Niech X będzie zmienną losową na przestrzeni $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

- **Wartość oczekiwana** X to $\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X \,\mathrm{d}P$
- n-ty **moment centralny** to $\mu_n = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^n]$.
- **Wariancja** $\mathbb{V}$ jest drugim momentem, pierwiastek z niej to **odchylenie standardowe**, σ.
- **Skośność** $\gamma = \mu_3/\sigma^3$ i **kurtoza** $\kappa = \mu_4/\sigma^4 - 3$.
- **Funkcja charakterystyczna**: $\mathbb{E}[e^{itX}]$
- **Informacja Fishera** $\mathcal{I}(\theta) := \int (\partial_\theta \log f(x,\theta))^2 f(x,\theta)\,\mathrm{d}x$.

Wszystkie rozkłady w wersji „probabilistycznej".

Rozkłady dyskretne

1. **Borela** $(0 < \mu < 1)$. Opisuje potomstwo wątrobowca, gdy dzietność w kolonii podlega λ-rozkładowi Poissona. Jego gęstość to $(\lambda k)^{k-1} : (k! \exp \lambda k)$.
$$\mathbb{E} = \frac{1}{1-\lambda} \bullet \mathbb{V} = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^3}$$
2. **Dwumianowy** (z $n \in \mathbb{N}$ i $0 < p < 1$). Liczba sukcesów w n próbach Bernoulliego. Gęstość $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$, gdzie $q = 1-p$. Moda $\lfloor (n+1)p \rfloor$ lub $\lceil (n+1)p \rceil - 1$.
$$\mathbb{E} = np \bullet \mathbb{V} = npq \bullet \gamma = \frac{1-2p}{\sqrt{npq}} \bullet \kappa = \frac{1-6pq}{npq}.$$
F. charakterystyczna $(q + p\exp(it))^n$, entropia:
$$H = \frac{1}{2}\log(2\pi e npq) + O(1/n).$$
3. **Beta-dwumianowy** (z $n \in \mathbb{N}$ i $\alpha, \beta > 0$). W urnie jest α kul czarnych i β zielonych. Ciągniemy n-krotnie, za każdym razem dokładając zobaczoną kulę. Ile będzie czarnych? Gęstość $\binom{n}{k} B(k+\alpha, n-k+\beta)/B(\alpha,\beta)$.
$$\mathbb{E} = \frac{n\alpha}{\alpha+\beta} \bullet \mathbb{V} = \frac{n\alpha\beta(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$
4. **Ujemny dwumianowy** $(r > 0,\ 0 < p < 1)$. Ile sukcesów w próbie Bernoulliego, zanim poniesiemy r porażek. Ma gęstość $\binom{k+r-1}{k} q^r p^k$. $\mathcal{I} = r/(p^2 q)$, gdzie $q = 1-p$.
$$\mathbb{E} = \frac{pr}{q} \bullet \mathbb{V} = \frac{pr}{q^2} \bullet \gamma = \frac{1+p}{\sqrt{pr}} \bullet \kappa = \frac{6p+q^2}{pr}$$
Funkcja charakterystyczna:
$$\left(\frac{q}{1-p\exp(it)}\right)^r.$$
5. **Geometryczny** (z $0 < p < 1$). Proces Bernoulliego dopiero w k-tej próbie $(k \geq 1)$ zakończy się sukcesem. Niech q to $1-p$. Gęstość $q^{k-1}p$, dystrybuanta $1 - q^k$, moda 1.
$$\mathbb{E} = \frac{1}{p} \bullet \mathbb{V} = \frac{q}{p^2} \bullet \gamma = \frac{2-p}{\sqrt{q}} \bullet \kappa = 6 + \frac{p^2}{q}$$
Funkcja charakterystyczna i entropia:
$$\varphi(t) = \frac{p\exp(it)}{1-q\exp(it)} \bullet H = \frac{q\log q + p\log p}{-p}$$
6. **Hipergeometryczny** (z $0 \leq K, n \leq N$). W stawie pływa N ryb, K spośród nich jest jadalna. Ile z n wyciągniętych sztuk nie będzie trujących? Gęstość $\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}/\binom{N}{n}$, zaś moda to $\lfloor (n+1)(K+1)/(N+2) \rfloor$.
$$\mathbb{E} = \frac{nK}{N} \bullet \mathbb{V} = \frac{nK(N-K)(N-n)}{N^3 - N^2}$$
7. **Jednostajny** (na $[a,b] \cap \mathbb{Z}$ z $n = b - a + 1$). Gęstość $1/n$, entropia $\log n$.
$$\mathbb{E} = \frac{1}{2}(a+b) \bullet \mathbb{V} = \frac{n^2-1}{12} \bullet \gamma = 0 \bullet \kappa = -\frac{6(n^2+1)}{5(n^2-1)}$$
Funkcja charakterystyczna:
$$\frac{\exp(iat) - \exp(i(b+1)t)}{n(1-\exp(it))}$$
8. Odwrotny **Markova-Polyi** $(\alpha, \beta, r > 0)$. Ile porażek trzeba ponieść przed r sukcesami w próbach Bernoulliego, kiedy stałe p-stwo sukcesu p pochodzi z rozkładu beta? Gęstość $\Gamma(r+k)B(\alpha+r, \beta+k)/(k!\Gamma(r)B(\alpha,\beta))$, dla $\alpha \leq 1$, $\mathbb{E}$ nie istnieje, zaś dla $\alpha \leq 2$: $\mathbb{V}$ nie istnieje.
$$\mathbb{E} = \frac{r\beta}{\alpha-1} \bullet \mathbb{V} = \frac{r(\alpha+r-1)\beta(\alpha+\beta-1)}{(\alpha-2)(\alpha-1)^2}$$
Skośność dla $\alpha > 3$:
$$\frac{(\alpha+2r-1)(\alpha+2\beta-1)\sqrt{\alpha-2}}{(\alpha-3)\sqrt{r(\alpha+r-1)\beta(\alpha+\beta-1)}}$$
9. **Poissona** (z $\lambda > 0$). P-stwo danej liczby zdarzeń w stałym przedziale, kiedy znana jest ich średnia, a wystąpienie nie zależy od czasu, jaki upłynął od poprzedniego. Gęstość $\lambda^k \exp(-\lambda)/k!$, moda $\lceil \lambda \rceil - 1$ lub $\lfloor \lambda \rfloor$. Informacja Fishera $1/\lambda$ F. charakterystyczna: $\exp(\lambda(\exp(it)-1))$.
$$\mathbb{E} = \lambda \bullet \mathbb{V} = \lambda \bullet \gamma = \lambda^{-1/2} \bullet \kappa = \lambda^{-1}$$
Przybliżona entropia:
$$\frac{\log(2\pi e\lambda)}{2} - \frac{1}{12\lambda} - \frac{1}{24\lambda^2} - \frac{19}{360\lambda^3} + O(\lambda^{-4}).$$
10. **Skellama** (z $\lambda_1, \lambda_2 > 0$). Różnica zmiennych losowych z rozkładu Poissona (niezależnych).
$$\mathbb{E} = \lambda_1 - \lambda_2 \bullet \mathbb{V} = \lambda_1 + \lambda_2 \bullet \gamma = \frac{\mathbb{E}}{(\mathbb{V})^{3/2}} \bullet \kappa = \frac{1}{\mathbb{V}}$$
Gęstość:
$$\exp(-\lambda_1 - \lambda_2)\lambda_1^k \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1\lambda_2)^m}{m!(m+k)!}$$
Funkcja charakterystyczna:
$$\varphi(t) = \exp(-(\lambda_1+\lambda_2) + \lambda_1\exp(it) + \lambda_2\exp(-it))$$
11. **Delaporte** $(\alpha, \beta, \lambda > 0)$: Poissona, z losowym parametrem $\lambda + \mathrm{Gamma}(\alpha,\beta)$. $\mathbb{E} = \lambda + \alpha\beta$, $\mathbb{V} = \lambda + \alpha\beta(1+\beta)$. Mamy (dla $z = 1 + 6\lambda + 6\lambda\beta + 7\beta + 12\beta^2 + 6\beta^3 + 3\alpha\beta(1+\beta)^2$):
$$\gamma = \frac{\lambda + \alpha\beta(1+3\beta+2\beta^2)}{(\lambda+\alpha\beta(1+\beta))^{3/2}} \bullet \kappa = \frac{\lambda + 3\lambda^2 + \alpha\beta \cdot z}{(\lambda+\alpha\beta(1+\beta))^2}$$
12. **Zeta** $(s > 1)$. Gęstość $k^{-s}/\zeta(s)$. $\mathbb{E}$ istnieje dla $s > 2$, $\mathbb{V}$: dla $s > 3$. Jest nieskończenie podzielny.
$$\mathbb{E} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} \bullet \mathbb{V} = \frac{\zeta(s)\zeta(s-2) - \zeta(s-1)^2}{\zeta(s)^2}$$