Teoria węzłów

L. Aragonés

21 lutego 2016

Spis treści

1 Definicja węzła. Ruchy Reidemeistera 2

Rozdział 1

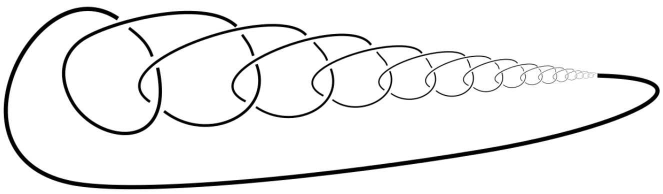
Definicja węzła. Ruchy Reidemeistera

Rozpoczynamy ten rozdział od sformułowania definicji węzła. Obiekt, który zaraz określimy, powinien odpowiadać naszym oczekiwaniom, posiadać własności węzłów (żeby móc się tak nazywać), a przy tym zachowywać jak największy stopień ogólności.

Wydaje się, że poniższa definicja jest dosyć rozsądna.

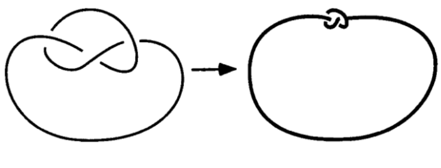
Definicja 1.0.1. *Węzłem nazywamy obraz gładkiej funkcji* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ *o nieznikającej pochodnej, która posiada następującą własność:* $f(u) = f(v)$ *wtedy i tylko wtedy gdy* $u - v \in \mathbb{Z}$.

Okazuje się jednak, że ma dość poważne wady. Nie dopuszcza wprawdzie węzłów dzikich (rysunek poniżej), które posiadają nieskończenie wiele „pętli". Sprawia ona jednak kłopot w określeniu, kiedy dwa węzły są równoważne.



Rysunek 1.1: Węzeł dziki.

Węzły K i J chcielibyśmy uważać za równoważne, jeżeli istnieje rodzina węzłów K_t dla $t \in [0, 1]$, taka że $K_0 = K$, $K_1 = J$ i K_t powinien „nie różnić się" znacznie od K_s dla $s \approx t$. Niestety umożliwia ona ściągnięcie każdej pętli do punktu.



Rysunek 1.2: Ściągnięcie pętli.

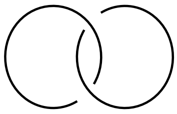
Rozwiązanie tych problemów jest zaskakująco proste: zamiast odwoływać się do pojęcia gładkiej krzywej, wystarczy posłużyć się łamaną. Posiada ona skończenie wiele wierzchołków, więc wyklucza z rozważań dzikie węzły. Pozwala również na podanie prostego opisu dozwolonych deformacji.

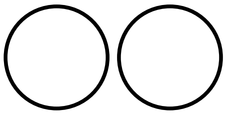
Skorzystamy z notacji $[p, q] := \{\lambda p + (1 - \lambda)(q - p) : \lambda \in [0, 1]\}$ dla różnych punktów $p, q \in \mathbb{R}^3$. Łamaną o parami różnych wierzchołkach $p_1, \ldots, p_n \in \mathbb{R}^3$ jest zbiór $\bigcup_{i<n} [p_i, p_{i+1}]$. Jeżeli $p_1 = p_n$, to łamana jest zamknięta. Łamana jest pozbawiona samoprzecięć, kiedy każdy jej punkt naeży do dokładnie jednego odcinka postaci $[p_i, p_{i+1}]$.

Definicja 1.0.2. *Węzeł to łamana zamknięta w* $\mathbb{R}^3$ *bez samoprzecięć.*

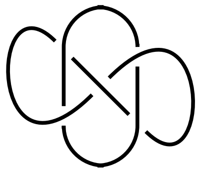
Zauważmy, że każdy węzeł jest jednoznacznie wyznaczony przez minimalny (w sensie zawierania) zbiór wierzchołków łamanej.

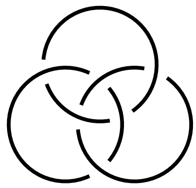
Definicja 1.0.3. *Splot to teoriomnogościowa suma skończenie wielu parami rozłącznych węzłów, zwanych składowymi.*

Przyklad 1.0.4. *Przykłady splotów:* 



x





„niesplot" *splot Hopfa* *splot Whiteheada* *pierścienie Borromeuszy*

Zajmiemy się teraz utożsamianiem tylko pozornie różnych węzłów.

Definicja 1.0.5. *O węźle* J *rozpiętym na wierzchołkach* $p_0, \ldots, p_n$ *mówimy, że powstaje przez elementarną definicję węzła* K *rozpiętego na* $p_1, \ldots, p_n$*, gdy* p_0 *nie leży na odcinku* $[p_1, p_n]$*, zaś przekrój trójkąta* $p_0 p_1 p_n$ *z* K *zawiera się w* $[p_1, p_n]$*.*

Przekształcenie odwrotne do elementarnej deformacji również jest elementarną deformacją.

Definicja 1.0.6. *Węzeł to łamana w* $\mathbb{R}^3$ *bez samoprzecięć.*