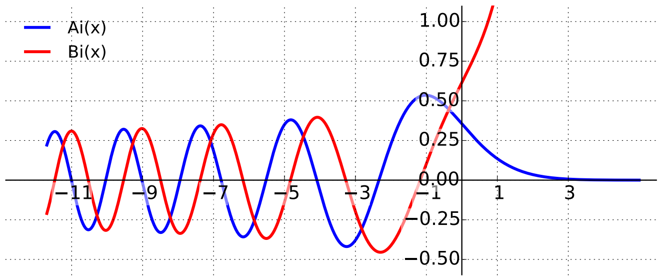
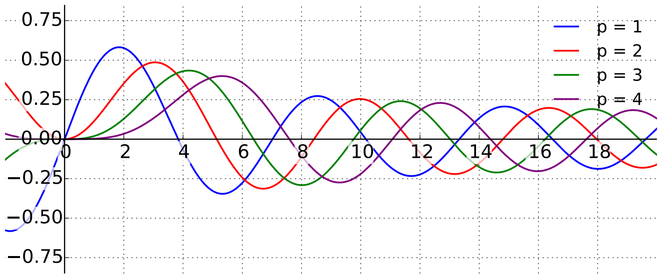
1. **Równanie Airy'ego/Stokesa**: $y'' - xy = 0$ z rozwiązaniem danym przez szereg $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. Ma nz rozwiązania y_i albo jako funkcje Airy'ego.

$$y_1(x) = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)!!!}{(3n)!}\cdot x^{3n}\right]$$
$$y_2(x) = a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)!!!}{(3n+1)!}\cdot x^{3n+1}\right]$$
$$Ai(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \cos(xt + t^3 : 3)\,\mathrm{d}t$$
$$Bi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} [\exp(xt - t^3 : 3) + \sin(xt + t^3 : 3)]\,\mathrm{d}t$$



1. **Równanie Airy'ego**, uogólnione: $y''' - 4xy' - 2y = 0$. Rozwiązaniami są: Ai^2, $\mathrm{Ai}\,\mathrm{Bi}$ oraz Bi^2.
2. **Równanie Bernoulliego**: $y' + fy = gy^k$. Trzeba je podzielić przez y^k i podstawić $z = y^{1-k}$.
3. **Równanie Bessela**: $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$. Próbujemy szeregu: $y = \sum_{m\geq 0} a_m x^{r+m}$ z $a_0 \neq 0$. Wtedy $a_0(r^2 - p^2) = a_1[(r+1)^2 - p^2] = 0$, dla $m \geq 2$: $a_{m-2} = a_m[p^2 - (r+m)^2]$. Jeżeli $r = p$, rozwiązaniem jest funkcja Bessela rzędu p, J_p. Jeżeli $p \notin \mathbb{Z}$, to J_p oraz J_{-p} są niezależne. Jeżeli $p \in \mathbb{Z}$, trzeba użyć funkcji Bessela drugiego rodzaju, Y_p.

$$J_p(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k (x:2)^{2k+p}}{k!\cdot\Gamma(k+p+1)}$$
$$Y_p(x) = \lim_{v\to p}[J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)] : (\sin p\pi)$$



1. **Równanie Clairauta**: $y = xy' + \psi(y')$. Niech $p = y'$. Zróżniczkowanie daje $[x + \psi'(p)]p'(x) = 0$, a w $\mathbb{R}$ nie ma dzielników zera.
2. **Równanie Eulera**: $x^2y'' + axy' + by = 0$. Rozwiązania: dla $(1-a)^2 > 4b$ (y_1), dla $(1-a)^2 = 4b$ (y_2) i $(1-a)^2 < 4b$ (y_3); $2\mu = |(1-a)^2 - 4b|^{1:2}$.

$$y_1(x) = |x|^{(1-a):2}(A|x|^{\mu} + B|x|^{-\mu})$$
$$y_2(x) = |x|^{(1-a):2}(A + B\ln|x|)$$
$$y_3(x) = |x|^{(1-a):2}(A\sin(\mu\ln|x|) + B\cos(\mu\ln|x|))$$

3. **Równanie Hermite'a**: $y'' - 2xy' + 2ny = 0$ dla $n \in \mathbb{R}$. Jeżeli y_i są jak niżej, to $Af_1 + Bf_2$ jest ogólnym rozwiązaniem ($A, B \in \mathbb{R}$).

$$y_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}\prod_{t=0}^{k-1}(2t+1-n)$$
$$y_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k x^{2k}}{(2k)!}\prod_{t=0}^{k-1}(2t-n)$$

4. **Legendre'a**: $(1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0$. Rozwiązania dane są przez $AP_n(x) + BQ_n(x)$, gdzie

$$P_n(x) = \frac{d^n}{n!2^n dx^n}(x^2-1)^n$$
$$Q_n(x) = \frac{1}{2}P_n(x)\ln\frac{1+x}{1-x} - \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}P_{m-1}(x)P_{n-m}(x)$$

5. **Równanie Riccatiego**: $y' = f + gy + hy^2$. Podstawienie $y = -w' : [hw]$ coś może uprościć. Jeśli znamy rozwiązanie $y_0(x)$, to $y := y_0 + 1 : w$ przekształca równanie do $w' + [g + 2hy_0]w + h = 0$.
6. **Równanie van der Pola**: $y'' - \mu(1-y^2)y' + y = 0$. Rozwiązaniami dla $\mu = 0$ są $y_0\cos x + \dot{y}_0\sin x$. Jeżeli $\mu > 0$, to układ ma jednoznaczny cykl graniczny (przyciągający).
7. **Równanie Emdena-Fowlera**: $y'' = Ax^n y^m$. Rozwiązanie (dla $m \neq 1$) $y = \lambda x^{(n+2):(1-m)}$ jest specjalne. Przez $z = x^{n+2}y^{m-1}$ oraz $w = xy'/y$ dostajemy równanie Abela. Znane rozwiązania dla:
   (a) dowolnego m i $n = 0, -m-3$ lub $-(m+3):2$.
   (b) dowolnego n i $m = 0, 1$.
   (c) szczególnych przypadków:
      i. $m = -7, n = 1, 3$
      ii. $m = -5:2, n = -1:2$
      iii. $m = -2, n = -2, 1$
      iv. $m = -5:3, n = -10:3, -7:3, -5:6, -1:2, 1, 2$
      v. $m = -7:5, n = -13:5, n = 1$
      vi. $m = -1:2, n = -7:2, -5:2, -2, -4:3, -7:6, -1:2, 1$
      vii. $m = 2, n = -5, -20:7, -15:7$.

1. Równania liniowe
   (a) Laplace'a: $\Delta u = \sum_{i\leq n} u_{x_ix_i} = 0$
   (b) Helmholtza: $-\Delta u = \lambda u$
   (c) transportu: $u_t + \sum_{i\leq n} b^i u_{x_i} = 0$
   (d) Liouville'a: $u_t - \sum_{i\leq n}(b^i u)_{x_i} = 0$
   (e) przewodnictwa cieplnego / dyfuzji: $u_t - \Delta u = 0$
   (f) Schrödingera: $iu_t + \Delta u = 0$
   (g) Kołmogorowa: $u_t - \sum_{i,j\leq n} a^{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i\leq n} b^i u_{x_i} = 0$
   (h) Fokkera-Plancka: $u_t - \sum_{i,j\leq n}(a^{ij}u)_{x_ix_j} + \sum_{i\leq n}(b^i u)_{x_i} = 0$
   (i) falowe: $u_{tt} - \Delta u = 0$
   (j) telegrafistów: $u_{tt} + du_t - u_{xx} = 0$
   (k) ogólne falowe: $u_{tt} + \sum_{i,j\leq n} a^{ij}u_{x_ix_j} + \sum_{i\leq n} b^i u_{x_i} = 0$
   (l) Airy'ego: $u_t + u_{xxx} = 0$
   (m) belki: $u_{tt} + u_{xxxx} = 0$
2. Równania nieliniowe
   (a) eikonału: $|Du| = 1$
   (b) Poissona: $-\Delta u = f(u)$
   (c) p-harmoniczne: $\mathrm{div}(|Du|^{p-2}Du) = 0$
   (d) powierzchni minimalnych: $\mathrm{div}(Du(1+|Du|^2)^{-1:2}) = 0$
   (e) Monge'a-Ampere'a: $\det D^2u = f$
   (f) Hamiltona-Jacobiego: $u_t + H(Du, x) = 0$.
   (g) skalarne zachowania: $u_t + \mathrm{div}\,F(u) = 0$
   (h) Burgersa bez lepkości: $u_t + uu_x = 0$
   (i) skalarne reakcji-dyfuzji: $u_t - \Delta u = f(u)$
   (j) ośrodków porowatych: $u_t - \Delta(u^{\gamma}) = 0$
   (k) falowe: $u_{tt} - \Delta u = f(u)$, $u_{tt} - \mathrm{div}\,a(Du) = 0$
   (l) Kortewega-de Vriesa: $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$
3. Układy liniowe
   (a) równowagi w liniowej teorii sprężystości: $\mu\Delta u + (\lambda+\mu)D(\mathrm{div}\,u) = 0$
   (b) ewolucyjne w liniowej teorii sprężystości: $u_{tt} - \mu\Delta u - (\lambda+\mu)D(\mathrm{div}\,u) = 0$
   (c) Maxwella: $E_t = \mathrm{rot}\,B$, $B_t = -\mathrm{rot}\,E$, $\mathrm{div}\,B = \mathrm{div}\,E = 0$.
4. Układy nieliniowe
   (a) praw zachowania: $u_t + \mathrm{div}\,F(u) = 0$
   (b) reakcji-dyfuzji: $u_t - \Delta u = f(u)$
   (c) Eulera nielepkiego przepływu nieściśliwego: $\mathrm{div}\,u = 0$, $u_t + u\cdot Du = -Dp$.
   (d) Naviera-Stokesa lepkiego przepływu nieściśliwego: $\mathrm{div}\,u = 0$, $u_t + u\cdot Du - \Delta u = -Dp$.

w przypadku równań nieczosnkowych, y jest funkcją x