

# 《人工智能引论》课后练习-2

内容: 逻辑与搜索 提交时间: 2024-03-18 姓名: \_\_\_\_\_ 学号: \_\_\_\_\_

## 1. 图着色问题 (20 分)

我们课堂上讲的地图着色问题, 其实更普遍被成为图着色问题。

我们总共有  $K$  中颜色, 现在需要给图的每一个节点分配一种颜色, 如果任意两个相邻节点不是相同的颜色, 则该图是可  $K$  着色的。图  $K$  着色问题是一个经典的 NP-Complete 问题, 具有许多实际应用, 例如编译器的寄存器分配, 课程安排, 课上讲的  $N$  皇后其实也是一种图  $K$  着色问题。在该问题中, 你将开发用于图着色的合取范式 (conjunctive normal form, CNF)。

假设该图  $G = \langle V, E \rangle$  有  $|V|$  个节点和  $|E|$  边, 我们用变量  $color_{ik}$  表示第  $i$  节点是否是颜色  $k$ , 我们用变量  $neighbor_{ij}$  表示第  $i$  节点和第  $j$  节点是否有边相连。

- (a) (5 分) 请用命题逻辑表示约束每一个节点都着色了。
- (b) (5 分) 请用命题逻辑表示约束每一个节点最多只被一种颜色着色了。
- (c) (5 分) 请用命题逻辑表示约束任意相邻的两个节点的颜色不一样。
- (d) (5 分) 请将所有前面的约束合起来, 并用 CNF 的形式表示。

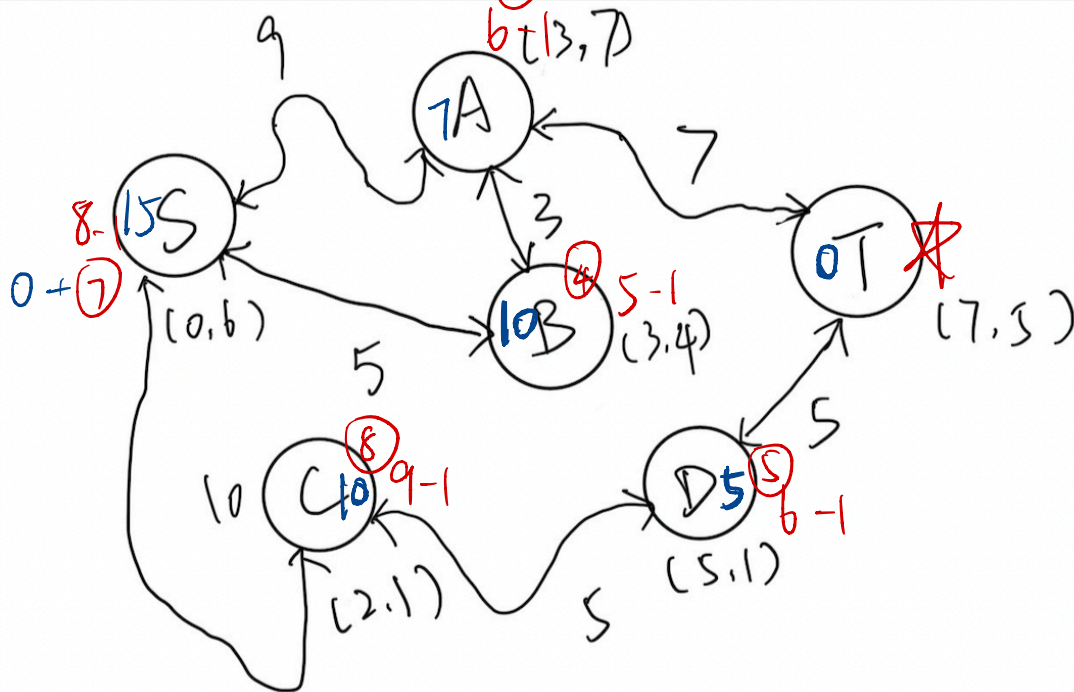
$$(a) (color_{11} \vee color_{12} \vee \dots \vee color_{1k}) \wedge (color_{21} \vee color_{22} \vee \dots \vee color_{2k}) \wedge \dots \wedge (color_{|V|1} \vee color_{|V|2} \vee \dots \vee color_{|V|k})$$
$$= \bigwedge_{i=1}^{|V|} \left( \bigvee_{j=1}^k color_{ij} \right)$$

$$(b) \bigwedge_{i=1}^{|V|} \bigwedge_{j=1}^{k-1} \bigwedge_{s=j+1}^k (color_{ij} \wedge \neg color_{is}) = \bigwedge_{i=1}^{|V|} \bigwedge_{j=1}^{k-1} \bigwedge_{s=j+1}^k (\neg color_{ij} \vee \neg color_{is})$$

$$(c) \bigwedge_{i=1}^{|V|-1} \bigwedge_{j=i+1}^{|V|} (\neg neighbor_{ij} \vee \left( \bigwedge_{s=1}^k (\neg color_{is} \vee color_{js}) \right))$$
$$= \bigwedge_{i=1}^{|V|-1} \bigwedge_{j=i+1}^{|V|} \bigwedge_{s=1}^k (\neg neighbor_{ij} \vee \neg color_{is} \vee color_{js})$$

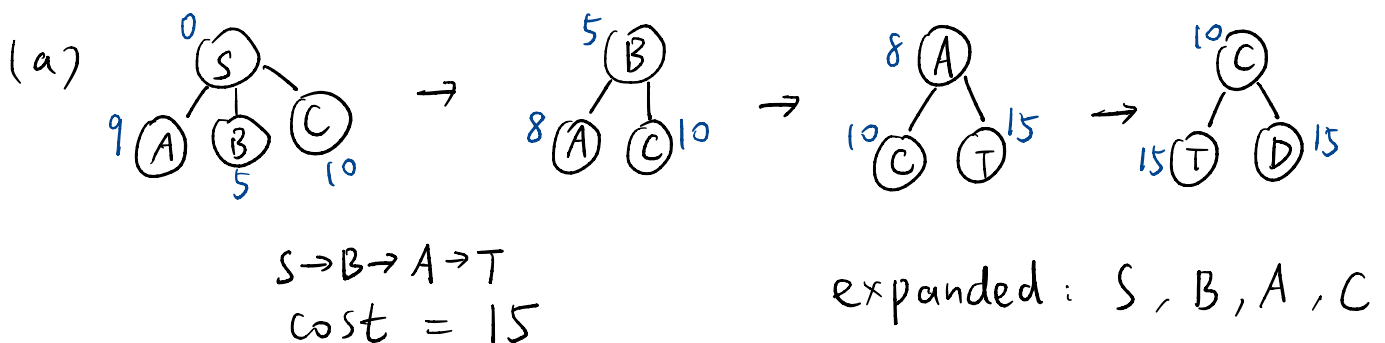
$$(d) \bigwedge_{i=1}^{|V|} \left( \bigvee_{j=1}^k color_{ij} \right) \wedge \bigwedge_{i=1}^{|V|} \bigwedge_{j=1}^{k-1} \bigwedge_{s=j+1}^k (\neg color_{ij} \vee \neg color_{is}) \wedge \bigwedge_{i=1}^{|V|-1} \bigwedge_{j=i+1}^{|V|} \bigwedge_{s=1}^k (\neg neighbor_{ij} \vee \neg color_{is} \vee color_{js})$$

## 2. 最短路径: UCS (30 分) (5)



图中节点旁边的括号表示其坐标，边上的数字表示两个节点之间路径的成本。

- (a) (20 分) 使用 UCS 算出 S 到 T 的最短路径及其代价。请用画出优先队列 (以树的形式) 在每时刻的状态，并给出离开优先队列节点的顺序。
- (b) (10 分) 请给出一个可以保证 A\* 搜索最优的启发函数 (heuristic)，并简要说明为什么这个启发函数可以保证最优。



(b)  $h(x, y) = |x - 7| + |y - 5| - 1$

admissible:  $0 \leq h(x, y) \leq h^*(x, y)$

consistent:  $h(x, y) - h(x_1, y_1) \leq \text{cost}((x, y) \rightarrow (x_1, y_1))$

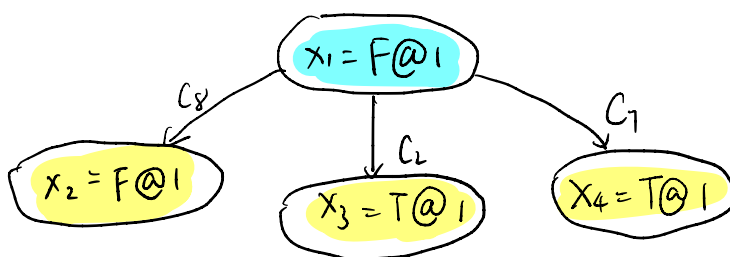
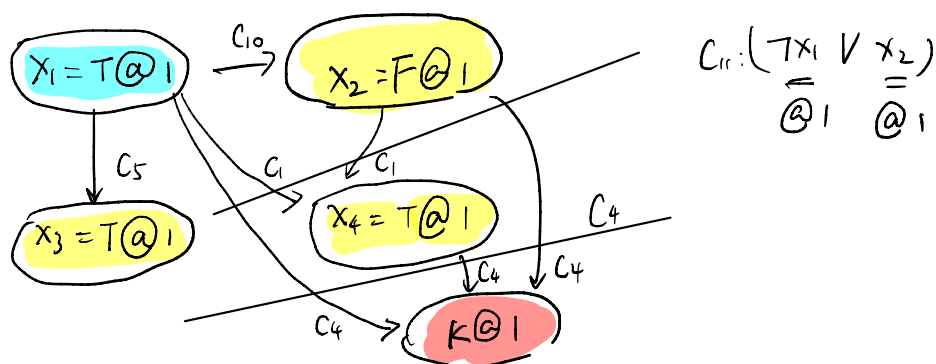
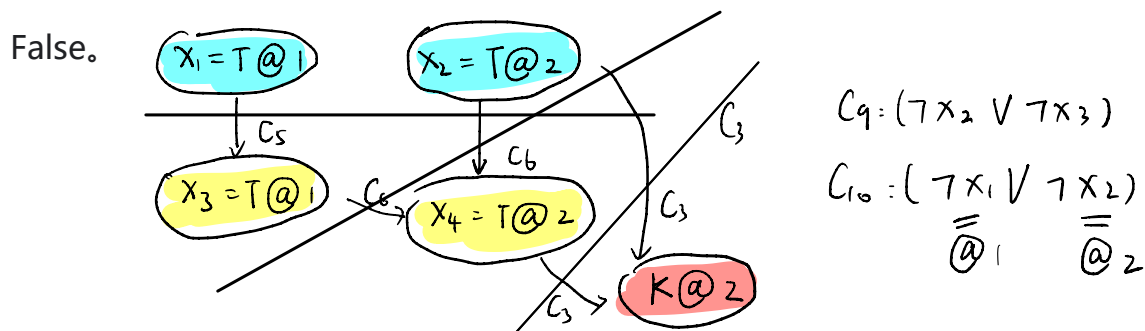
### 3. SAT 问题: CDCL (25 分)

考虑如下 CNF:

- $c_1: (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4)$
- $c_2: (x_1 \vee x_3)$
- $c_3: (\neg x_4 \vee \neg x_2)$
- $c_4: (\neg x_4 \vee \neg x_1 \vee x_2)$
- $c_5: (x_3 \vee \neg x_1)$
- $c_6: (\neg x_3 \vee \neg x_2 \vee x_4)$
- $c_7: (x_1 \vee x_4)$
- $c_8: (\neg x_2 \vee x_1)$

使用 CDCL 算法, 并画出隐含图 (implication graph), 当有矛盾 (conflict) 的时候, 必须形成再回溯后就可以 BCP 的子句。学到的新子句以  $c_9, c_{10} \dots$  命名。新子句必须不能和已有的重复当有回溯的时候需要附上新的隐含图。并给出最后使 CNF 满足的变量赋值。

注意: 深搜时必须以  $x_1, x_2 \dots$  的顺序考虑变量, 每个变量的取值必须先 True 后 False。



$x_1 = \text{False}$  ,  $x_2 = \text{False}$  ,  $x_3 = \text{True}$  ,  $x_4 = \text{True}$

#### 4. Alpha Beta 搜索 (25 分)

请对以下搜索树进行 alpha beta 剪枝，可以直接在图中画出过程。上三角表示 max 节点，下三角表示 min 节点。要求详细记录每一个三角节点的值。

