Домашняя работа №2.

I. Найдите решение задач на условный экстремум с ограничениями типа равенств.

1. $x_1^2 + 12x_1x_2 + 2x_2^2 \to extr, 4x_1^2 + x_2^2 = 25.$
2. $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to extr,\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$
3. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \to extr, x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1 + x_2 - x_3 = \frac{1}{2}.$
4. $x_1 + x_2 + x_3 \to extr, x_1 + x_2 - x_3 = 1, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1.$
5. $x_2(x_1 + x_3) \to extr, x_1^2 + x_2^2 = 2, x_2 + x_3 = 2.$
6. Найти расстояние от точки $\hat{x} \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$, до прямой $x = at + b$, где $a, b \in \mathbb{R}^n$.

II. С использованием метода скорейшего спуска найдите минимумы следующих функций:

1) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - 4x_2 + 5$
2) $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 - 2x_2$
3) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - x_1 + 2x_3$
4) $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 + x_1 - 2x_3$
5) $f(y) = (Ay, y) - 2(f, y)$, где $y, f \in \mathbb{R}^6$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

6) $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 0.2x_1x_2 - 2.2x_1 + 2.2x_2 + 2.2$
7) $f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 4.075x_2^2 - 9x_1x_2 + x_1 + 2$
8) $f(X) = (x_1 + 10x_2)^2 + 5(x_3 - x_4 + 2k)^2 + (x_2 - 2x_3)^4 + 100(x_1 - x_4 + 11k)^4, X \in \mathbb{R}^4, k -$ фиксированный параметр.

При демонстрации работы вашего приложения для каждой минимизируемой функции предоставьте возможность вывода текущего приближения, значения функции в текущей точке и число итераций для заданной точности $\varepsilon_n = 10^{-n}$, где $n = 2, 3, 4, 5, 10, 12, 15$. Предусмотрите возможности демонстрации вашего решения для различных начальных значений. Для вектора $X \in \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ в качестве норм используйте следующие:

$$\|X\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|, \qquad \|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \qquad \|X\|_{2l} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{2l} \right)^{\frac{1}{2l}}.$$