

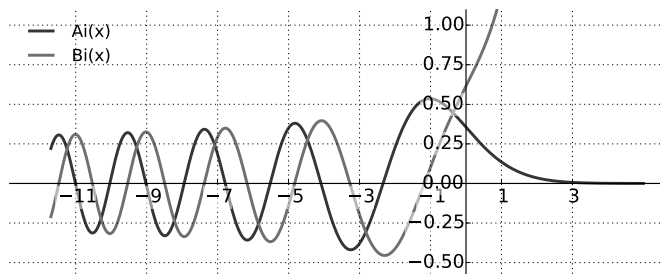
1. **Równanie Airy'ego/Stokesa:** $y'' - xy = 0$ z rozwiązaniem danym przez szereg $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. Ma nż rozwiązania y_i albo jako funkcje Airy'ego.

$$y_1(x) = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)!!!}{(3n)!} \cdot x^{3n} \right]$$

$$y_2(x) = a_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!!!}{(3n+1)!} \cdot x^{3n+1} \right]$$

$$Ai(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(xt + t^3 : 3) dt$$

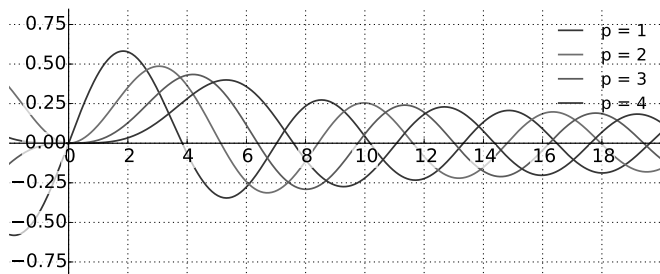
$$Bi(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [\exp(xt - t^3 : 3) + \sin(xt + t^3 : 3)] dt$$



1. **Równanie Airy'ego**, uogólnione: $y''' - 4xy' - 2y = 0$. Rozwiązaniami są: Ai^2 , $Ai Bi$ oraz Bi^2 .
2. **Równanie Bernoulliego:** $y' + fy = gy^k$. Trzeba je podzielić przez y^k i podstawić $z = y^{1-k}$.
3. **Równanie Bessela:** $x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$. Próbuujemy szeregu: $y = \sum_{m \geq 0} a_m x^{r+m}$ z $a_0 \neq 0$. Wtedy $a_0(r^2 - p^2) = a_1[(r+1)^2 - p^2] = 0$, dla $m \geq 2$: $a_{m-2} = a_m[p^2 - (r+m)^2]$. Jeżeli $r = p$, rozwiązaniem jest funkcja Bessela rzędu p , J_p . Jeżeli $p \notin \mathbb{Z}$, to J_p oraz J_{-p} są niezależne. Jeżeli $p \in \mathbb{Z}$, trzeba użyć funkcji Bessela drugiego rodzaju, Y_p .

$$J_p(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k+p}}{k! \cdot \Gamma(k+p+1)}$$

$$Y_p(x) = \lim_{v \rightarrow p} [J_p(x) \cos p\pi - J_{-p}(x)] : (\sin p\pi)$$



1. **Równanie Clairauta:** $y = xy' + \psi(y')$. Niech $p = y'$. Zróżniczkowanie daje $[x + \psi'(p)]p'(x) = 0$, a w \mathbb{R} nie ma dzielników zera.
2. **Równanie Eulera:** $x^2 y'' + axy' + by = 0$. Rozwiązania: dla $(1-a)^2 > 4b$ (y_1), dla $(1-a)^2 = 4b$ (y_2) i $(1-a)^2 < 4b$ (y_3); $2\mu = |(1-a)^2 - 4b|^{1/2}$.

$$y_1(x) = |x|^{(1-a)/2} (A|x|^\mu + B|x|^{-\mu})$$

$$y_2(x) = |x|^{(1-a)/2} (A + B \ln|x|)$$

$$y_3(x) = |x|^{(1-a)/2} (A \sin(\mu \ln|x|) + B \cos(\mu \ln|x|))$$

3. **Równanie Hermite'a:** $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ dla $n \in \mathbb{R}$. Jeżeli y_i są jak niżej, to $Af_1 + Bf_2$ jest ogólnym rozwiązaniem ($A, B \in \mathbb{R}$).

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \prod_{t=0}^{k-1} (2t+1-n)$$

$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^{2k}}{(2k)!} \prod_{t=0}^{k-1} (2t-n)$$

4. **Legendre'a:** $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$. Rozwiązania dane są przez $AP_n(x) + BQ_n(x)$, gdzie

$$P_n(x) = \frac{d^n}{n! 2^n dx^n} (x^2 - 1)^n$$

$$Q_n(x) = \frac{1}{2} P_n(x) \ln \frac{1+x}{1-x} - \sum_{m=1}^n \frac{1}{m} P_{m-1}(x) P_{n-m}(x)$$

5. **Równanie Riccatiego:** $y' = f + gy + hy^2$. Podstawienie $y = -w' : [hw]$ coś może uprościć. Jeśli znamy rozwiązanie $y_0(x)$, to $y := y_0 + 1 : w$ przekształca równanie do $w' + [g + 2hy_0]w + h = 0$.
6. **Równanie van der Pola:** $y'' - \mu(1-y^2)y' + y = 0$. Rozwiązaniami dla $\mu = 0$ są $y_0 \cos x + y_0 \sin x$. Jeżeli $\mu > 0$, to układ ma jednoznaczny cykl graniczny (przyciągający).
7. **Równanie Emdena-Fowlera:** $y'' = Ax^n y^m$. Rozwiązanie (dla $m \neq 1$) $y = \lambda x^{(n+2)/(1-m)}$ jest specjalne. Przez $z = x^{n+2} y^{m-1}$ oraz $w = xy'/y$ dostajemy równanie Abela. Znane rozwiązania dla:

(a) dowolnego m i $n = 0, -m-3$ lub $-(m+3) : 2$.

(b) dowolnego n i $m = 0, 1$.

(c) szczególnych przypadków:

i. $m = -7, n = 1, 3$

ii. $m = -5 : 2, n = -1 : 2$

iii. $m = -2, n = -2, 1$

iv. $m = -5 : 3, n = -10 : 3, -7 : 3, -5 : 6, -1 : 2, 1, 2$

v. $m = -7 : 5, n = -13 : 5, n = 1$

vi. $m = -1 : 2, n = -7 : 2, -5 : 2, -2, -4 : 3, -7 : 6, -1 : 2, 1$

vii. $m = 2, n = -5, -20 : 7, -15 : 7$.

1. Równania liniowe

- (a) Laplace'a: $\Delta u = \sum_{i \leq n} u_{x_i x_i} = 0$
- (b) Helmholtza: $-\Delta u = \lambda u$
- (c) transportu: $u_t + \sum_{i \leq n} b^i u_{x_i} = 0$
- (d) Liouville'a: $u_t - \sum_{i \leq n} (b^i u)_{x_i} = 0$
- (e) przewodnictwa cieplnego / dyfuzji: $u_t - \Delta u = 0$
- (f) Schrödingera: $i u_t + \Delta u = 0$
- (g) Kołmogorowa: $u_t - \sum_{i,j \leq n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i \leq n} b^i u_{x_i} = 0$
- (h) Fokkera-Plancka: $u_t - \sum_{i,j \leq n} (a^{ij} u)_{x_i x_j} + \sum_{i \leq n} (b^i u)_{x_i} = 0$
- (i) falowe: $u_{tt} - \Delta u = 0$
- (j) telegrafistów: $u_{tt} + du_t - u_{xx} = 0$
- (k) ogólne falowe: $u_{tt} + \sum_{i,j \leq n} a^{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i \leq n} b^i u_{x_i} = 0$
- (l) Airy'ego: $u_t + u_{xxx} = 0$
- (m) belki: $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$

2. Równania nieliniowe

- (a) eikonału: $|Du| = 1$
- (b) Poissona: $-\Delta u = f(u)$
- (c) p -harmoniczne: $\operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du) = 0$
- (d) powierzchni minimalnych: $\operatorname{div}(Du(1 + |Du|^2)^{-1/2}) = 0$
- (e) Monge'a-Ampere'a: $\det D^2 u = f$
- (f) Hamiltona-Jacobiego: $u_t + H(Du, x) = 0$.
- (g) skalarne zachowania: $u_t + \operatorname{div} F(u) = 0$
- (h) Burgersa bez lepkości: $u_t + uu_x = 0$
- (i) skalarne reakcji-dyfuzji: $u_t - \Delta u = f(u)$
- (j) ośrodków porowatych: $u_t - \Delta(u^\gamma) = 0$
- (k) falowe: $u_{tt} - \Delta u = f(u)$, $u_{tt} - \operatorname{div} a(Du) = 0$
- (l) Kortewega-de Vriesa: $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$

3. Układy liniowe

- (a) równowagi w liniowej teorii sprężystości: $\mu \Delta u + (\lambda + \mu) D(\operatorname{div} u) = 0$
- (b) ewolucyjne w liniowej teorii sprężystości: $u_{tt} - \mu \Delta u - (\lambda + \mu) D(\operatorname{div} u) = 0$
- (c) Maxwella: $E_t = \operatorname{rot} B$, $B_t = -\operatorname{rot} E$, $\operatorname{div} B = \operatorname{div} E = 0$.

4. Układy nieliniowe

- (a) praw zachowania: $u_t + \operatorname{div} F(u) = 0$
- (b) reakcji-dyfuzji: $u_t - \Delta u = f(u)$
- (c) Eulera nielepkiego przepływu nieściśliwego: $\operatorname{div} u = 0$, $u_t + u \cdot Du = -Dp$.
- (d) Naviera-Stokesa lepkiego przepływu nieściśliwego: $\operatorname{div} u = 0$, $u_t + u \cdot Du - \Delta u = -Dp$.