zew-Le-miary $\eta^p: \mathfrak{P}(\mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}_\infty$ daje σ-ciauo $\mathfrak{L}^p$ (η^p-mierzalnych), **Le-mierzalnych**. Mamy $\mathfrak{B} \subsetneq \mathfrak{L} \subsetneq \mathfrak{P}(\mathbb{R}^p)$, od teraz będziemy pisać „$\lambda^p: \mathfrak{L}^p \to \mathbb{R}_\infty$, chociaż jest to śliskie. Obcięcie λ^p do $\mathfrak{B}^p$ to Le-Bo-miara. Podobnie z Le-St-przedmiarą.

Zawartość μ nad X jest σ-**skończona**: istnieją E_n, że $\mu(E_n) < \infty$ i $\bigcup_{n \geq 1} E_n = X$ ($\bigcup$ można zastąpić $\coprod$). Dwie miary nad X zgodne na **2.5**
d-stabilnym generatorze $\mathcal{E}$ ich dziedziny, z którego można wybrać ciąg E_n, że $\bigcup_n E_n = X$ i $\mu(E_n) = \nu(E_n) < \infty$, są sobie równe. Półringi są d-stabilne, więc σ-skończone przedmiary mają jednoznaczne przedłużenia do miar (Hopf, 1937). Jeśli miary μ, ν na $\sigma(\mathcal{H})$ ($\mathcal{H}$ jest półringiem) spełniają $\mu(A) \leq \nu(A)$ dla $A \in \mathcal{H}$ i obcięcie ν do $\mathcal{H}$ jest σ-skończone, to $\mu \leq \nu$. Miara λ^2 obcięta do $(\mathfrak{B} \times \{\mathbb{R}\})$ $\mathfrak{B}^2$ (nie!) jest σ-skończona.

P. zupełna: $(X, \mathcal{A}, \mu)$, gdy podzbiory μ-zerowych są mierzalne. **Uzupełnienie**: $\mathcal{A}' = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N\ \mu\text{-zerowy}\}$, $\mu'(A \cup N) = \mu(A)$, **2.6**
przedłużenie jest minimalne (na $\mathcal{A}'$ nie ma innych zawartości!). Przedmiara μ (σ-skończona) ma dokładnie jedno przedłużenie do miary na $\mathcal{A}_\eta$, η to zew-μ-miara. Przykład: Le-(St-)przedmiara albo Le-Bo-miara. **Atom**: zbiór A, że $\mu(A) > 0$ oraz $B \subseteq A$ pociąga $\mu(B)\mu(A \smallsetminus B) = 0$. Miara **czysto atomowa**: σ-skończona, istnieje ciąg atomów A_n, że dopełnienie $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ jest μ-zerowe. Każda σ-skończona μ (miara) ma ciąg atomów A_n, że $\nu(A) := \mu(A \smallsetminus \coprod_n A_n)$ jest bezatomowa, $\rho(A) = \sum_{n \geq 1} \mu(A \cap A_n)$ czysto atomowa i $\mu = \nu + \rho$, jednoznacznie.

Tw. przybliżające: $A \subseteq \mathbb{R}^p$ jest Le-mierzalny $\Leftrightarrow$ istnieją $U \subseteq_o \mathbb{R}^p$ (F_δ), $F \subseteq^a \mathbb{R}^p$ (G_δ), $F \subset A \subset U$, że $\lambda^p(U \smallsetminus F) < \varepsilon$. **Tw. Steinhausa** **2.7**
(1920): $A - A$ zawiera otoczenie zera dla $A \in \mathfrak{L}^p$ dodatniej miary. $\lambda^p(A)$ to $\inf\{\lambda^p(U)\}$, $\sup\{\lambda^p(F)\}$, $\sup\{\lambda^p(K)\}$ („otwarte, domknięte, zwarte”). Jeśli $A \subseteq \mathbb{R}^p$ jest wypukły, to ∂A Le-zerowy, zaś A Le-mierzalny (niekoniecznie Bo-mierzalny). Ograniczony, wypukły $A \subseteq \mathbb{R}^p$ jest Jo-mierzalny (definicja: ograniczony, $\sup\{\lambda^p(M) : M \in \mathfrak{F}^p, M \subset A\} = \inf\{\lambda^p(N) : N \in \mathfrak{F}^p, N \supset A\}$).

Zew-miara $\eta: \mathfrak{P}(X) \to \mathbb{R}_\infty$ jest **metryczną zew-miarą**, gdy $\varnothing \neq A, B \subseteq X$ z $d(A, B) > 0$ pociąga $\eta(A \cup B) = \eta(A) + \eta(B)$. Przykładowo, **2.9.1**
jeśli funkcja $\rho: (\mathcal{C} \subseteq \mathfrak{P}(X)) \to [0, \infty]$ spełnia $\rho(\varnothing) = 0$, to $\sup_{\delta > 0} \eta_\delta$ jest metro-miarą: $\eta_\delta(A) = \inf\{\sum_{n \geq 1} \rho(A_n) : d(A_n) \leq \delta, A \subseteq \bigcup_{n \geq 1} A_n\}$. Funkcja η_δ jest tylko zew-miarą. Zew-miara $\eta: \mathfrak{P}(X) \to \mathbb{R}_\infty$ spełnia $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathcal{A}_\eta$ $\Leftrightarrow$ η jest metro-miarą. Dla $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ oraz $\mathcal{C}$ złożonego z ograniczonych podzbiorów $\mathbb{R}$, $\rho = d$, η_δ to zew-Le-miara.

Ta sama konstrukcja dla dowolnej metrycznej X, ustalonego $\alpha > 0$ i $\rho(A) = d(A)^\alpha$ daje zew-miary $h_{\alpha,\delta}$ i **zew-Hf-miarę** $h_\alpha = \sup_{\delta > 0} h_{\alpha,\delta}$, **2.9.2**
przy czym wzięcie $\alpha = 0$ to dokładnie miara licząca: $h_{\alpha,\delta}(A) = \inf\{\sum_{n \geq 1} \rho(A_n) : A \subseteq \bigcup_n A_n, d(A_n) \leq \delta\}$. Suw-odporna.

Jeżeli $h_\alpha(A) < \infty$ i $\beta > \alpha$ dla $A \subseteq X$, to $h_\beta(A) = 0$, więc istnieje $\delta \geq 0$, że $h_a(A) = 0$ dla $a > \delta$ i (∞ dla $a < \delta$); **wymiar Hausdorffa**. Dla $A \subseteq \mathbb{R}^p$, $\delta \leq p$ (jeśli $\operatorname{int} A \neq \varnothing$, to $\delta = p$). Dla „1-1” krzywej prostowalnej, $\delta = 1$.

Krzywa **prostowalna** : skończonej **długości**, $L(\gamma) := \sup\{\sum_{k \leq n} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$. Dla prostych (injekcje), **2.9.3**
długość to zew-Hf-miara wymiaru $\alpha = 1$. Ślad prostowalnej jest λ^p-zerowy (Jordan), ale istnieją ciągłe $[a, b] \to \mathbb{R}^2$ o obrazie dodatniej miary (krzywa Peano). Hahn, Mazurkiewicz: $M \subseteq \mathbb{R}^p$ jest ciągłym obrazem odcinka $\Leftrightarrow$ M jest zwarty, spójny i lokalnie spójny.

P. mierzalna: $(X,\mathcal{A})$. Funkcja $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-**mierzalna**: $f\colon (X,\mathcal{A})\to(Y,\mathcal{B})$, gdy $f^{-1}(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{A}$ (wystarczy inkluzja dla generatorów), **rzeczywista**: 3.1
Le-Bo mierzalna $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Ciągła ⇒ borelowska, choć obraz borelowskiego nie musi taki być (analityczne zbiory Suslina)! Jeśli μ jest miarą na
$\mathcal{A}$, zaś $f\colon (X,\mathcal{A})\to(Y,\mathcal{B})$ jest mierzalna, to $B\mapsto\mu(f^{-1}(B))$ jest **miarą przeszczepioną** na $\mathcal{B}$ (może nie być σ-skończona, gdy μ jest).

Le-miara i Le-Bo-miara (obcięcie Le- do borelowskich) są niezmiennicze na izometrie (jedynymi unormowanymi). Afiniczna bijekcja jest 3.2
$\mathfrak{B}^p$-$\mathfrak{B}^p$- i $\mathfrak{L}^p$-$\mathfrak{L}^p$-mierzalna. Miara przeszczepiona różni co najwyżej (multiplikatywną) stałą.

Miara λ^p ma dużą wadę: mierzy niewiele zbiorów. **Ośrodkowa** p. miarowa: z ciągiem mierzalnych C_n, że mierzalnym A i $\varepsilon>0$ odpowiada pewne n, dla którego $\mu(A\triangle C_n)<\varepsilon$. **Ciężar**: najmniejszy kardynał mierzący moc zbioru indeksującego C. Kakutani (1944): przedłużenie λ ciężaru $\exp\mathfrak{c}$. Później: to samo, suw-odporne (ciężaru $\mathfrak{c}$) i izo-odporne (znowu ciężaru $\exp\mathfrak{c}$). Sierpiński (1936): czy maksymalne izo-odporne przedłużenie λ^p do miary istnieje? Ciesielski, Pelc (1985): nie. Istnieje suw-odporna miara na $\mathfrak{B}^1$, która nie jest izo-odporna!

Tw. Hausdorffa (1919): dla zew-Hf-miary h_p w $\mathbb{R}^p$ i zew-Le-miary η^p istnieje $\kappa_p>0$, że $\eta^p=\kappa_p h_p$.

Czy na ringu $\mathfrak{L}^p_b$ (b: ograniczone) istnieje unormowana zawartość μ niezmiennicza na izometrie, (analogicznie: sfera $S^{p-1}\subseteq\mathbb{R}^p$ i obroty), która nie jest Le-miarą (Ruziewicz)? Tak dla $\mathbb{R},\mathbb{R}^2,S^1$ (Banach), nie dla $p\ge3$ na S^{p-1} (Margulis dla $p\ge5$ w 1980, Drinfeld dla $p=3,4$ w 1984 teorią Jacqueta-Langlanda automorficznych form na GL_2); nie dla $p\ge3$ i $\mathbb{R}^p$ (Margulis, 1982).

Tw. Vitaliego (1905): selektory rodziny $\mathbb{R}^p/\mathbb{Q}^p$ nie są Le-mierzalne. Może źle dobrano dziedzinę λ^p? Jeśli $\mu\colon A\to\mathbb{R}_\infty$ jest niezmienniczą 3.3
na G-przesunięcia ($G\le\mathbb{R}^p$: przeliczalny i gęsty) miarą nad $\mathbb{R}^p$, gdzie $\mathfrak{L}^p\subseteq\mathcal{A}$, która obcięta do $\mathfrak{L}^p$ jest λ^p, to żaden selektor $\mathbb{R}^p/G$ nie jest mierzalny (i nie ma mierzalnego podzbioru dodatniej miary). Każdy $A\subseteq\mathbb{R}^p$, że $\eta^p(A)>0$ zawiera nie-Le-mierzalny podzbiór. Solovay, 1970: jeśli istnieje nieosiągalny kardynał, to wszystkie podzbiory $\mathbb{R}^p$ są mierzalne. Baza Hamela B dla $\mathbb{Q}$-liniowej $\mathbb{R}$ nie może być borelowska. Jeśli jest Le-mierzalna, to miary zero. Istnieje $B\subseteq\mathbb{R}$ (zbiór Bernsteina), że dla niestałych rosnących $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, B nie jest „μ_F”-mierzalny.

Jeśli f_i są numeryczne ($X\to\mathbb{R}_\infty$) i mierzalne, to ich sup, inf, lim inf, lim sup, liniowe kombinacje, produkty (dwóch czynników) też. 3.4
Funkcja $X\to(\mathbb{R}^p,\mathfrak{B}^p)$ jest mierzalna ⇔ składowe są. Niech $f^+=\max(f,0)$, $f^-=\max(-f,0)$. Numeryczna f mierzalna ⇔ f^+, f^- też. Mierzalna ⇔ punktowa granica **schodkowych**, o skończenie wielu wartościach (mierzalne ograniczone: granice jednostajne). Rodzina $\mathfrak{B}$ ma minimalny generator, przedziały 2-adyczne. Monotoniczna $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ⇒ borelowska.

Początkowe σ-ciauo na X względem rodziny $f_i\colon X\to(Y_i,\mathcal{B}_i)$: najmniejsze, z którym f_i jeszcze są mierzalne, $\mathcal{A}=\sigma(\bigcup_i f_i^{-1}(\mathcal{B}_i))$. Jeśli 3.5
$X=\prod_i Y_i$, zaś f_i to rzut na i-tą oś, to $\mathcal{A}=:\bigotimes_i\mathcal{B}_i$ jest produktowym σ-ciauem. Generator σ-ciaua początkowego to $\bigcup_i f_i^{-1}(\mathcal{E}_i)$, gdzie każdy z $\mathcal{E}_i$ generuje Y_i. Jeśli p. topologiczna (X,τ) jest produktem (X_i,τ_i), to $\mathfrak{B}(X)\supseteq\bigotimes_i\mathfrak{B}(X_i)$ (przy $\aleph_0$ wielu 1-przeliczalnych czynnikach lub X: Lindelöfa mamy nawet =). Równości nie ma dla X klasy $\mathcal{T}_2$ mocy większej niż $\mathfrak{c}$ i $X_1=X_2=X$. Poza tym, $\mathfrak{B}^p=\mathfrak{B}^1\otimes\ldots\otimes\mathfrak{B}^1$.

Dla $\alpha_k\ge0$ mamy liniową i monotoniczną μ-całkę (khm-1) z funkcji schodkowej. Definicja przedłuża się na mierzalne $f\ge0$ przez khm-2, 4.1
gdzie schodkowe f_n dążą do f od dołu. Całka z $f\ge0$ to zero ⇔ $\{f>0\}$ jest μ-zerowy. **Tw. o monotonicznej zbieżności**: dla rosnącego ciągu 4.2
mierzalnych numerycznych $f_n\ge0$ mamy khm-2 (Levi, 1906). Wniosek: $\int_X\sum_n f_n\,\mathrm{d}\mu=\sum_n\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu$ dla mierzalnych numerycznych $f_n\ge0$. **Miara z gęstością**: $f\odot\mu$ dla mierzalnej numerycznej $f\ge0$, całka z f nad A względem μ. Jest ciągła: $\mu(A)=0$ pociąga $(f\odot\mu)(A)=0$. Dla każdych mierzalnych, numerycznych $f,g\ge0$ mamy jeszcze khm-3. Pułapka: istnieje bijekcja $r\colon\mathbb{N}\to\mathbb{Q}$, że $f=\sum_n\chi(r(n),r(n)+1:n^3)$ ma skończoną całkę nad $\mathbb{R}$ (z λ obciętą do $\mathfrak{B}$), $\lambda\{f=\infty\}=0$, ale całka z f^2 nad przedziałami jest nieskończona! Istnieje zatem σ-skończona miara ν na $\mathfrak{B}$, że $\nu(\{a\})=0$, ale $\nu[a,b]=\infty$ dla $a<b$.

$$\int_X\sum_{k=1}^n\alpha_k\chi_{A(k)}\,\mathrm{d}\mu:=\sum_{k=1}^n\alpha_k\mu(A_k)\bullet\int_X\lim_{n\to\infty}f_n\,\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu\bullet\int_X f\,\mathrm{d}(g\odot\mu)=\int_X fg\,\mathrm{d}\mu\qquad\Big|\int_X f\,\mathrm{d}\mu\Big|\le\int_X|f|\,\mathrm{d}\mu$$

Funkcja $f\colon X\to\mathbb{R}_\infty$ jest μ-**całkowalna**: jest mierzalna, całki z f^+, f^- są skończone, ich różnica to dokładnie całka z f. **Quasicałkowalna**: 4.3
przynajmniej jedna z nich jest skończona. Całkowalność f ⇔ istnienie całkowalnej majoranty $g\ge|f|$ ⇒ khm-4 wyżej. Przestrzenie $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^p)$ oraz $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^p)$ leżą gęsto w $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p,\mathfrak{L}^p,\lambda^p)$. Odwzorowanie $\mathcal{L}^1\to\mathbb{R}$, $f\mapsto\int_X f\,\mathrm{d}\mu$, jest ciągłą formą liniową.

Prawie wszędzie na X: poza pewnym μ-zerowym $N\subseteq X$. Jeśli $f,g\colon X\to\mathbb{R}_\infty$ są quasicałkowalne i $f\le g$ p.w., to nierówność zachodzi 4.4
też dla całek. Jeśli f,g są mierzalne, $f\le g$ p.w. i f jest całkowalna, to g jest quasicałkowalna. Jeśli całkowalne $f,g\colon X\to\mathbb{R}_\infty$ są takie, że całki z f są niewiększe od całek z g nad każdym mierzalnym zbiorem, to $f\le g$ p.w. (dla σ-skończonej μ wystarczą quasicałkowalne).

Lemat Fatou (1906): dla ciągu mierzalnych, numerycznych $f_n\ge0$ mamy khm-1. **Tw. o zbieżności zmajoryzowanej**: jeśli mierzalne funkcje 4.5
$f,f_n\colon X\to\mathbb{R}_\infty$ spełniają $\lim_n f_n=f$ μ-p.w. i $|f_n|\le g$ μ-p.w. (g: całkowalna), to f, f_n są całkowalne i khm-2+3 (Lebesgue, 1910). Pochodna różniczkowalnej $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ jest Le-całkowalna ($f(b)-f(a)$), ale niekoniecznie Ri-całkowalna.

$$\int_X\liminf_{n\to\infty}f_n\,\mathrm{d}\mu\le\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\mathrm{d}\mu\bullet\lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,\mathrm{d}\mu=\int_X f\,\mathrm{d}\mu\bullet\lim_{n\to\infty}\int_X|f_n-f|\,\mathrm{d}\mu=0$$

Ograniczona $f\colon([a,b]\subseteq\mathbb{R}^p)\to\mathbb{R}$ jest Ri-całkowalna ⇔ nieciągłości tworzą λ^p-zerowy zbiór ⇒ Ri-całka jest równa Le-całce. **Tw. Younga** 4.6
(1914): $f,g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ (f ograniczona, g rosnąca i prawo-ciągła), nieciągłości f są zbiorem λ_g-zerowym ⇔ Ri-St-całka $f(x)\,\mathrm{d}g(x)$ nad $[a,b]$ istnieje. Ri-całkowalna nad zwartymi przedziałami $f\colon I\to\mathbb{R}$ jest Le-całkowalna ⇔ $|f|$ jest Ri-całkowalna (wartości całek się pokrywają), patrz: $\sin x/x$. ($f\colon[a,b]\to[c,d]$, $g\colon[c,d]\to\mathbb{R}$): jeśli g jest ciągła, zaś f Ri-całkowalna, to $g\circ f$ jest Ri-całkowalna, ale niekoniecznie, gdy g jest tylko Ri-całkowalna. Jeśli $g\circ f$ jest Ri-całkowalna dla każdej ciągłej ($\mathcal{C}^\infty$) f, to g jest ciągła. Ri-całkowalność nie pociąga Bo-mierzalności!

Istnieje miara ρ na $X\times Y$ z σ-ciauem $\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}=\sigma(\{A\times B:A\in\mathcal{A},B\in\mathcal{B}\})$, że $\rho(A\times B)=\mu(A)\nu(B)$. Jeśli μ,ν są σ-skończone, to ρ też 5.1
i jest jednoznaczna: **miara produktowa** $M\mapsto\int_X\nu(M_x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_Y\mu(M^y)\,\mathrm{d}\nu(y)$, gdzie $M_a\subseteq Y$, $M^b\subseteq X$ to cięcia. $\mathfrak{L}^p\otimes\mathfrak{L}^q\subsetneq\mathfrak{L}^{p+q}$, ale $\mathfrak{B}^p\otimes\mathfrak{B}^q=\mathfrak{B}^{p+q}$. Sierpiński: istnieje $A\subseteq[0,1]^2$, $A\notin\mathfrak{L}^2$, którego każde cięcie ma co najwyżej jeden punkt. Dla σ-skończonych miar μ,ν i $M,N\in\mathcal{A}\otimes\mathcal{B}$, że $\nu(M_x)=\nu(N_x)$ dla p.w. $x\in X$, mamy $(\mu\otimes\nu)(M)=(\mu\otimes\nu)(N)$ (**reguła Cavalieriego**). Przez indukcję mamy wyższe miary produktowe. Z **tw. pokryciowego** Vitaliego (jeśli $U\subseteq_o\mathbb{R}^p$ ma skończoną λ^p-miarę i $\delta>0$, to istnieje ciąg rozłącznych kul domkniętych $K_n\subseteq U$ średnicy $<\delta$, że $\lambda^p(U\setminus\bigcup_{n=1}^\infty K_n)=0$) wynika, że stała z tw. Hausdorffa (3.2) to $[\pi^{1/2}/2]^p/\Gamma(1+p/2)$.

Tw. Fubiniego (1907): dla σ-skończonych miar μ,ν i mierzalnej $f\colon X\times Y\to[0,\infty]$ mamy khm-1. Pułapka Fichtenholza: istnieje funkcja 5.2
$f\colon[0,1]^2\to\mathbb{R}$, która nie jest λ^2-całkowalna, chociaż jej iterowane całki po osiokątach o mierzalnych bokach istnieją.

$$\int_{X\times Y}f\,\mathrm{d}(\mu\otimes\nu)=\int_X\int_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\,\mathrm{d}\mu(x)=\int_Y\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\,\mathrm{d}\nu(y).$$

Iloraz zbioru mierzalnych $f\colon X\to\mathbb{R}$, że $N_p(f)<\infty$ przez $\{f=0\ \mu\text{-p.w.}\}$ to L^p, zupełna p. liniowa (**tw. Riesza-Fischera**, 1907), zaś dla 6.2
$p\ge1$: nawet Banacha. Funkcja N_p jest normą dla $p\ge1$, dla $p<1$, jej p-ta potęga wyznacza metrykę. Dla $0<p<q\le\infty$ i $\mu(X)<\infty$, $\mathcal{L}^q\subset\mathcal{L}^p$, a zbieżność w $\mathcal{L}^q$ pociąga zbieżność w $\mathcal{L}^p$ (do tej samej granicy, „$N(f-f_n)\to0$”)

$$N_p(f)=\Big(\int_X|f|^p\,\mathrm{d}\mu\Big)^{1/p}\bullet N_\infty(f):=\inf\{\alpha\in[0,\infty]:|f|\le\alpha\ \mu\text{-p.w.}\}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in X}|f(x)|$$

Dla każdego $\varepsilon > 0$: $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{n+k} - f| \geq \varepsilon\}) \to 0 \Rightarrow f_n$ zbiega μ-p.w. do $f \Leftrightarrow$ khm-1 dla każdego $\varepsilon > 0 \Rightarrow$ khm-2 dla każdego ε (funkcje $f, f_n\colon X \to \mathbb{R}$ i zbiór A mierzalne, $\mu(A) < \infty$). **Tw. Jegorowa** (1911): jeśli $\mu(X) < \infty$ i ciąg mierzalnych $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ zbiega μ-p.w. do f, także mierzalnej, to zbiega **prawie jednostajnie** (każdy $\delta > 0$ ma zbiór A, że $\mu(A) < \delta$ i f_n jedno-zbiega na $X \setminus A$). **6.3**

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{n+k} - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0 \bullet \lim_{n\to\infty} \mu\left(A \cap \bigcup_{k=1}^{\infty}\{|f_{n+k} - f| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

Zbieżności: 1: jednostajnie, 2: prawie jednostajnie, 3: p.w. jednostajnie (w $\mathcal{L}^\infty$), 4: w $\mathcal{L}^p$, 5: wg miary ($\varepsilon > 0$ pociąga $\mu\{|f_n - f| \geq \varepsilon\} \to 0$), 6: lokalnie wg miary (wg miary na każdym zbiorze A, że $\mu(A) < \infty$), 7: punktowo 8: μ-p.w. Mamy: $4 \Rightarrow 5 \Rightarrow 6 \Leftarrow 8 \Leftarrow 7 \Leftarrow 1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 5, 8$, a gdy $\mu(X) < \infty$, to także $3 \Rightarrow 4$, $6 \Rightarrow 5$ i $8 \Rightarrow 2$. $4 \Rightarrow 5$ (Riesz, 1907), „$5 \Rightarrow 6 \Rightarrow 5$" (Lebesgue), „$2 \Rightarrow 8 \Rightarrow 2$" (Jegorow). Jest tego więcej, np. zbieżność $f_n \in \mathcal{L}^p$ (o wspólnej majorancie g) do f wg 8 pociąga 4. $5 \Leftrightarrow$ każdy podciąg ma podciąg 2 (dla σ-skończonej μ: 6, 2). **6.4**

Tw. Pratta (1960): niech $f_n \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ zbiega lokalnie wg miary do mierzalnej $f\colon X \to \mathbb{R}$, że $\{f \neq 0\}$ ma σ-skończoną miarę. Gdy istnieją $g_n, g, h_n, h \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$, że $g_n \to g$ i $h_n \to h$ lokalnie wg miary, $g_n \leq f_n \leq h_n$ μ-p.w. oraz $\int_X g_n - g\,\mathrm{d}\mu$, $\int_X h_n - h\,\mathrm{d}\mu$ dążą do zera, to $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ i $\lim_n \int_X f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_X f\,\mathrm{d}\mu$. Jeśli $0 < p < \infty$ i $f_n, f \in \mathcal{L}^p$, to $\|f_n - f\|_p \to 0 \Leftrightarrow f_n \to f$ lokalnie wg miary i $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ (Riesz, 1928) $\Leftrightarrow f_n$ zbiega słabo do f i $\|f_n\|_p \to \|f\|_p$ (Radon, 1960). **Tw. Vitaliego** (1907): dla $0 < p < \infty$, $f_n \to f$ w $\mathcal{L}^p \Leftrightarrow f_n \to f$ lokalnie wg miary, zaś każdym $\varepsilon > 0$ odpowiada $X \setminus E$ z $\mu(X \setminus E) < \infty$ i $\delta > 0$, że $\mu(A) < \delta$ pociąga $\int_E |f_n|^p\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$, $\int_A |f_n|^p\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$ (zbieżność równomierna). **6.5**

Miara znakowana: funkcja $\nu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$, gdy $\nu(\varnothing) = 0$, ν nie przyjmuje jednocześnie $\pm\infty$, khm-1. Jeśli $\mu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ jest miarą, zaś $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ jest quasicałkowalna, to khm-2 $\nu\colon \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ jest **znakowaną miarą** o gęstości f względem μ ($\nu = f \odot \mu$). Dla każdej miary znakowanej istnieje **rozkład Hahna** (1921) $X = P \sqcup N$ na zbiór dodatni (jeśli $A \subseteq P$, to $\nu(A) \geq 0$) i ujemny (anologicznie), jest jednoznaczny z dokładnością do ν-zerowych. Mamy miary szaleństwa $\nu^+(A) = \nu(A \cap P)$, $\nu^-(A) = -\nu(A \cap N)$ oraz $|\nu| = \nu^+ + \nu^-$. Khm-3. Dwie miary znakowane ν, ρ są **singularne** do siebie, gdy $X = A \sqcup B$ (mierzalne), że A jest ν-zerowy, zaś B: ρ-zerowy. **Rozkład Jordana**: $\nu = \nu^+ - \nu^-$ na singularne; jest on „minimalny": jeśli $\nu = \rho - \sigma$ (i choć jedna jest skończona), to $\nu^+ \leq \rho$, $\nu^- \leq \sigma$. **7.1**

$$\nu\left(\coprod_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(A_n) \bullet \nu(A) = \int_A f\,\mathrm{D}\mu$$

Zbiór M skończonych miar znakowanych na $\mathcal{A}$ jest p. wektorową nad $\mathbb{R}$. Relacja $\nu \leq \rho \Leftrightarrow \nu(A) \leq \rho(A)$ dla każdego A zadaje porządek (M jest przestrzenią Riesza!). Funkcja $\|\nu\| = |\nu|(X)$ jest normą, a $(M, \|\cdot\|)$ porządkowo zupełną p. Banacha.

Gdy μ, ν to znakowane (lub zespolone) miary na $\mathcal{A}$, to ν jest μ-**absolutnie ciągła**, gdy μ-zerowe są ν-zerowe, $\nu << \mu$. Wystarcza istnienie (quasicałkowalnej) gęstości dla ν względem μ. **Tw. Radona-Nikodyma**: jeśli μ jest σ-skończoną miarą, zaś $\nu << \mu$ znakowaną miarą na $\mathcal{A}$, to ν ma gęstość względem μ (istnieje półcałkowalna $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, że $\nu = f \odot \mu$, μ-p.w. jednoznacznie); Jeśli ν jest miarą, to można założyć $f \geq 0$. **Tw. o rozkładzie Lebesgue'a**: jeśli μ jest σ-skończoną miarą, zaś ν znakowaną σ-skończoną miarą, to $\nu = \rho + \sigma$ rozkłada się jednoznacznie na znakowane ρ, σ (są σ-skończone), że $\rho << \mu$, $\sigma \perp \mu$ i ρ ma półcałkowalną gęstość $f\colon X \to \mathbb{R}$ względem μ [ρ, σ są skończone $\Leftrightarrow \nu$ jest]. **7.2**

Jeśli $(V, \|\cdot\|)$ jest Banacha nad $\mathbb{K}$, to V', zbiór liniowych, ciągłych $\varphi\colon V \to \mathbb{K}$, to **dual**. Z normą $\|\varphi\| = \sup\{|\varphi(x)| : x \in V, \|x\| \leq 1\}$, też jest Banacha. Niech $1/p + 1/q = 1$. Jeśli $p = 1$, zaś μ to σ-skończona miara (ewentualnie $1 < p < \infty$, μ dowolna), to $\varphi\colon L^q \to (L^p)'$, $\varphi(g) = \varphi_g$ jest izo- normowym: $\varphi_g(f) = \int_X fg\,\mathrm{d}\mu$. Więcej analizy funkcjonalnej zna Rudin. **7.3**

Tw. pokryciowe Vitaliego (1908): jeśli $A \subseteq \mathbb{R}$ ma skończoną zew-Le-miarę, zaś $\mathcal{F}$ to **pokrycie Vitaliego** [rodzina przedziałów, że każdy $x \in A$ można przykryć dowolnie krótkim $I \in \mathcal{F}$], to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieją rozłączne $I_1, \ldots, I_n \in \mathcal{F}$, że $\eta(A \setminus \bigsqcup_{k=1}^n I_k) < \varepsilon$. **Tw. Lebesgue'a** (1904): monotonicznie rosnąca $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jest λ-p.w. różniczkowalna. Kładąc $f' = 0$ w nieróżniczkowalnościach, $f' \in \mathfrak{L}^1$ i całka z niej nie przekracza $f(b) - f(a)$. Zatem ograniczona wariacja pociąga λ-p.w. różniczkowalność. Inny wniosek (Fubini, 1915): jeśli (f_n) jest ciągiem monotonicnie rosnących (malejących) funkcji na $[a, b]$, to szereg $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ zbiega i można różniczkować wyraz po wyrazie λ-p.w. **7.4**

Tw. o gęstości (Lebesgue, 1904): λ-p.w. punkty $A \subseteq \mathbb{R}$ są **punktami gęstości** (khm-1), tzn. $\eta(A \setminus D(A)) = 0$. Jeśli $A \in \mathfrak{L}^1$, to $D(A) \in \mathfrak{L}^1$ i $\lambda(A \triangle D(A)) = 0$. Funkcja $F\colon [a, b] \to \mathbb{K}$ **absolutnie ciągła** (Vitali, 1905): każdy $\varepsilon > 0$ ma $\delta > 0$, że khm-2 dla $a \leq \alpha_1 < \beta_1 \leq \ldots \leq \alpha_n < \beta_n \leq b$, takich że $\sum_k \beta_k - \alpha_k < \delta$, pociąga ciągłość i ograniczoną wariację. **Tw. Vitaliego** (1905): absolutnie ciągła o λ-p.w. pochodnej zero jest stała. **Hauptsatz** (Lebesgue, Vitali 1904/1905): jeśli $f\colon [a, b] \to \overline{\mathbb{K}}$ jest Le-całkowalna, to khm-3 ($a \leq x \leq b$) jest absolutnie ciągła i $F' = f$ λ-p.w. Gdy położymy $F'(x) = 0$ tam, gdzie nie ma F', to całka z $F'(t)$ nad $[a, x]$ jest równa $F(x) - F(a)$. Całki nieoznaczone to dokładnie absolutnie ciągłe. **Mieszanka Lebesgue'a** (1904): prawo-ciągła funkcja rosnąca : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rozkłada się na $F_a + F_s + F_d$ (też rosnące, prawo-ciągłe), że F_a jest absolutnie ciągła, $\mu_a = F' \odot \beta << \beta$; F_s jest singularna, $\mu_s \perp \beta$, $F_s' = 0$ β-p.w., zaś F_d to funkcja skoku, $F_d' = 0$ β-p.w. i khm-4 wyżej dla $E \in \mathfrak{B}^1$. Miara $\mu_a + \mu_s$ jest bezatomowa, μ_d czysto atomowa. Jeśli $F_a(0) = F_s(0) = 0$, to wszystko jest jednoznaczne. **Funkcja absolutnie ciągła** $I \to \mathbb{R}$: taka obcięta do $[a, b] \subseteq I$. **Singularna**: ciągła, rosnąca, β-p.w. zerowa pochodna.

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{\eta(A \cap [x - h, x + h])}{2h} = 1 \bullet \sum_{k=1}^{n} |F(\beta_k) - F(\alpha_k)| < \varepsilon \bullet F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \bullet$$

Miary na przestrzeniach topologicznych:

1. miary Borela i Radona:
   - twierdzenia o regularności
   - umiarkowane miary Borela
   - polskie przestrzenie
   - twierdzenie Łuzina
2. twierdzenie Riesza:
   - twierdzenie o przedłużaniu
   - przestrzenie lokalnie zwarte i zupełnie regularne
   - nośniki miar
   - ciągłe formy liniowe na $C_0(X)$
3. miara Haara:
   - grupy topologiczne
   - lewoniezmiennicze formy liniowe i miary
   - istnienie i jednoznaczność

   - zastosowania
   - niezmiennicze i względnie nieziennicze miary na przestrzeniach klas abstrakcji

4. słaba zbieżność i zwartość:
   - skończone miary na przestrzeniach metrycznych
   - słaba zbieżność ciągów miar
   - twierdzenie o zbitce
   - twierdzenia Helly'ego, Braya, Prochorova
   - transformata Laplace'a
   - metryka Prochorova