Równanie kwadratowe: jeżeli $ax^2+bx+c=0$, to $2ax=-b\pm(b^2-4ac)^{1/2}$. **Sześcienne** (metoda Viete'a): w równaniu $z^3+az^2+bz+c=0$ **Wi**
można podstawić $z=x-a/3$ (kasuje wyraz z z^2, do $x^3+px=q$) i $x=w-p/3w$, co po przemnożeniu przez $t=w^3$ daje $t^2-qt-(p/3)^3=0$. Istnieją też mniej wygodne rachunkowo wzory Cardano. Dla równania stopnia czwartego: wzory Ferrari, wyżej brak ogólnych rozwiązań (ze względu na teorię Galois i kłopotliwe $x^5+x+1=0$).

Każdy ciąg zstępujących przedziałów $[a_n,b_n]$ długości dążącej do zera (**gnieżdżący się**) wyznacza pewną liczbę rzeczywistą. Przykłady: **2.X**
pierwiastek z a_0b_0 i $a_{n+1}=H(a_n,b_n)$, $b_{n+1}=A(a_n,b_n)$; średnia arytmetyczno-geometryczna. **Ciąg liczbowy**: odwzorowanie $\mathbb{N}\to\mathbb{C}$. Jeśli $a_n>0$ i $a_{n+1}/a_n\to a$, to n-ty pierwiastek z a_n też dąży do a. **Dzielenie mnożeniem**: $x_{n+1}=x_n(2-ax_n)$ zbiega kwadratowo do $1/a$ dla $0<ax_0<2$. Podobnie można szukać pierwiastka z a (x_n zbiega kwadratowo, y_n: sześciennie). **Tw. o kanapce**: jeśli $a_n\le x_n\le b_n$, a przy tym a_n oraz b_n mają wspólną granicę s, to również x_n dąży do tej liczby.

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\bullet y_{n+1}=\frac{y_n^3+3ay_n}{3y_n^2+a}\qquad b_{n+1}-a_{n+1}\le_{\mathrm{HA}}\frac{(b_n-a_n)^2}{4a}\bullet b_{n+1}-a_{n+1}\le_{\mathrm{GA}}\frac{(b_n-a_n)^2}{8a}$$

Ciąg jest zbieżny (w dowolnie małym otoczeniu pewnego punktu znajdują się prawie wszystkie wyrazy) $\Leftrightarrow$ jest **ciągem Cauchy'ego**: jego **5.X**
dalekie wyrazy leżą dowolnie blisko siebie, $(\forall\varepsilon>0)(\exists M)(\forall n,m\ge M)(|a_n-a_m|<\varepsilon)$, gdyż $\mathbb{R}$ jest zupełną p. topologiczną. Ograniczony, monotoniczny $\Rightarrow$ zbieżny $\Leftrightarrow$ jeden punkt skupienia $\Rightarrow$ ograniczony. **Tw. Bolzano-Weierstraßa**: ograniczone ciągi mają podciągi zbieżne, nie tylko w $\mathbb{R}$ czy $\mathbb{C}$, ale też $\mathbb{R}^n$. Najmniejszy punkt skupienia: **granica dolna** ($\liminf$), największy: **górna** ($\limsup$). Dla każdego ciągu: khm-1, dla dodatniego: khm-2, uogólnienie **tw. Stolza** (jeśli b_n rośnie do nieskończoności, to $\lim_n(\Delta a_n/\Delta b_n)=\lim_n(a_n/b_n)$, o ile pierwsza granica istnieje) Mamy $\liminf_{n\to\infty}x_n:=\lim_{n\to\infty}\inf_{m\ge n}x_m=\sup_{n\ge0}\inf_{m\ge n}x_m$, analogicznie granica górna. Punkt skupienia: granica podciągu.

$$\inf a_n\le\liminf a_n\le\limsup a_n\le\sup a_n\bullet\liminf_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\liminf_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\limsup_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}\le\limsup_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

Dla **szeregów** zbieżność absolutna ($\sum|a_n|$) $\Rightarrow$ bezwarunkowa ($\sum_\sigma a_n$) [w $\mathbb{R}^n$ nawet $\Leftrightarrow$]. Suma odwrotności liczb całkowitych, które nie **6.X**
zawierają ustalonego infiksu (długości k), jest zbieżna (szereg Kempnera, 1914), mniej więcej do $10^k\log 10$. Parz artykuł R. Bailliego.

Cauchy: $\sum_n a_n$ zbieżny $\Leftrightarrow$ dla każdej $\varepsilon>0$ oraz dużych m,n jest $|a_m+\cdots+a_n|<\varepsilon$, wtedy $a_n\to0$ (**zerowe**).

Tylko dla dodatnich „a_n"! **Haupt**: zbieżność $\Leftrightarrow$ ograniczoność sum częściowych. **Leibniz**: a_n maleje do $0\Rightarrow$ naprzemienny $\sum_n(-1)^na_n$ zbiega. **Grenzwert**: $\lim_n a_n:b_n=c>0$ sprawia, że $\sum_n a_n$ zbiega jak $\sum_n b_n$. **Wurzel**: jeśli $L<1$, to $\sum_n a_n$ zbiega bezwzględnie, jeśli $L>1$, to nie zbiega ($L=\limsup|a_n|^{1:n}$) **d'Alembert**: to samo dla $q=\lim|a_{n+1}/a_n|$]. **Raabe**: $r_n\ge r>1\Rightarrow\sum_n a_n$ zbiega [$r_n=n(a_n:a_{n+1}-1)$], dla $r_n\to1$ brak informacji, $r_n<1$: brak zbieżności. **Kummer**: ciąg $c_n\in\mathbb{N}$ jest taki, że $\sum_n 1:c_n$ rozbiega, niech $k_n=c_na_n:a_{n+1}-c_{n+1}$. Jeśli $k_n\ge\delta>0$, to szereg zbiega, jeśli $k_n\le0$, to nie. Dla $c_n=1$ d'Alembert, dla $c_n=n$ Raabe, dla $c_n=n\log n$ **Bertrand**: dla $b_n=\log n(r_n-1)\to b$ (być może $b=\infty$): jeśli $b>1$, to szereg zbiega, jeśli $b<1$, to nie. **Gauß**: a_n spełniają równość dla $\lambda>1$ i ograniczonych $\tau_n\Rightarrow\sum a_n$ zbiega $\Leftrightarrow$ $\alpha>1$. **Integral**. [malejąca $f\ge0$] $\sum_{n\ge p}f(n)$ sumowalny $\Leftrightarrow f$ całkowalna nad $[p,\infty)$. **Ermakow**: [malejąca $f\ge0$] jeśli dla dużych x prawdą jest $f(e^x)e^x:f(x)\le q<1$, to $\sum_n f(n)$ zbiega, jeśli $\ldots\ge1$, to szereg rozbiega. **Verdichtung**: a_n maleje do $0\Rightarrow\sum_n a_n$ jest jak $\sum_n 2^na_{2^n}$.

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\alpha}{n}+\frac{\tau_n}{n^\lambda}\bullet\sum_{n=p+1}^{\infty}f(n)\le\int_p^\infty f(x)\,dx\le\sum_{n=p}^{\infty}f(n)$$

Abel: $\sum_n b_n$ zbieżny, a_n monotoniczny i ograniczony $\Rightarrow\sum_n a_nb_n$ zbieżny. **Dirichlet**: a_n zbieżny do zera, sumy częściowe b_n ograniczone $\Rightarrow\sum_n a_nb_n$ zbieżny. **Majorantowe** [$A=\sum_n a_n$, $B=\sum_n b_n$, $|a_n|\le b_n$]: B zbieżny $\Rightarrow A$ też (bezwzględnie). **Schlömilch**: szeregi $\sum_n x_n$ oraz $\sum_n(g_{n+1}-g_n)x(g_n)$ są tak samo zbieżne, gdy g_n jest ściśle rosnący, z temperowanym wzrostem ($g_{n+1}-g_n\le M(g_n-g_{n-1})$), zaś x_n ściśle malejący, dodatni. Schlömilch $\Rightarrow$ zagęszczanie, Raabe. Kummer $\Rightarrow$ Gauß, Bertand $\Rightarrow$ Raabe $\Rightarrow$ d'Alembert.

Specjalne twierdzenia. **Landau** (1906): szereg $\sum_{n\ge1}a_n:n^x$ (Dirichleta) zbiega dla $x\notin-\mathbb{N}$ dokładnie wtedy, gdy $\sum_{n\ge1}n!a_n:[x\cdot\ldots\cdot(x+n)]$ zbiega. **Knopp**: jeśli szereg $\sum_n a_n$ zbiega, to $\sum_n a_nx^n:(1-x^n)$ też, dla wszystkich x o module różnym od 1. Jeżeli nie, to dokładnie tam, gdzie $\sum_n a_nx^n$ zbiega i $|x|\ne1$ (sam szereg jest Lamberta). Produkt $\prod_{n\ge1}a_n$ zbiega, gdy ciąg iloczynów częściowych ma niezerową granicę. Dla $a_n=1+p_n$ (i być może zespolonych p_n) jest to równoważne zbieżności $\sum_n p_n$, o ile $\sum_n|p_n|^2<\infty$.

Przyspieszanie zbieżności: ciąg s_n zbieżny do s zastępujemy przez s'_n (o tej samej granicy), tak że khm-1. **Przekształcenie Eulera**: khm-2, **Wi**
gdzie operator różnicy do przodu zadany jest wzorem khm-3. **Przekształcenie Kummera**: jeśli mamy zbieżny szereg $\sum_{k\ge0}a_k$ i zbieżny szereg $c=\sum_{k\ge0}c_k$, że $\lim_k a_k:c_k=\lambda\ne0$, to khm-4. **Proces Δ^2-Aitkena:** zamiast x_n patrzymy na $(Ax)_n=x_n-(\Delta x_n)^2:\Delta^2x_n$, czasem działa.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s'_n-s}{s_n-s}=0\bullet\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^na_n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\Delta^na_0}{2^{n+1}}\bullet\Delta^na_0=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}a_{n-k}\bullet\sum_{k=0}^{\infty}a_k=\lambda c+\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\lambda\frac{c_k}{a_k}\right)a_k$$

Tutaj I jest niepustym zbiorem z funkcją $a\colon I\to C$ (rodzina l. zespolonych a jest indeksowana przez I) i $E(I)$, rodziną jego skończonych **6.3**
podzbiorów. Kładziemy $a_J:=\sum_{i\in J}a_i$ (suma częściowa), $|a|_J:=\sum_{i\in J}|a_i|$. Rodzina $(a_i)_{i\in I}$ jest **sumowalna**, gdy istnieje liczba $s\in\mathbb{C}$ (**suma**), że każdemu $\varepsilon>0$ odpowiada skończony I_ε, dla którego $I_\varepsilon\subseteq J\in E(I)$ pociąga $|s-a_J|\le\varepsilon$. Sumowalność $(a_i)_{i\in I}\Leftrightarrow\{|a|_J:J\in E(I)\}$ jest ograniczony w $\mathbb{R}$. Permutacje nie zmieniają sumowalności, a przy tym sumowalność dla $I=\mathbb{N}$ to bezwzględna zbieżność (wniosek: pierwsza linijka w 6.X, „Umordnungsatz"). **Wielkie prawo przestawień**: rodzina $(a_i)_I$ sumowalna, I_k dla $k\in K$ stanowią rozbicie $I\Rightarrow$ khm-1. **Prawo podwójnych szeregów**: khm-2 dla bezwzględnie sumowalnej $(a_{ik})_{I\times K}$. **Iloczyn Cauchy'ego** (dyskretny splot) absolutnie zbieżnych szeregów też taki jest. **Tw. Mertensa**: wystarczy jeden absolutnie zbieżny czynnik, ale wtedy produkt jest tylko zbieżny.

$$\sum_{i\in I}a_i=\sum_{k\in K}s_k=\sum_{k\in K}\sum_{i\in I_k}a_i\bullet\sum_{(i,k)\in I\times K}a_{ik}=\sum_{i\in I}\sum_{k\in K}a_{ik}=\sum_{k\in K}\sum_{i\in I}a_{ik}\bullet\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$$

Tw. Riemanna: wyrazy szeregu zbieżnego warunkowo można przestawić tak, by nowy szereg miał inną granicę lub był rozbieżny. **Tw.** **Wi**
Steinitza: uogólnienie powyższego z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}^n$, zbiór możliwych granic jest podprzestrzenią afiniczną w $\mathbb{R}^n$. W przypadku ∞-wymiarowych p. Banacha przestaje to być prawdą, zawsze żyje w nich szereg o dwóch (możliwych) granicach (Kadets, 1989?).

Szereg potęgowy: jest ciągły w kole zbieżności. Dla $|z|<r$: zbieżny bezwzględnie, dla $|z|>r$: rozbieżny. $r=1/\left(\limsup\sqrt[n]{a_n}\right)$ (Cauchy, **6.4**
Hadamard); $r=1/\left(\lim|a_{n+1}/a_n|\right)$, o ile granica istnieje (Euler). **Tw. Abela**: jeśli $f(x)=\sum a_nx^n$ jest zbieżny na końcu przedziału zbieżności, to $f(x)$ jest tam jednostronnie ciągła. Jeśli nie wszystkie $a_n=0$, to istnieje otoczenie zera bez zer szeregu potęgowego.

Szeregi rozbieżne $\sum_{n\ge0}a_n$ można wysumować alternatywnymi metodami, jeżeli te są liniowe oraz nie zmieniają wartości już zbieżnych szeregów. Niech $A_n=\sum_{k\le n}a_k$. Średnie (khm-3), „pociągają" Abela-Poissona (khm-2, granica i szereg dla $|x|<1$ istnieją, „prawdziwych" dla khm-1 (**Tauber**)) z tą samą granicą. Woronoj: khm-4, regularny $\Leftrightarrow p_n:P_n\to0$. Borel: khm-5.

$$\sum_{k\le n}\frac{k}{n}a_k\to0\bullet\lim_{x\to1}\sum_n a_nx^n\bullet\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k\le n}A_k\bullet\lim_{n\to\infty}\sum_{k\le n}A_kp_{n-k}:P_n\bullet\lim_{x\to\infty}e^{-x}\sum_{n\ge0}\frac{A_n}{n!}x^n$$

Ciągłość funkcji $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$: **zwykła** (każdym $\varepsilon > 0$ i x odpowiada $\delta > 0$, że $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$), **jednostajna** (każdemu $\varepsilon > 0$ 7.1
odpowiada $\delta > 0$, że $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$), **Lipschitza** (istnieje $L > 0$, że $|f(x) - f(y)| \le L|x - y|$; dla $L < 1$: f to **kontrakcja**) oraz 7.2
Höldera (istnieją $C > 0$ i $0 < a < 1$, że $|f(x) - f(y)| \le C|x - y|^a$). Suma, produkt i złożenie ciągłych funkcji są ciągłe. Odwrotna do injekcji z 7.4
przedziału $[a, b]$ też. **Tw. o wartości średniej**: ciągła funkcja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ przyjmuje wszystkie wartości między $f(a)$ i $f(b)$ co najmniej raz.

Ciągła funkcja $((K \subseteq_k \mathbb{C}) \to \mathbb{R})$ jest ograniczona (Weierstraß), jednostajnie ciągła (Heine, Cantor) i osiąga swoje kresy. **Tw. szlabanowe**: 7.5
różalna funkcja na przedziale o ograniczonej pochodnej jest lipschitzowska. **Tw. Aleksandrowa**: jeśli $(U \subset \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ jest wypukła, to jej
druga pochodna istnieje p.w. **Tw. Rademachera**: jeśli $(U \subseteq_o \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^m$ jest Lipschitza, to nie jest różalna na Le-zerowym zbiorze.

Ciąg funkcyjny f_n zbiega do f (punktowo), gdy $f_n(x)$ dąży do $f(x)$ dla wszystkich argumentów z dziedziny. Ograniczone funkcje mają 7.3
skończoną **normę supremum**, $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in D\}$. Szereg $\sum_{n=1}^\infty f_n$ zbiega **normalnie**, gdy f_n są ograniczone oraz $\sum_{n=1}^\infty \|f_n\| < \infty$.
Jeśli składniki f_n są ciągłe, to cała suma także; zatem szeregi potęgowe definiują ciągłe funkcje w kole zbieżności.

Jeśli $z_n \to z \in \mathbb{C}$, to mamy khm-1, **eksponensę** $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Rozwiązaniem układu $f(z + w) = f(z)f(w)$, $\lim_{z\to 0} \frac{1}{z}[f(z) - 1] = c$ $(\mathbb{C} \to \mathbb{C})$ 8.1
jest funkcja $\exp(cz)$. Eksponensa jest nieujemna i rosnąca na $\mathbb{R}$, rośnie szybciej od dowolnego wielomianu. **Logarytm** to funkcja odwrotna ...
do eksponensy, rośnie wolniej od pierwiastków. Potęgowanie: $x^y = \exp(y \ln x)$. W B_s i L, $x \in (-1, 1)$. Mamy: $\lim_{s\to 0} \frac{1}{s}[B_s(z) - 1] = L(z)$ 8.10
i $B_s B_t = B_{s+t}$. **Trygonometria**: $2i \sin z = \exp iz - \exp -iz$, $2 \cos x = \exp iz + \exp -iz$. Najmniejsze dodatnie miejsce zerowe dla $\cos\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
to $\pi/2$. **Logarytm** $w = |w| \exp i\varphi$ to $\ln |w| + i\varphi$ (cięcie wzdłuż $(-\infty, 0]$). Jeśli $\Re w_1, \Re w_2 > 0$, to $\ln w_1 w_2 = \ln w_1 + \ln w_2$.

$$\exp z := \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{k!} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z_n}{n}\right)^n \bullet B_s(x) = \sum_{n=0}^\infty \binom{s}{n} \cdot x^n = (1 + x)^s \bullet L(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n = \log(1 + x)$$

Hiperboliczne: wykresem $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ jest hiperbola. Krzywa łańcuchowa: $a \cosh(x/a)$, łańcuch wiszący na dwóch punktach. 8.12
Reguła Osborna: wziąć tożsamość trygonometryczną dla całkowitych potęg $\sin x$, $\cos x$, zamienić je na funkcje hiperboliczne i odwrócić znak
iloczynów $4k + 2$ funkcji sinh. Dla zespolonych x, trzeba się trochę namęczyć z odwrotnymi hiperbolicznymi.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \bullet \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \bullet \operatorname{asinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \bullet \operatorname{acosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \bullet \operatorname{atanh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}$$

Różniczkowalność (istnieje $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}[f(x) - f(x_0)]/(x - x_0)$) $\Rightarrow$ ciągłość. Równanie stycznej: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. 9.1
Warunek konieczny dla lokalnego ekstremum: $f'(x) = 0$ (jeśli istnieje). **Gładka**: pochodne wszystkich rzędów, **analityczna**: gładka i zgodna z 9.2
rozwinięciem Taylora. **Tw. Rolle'a**: Lagrange'a, $f(a) = f(b)$. **Tw. Lagrange'a**: Cauchy'ego, $g(x) = x$. **Tw. Cauchy'ego**: ciągłe $f, g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ 9.3
mają pochodne w (a, b) i $g'(x) \neq 0$ tamże. **Reguła szpitalna**: dla „nieoznaczoności” $0/0$, ∞/∞ mamy $\lim f(x)/g(x) = \lim f'(x)/g'(x)$, o
ile prawa strona istnieje. Poniżej: twierdzenie Cauchy'ego, reguły różniczkowania.

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \text{ dla pewnego } c \bullet (fg)' = fg' + f'g \bullet \left[\frac{f}{g}\right]' = \frac{f'g - g'f}{g^2} \bullet (f \circ g)' = (f' \circ g)g' \bullet (f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Różniczkowalność szeregu funkcyjnego. *Wersja 1*: $f_n\colon I \to \mathbb{C}$ różalne, $\sum_n f_n$ zbiega punktowo, zaś $\sum_n f_n'$ normalnie: $f = \sum_n f_n$ można 9.5
różniczkować wyraz po wyrazie. *Wersja 2*: f_n różalne w x_0, $\sum_n f_n$ zbiega punktowo, $\sum_n f_n'(x_0)$ zbiega, f_n są Lipschitza (ze stałymi L_n tak,
że szereg $\sum_n L_n$ też zbiega): ten sam wniosek w x_0. Zatem szeregi potęgowe można różniczkować do woli. Weierstraß 1872, Hardy 1916: dla
$0 < a < 1$ i $ab \ge 1$ funkcja $\sum_{n\ge 0} a^n \cos b^n \pi x$ jest wszędzie ciągła, ale nigdzie nie ma pochodnej. Jeśli $f_n\colon I \to \mathbb{C}$ są różalne, zaś szeregi $\sum_n f_n$,
$\sum_n f_n'$ zbiegają normalnie, to $f'/f = \sum_{n=1}^\infty f_n'/(1 + f_n)$ dla $f_n(x) \neq -1$ i $f = \prod_{n\ge 1}(1 + f_n)$.

Funkcja jest **wypukła** (wklęsła: $\le \to \ge$), jeśli dowolny łuk wykresu funkcji leży pod (nad) cięciwą wyznaczoną przez końce tego łuku. Jeżeli 9.7
pochodna w przedziale (a, b) istnieje, to musi rosnąć (jest tak np. gdy $f'' \ge 0$). Tam, gdzie zmienia się „wypukłość”, jest **punkt przegięcia**.
Ogólnie: dla $0 \le \lambda \le 1$ jest $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \le \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$. Jensen i towarzysze. **Funkcja pierwotna** dla $f\colon I \to \mathbb{C}$: ciągła $F\colon I \to \mathbb{C}$, 9.10
której pochodna to prawie wszędzie f. Każdy szereg potęgowy ma pierwotną w kole zbieżności („całka” wyraz po wyrazie).

Funkcja schodkowa: $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, „stała na przedziałach”. Całka z takiej to suma pól prostokątów; jest liniowa i monotoniczna. Funkcja 11.1
regałowa: $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$, gdy ma wszędzie obustronne granice. Dla funkcji ze zwartego przedziału (równoważnie): dla każdej $\varepsilon > 0$ istnieje f. 11.2
schodkowa φ, taka że $\|f - \varphi\| \le \varepsilon$. Monotoniczna $\Rightarrow$ regałowa $\Rightarrow$ p.w. ciągła. Regał o zwartej dziedzinie jest ograniczony. Jeśli $f\colon [a, b] \to \mathbb{C}$ 11.3
jest regałem, to **całką** z niego jest granica całek z φ_n, jeśli $\|f - \varphi_n\| \to 0$. Zawsze istnieje i nie zależy od ciągu φ_n. Jeśli $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ jest ciągła,
zaś $p\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ nieujemnym regałem, to wartość całki z $f(x)p(x)$ pokrywa się z $f(\xi)$-krotnością całki z $p(x)$ dla pewnego $a \le \xi \le b$ (**tw. o
wartości średniej**); p często nazywa się funkcją ciężaru. Nieujemny regał całkujący się do zera jest zerem tam, gdzie jest ciągły (p.w.).

Hauptsatz: dla regałowej $f\colon I \to \mathbb{C}$ z ustalonym $a \in I$, funkcja F jest pierwotną: jednostronne pochodne F pokrywają się z jednostronnymi 11.4
granicami f. Całka z f nad $[a, b]$ to $\Phi(b) - \Phi(a)$, (Φ: dowolna pierwotna f). **Całkowanie czosnkowe**: jeśli $u, v\colon I \to \mathbb{C}$ są **p.w. ciągle różalne**
(pierwotne jakiejś regałowej), to uv też i $\int uv' = uv - \int u'v$. **Przez podstawienie**: jeśli G jest pierwotną regałowej $g\colon I \to \mathbb{C}$, $t\colon [a, b] \to I$
ciągle różalna i rosnąca, to $G \circ t$ jest pierwotną dla $(g \circ t) \cdot t'$ i khm-2. Khm-3: $I_k \subseteq \mathbb{R}$ to przedziały, $f\colon I_1 \to I_2$ ciągła, odwracalna, z pierwotną
F (tw. Laisanta, 1905, bez założenia o różniczkowalności f^{-1} czy f!).

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \bullet \int_a^b g(t(x)) \cdot t'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{t(a)}^{t(b)} g(t)\,\mathrm{d}t \bullet \int f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y = yf^{-1}(y) - F(f^{-1}(y)) + C$$

Do scałkowania elementów $\mathbb{R}(x)$ wystarczą funkcje wymierne, logarytmy i arkus tangens. Zalecane podstawienia: 11.6

1. dla $R(x, (ax + b)^{1/n})$ jest to $t = (ax + b)^{1/n}$;
2. dla $R(\exp ax)$: $t = \exp ax$;
3. dla $R(\cos\theta, \sin\theta)$: $t = \tan(\theta : 2)$, wtedy $\cos\theta = (1 - t^2)(1 + t^2)^{-1}$, $\sin\theta = 2t(1 + t^2)^{-1}$, $\mathrm{d}\theta = 2(1 + t^2)^{-1}\,\mathrm{d}t$.
4. całkę z $R(x, (ax^2 + 2bx + c)^{1/2})$, gdzie $(\Delta = 4(a^2 - bc) \neq 0)$, można uprościć za Eulerem (po prostych przekształceniach):

$(a, b, c) = (1, 0, 1)$	$x = \sinh u$	$\sqrt{t^2 + 1} = \cosh u$	$\mathrm{d}t = \cosh u\,\mathrm{d}u$
$(a, b, c) = (1, 0, -1)$	$x = \pm\cosh u$	$\sqrt{t^2 - 1} = \sinh u$	$\mathrm{d}t = \sinh u\,\mathrm{d}u$
$(a, b, c) = (-1, 0, 1)$	$x = \pm\cos u$	$\sqrt{1 - t^2} = \sin u$	$\mathrm{d}t = \mp\sin u\,\mathrm{d}u$

Całka eliptyczna: z $R(x, y)$, gdzie y to pierwiastek z P, $\mathbb{R}$-wielomianu stopnia 3 lub 4 bez wielokrotnych pierwiastków.

1. Funkcję $R(x, y)$ doprowadzamy do postaci $(A + By) : (C + Dy)$, a potem do $R_1 + R_2 : y$, gdzie $R_1, R_2 \in \mathbb{R}(x)$.
2. Drugi składnik (R_2) rozbijamy na wielomian i część ułomną, to znaczy kombinację I_n oraz J_m.
3. (dla P stopnia 3) $\frac{d}{dx}(x^n y) = (nx^{n-1}P + \frac{1}{2}x^n P') : y$, w prawym nawiasie żyje $a_n x^{n+2} + b_n x^{n+1} + c_n x^n + d_n x^{n-1}$ $(a_n \neq 0, d_n = nP(0))$.

4. Skoro tak, możemy podzielić przez y i scałkować dla $n \geq 1$: $a_n I_{n+2} + b_n I_{n+1} + c_n I_n + d_n I_{n-1} = x^n y$, $a_0 I_2 + b_0 I_1 + c_0 I_0 = y$.
5. Wynika stąd, że I_k dla $k \geq 2$ jest kombinacją I_0, I_1 i $x^a y$ dla $a \geq 0$, podobnie: J_k jest kombinacją J_1, I_0, I_1, $y : (x-c)^b$, $b \geq 1$.
6. Jeżeli P był czwartego stopnia, podstawowymi budulcami są I_0, I_1, I_2, J_1.
7. Redukujemy P do normalnej formy. Jeśli $\deg P = 3$, istnieje podstawienie $x = at + b$, że $Q(t) := P(at+b)$ ma postać $4t^3 - g_2 t - g_3$.
8. Tak sprowadza się I_0, I_1, J_1 do **normalnej formy Weierstraßa**: całek z $\mathrm{d}t : \sqrt{Q}$, $t\mathrm{d}t : \sqrt{Q}$ i $\mathrm{d}t : [(t-c)\sqrt{Q}]$
9. Jeśli $\deg P = 4$ i jego współczynniki są dodatnie, istnieje wielomian $Q(t) = (1-t^2)(1-k^2t^2)$ i podstawienie $x = (at+b) : (ct+d)$, że $\mathrm{d}x : P(x)^{1/2} = \alpha \mathrm{d}t : Q(t)^{1/2}$ dla pewnej stałej α. Liczba k to dwustosunek rosnących miejsc zerowych P i zwie się **modułem** całki.
10. Całkę z $t : Q^{1/2}$ można uprościć przez $u = t^2$, pozostałe trzy dają **normalną formę Legendre'a**.
11. Kończymy żmudny proces przez $t = \sin\varphi$. Definiujemy trzy całki: F (1. rodzaju), E (2. rodzaju), $K(k) = F(\pi : 2, k)$ (1. zupełna).
12. Każda spełnia swoje równanie różniczkowe i **relację Legendre'a**: $K(k)E(k') + E(k)K(k') - K(k)K(k') = \pi : 2$, gdzie $k' = (1-k^2)^{1/2}$.

$$I_n = \int \frac{x^n}{\sqrt{P}}\,\mathrm{d}x \bullet J_m = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-c)^m\sqrt{P}} \bullet F(\varphi,k) = \int_0^\varphi \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}} \bullet E(\varphi,k) = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

Normalnie zbieżny szereg funkcyjny na zwartym odcinku (składniki: regały) sam jest regałem i można całkować go wyraz po wyrazie. 11.7
Suma riemannowska: $\sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$, gdzie $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$, x_k to punkty podziału Z dla $[a,b]$ ($f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$). Jeśli f jest regałem, 11.8
to każdy $\varepsilon > 0$ ma $\delta > 0$, że suma riemannowska dla podziału drobniejszego niż δ różni się od całki z f nad $[a,b]$ o mniej niż ε. **Niewłaściwa 11.9
całka**: całka z f nad niezwartym przedziałem to stosowna granica nad coraz większymi zbiorami: $[a,\beta]$ dla $\beta \uparrow b$ zamiast $[a,b)$, $[c,b)$ i $(a,c]$ zamiast (a,b) (jeżeli ma sens dla jednego c, to dla każdego). Gdy całka z regału g nad $[a,b)$ istnieje i $|f| \leq g$, to (regału!) f też.

Prosty wzór Eulera, $\sum_{j=1}^n f(j) = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + [f(1)+f(n)]/2 + \int_1^n (Hf')(x)\,\mathrm{d}x$, działa dla ciągle różalnej $f\colon [1,n] \to \mathbb{C}$. Funkcja H 11.10
jest określona wzorem $x - [x] - 1/2$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $H[\mathbb{Z}] = \{0\}$. Potrzebujemy całej rodziny $H_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$: $H_1 = H$, zaś H_k to pierwotna dla H_{k-1} całkująca się do zera nad $[0,1]$ o okresie 1, wystarczy przyjąć $H_k = \frac{1}{k!}B_k$ dla $x \in (0,1)$: to daje **trudny** wzór Eulera ($k \geq 1$, $f \in \mathscr{C}^{2k+1}$).

$$\sum_{j=1}^n f(j) = \int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{f(1)+f(n)}{2} + \sum_{m=1}^k H_{2m}(0) f^{(2m-1)}\Big|_1^n + \int_1^n H_{2k+1} f^{(2k+1)}\,\mathrm{d}x$$

Wielomian Taylora (khm-1) dla n-różalnej funkcji f z błędem $R_{n+1} = f - T_n f$, jeśli f można jeszcze raz zróżniczkować, to khm-2. Khm-3 14.1
to **reszta Lagrange'a** dla ξ między a i x. **Szereg Taylora**: „$T_\infty f(x;a)$”. Składanie szeregów: jeśli $g(w) = \sum_{n=0}^\infty c_n w^n$ zbiega dla $|w| < R_g$, zaś $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_k z^k$ dla $|z| < R_f$ oraz $|a_0| < R_g$, to $g \circ f$ rozwija się w szereg potęgowy blisko zera (zbiega na dysku $K_r(0)$, że $\sum_{k=0}^\infty |a_k| r^k < R_g$). Szereg potęgowy z „$f(0) \neq 0$” można odwrócić (i rozwinąć). Szereg w dużym kole można rozwinąć na nowo w każdym mniejszym.

$$T_n f(x;a) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \cdot (x-a)^k \bullet R_{n+1}(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n\,\mathrm{d}t \bullet R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}$$

Ważniejsze rozwinięcia : $(1-x)^{-1} =_1 \sum_{n\geq 0} x^n$, $(1+x)^{1/2} =_1 \sum_{n\geq 0}[(-1/4)^n (2n)! x^n]/[(1-2n)(n!)^2]$ oraz pięć poniższych. Są one **Wi**
prawdziwe dla $|x| < 1$ (1), $|x| < 1$ lub $x = 1$ (2), $|2x| < \pi$ (3).

$$\log 1 + x =_2 \sum_{n\geq 1} \frac{(-x)^n}{-n} \bullet \log\frac{1+x}{1-x} = \sum_{n\geq 0} \frac{2x^{2n+1}}{2n+1} \bullet \sin x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \bullet \cos x = \sum_{n\geq 0} \frac{(-x^2)^n}{(2n)!} \bullet \tan x =_3 \sum_{n\geq 1} \frac{B_{2n}(1-4^n)}{(2n)!(-1/4)^n} x^{2n-1}$$

Napiszmy $f(z) = z/(e^z - 1) = \sum_{k=0}^\infty B_k z^k/k!$ (**liczby Bernoulliego**). Dla każdego $w \in \mathbb{C}$ funkcja $z \mapsto \exp(wz)f(z)$ rozwija się w szereg 14.3
blisko 0, $\sum_{k=0}^\infty B_k(w) z^k/k!$; $B_k(w) = \sum_{m=0}^k C_m^k B_m w^{k-m}$ (**wielomiany**). $\sum_{t=1}^n t^k = [B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}]/(k+1)$.

Funkcje zespolone f_n o wspólnej dziedzinie zbiegają **jednostajnie** do funkcji f, gdy norma supremum $f_n - f$ dąży do zera. Szereg zbieżny 15.1
normalnie ⇒ jednostajnie (jako ciąg), równoważności nie ma: $\log(1+x) = -\sum_{k\geq 1}(-x)^k : k$ na $[0,1]$. Jednostajna granica funkcji ciągłych (albo regałów) jest ciągła (regałem) Jeżeli $f_n\colon I \to \mathbb{C}$ są ciągle różalne, zbiegają punktowo i mają jednostajnie zbieżne pochodne, to można ciągle zróżniczkować granicę: $f'(x) = \lim_n f_n'(x)$.

Cauchy: f_n zbiega jednostajnie ⇔ $(\forall\varepsilon > 0)(\exists N)$, $m, n \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\| \leq \varepsilon$. **Dirichlet**: $f_n\colon D \to \mathbb{R}$, $a_n\colon D \to \mathbb{C}$, $f_n(x)$ jest n-malejący, 15.2
$f_n \rightrightarrows 0$ i $\|\sum_{k=1}^n a_k\|_D$ są ograniczone: $\sum_{n=1}^\infty a_n f_n$ zbiega jednostajnie. Szczególny przypadek: $a_n = (-1)^n$. **Abel**: f_n, a_n te same, $f_n(x)$ jest 15.3
n-malejący, $\|f_n\|$ wspólnie ograniczone, $\sum_{n=1}^\infty a_n$ zbiega jednostajnie na D: $\sum_{n=1}^\infty a_n f_n$ też. Potęgowy **wniosek Abela**: jeżeli szereg potęgowy $f(x)$ zbiega dla $x = R$, to na $[0,R]$ jest funkcją ciągłą i zbiega tamże jednostajnie. **Weierstraß**: $\sum_n c_n < \infty$, $|f_n(x)| \leq c_n$: $\sum_n f_n$ jednozbiega. **Dini** (1878?): monotoniczny ciąg funkcji ciągłych $X \to \mathbb{R}$ (X: zwarta) ma ciągłą granicę punktową ⇒ zbiega do niej jednostajnie.

Ciąg regałów $\delta_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest **ciągiem Diraca**, gdy $\delta_k \geq 0$ całkują się do 1 oraz każde $\varepsilon > 0$ i $r > 0$ mają N, że $k \geq N$ pociąga khm-1+2. 15.5
Taki jest $\delta_k = \frac{k}{2}$ na $[-1/k, 1/k]$ albo ciąg **jąder Landaua**, $(1-t^2)^k : c_k$ na $[-1,1]$, gdzie c_k to całka z $(1-t^2)^k$ nad $[-1,1]$. **Aproksymacyjne tw.**: jeśli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jest ciągła, ograniczona, zaś δ_k to ciąg Diraca i wszystkie δ_k lub f są zwarcie niesione, to $f_k = f * \delta_k$ dąży punktowo do f (jednostajnie, jeśli f jest jednostajnie ciągła). **Tw. aproksymacyjne Weierstraßa**: każda ciągła funkcja na zwartym odcinku jest jednostajną granicą pewnych wielomianów. Stone znacznie je uogólnił (do zwartych przestrzeni, $\mathbb{C}$, kwaternionów albo C^* algebr), patrz: topologia.

$$\int_{-r}^r \delta_k(t)\,\mathrm{d}t > 1 - \varepsilon \bullet \left|\int_{-r}^r \delta_k(t)\,\mathrm{d}t - 1\right| < \varepsilon$$

Wielomian trygonometryczny to skończona kombinacja funkcji $e_k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $e_k(x) = \exp(ikx)$ dla $k \in \mathbb{Z}$. **Jądro Dirichleta**, $D_n = \sum_{k=-n}^n e_k$ 16.1
oraz **Fejera**, $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} D_k$. Lokalnie I jest odcinkiem długości 2π, zaś $\mathcal{R}$ przestrzenią wektorową 2π-okresowych regałów. Wtedy $*$ jest **splotem**; splot z e_k prowadzi do **współczynników Fouriera**. Splot z F_n to wielomian Fejera σ_n, z D_n: Fouriera S_n. Dla ciągłego regału 2π-okresowego f na całym $\mathbb{R}$ mamy $\sigma_n f \rightrightarrows f$, bez ciągłości wiemy tylko, że $\sigma_n f(x) \to \frac{1}{2}(f(x^-) + f(x^+))$, to jest **tw. Fejéra**. $S_n f = \sum_{|k|\leq n} \widehat{f}(k) e_n$

$$D_n(x) = \frac{\sin(n+0.5)x}{\sin 0.5x} \bullet F_n(x) = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin 0.5nx}{\sin 0.5x}\right)^2 \bullet (f * g)(x) = \int_I \frac{f(t)g(x-t)}{2\pi}\,\mathrm{d}t \bullet \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_I f(t)\exp(-ikt)\,\mathrm{d}t$$

Tutaj funkcja f jest 2π-okresowa. **Szereg Fouriera** Sf: punktowa granica $S_n f$, jeśli istnieje ($\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^\infty (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, opis a_k, 16.2
b_k niżej). **Tw. Dirichleta**: jeżeli f ma obie pochodne jednostronne w x, to $Sf(x) = \frac{1}{2}[f(x-) + f(x+)]$. **Tw. Carlesona** (1964): szereg Fouriera 16.3
ciągłej funkcji f zbiega do niej prawie wszędzie. **Lemat Riemanna-Lebesgue'a**: jeżeli $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ jest regałem, to khm-3. **Iloczyn skalarny**, 16.5
całka z $f \cdot \overline{g} : (2\pi)$ nad $[-\pi,\pi]$, daje normę L^2. Skoro $\|f - S_n f\|_2^2 = \|f\|_2^2 - \sum_{|k|\leq n} |\widehat{f}(k)|^2 < \|f - T\|_2^2$ dla $T \neq S_n f$, to wielomiany Fouriera są najlepszym trygonometrycznym przybliżeniem. **Nierówność Bessela**: khm-4 dla $f \in \mathcal{R}$, poprawi się wkrótce do równości. **Tw. Hunta** (1968) uogólnia wynik Carlesona: szereg Fouriera okresowej funkcji $f \in L^p$ zbiega do f prawie wszędzie, gdy $p > 1$.

$$a_k = \int_{-\pi}^\pi \frac{f(x)}{\pi}\cos kx\,\mathrm{d}x \bullet b_k = \int_{-\pi}^\pi \frac{f(x)}{\pi}\sin kx\,\mathrm{d}x \bullet \lim_{p\to\infty}\int_a^b F(x)\sin px\,\mathrm{d}x = 0 \bullet \sum_{-\infty}^\infty |\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{-\infty}^\infty |\langle f \mid e_k\rangle|^2 \leq \|f\|_2^2$$

Reguła pochodnej: jeśli $f \in \mathcal{R}$ jest pierwotną dla $\varphi \in \mathcal{R}$, to $\widehat{\varphi}(k) = ik \cdot \widehat{f}(k)$ (szereg Fouriera dla f można różniczkować wyraz po wyrazie). Szereg Fouriera p.w. ciągle różniczkowalnej $f \in \mathcal{R}$ zbiega do niej normalnie na $\mathbb{R}$; zaś przedziałami ciągle różniczkowalnej – jednostajnie, ale tylko na przedziałach $[a,b]$ bez punktów nieciągłości f. **Fenomen Gibbsa**: jeżeli $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest przedziałami ciągła i $f(x_0^+) - f(x_0^-) = a \neq 0$, to $\lim_{n\to\infty} S_n f(x_0 \pm \pi : n) = f(x_0^\pm) \pm a \cdot 0.0894898722360836351160144229\ldots$ (przy założeniu, że f jest nadal 2π okresowa). **16.6**

Ciąg regałów f_n na przedziale $[a,b]$ zbiega **w średniej kwadratowej** do regału f, jeśli $\|f_n - f\|_2 \to 0$. Nie pociąga zbieżności punktowej (przez układ Haara), ale jest pociągane przez jednostajną. Wielomiany Fouriera $S_n f$ zbiegają na $[-\pi,\pi]$ do f w średniej kwadratowej, gdy $f \in \mathcal{R}$. Równoważna z tym jest **równość Parsevala** (khm-1), która uogólnia się do khm-2. „Problem izoperymetryczny”. **16.7** **16.8**

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(n)|^2 \Leftrightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(x)|^2}{\pi}\,\mathrm{d}x = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(|a_k|^2 + |b_k|^2) \bullet \langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)\overline{g(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\overline{\widehat{g}(n)}$$

Funkcja $\vartheta(x,t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\pi n^2 t)\cos(2\pi n x)$ opisuje przewodnictwo cieplne: $u_{xx} = 4\pi u_t$ i spełnia $t^{1/2}\vartheta(0,t) = \vartheta(0,t^{-1})$. **16.9**

Analogonem ciągu współczynników Fouriera dla nieokresowej $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jest **transformata Fouriera** (khm-1). **Sumacyjny wzór Poissona**: jeśli f jest ciągła i spełnia razem ze swoją transformatą warunek ucichania (khm-2, $x \neq 0$, $\varepsilon > 0$), to dla $t > 0$, $t\widehat{t} = 2\pi$, mamy khm-3. Inaczej: jedyny unitarny „intertwiner” dla symplektycznej i euklidesowej reprezentacji Schrödingera grupy Heisenberga to transformata Fouriera. **16.10**

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-ixt)\,\mathrm{d}t \bullet |f(x)| \le \frac{c}{|x|^{1+\varepsilon}} \bullet t^{1/2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(nt) = \hat{t}^{1/2}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{f}(k\hat{t})$$

Punktowa granica $G\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funkcji $G_n(z)$ jest ciągła i ma zera w $-n$ ($n \in \mathbb{N}_0$). Dla $k \in \mathbb{N}$, $z \neq 0$ jest $zG(z+1) = G(z)$, $(k-1)!G(k) = 1$. **Funkcja Gamma**, $\Gamma(z) = 1 : G(z)$ (poza zerami), spełnia **prawo uzupełnień**: $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \pi/\sin(\pi x)$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$) i jest **logarytmicznie wypukła** na $(0,\infty)$ (ma wypukły logarytm). **Tw. Bohra-Mollerupa** (1922): jeśli logarytmicznie wypukła $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}_+$ spełnia $F(1) = 1$, $F(x+1) = xF(x)$, to $F \equiv \Gamma$. Khm-2: całkowe przedstawienie Eulera, $x > 0$. Khm-4: prawo **podwajania Legendre'a**, $x > 0$. **Wzór Stirlinga** dla $x > 0$ oraz $0 < 12\mu(x)x < 1$: khm-3. Funkcja beta: $\Gamma(x)\Gamma(y) : \Gamma(x+y)$, całka („d$t$”) z $t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ nad $[0,1]$, pojawia się w stochastyce. **17.1** **17.2** **17.3**

$$G_n(z) = \frac{z^{\overline{n+1}}}{n!n^z} \bullet \Gamma(x+1) = \int_0^\infty \frac{t^x}{e^t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi x}\cdot\frac{x^x}{e^x}\left(1 + \frac{n^{-1}}{12} + \frac{n^{-2}}{288} - \frac{139n^{-3}}{51840} - \ldots\right) \bullet \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(2x)}\Gamma(x+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}}$$

Malejący ciąg $\gamma_n = H_n - \ln n$ zbiega do **stałej Eulera-Mascheroniego**. Alternatywne definicje: $\lim_{z\to 0} 1/z - \Gamma(z)$ albo poniższe. Formuła khm-4 to specjalny przypadek wzoru Hadjicostasy.

$$\gamma = \sum_{m=2}^{\infty}\frac{\zeta(m)}{(-1)^m\cdot m} = \ln\frac{4}{\pi} + 2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{\zeta(m)}{(-2)^m m} = -\int_0^\infty e^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x = \int_0^1\int_0^1 \frac{x-1}{(1-xy)\log xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$