Rozkłady ciągłe

1. **Beta** (Gini, 1911): $\mathbb{E} = \alpha : (\alpha+\beta)$, $\mathbb{V} = \alpha\beta(\alpha+\beta)^{-2}(\alpha+\beta+1)^{-1}$. $\alpha, \beta > 0$, nośnik: $(0,1)$.
$$f(x) = x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} : B(\alpha,\beta)$$
$$M(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\prod_{r=0}^{k-1}\frac{\alpha+r}{\alpha+\beta+r}\frac{t^k}{k!}$$
2. **Cauchy'ego** dla $x_0 \in \mathbb{R}$ i $\gamma > 0$. $\mathbb{E}$, $\mathbb{V}$, $M(t)$ nie istnieją!
$$f(x) = \gamma[\pi((x-x_0)^2+\gamma^2)]^{-1}$$
$$F(x) = [\arctan(x-x_0):\gamma]:\pi + 1:2$$
$$\varphi(t) = \exp(x_0 it - \gamma|t|)$$
3. **chi-kwadrat** z k stopniami swobody. $\mathbb{V} = 2\mathbb{E} = 2k$.
$$f(x) = x^{k:2-1}[2^{k:2}e^{x:2}\cdot\Gamma(k:2)]^{-1}$$
$$M(t) = (1-2t)^{-k:2},\text{ jeśli tylko } t < 1:2$$
4. F **Snedecora**: rozkład $Uw : Wu$, gdzie $U \sim \chi^2_u$, $W \sim \chi^2_w$ są nz. Choć M nie istnieje, to φ tak (zależy od Γ, hipergeometrii konfluentnej U).
$$f(x) = \{[(ux)^u w^w] : [ux+w]^{u+w}\}^{1/2} : [xB(u/2, w/2)]$$
$$\mathbb{E} = w[w-2]^{-1},\text{ jeśli tylko } w > 2$$
$$\mathbb{V} = \frac{2\mathbb{E}^2(u+w-2)}{u(w-4)},\text{ jeśli tylko } w > 4$$
5. **Gamma** dla $\alpha, \beta > 0$. $\mathbb{E} = \alpha\beta^{-1}$, $\mathbb{V} = \alpha\beta^{-2}$.
$$f(x) = \beta^\alpha x^{\alpha-1}\exp(-\beta x) : \Gamma(\alpha)$$
$$M(t) = (1 - t:\beta)^{-\alpha},\text{ jeśli tylko } t < \beta$$
6. **jednostajny** na $[a,b]$ lub innym mierzalnym. Uwaga: $\varphi(t) = M(it)$. $f(x) = 1:(b-a)$, $\mathbb{E} = (a+b):2$, $\mathbb{V} = (a-b)^2 : 12$.
$$M(t) = [\exp bt - \exp at] : (tb - ta)$$
7. **Laplace'a** dla $\mu \in \mathbb{R}$, $b > 0$. Skrót: $X = (x-\mu):b$. $\mathbb{E} = \mu$, $\mathbb{V} = 2b^2$. Jeśli $x < \mu$, to $F(x) = (\exp X):2$, w przeciwnym razie $1 - (\exp X):2$. To rozkład różnicy dwóch wykładniczych ($b = 1/\lambda$, $\mu = 0$).
$$f(x) = \exp(-|x-\mu|:b):(2b)$$
$$M(t) = \exp(\mu t) : [1 - b^2t^2],\text{ jeśli tylko } |t| < 1/b$$
8. **normalny** jest królem rozkładów, tak jak lew jest królem dżungli. Jest on w pełni scharakteryzowany przez μ (nadzieję) i $\sigma^2 > 0$ (szaleństwo).
$$f(x) = \exp[-(x-\mu)^2 : 2\sigma^2][\sigma\sqrt{2\pi}]^{-1}$$
$$M(t) = \exp(\mu t + \sigma^2 t^2 : 2)$$
9. **Pareto** dla $\alpha, x_m > 0$.
$$f(x) = \alpha x_m^\alpha x^{-1-\alpha},\text{ gdy } x \ge x_m$$
$$F(x) = 1 - (x_m : x)^\alpha,\text{ gdy } x \ge x_m$$
$$\mathbb{E} = \alpha x_m : (\alpha - 1),\text{ gdy } \alpha > 1$$
$$\mathbb{V} = x_m^2\alpha : [(\alpha-1)^2(\alpha-2)]$$
10. t-**Studenta** dla $r > 0$: rozkład $U\sqrt{n:Z}$, dla niezależnych $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ oraz $Z \sim \chi^2_r$. M nie istnieje, φ prawie Bessela (Gosset, 1908).
$$f(x) = \Gamma\left[\frac{r+1}{2}\right]\left[\Gamma\left[\frac{r}{2}\right]\sqrt{r\pi}(1+x^2:r)^{r/2+1/2}\right]^{-1}$$
$$\mathbb{E}[T^k] = \prod_{i=1}^{k:2} n\cdot\frac{2i-1}{n-2i},\text{ jeśli tylko parzyste } 0 < k < n$$
$$\mathbb{V} = r[r-2]^{-1},\text{ jeśli tylko } r > 2$$
11. **Weibulla** (1951) dla $\lambda, k > 0$. $\mathbb{E} = \lambda\Gamma(1+1:k)$, $\mathbb{V} = \lambda^2\cdot\Gamma(1+2:k) - \mathbb{E}^2$.
$$f(x) = (k:\lambda)(x:\lambda)^{k-1}\exp(-x^k:\lambda^k)$$
$$F(x) = 1 - \exp(-x^k : \lambda^k)$$
$$M(t) = \sum_{n\ge0}(t^n\lambda^n : n!)\cdot\Gamma(1+n:k),\text{ jeśli tylko } k \ge 1$$
12. **wykładniczy** dla $\lambda > 0$. Bez pamięci. $\mathbb{V} = \lambda^{-2}$, $\mathbb{E}[X^n] = n!\lambda^{-n}$.
$$f(x) = \lambda\exp(-\lambda x)$$
$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$$
$$M(t) = \lambda[\lambda - t]^{-1},\text{ jeśli tylko } t < \lambda$$

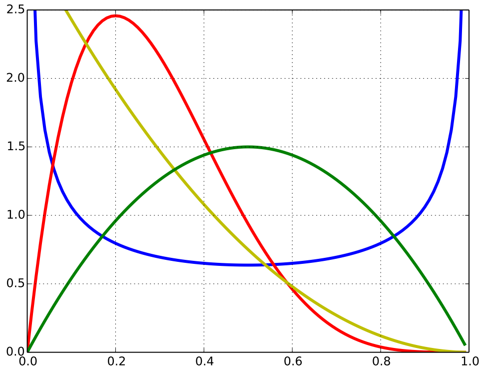
Rozkłady dyskretne

1. **Borela**: liczność potomstwa w „jednoosobwej" kolonii wątrobowców, gdzie dzieci mają rozkład λ-Poissona (1942). $\mathbb{V} = \lambda\mathbb{E}^3$, $\mathbb{E} = [1-\lambda]^{-1}$.
$$\mathbb{P}(X=k) = (\lambda n)^{n-1} : (n!\exp\lambda n)$$
2. **dwumianowy**: k sukcesów (z p-stwem p) w n próbach. $\mathbb{V} = q\mathbb{E} = npq$.
$$\mathbb{P}(X=k) = C^n_k p^k q^{n-k}$$
$$M(t) = (q + pe^t)^n$$
3. **geometryczny** dla $0 < p \le 1$ i $q = 1-p$. $\mathbb{E} = 1:p$, $\mathbb{V} = 1:p^2 - 1:p$. *Pierwszy sukces Bernoulliego w k-tej próbie.*
$$\mathbb{P}(X=k) = q^{k-1}p$$
$$\mathbb{P}(X\le k) = 1 - q^k$$
$$M(t) = pe^t : [1 - qe^t],\text{ gdy } t < -\ln q$$
4. **hipergeometryczny** dla $0 \le K, n \le N$. *Wyciągamy n spośród N kul, gdzie K jest dobrych, a reszta jest zła. Jakie są szanse wyciągnięcia k dobrych?*
$$\mathbb{P}(X=k) = C^K_k C^{N-k}_{n-k} : C^N_n$$
$$\mathbb{E} = nKN^{-1}$$
$$\mathbb{V} = [nK(N-K)(N-n)] : [N^3 - N^2]$$
5. **jednostajny** na $[a,b]\cap\mathbb{Z}$, $n = b+1-a$. $\mathbb{E} = \frac{a+b}{2}$, $\mathbb{V} = \frac{n^2-1}{12}$.
$$M(t) = [\exp at - \exp(b+1)t] : [n(1-e^t)]$$
6. **logarytmiczny** dla $0 < p < 1$. „Bezużyteczny".
$$\mathbb{P}(X=k) = -p^k : [k\ln q]$$
$$\mathbb{E} = -p : [q\ln q]$$
$$\mathbb{V} = [-p^2 + p\ln q] : [q^2\ln^2 q]$$
$$M(t) = \ln_q(1 - pe^t),\text{ gdy } t < -\ln p$$
7. **Poissona** dla $\lambda = \mathbb{E} = \mathbb{V} > 0$. *W ustalonym przedziale zajdzie k wypadków (średnio zachodzi ich λ, są nz).* Dobrze przybliża dwumianowy dla $n \ge 20$, $p \le 1:20$, znakomicie dla $n \ge 100$ i $np \le 10$.
$$\mathbb{P}(X=k) = \lambda^k\exp(-\lambda) : k!$$
$$M(t) = \exp[\lambda(\exp t - 1)]$$
8. **Skellama**: różnica nz zmiennych z rozkładu Poissona (ze średnią λ_1 i λ_2). $\mathbb{E} = \lambda_1 - \lambda_2$, $\mathbb{V} = \lambda_1 + \lambda_2$.
$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\mu_1^k}{\exp(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mu_1^m\mu_2^m}{m!(m+k)!}$$
$$M(t) = \exp(\mu_1 e^{it} + \mu_2 e^{-it} - \mu_1 - \mu_2)$$
9. **ujemny dwumianowy**: *liczba sukcesów przed r-tą porażką podczas procesu Bernoulliego.* $\mathbb{E} = pr : q$, $\mathbb{V} = pr : q^2$.
$$\mathbb{P}(X=k) = C^{k+r-1}_k p^k q^r$$
$$M(t) = q^r : [1 - pe^t]^r,\text{ gdy } t < -\log p$$

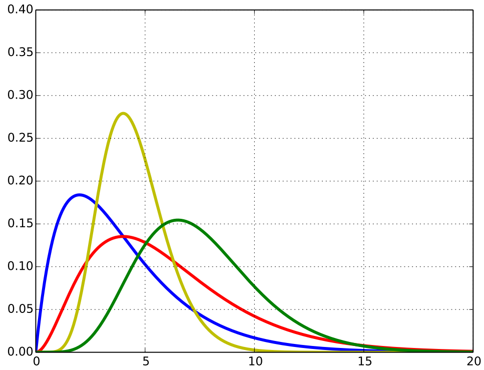
Zależności.

1. Dla X z rozkładu t-Studenta (n), $X^2 \sim F(v_1 = 1, v_2 = n)$.
2. Laplace'a ($\mu = 0$, $b = 1$) jest tym samym, co $\log(x/y)$ (obie z $U(0,1)$) albo $\lambda\,\mathrm{Exp}(\lambda) - \eta\,\mathrm{Exp}(\eta)$ (kopie niezależne od siebie). Ogólniej (μ, b): $\mu + b[2\,\mathrm{Exp}(1)]^{1/2}\,\mathrm{N}(0,1)$.
3. Iloraz nz $X, Y \sim \mathrm{N}(0,1)$ ma rozkład Cauchy'ego, $x_0 = 0$, $\gamma = 1$.
4. Gdy $X \sim \mathrm{Beta}(a,b)$, to $bX : (a - aX) \sim \mathrm{F}(2a, 2b)$
5. $2\lambda\,\mathrm{Exp}(\lambda) = \chi^2_2$
6. $\min(\mathrm{Exp}(\lambda), \mathrm{Exp}(\nu)) = \mathrm{Exp}(\lambda+\nu)$
7. $n\,\mathrm{Beta}(1,n)$ zbiegają do $\mathrm{Exp}(1)$
8. $\sum_{i=1}^n \mathrm{Exp}(\lambda) = \mathrm{Gamma}(n, \lambda^{-1})$.
9. Gdy $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda) = \mathrm{Weibull}(\lambda^{-1}, 1)$, to $k\exp X \sim \mathrm{Pareto}(k, \lambda)$.
10. Jeśli $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda - 1)$, $Y \mid X \sim \mathrm{Poisson}(X)$, to $Y \sim \mathrm{Geo}(1 : (1+\lambda))$.

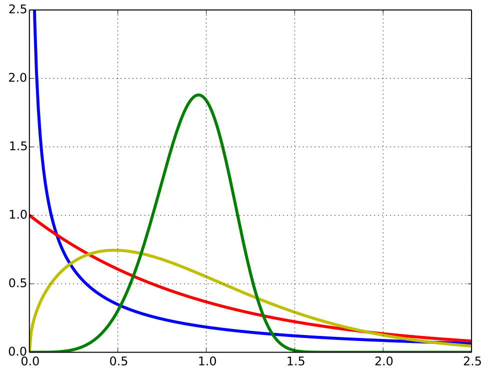
Oznaczenia: f gęstość, F dystrybuanta, $\mathbb{E}$ nadzieja, $\mathbb{V}$ szaleństwo, M generator momentów, φ funkcja charakterystyczna.



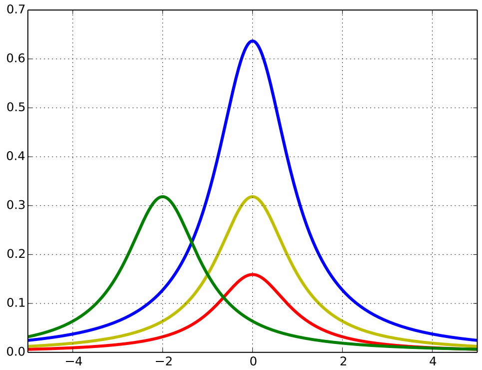
Beta



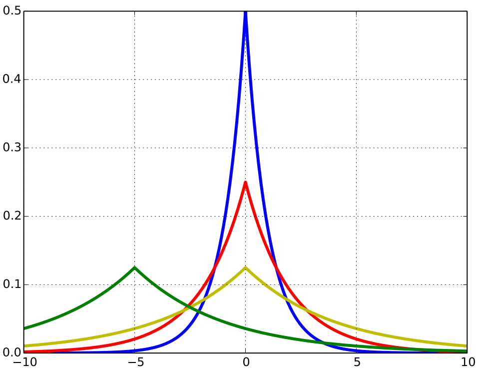
Gamma



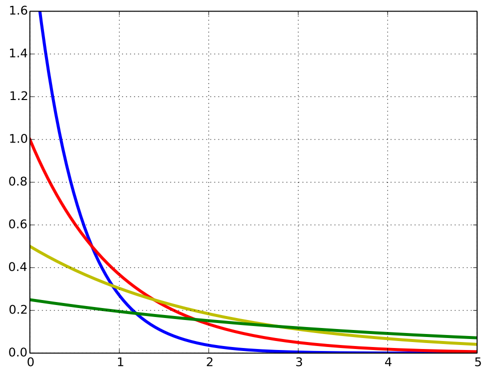
Weibulla



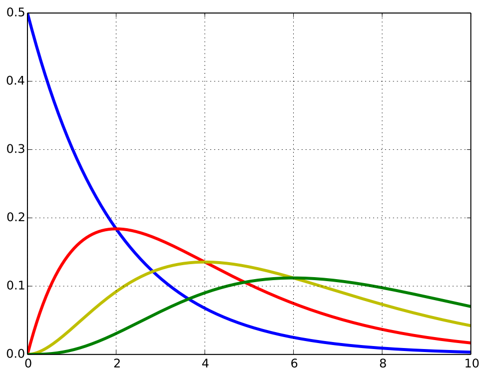
Cauchy'ego



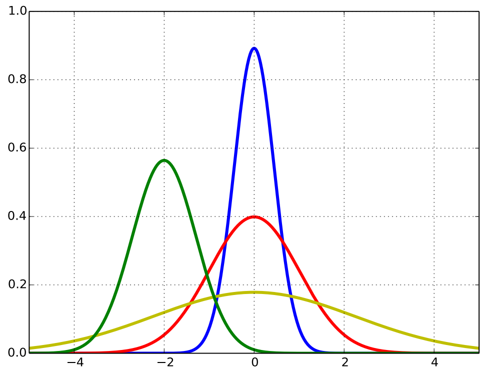
Dwuwykładniczy Laplace'a



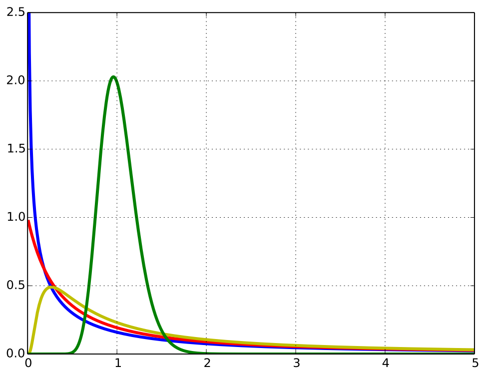
Wykładniczy



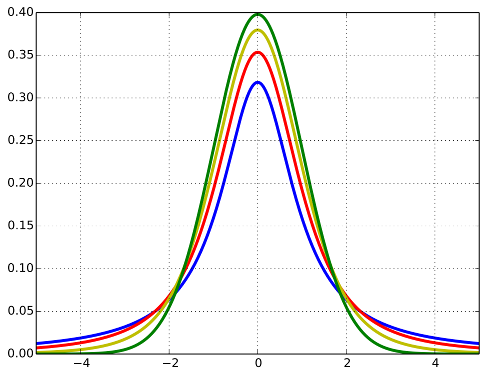
Chi-kwadrat



Normalny



F Snedecora



t-Studenta

1. Beta: (α, β) = **(0.5, 0.5)**, **(2, 5)**, **(1, 3)**, **(2, 2)**.
2. Cauchy'ego: γ = **0.5**, **2**, **1** ($x_0 = 0$), **1** ($x_0 = -2$).
3. Chi-kwadrat: k = **2**, **4**, **6**, **8**.
4. Snedecora: **(1, 1)**, **(2, 1)**, **(10, 1)**, **(100, 100)**.
5. Gamma: (α, β) = **(2, 0.5)**, **(3, 0.5)**, **(9, 2)**, **(7.5, 1)**.
6. Laplace'a: b = **1**, **2**, **4** ($\mu = 0$), **4** ($\mu = -5$).
7. Normalny: σ^2 = **0.2**, **1.0**, **5.0** (i $\mu = 0$), **0.5** (i $\mu = -2$).
8. t-Studenta: **1**, **2**, **5**, ∞ stopni swobody.
9. Weibull: $\lambda = 1$, k = **0.5**, **1**, **1.5**, **5**.
10. Wykładniczy: λ =, **2**, **1**, **0.5**, **0.25**.

Oznaczenia: f gęstość, F dystrybuanta, $\mathbb{E}$ nadzieja, $\mathbb{V}$ szaleństwo, M generator momentów, φ funkcja charakterystyczna.